

## کاربرد مدل اسپلاین آماری در حل برخی مسائل معکوس سهموی با منبع مجهول

امیر حسین صالحی شایگان، علی ذاکری\*

گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

### چکیده

مسائل معکوس سهموی از بارزترین مسائل بدووضع در علوم کاربردی هستند. با توجه به تعریف مسئله بدووضع، استفاده از روش‌های عددی پایدار برای حل این دسته از مسائل، منجر به بروز خطا با اندازه‌های بسیار بزرگی در جواب خروجی می‌شود. در این مقاله، مسئله تعیین عبارت منبع مجهول  $g = g(t)$  در مسئله معکوس سهموی با معادله

$$\partial_t T(x, t) = \kappa \nabla^2 T(x, t) + g(t) \delta(x - x^*), \quad x \in (a, 1)^d, \quad t \in (0, t_f),$$

$$T(x_{\text{measure}}, t_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

به همراه شرط فوق اضافی  $d = 1, 2$ ،  $\delta$  تابع دلتای دیراک و  $(T, g)$  توابع مجهول بوده و باید تعیین شود. در این مقاله، با استفاده از مدل اسپلاین آماری و به‌کارگیری روش منظم سازی لوبنرگ-مارکوارت، تقریبی از شبه جواب  $g$  محاسبه می‌شود. در پایان، چند نمونه عددی ارائه و با استفاده از روش موردنظر نتایج عددی استخراج می‌شود. نتایج عددی، کارایی روش ارائه‌شده را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: مدل اسپلاین آماری، مسئله معکوس سهموی منبع مجهول.

پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۱۱

اصلاح: ۱۳۹۷/۴/۲۵

دریافت: ۱۳۹۷/۱/۸

### ۱- مقدمه

مدل‌سازی ریاضی یک مسئله معکوس با جمله منبع گرمایی مجهول در گرایش‌های گوناگونی از قبیل فیزیک و مهندسی، هیدرولوژی، علوم مواد، مسائل انتقال گرما، حمل‌ونقل و نظایر آن ظاهر می‌شود (بیر، ۱۹۷۲؛ ریناردی و نوهل، ۱۹۸۷؛ کلیولند، ۱۹۹۶؛ بک و همکاران، ۱۹۸۵؛ واسیل اف، ۱۹۸۱). در سال‌های اخیر، مسائل معکوس، موضوع بسیاری از مقالات قرارگرفته و روش‌های حل بسیاری برای این دسته از معادلات ارائه‌شده است. از میان این روش‌ها می‌توان به روش ترتیبی (شیدفر و همکاران، ۲۰۰۵)، سینک-کالوکیشن (شیدفر و همکاران، ۲۰۰۹)، عناصر مرزی (اوی و اوناکا، ۱۹۹۴)، عناصر متناهی (هوتالا و همکاران، ۲۰۱۴)، منظم سازی فوریه (یانگ و فو، ۲۰۱۰) و روش مولفیکیشن (ژا و لیو، ۲۰۱۵) اشاره کرد؛ اما تاکنون روش‌های عددی کمی برای حل تقریبی مسائل معکوس با منبع مجهول ارائه‌شده است. در کنار روش‌های عددی، حسن اف (۲۰۰۷) وجود شبه جواب این دسته از مسائل را بررسی و با ارائه برخی شرایط موردنیاز، قضایای وجود شبه جواب این دسته از معادلات را مطرح و سپس اثبات کرده است.

در این مقاله، مسئله تعیین منبع گرمایی مجهول  $g = g(t)$  در مسئله معکوس سهموی به صورت

$$\begin{aligned} \partial_t T(x, t) &= \kappa \nabla^2 T(x, t) + g(t) \delta(x - x^*), & x \in (a, 1)^d, \quad t \in (0, t_f), \\ T(x, 0) &= f(x), & x \in (a, 1)^d, \\ \partial_n T(x, t) &= F(x, t), & x \in \partial(a, 1)^d, \end{aligned} \quad (1)$$

$$T(x_{\text{measure}}, t_i) = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن  $(T, g)$  توابع مجهول بوده که باید در دامنه تعریف خود تعیین شود. در این مسئله،  $K$  و  $t_f$  اعداد ثابت مثبت معلوم،  $\bar{n}$ ، بردار یکه نرمال برونسوی  $\partial[0, 1]^d$  و  $x_{\text{measure}}, x^* \in [0, 1]^d$ ، اعداد ثابت داده‌شده به شرط  $x_{\text{measure}} \neq x^*$  هستند.

در صورتی که عبارت منبع  $g = g(t)$  یک تابع معلوم باشد، مسئله (۱) را یک مسئله مستقیم می‌نامیم، در غیر این صورت، مسئله (۱) به همراه شرط فوق اضافی (۲) یک مسئله معکوس نامیده می‌شود. فرض کنید جواب مسئله مستقیم با نماد  $T(x, t; g)$  نشان داده شود؛ آنگاه برای تعیین منبع مجهول با استفاده از شرط فوق اضافی مسئله، لازم است معادله زیر حل شود:

$$T(x_{\text{measure}}, t_i; g) = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (3)$$

در حالت کلی، حل چنین مسئله‌ای به روش‌های تحلیلی و به‌طور دقیق امکان‌پذیر نیست (حسن‌اف، ۲۰۰۷). در چنین حالتی به جای حل معادله، معمولاً شبه جواب آن را با حل مسئله کمینه‌سازی زیر به دست آمده می‌آورند:

$$S(g^*) = \min_{g \in \mathfrak{S}} \sum_{i=1}^I (T(x_{\text{measure}}, t_i; g) - Y_i)^2 \quad (4)$$

که در آن  $\mathfrak{S} \subseteq L_f(0, t_f)$  مجموعه جواب‌های قابل قبول است (تیکونوف و آرزنین، ۱۹۷۷). اگر  $S(g^*) = 0$ ، آنگاه شبه جواب  $g^* \in \mathfrak{S}$  یک جواب دقیق مسئله (۱) و (۲) است؛ زیرا در این صورت در معادله (۳) نیز صدق می‌کند.

به منظور تقریب شبه جواب (۴)، یک روش عملی آن است که تابع  $g = g(t)$  با ترکیب خطی زیر تقریب زده شود:

$$g(t) \cong \sum_{i=1}^n c_i B_i(t) \quad (5)$$

که در آن  $B_i$ ، به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$  توابع پایه‌ای و  $c_i$  ضرایب مجهول هستند. برای یافتن ضرایب مجهول، تابع (۴) نسبت به این ضرایب کمینه می‌شود. از آنجایی که دستگاه معادلات به دست آمده از اعمال تقریب فوق بدو وضع است، برای تعیین جواب‌های پایدار از روش‌های منظم سازی استفاده می‌شود. در این مقاله، برای تقریب تابع  $g = g(t)$ ، به جای (۵) از مدل اسپلاین آماری استفاده می‌شود. در این مدل برای تقریب تابع مجهول از روش درون‌یابی استفاده می‌شود. یکی از مهم‌ترین موضوع‌های مطرح در درون‌یابی، چگونگی انتخاب نقاط گرهی است که به واسطه آن تقریب مناسبی حاصل شود. در مدل اسپلاین آماری علاوه بر ارائه نگرشی جدید نسبت به تابع اسپلاین، با ساخت یک فضای احتمال سعی در یافتن نقاط گرهی داریم که تا حد امکان خطای حاصل از درون‌یابی کاسته شده و در نهایت بهترین تقریب حاصل شود. از آنجایی که در بحث بهترین تقریب، مهم‌ترین مسئله، برگزیدن نرم فضا است و این که بهترین تقریب در چه فضایی مدنظر است؛ لذا در این مقاله سه فضای معروف  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_\infty$  در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از مدل معرفی شده، نقاط گرهی و بازه‌هایی تعیین می‌شوند که تقریب ارائه شده بهترین تقریب را در این فضاها ارائه دهد (مسجد جامعی، ۲۰۰۹). همچنین، به منظور کاهش اثر بدو وضعی جواب مسئله، از روش منظم سازی لوبنبرگ-مارکوارت استفاده می‌شود. این روش معمولاً برای حل مسائل کمترین مربعات غیرخطی به کار می‌رود و در مسائل خطی که به شدت بدو وضع هستند کارایی بسیاری دارد (کلی، ۱۹۹۹؛ هنک، ۲۰۱۰). در این مقاله، به دو علت زیر از روش منظم سازی لوبنبرگ-مارکوارت استفاده شده است:

- این روش منظم سازی ماتریس حساسیت را که نقشی تعیین‌کننده در روش‌های منظم سازی دارد، با ارائه راه‌حلی تعیین می‌کند.
- یکی از مشکلات اصلی روش‌های منظم سازی، تعیین پارامتر منظم ساز است. در این روش منظم سازی پس از یک انتخاب دلخواه اولیه برای پارامتر منظم ساز (که معمولاً توصیه می‌شود  $10^{-3}$  یا  $10^{-4}$  در نظر گرفته شود) در هر مرحله از تکرارها به‌طور خودکار مناسب‌ترین پارامتر منظم ساز انتخاب می‌شود و این، یکی از مزیت‌های اصلی این روش است (به مرحله ۶ و ۷ این روش منظم سازی توجه کنید).

در بخش ۲، مدل اسپلاین آماری با استفاده از نمادگذاری بکار رفته در (مسجد جامعی، ۲۰۰۹) به‌طور مختصر معرفی می‌شود، سپس در بخش ۳، یک الگوریتم محاسباتی برای حل مسئله معکوس سهموی (۱) و (۲) بر مبنای مدل اسپلاین آماری پیشنهاد می‌گردد.



در این الگوریتم، ماتریس حساسیت محاسبه و به منظور یافتن جواب‌های عددی پایدار، روش منظم سازی لونیگ-مارکوارت به کار گرفته می‌شود. در پایان، چند مثال عددی به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده در بخش ۴ ارائه می‌شود.

## ۲- مدل اسپلاین آماری

فرض کنید به ازای  $p_{n_i}(x)$  یک چندجمله‌ای از درجه  $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ،  $i = 1, 2, \dots, m$  و  $n = \max\{n_i\}_{i=1}^m$  و  $\{I_i\}_{i=1}^m$  یک افراز دلخواه از  $[a, b]$  باشد. یک تابع اسپلاین در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_{n,m}(f; x) = \begin{cases} p_{n_1}(x) & x \in I_1 \\ p_{n_2}(x) & x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_{n_m}(x) & x \in I_m. \end{cases}$$

در تابع اسپلاین معمولی، ابتدا  $\{I_i\}_{i=1}^m$  انتخاب شده و سپس ضرایب چندجمله‌ای در هر ضابطه با استفاده شرایط اولیه مسئله و خواص پیوستگی و هموار بودن تابع اسپلاین تعیین می‌شود؛ علاوه بر این نوع دیگری از تابع اسپلاین وجود دارد که در آن با در نظر گرفتن  $\{p_{n_i}\}_{i=1}^m$  به عنوان چندجمله‌ای‌های معلوم، افراز مجهول  $\{I_i\}_{i=1}^m$  در یک فرآیند خاص که در ادامه بیان می‌شود تعیین می‌گردد. از آنجایی که مجموعه  $D = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$  یک افراز خاص از  $[a, b]$  با شرایط  $I_i \cap I_j = \emptyset$ ،  $i \neq j$ ،  $i, j = 1, 2, \dots, m$  و  $\bigcup_{j=1}^m I_j = [a, b]$  است؛ بنابراین  $D$  را می‌توان به عنوان یک فضای احتمال در نظر گرفت به گونه‌ای که احتمال هر زیر بازه  $I_j$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(I_j) = \frac{\ell(I_j)}{\ell([a, b])} = \frac{\ell(I_j)}{b - a} \quad (6)$$

که در آن  $\ell$  نمایش طول زیربازه  $I_j$  است. به این نوع اسپلاین، مدل اسپلاین آماری گفته می‌شود (مسجد جامعی، ۲۰۰۹). در ادامه به اختصار نحوه ساخت مدل اسپلاین آماری را بیان کرده و مفاهیم آماری بیشتری را بر پایه‌ی این مدل ارائه می‌کنیم.

بدون این‌که از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنید  $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ . اینک فرض کنید  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ، بدون این‌که از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنید  $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ . اینک فرض کنید  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  نقطه‌ی متمایز از  $[a, b]$  می‌باشد. چندجمله‌ای‌های لاگرانژ زیر را در نظر بگیرید:

$$L_i(x; x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

با توجه به [۲] برای هر تابع  $f \in C^{n+1}[a, b]$  داریم:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x; x_i) + E_{n+1}(f; x; \{x_i\}) \quad (7)$$

که در آن جمله‌ی اول سمت راست تساوی (۷) درون‌یابی لاگرانژ نامیده شده و جمله خطای درون‌یابی،  $E_{n+1}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{n+1}(f; x; \{x_i\}) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad a < \xi_x < b$$

یک کران بالای اندازه‌ی خطای درون‌یابی لاگرانژ عبارت است از

$$|E_{n+1}(f; x; \{x_i\})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n |x - x_j|$$



که در آن  $M_{n+1}$ ، یک کران بالا برای  $|f^{(n+1)}(x)|$  در بازه  $[a, b]$  است. تعریف می‌کنیم:

$$E_{n+1}^*(f; x; \{x_i\}) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n |x - x_j| \quad (۸)$$

مشاهده می‌شود، کران خطای تعریف‌شده در (۸) به دو پارامتر بستگی دارد: اول  $M_{n+1}$  و دوم  $\prod_{j=0}^n |x - x_j|$ . پارامتر اول مستقیماً به تابع  $f$  و بازه  $[a, b]$  وابسته بوده و به روشنی غیرقابل کنترل است؛ اما پارامتر دوم، یک چندجمله‌ای از درجه  $n+1$  است که تنها به نقاط  $\{x_i\}_{i=0}^n$  بستگی دارد؛ بنابراین کمینه کردن کران خطا تنها به توزیع نقاط بستگی دارد. اکنون این سوال مطرح است که بهترین انتخاب برای نقاط  $\{x_i\}_{i=0}^n$  چگونه باشد تا  $\prod_{j=0}^n |x - x_j|$  به قدر کافی کوچک شود. مدل اسپلاین آماری از درجه  $n$  یکی از جواب‌های این سوال است.

برای ساخت این مدل،  $k$  چندجمله‌ای از درجه  $n+1$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\bar{q}_{n+1,i}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_{j,i}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

که در آن  $\{x_{0,i}, x_{1,i}, \dots, x_{n,i}\}$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, k$ ،  $n+1$  نقطه‌ی متمایز در بازه  $[a, b]$  می‌باشد. قرار دهید:

$$I_{n,i,j} := \left\{ x \in [a, b] : |\bar{q}_{n+1,i}(x)| < |\bar{q}_{n+1,j}(x)|, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j \right\}$$

اکنون متناظر با چندجمله‌ای‌های  $\bar{q}_{n+1,i}(x)$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, k$ ، زیر بازه‌های  $I_{n,i,j}$  را تعریف می‌کنیم. این تعریف منجر به افراز منحصر به فرد  $D = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$  به ازای بازه  $[a, b]$  خواهد شد. با تشکیل افراز  $D$  مدل اسپلاین آماری با  $k$  ضابطه به صورت زیر به دست آمده می‌آید:

$$S_{n,k}(f; x) = \begin{cases} p_{n,1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_{j,1}) L_j(x; x_{j,1}) & x \in I_{n,1} \\ p_{n,2}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_{j,2}) L_j(x; x_{j,2}) & x \in I_{n,2} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_{j,k}) L_j(x; x_{j,k}) & x \in I_{n,k} \end{cases} \quad (۹)$$

درواقع ساختار افراز  $D$  برای بازه‌ی اصلی  $[a, b]$  به گونه‌ای است که خطای هر ضابطه در افراز متناظرش کمینه باشد.

اینک با در نظر گرفتن یک حالت ویژه از مدل اسپلاین آماری و نمایش چگونگی پیاده‌سازی این فرآیند، فرض کنید  $k = 3$  و  $[a, b] = [-1, 1]$ . در این حالت چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم و همچنین چندجمله‌ای تکین لژاندر را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که می‌دانیم چندجمله‌ای‌های چبیشف از نوع اول و دوم از درجه  $n$  به ترتیب با ضابطه‌های

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-[n/2]_k (1/2 - [(n+1)/2]_k)}{(-n+1)_k k!} x^{n-2k}$$

و

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = 2^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-[n/2]_k (1/2 - [(n+1)/2]_k)}{(-n)_k k!} x^{n-2k}$$

چندجمله‌ای تکین لژاندر درجه  $n$  با فرمول



$$\bar{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/\tau \rfloor} \frac{(-[n/\tau]_k (\nu/\tau - [(n+1)/\tau]_k)}{(-n+1/\tau)_k k!} x^{n-\tau k}$$

نمایش داده می‌شوند که در آن، نماد  $(a)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (a+i)$  تعریف می‌شود. با استناد به [۱۷، ۱۸، ۱۹]، چندجمله‌ای‌های بالا، بهترین انتخاب برای نقاط  $\{x_i\}_{i=0}^n$  به ترتیب در فضاها  $L_\infty$ ،  $L_1$  و  $L_\tau$  می‌باشد؛ بنابراین برای ساخت مدل اسپلاین آماری از درجه  $n$ ، قرار دهید:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{n+1,1}(x) &= \tau^{-(n+1)} T_{n+1}(x) \\ \bar{q}_{n+1,2}(x) &= \bar{P}_{n+1}(x) \\ \bar{q}_{n+1,3}(x) &= \tau^{-n} U_{n+1}(x) \end{aligned}$$

و

$$\{x_{j,l}\}_{j=0}^n = \{t \in [-1,1] \mid \bar{q}_{n+1,l}(t) = 0\}, \quad l = 1, 2, 3 \quad (10)$$

برای تشکیل افزاز  $D = \{I_{n,1}, I_{n,2}, I_{n,3}\}$  لازم است نامساوی‌های زیر حل شوند:

$$\begin{cases} |\bar{q}_{n+1,3}(x)| \leq |\bar{q}_{n+1,1}(x)| & x \in \alpha_n \subset [-1,1] \\ |\bar{q}_{n+1,2}(x)| \leq |\bar{q}_{n+1,1}(x)| & x \in \beta_n \subset [-1,1] \\ |\bar{q}_{n+1,2}(x)| \leq |\bar{q}_{n+1,3}(x)| & x \in \gamma_n \subset [-1,1] \end{cases}$$

یک روش عددی برای حل تقریبی نامساوی‌های فوق به ازای  $n = 0, 1, \dots, 6$ ، در (مسجد جامعی، ۲۰۰۹) ارائه شده است؛ در نتیجه مدل اسپلاین آماری به صورت زیر خواهد بود:

$$S_{n,\tau}(x) = \begin{cases} p_{n,1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_{i,1}) L_i(x; x_{i,1}) & x \in I_{n,1} = \alpha'_n \cap \gamma'_n \\ p_{n,2}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_{i,2}) L_i(x; x_{i,2}) & x \in I_{n,2} = \beta'_n \cap \gamma_n \\ p_{n,3}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_{i,3}) L_i(x; x_{i,3}) & x \in I_{n,3} = \alpha_n \cap \beta_n \end{cases} \quad (11)$$

که در آن به عنوان نمونه  $\alpha'_n = [-1,1] - \alpha_n$  است.

نکته ۱- بازه  $[-1,1]$  را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر  $x = \frac{b-a}{\tau}t + \frac{b+a}{\tau}$  به بازه دلخواه  $[a,b]$  تبدیل کرد؛ در نتیجه افزاز  $\{I_{n,1}, I_{n,2}, I_{n,3}\}$  و همچنین مجموعه نقاط  $\{x_{j,l}\}_{j=0}^n$ ،  $l = 1, 2, 3$  را نیز می‌توان با استفاده از این تبدیل بروی  $[a,b]$  تعریف کرد. با استفاده از (۶)، مفاهیم آماری مرتبط با آن را در نکته بعد بیان خواهیم کرد.

نکته ۲- طبق (مسجد جامعی، ۲۰۰۹)، امیدریاضی، گشتاور مرتبه  $i$  در همسایگی چندجمله‌ای دلخواه  $p(x)$  و واریانس مدل اسپلاین آماری (۷) به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} E(S_{n,k}(f;x)) &= \sum_{j=1}^k p_{n,j}(x) P_r(I_{n,j}) \\ \mu_i(S_{n,k}(f;x); p(x)) &= \sum_{j=1}^k (p_{n,j}(x) - p(x))^i P_r(I_{n,j}) \\ \text{var}(S_{n,k}(f;x)) &= \mu_2(S_{n,k}(f;x); \cdot) - E^\tau(S_{n,k}(f;x)) \end{aligned}$$



در بخش بعد یک الگوریتم محاسباتی مبتنی بر مدل اسپلاین آماری و روش منظم سازی لونیگ-مارکواریت برای یافتن شبه جواب  $g = g(t)$  در مسئله منبع مجهول (۱) و (۲) ارائه می‌شود.

### ۳- نتایج اصلی

الگوریتم تعیین تقریبی، از شبه جواب منبع گرمایی مجهول  $g = g(t)$  به شکل زیر ارائه می‌شود.

الگوریتم: تعیین تقریبی از شبه جواب منبع گرمایی  $g$

گام ۱- با استفاده از جواب‌های بنیادین، جواب مسئله مستقیم را به ازای  $d = 1, 2$  و  $\kappa = 1$  به دست آمده آورید. برای این منظور از قضیه زیر که در (کانن، ۱۹۸۴) بیان شده است، استفاده کنید.

قضیه ۱- مسئله

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, t_f) \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) &= g(t), \quad t \in (0, t_f) \\ u_x(1, t) &= h(t), \quad t \in (0, t_f) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن  $f, \phi, g, h$  در شرط  $A$  صدق می‌کند و دارای یک جواب منحصر به فرد و کران‌دار

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^1 (\theta(x - \xi, t) + \theta(x + \xi, t)) \phi(\xi) d\xi - \nu \int_0^t \theta(x, t - \tau) g(\tau) d\tau \\ &+ \nu \int_0^t \theta(x - 1, t - \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 (\theta(x - \xi, t - \tau) + \theta(x + \xi, t - \tau)) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

است که در آن تابع  $\theta(x, t)$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\theta(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k(x + \nu m, t),$$

و

$$k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

شرط  $A$ : فرض کنید عبارت منبع  $f(x, t)$  بر دامنه مورد مطالعه، کران‌دار و در هر زیر بازه فشرده از آن به طور یکنواخت پیوسته هولدر باشد. همچنین، فرض کنید توابع  $\phi, g, h$  در دامنه‌ی تعریف خویش به صورت تکه‌ای پیوسته باشد.

اثبات: بخش ۲-۱۹ و قضیه ۱-۳-۶ (کانن، ۱۹۸۴).

نکته ۳- در حالت کلی، جواب بنیادین مسئله انتقال گرمای  $-n$  متغیره در دامنه  $[0, 1]^n$  به صورت حاصل ضرب جواب‌های بنیادین مسئله انتقال گرما نسبت به هر متغیر در فضای یک بعدی است؛ به عنوان نمونه

$$k(\mathbf{x}, t) = k(x_1, t) k(x_2, t) \dots k(x_n, t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \exp\left(\frac{-\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{4t}\right)$$

اینک فرض کنید مجموعه جواب‌های قابل قبول  $\mathfrak{F}$ ، مجموعه‌ی همه توابع  $g \in L_1(0, t_f)$  است، به گونه‌ای که به طور یکنواخت پیوسته هولدر باشد؛ بنابراین با استفاده از قضیه ۱، در حالت خاص به ازای  $d = 1$ ، مسئله مستقیم و جواب آن به ترتیب به شکل زیر خواهند بود:



$$\begin{aligned}
 T_t(x, t) &= T_{xx}(x, t) + g(t)\delta(x - x^*), \quad x \in (a, b), t \in (0, t_f) \\
 T(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in (a, b) \\
 T_x(a, t) &= u(t), \quad t \in (0, t_f) \\
 T_x(b, t) &= h(t), \quad t \in (0, t_f)
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \int_0^1 (\theta(x - \xi, t) + \theta(x + \xi, t))\phi(\xi) d\xi - \nu \int_0^t \theta(x, t - \tau) u(\tau) d\tau \\
 &+ \nu \int_0^t \theta(x - \lambda, t - \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t (\theta(x - x^*, t - \tau) + \theta(x + x^*, t - \tau)) g(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{15}$$

به طور مشابه به ازای  $d = 2$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 T_t(x, y, t) &= T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t) + g(t)\delta(x - x^*, y - y^*), \quad x, y \in (a, b), t \in (0, t_f), \\
 T(x, y, 0) &= \phi(x, y), \quad x, y \in (a, b), \\
 T_x(a, y, t) &= u_1(y, t), \quad y \in (a, b), t \in (0, t_f), \\
 T_x(b, y, t) &= h_1(y, t), \quad y \in (a, b), t \in (0, t_f) \\
 T_y(x, a, t) &= u_2(x, t), \quad x \in (a, b), t \in (0, t_f) \\
 T_y(x, b, t) &= h_2(x, t), \quad x \in (a, b), t \in (0, t_f)
 \end{aligned} \tag{16}$$

و

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t) &= \int_0^1 \int_0^1 (\theta(x - \xi, y - \eta, t) + \theta(x + \xi, y + \eta, t))\phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 &- \nu \int_0^1 \int_0^t \theta(x, y - \eta, t - \tau) u_1(\eta, \tau) d\tau d\eta + \nu \int_0^1 \int_0^t \theta(x - \lambda, y - \eta, t - \tau) h_1(\eta, \tau) d\tau d\eta \\
 &- \nu \int_0^1 \int_0^t \theta(x - \xi, y, t - \tau) u_2(\xi, \tau) d\tau d\xi + \nu \int_0^1 \int_0^t \theta(x - \xi, y - \lambda, t - \tau) h_2(\xi, \tau) d\tau d\xi \\
 &+ \int_0^t (\theta(x - x^*, y - y^*, t - \tau) + \theta(x + x^*, y + y^*, t - \tau)) g(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{17}$$

که در آن

$$\theta(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(x + \nu m, y + \nu n, t),$$

$$k(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right)$$

**گام ۲-** در این مرحله با استفاده از مدل اسپلاین آماری که متعلق به مجموعه جواب‌های قابل قبول است، یک تقریب از منبع گرمایی مجهول را به صورت زیر در نظر بگیرد:

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n \bar{g}_{j,1} L_j(t; t_{j,1}) & t \in I_{n,1} \\ \sum_{j=0}^n \bar{g}_{j,2} L_j(t; t_{j,2}) & t \in I_{n,2} \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^n \bar{g}_{j,k} L_j(t; t_{j,k}) & t \in I_{n,k} \end{cases} \tag{18}$$



که در آن  $\bar{g}_{j,i}$  به ازای  $i=1,2,\dots,k$  و  $j=0,1,\dots,n$  ضرایب مجهول بوده که باید تعیین شوند. شایان‌ذکر است که  $\{I_{n,1}, I_{n,2}, \dots, I_{n,k}\}$  یک افزاز خاص از  $[t_f]$  است و با روشی که در بخش قبل ارائه شد تعیین می‌شود. سپس با جایگذاری در (۱۵) و (۱۷)، یک جواب تقریبی برای مسائل مستقیم (۱۴) و (۱۶) به دست آمده آورید.

**گام ۳-** برای تعیین  $k \times n$  مقدار مجهول  $\bar{g}_{j,i}$  به ازای  $i=1,2,\dots,k$  و  $j=0,1,\dots,n$ ، نرم کمترین مربعات زیر را نسبت به این ضرایب کمینه کنید:

$$S(G) = \sum_{i=1}^I (Y_i - \bar{T}_i(G))^2 \quad (19)$$

که در آن  $Y_i = T(x_{\text{measure}}, t_i)$ ،  $i=1, \dots, I$  شرط فوق اضافی،  $\bar{T}_i = \bar{T}(x_{\text{measure}}, t_i)$ ، جواب تقریبی به دست آمده آمده در گام قبل و  $G$  بردار ضرایب مجهول می‌باشد. از آنجایی که دستگاه معادلات حاصل بدووضع است، به‌ناچار برای تعیین جواب‌های پایدار در این گام از روش منظم سازی استفاده می‌شود. با توجه به اینکه روش منظم سازی لونیگ - مارکوارت برای حل مسائل خطی که به شدت بدووضع می‌باشد، کارایی موثرتری نسبت به روش‌های دیگر منظم سازی دارد، در این مقاله آن را به کار می‌بندیم. توضیح روش منظم سازی در گام بعد ارائه خواهد شد.

**گام ۴-** روش منظم سازی لونیگ - مارکوارت (ازیسیک و ارلند، ۲۰۰۰). فرم ماتریسی تابعی (۱۹) به صورت زیر است:

$$S(G) = [Y - \bar{T}(G)]^T [Y - \bar{T}(G)] \quad (20)$$

که در آن

$$[Y - \bar{T}(G)]^T = [Y_1 - \bar{T}_1, Y_2 - \bar{T}_2, \dots, Y_I - \bar{T}_I]. \quad (21)$$

به منظور کمینه سازی نرم کمترین مربعات خواهیم داشت:

$$\frac{\partial S(G)}{\partial \bar{g}_{1,j}} = \frac{\partial S(G)}{\partial \bar{g}_{2,j}} = \dots = \frac{\partial S(G)}{\partial \bar{g}_{n,j}} = 0, \quad j=1,2,\dots,k$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات خطی فوق عبارت است از:

$$\nabla S(G) = 2 \left[ -\frac{\partial \bar{T}^T(G)}{\partial G} \right] [Y - \bar{T}(G)] = 0$$

که در آن

$$\frac{\partial \bar{T}^T(G)}{\partial G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_{1,1}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{g}_{2,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{g}_{n,k}} \end{bmatrix} [\bar{T}_1 \quad \bar{T}_2 \quad \dots \quad \bar{T}_I]$$

اکنون با توجه به تعریف ماتریس حساسیت در (ازیسیک و ارلند، ۲۰۰۰) خواهیم داشت:





$$J(G) = \left[ \frac{\partial \bar{T}^T(G)}{\partial G} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{g}_{1,1}} & \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{g}_{r,1}} & \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{g}_{r,1}} & \dots & \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{g}_{n,k}} \\ \frac{\partial \bar{T}_r}{\partial \bar{g}_{1,1}} & \frac{\partial \bar{T}_r}{\partial \bar{g}_{r,1}} & \frac{\partial \bar{T}_r}{\partial \bar{g}_{r,1}} & \dots & \frac{\partial \bar{T}_r}{\partial \bar{g}_{n,k}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{g}_{1,1}} & \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{g}_{r,1}} & \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{g}_{r,1}} & \dots & \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{g}_{n,k}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

اینک الگوریتم روش منظم سازی لونبرگ-مارکوارت به صورت زیر ارائه می شود (ازسیک و ارلند، ۲۰۰۰). فرض کنید یک حدس اولیه برای ضرایب مجهول مفروض است. این فرض اولیه را با نماد  $G^{(0)}$  نشان دهید.

- حدس اولیه  $\mu_0$  برای پارامتر منظم ساز را به دلخواه انتخاب کنید؛ به عنوان نمونه  $\mu_0 = 0.001$  و  $k = 0$ .
  - $\bar{T}(G^{(0)})$  و  $S(G^{(0)})$  را محاسبه کنید.
  - ماتریس حساسیت  $J^k = J(G^{(k)})$  تعریف شده در (۲۲) را محاسبه کرده و قرار دهید:  $\Omega^k = \text{diag}[(J^k)^T J^k]$ .
  - دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:
- $$[(J^k)^T J^k + \mu^k \Omega^k] \Delta G^k = (J^k)^T [Y - \bar{T}(G^k)]$$
- سپس قرار دهید:
  - $\Delta G^k = G^{k+1} - G^k$
  - اگر  $S(G^{k+1}) \geq S(G^k)$ ،  $\mu^k$  را با  $\mu^k$  جایگزین کنید، سپس به مرحله ۴ بروید.
  - اگر  $S(G^{k+1}) < S(G^k)$ ،  $G^{k+1}$  را به عنوان یک جواب پذیرفتید، سپس قرار دهید:  $\mu^k = 0.1 \mu^k$ .
  - فرض کنید معیار توقف  $\text{tol}$  مفروض باشد. اگر  $\|G^{k+1} - G^k\| \leq \text{tol}$ ، آنگاه یک جواب قابل قبول به دست آمده آمده و فرآیند حل مسئله به پایان می رسد؛ در غیر این صورت به جای  $k$ ،  $k+1$  قرار دهید و به مرحله ۳ بروید.

در بخش بعد دو مثال عددی به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم ارائه شده در فضای یک و دوبعدی ارائه می شود.

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش به منظور تقریب شبه جواب منبع گرمایی مجهول  $g = g(t)$ ، از مدل اسپلاین آماری سه ضابطه ای از درجهی دو استفاده می شود. در این مدل اسپلاین آماری، چند جمله های چیشف نوع اول، دوم و همچنین چند جمله ای تکین لژاندر به کار گرفته می شود. همانند حالت ویژه ای که در بخش ۲ بررسی شد، این مدل اسپلاین آماری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{g}(t) = S_{r,r}(g;t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^r \bar{g}_{i,1} L_i(t; t_{i,1}) & I_1 = [0, 0.89] \cup [0.91, 1] \\ \sum_{i=0}^r \bar{g}_{i,r} L_i(t; t_{i,r}) & I_r = [0.89, 0.91] \cup [0.91, 1] \\ \sum_{i=0}^r \bar{g}_{i,r} L_i(t; t_{i,r}) & I_r = [0.91, 1] \end{cases}$$

به وضوح نقاط گرهی به صورت زیر خواهند بود:

$$\{t_{j,l}\}_{j=0}^n = \{t \in [0, 1] \mid \bar{q}_{n+1,l}(2t-1) = 0\}, \quad l = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \partial_t T(x,t) &= \partial_x^2 T(x,t) + g(t)\delta(x-0.2), \quad x \in (0,1), t \in (0,1) \\ T(x,0) &= 0, \quad x \in (0,1) \\ \partial_x T(0,t) &= \partial_x T(1,t) = 0, \quad t \in (0,1) \end{aligned} \quad (23)$$

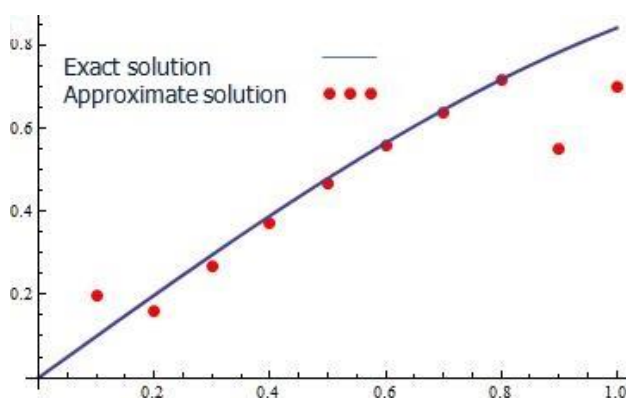
جدول ۱، شرط فوق اضافی (۲) را به ازای  $x_{\text{measure}} = 0.25$  برای این مسئله نشان می‌دهد. جواب دقیق منبع گرمایی برای مسئله بالا،  $g(t) = \sin t$  است. با استفاده از مدل اسپلاین آماری پیشنهادی در بخش ۲ و همچنین به کار بستن الگوریتم، تقریبی از شبه‌جواب منبع گرمایی به دست آمده می‌آید. جدول ۲، خطای مطلق شبه‌جواب محاسبه شده با استفاده از الگوریتم مزبور و جواب دقیق مسئله (۲۳) را در نقاط  $t_i = 0.1i$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, 9$  نشان می‌دهد. همچنین، شکل ۱، جواب دقیق مسئله به همراه جواب تقریبی مسئله را نمایش می‌دهد. نتایج عددی بیانگر کارایی روش پیشنهادی در حل این مسائل است.

جدول ۱- شرط فوق اضافی برای مسئله معکوس سهموی با منبع گرمایی مجهول (۲۳).

0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	$t_i$
0.11761	0.11202	0.0734	0.0365	0.0109	$Y_i$
-	0.9	0.8	0.7	0.6	$t_i$
-	0.4755	0.3907	0.3121	0.2403	$Y_i$

جدول ۲- خطای مطلق شبه‌جواب محاسبه شده با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و جواب دقیق مسئله (۲۳) در نقاط  $t_i$ .

0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	$t_i$
0.10	0.017	0.026	0.039	0.098	$ \bar{g}(t_i) - \sin t_i $
0	0.9	0.8	0.7	0.6	$t_i$
0	0.234	0.002	0.004	0.007	$ \bar{g}(t_i) - \sin t_i $



شکل ۱- شبه‌جواب محاسبه شده با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و جواب دقیق مسئله (۲۳).

مثال ۲- مسئله‌ی انتقال گرمای دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \partial_t T(x,y,t) &= \nabla^2 T(x,y,t) + g(t)\delta(x-0.2, y-0.2), \quad x \in (0,1)^2, t \in (0,1) \\ T(x,y,0) &= 0, \quad (x,y) \in (0,1)^2 \\ T_{\bar{n}}(x,y,t) &= 0, \quad (x,y) \in \partial(0,1)^2, t \in (0,1) \end{aligned} \quad (24)$$





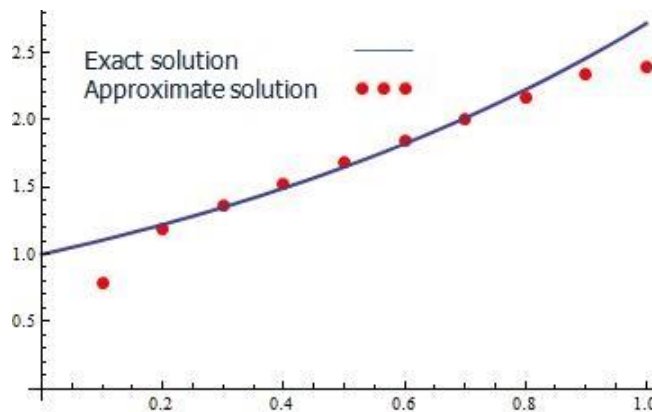
جدول ۳، شرط فوق اضافی (۲) را به ازای  $x_{\text{measure}} = 0.25$  برای این مسئله نشان می‌دهد. جواب دقیق منبع گرمایی  $g(t) = e^t$  است. با استفاده از مدل اسپلاین آماری ارائه شده و همچنین به کارگیری الگوریتم پیشنهادی، تقریبی برای شبه جواب منبع گرمایی به دست آمده می‌آید. جدول ۴ خطای مطلق شبه جواب محاسبه شده با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و جواب دقیق مسئله (۲۴) را در نقاط  $t_i = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, 9$  نشان می‌دهد. همچنین شکل ۲، جواب دقیق مسئله به همراه جواب تقریبی مسئله را نمایش می‌دهد. نتایج عددی بیانگر کارایی روش پیشنهادی در حل این قبیل مسائل بدو وضع است.

جدول ۳ - شرط فوق اضافی برای مسئله معکوس سهموی با منبع گرمایی مجهول (۲۴).

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	$t_i$
0.3453	0.4697	0.5833	0.7013	0.8292	$Y_i$
0.6	0.7	0.8	0.9	-	$t_i$
0.9695	1.124	1.295	1.484	-	$Y_i$

جدول ۴ - خطای مطلق شبه جواب محاسبه شده با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و جواب دقیق مسئله (۲۴) در نقاط  $t_i$ .

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	$t_i$
0.316	0.28	0.06	0.27	0.32	$ \bar{g}(t_i) - e^{t_i} $
0.6	0.7	0.8	0.9	-	$t_i$
0.20	0.11	0.64	1.25	-	$ \bar{g}(t_i) - e^{t_i} $



شکل ۲ - شبه جواب محاسبه شده با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و جواب دقیق مسئله (۲۴).

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، کاربرد روش مدل اسپلاین آماری برای یافتن یک جواب تقریبی از یک مسئله معکوس منبع مجهول مورد مطالعه قرار گرفت. در این مدل، با ایجاد یک فضای احتمال، نقاط گرهی و بازه‌های متناظر با هر یک از ضابطه‌های تابع اسپلاین به طریقی تعیین شدند که در نهایت، تابع تقریب، بهترین تقریب را در فضای مورد مطالعه ارائه دهد. از آنجایی که مسئله معکوس منبع مجهول، یک مسئله بدو وضع می‌باشد، لذا از روش منظم سازی لوبرگ-مارکوارت برای کاهش اثر بدو وضعی استفاده شد و در پایان نیز با ارائه دو مثال عددی، کارایی و دقت روش مورد مطالعه مورد بررسی قرار گرفت.

## منابع

Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*. New York: American Elsevier Publ. Co.  
 Renardy, M., & Nohel, J. A. (1987). *Mathematical problems in viscoelasticity*. Longman Sc & Tech.  
 Cleveland, T. G. (1996). Applied Contaminant Transport Modeling-Theory and Practice. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 77(48), 479-479.

- Beck, J. V., Blackwell, B., & St Clair Jr, C. R. (1985). *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. A Wiley-Interscience, New York.
- Vasil'ev, F. P. (1981). *Methods for Solving Extremal Problems. Minimization problems in function spaces, regularization, approximation*. Moscow, Nauka.
- Shidfar, A., Zakeri, A., & Neisi, A. (2005). A two-dimensional inverse heat conduction problem for estimating heat source. *International journal of mathematics and mathematical sciences*, (10), 1633-1641.
- Shidfar, A., Zolfaghari, R., & Damirchi, J. (2009). Application of Sinc-collocation method for solving an inverse problem. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(2), 545-554.
- Ohe, T., & Ohnaka, K. (1994). Boundary element approach for an inverse source problem of the Poisson equation with a one-point-mass like source. *Applied mathematical modelling*, 18(4), 216-223.
- Huhtala, A., Bossuyt, S., & Hannukainen, A. (2014). A priori error estimate of the finite element solution to a Poisson inverse source problem. *Inverse problems*, 30(8), 085007.
- Yang, F., & Fu, C. L. (2010). The method of simplified Tikhonov regularization for dealing with the inverse time-dependent heat source problem. *Computers & mathematics with applications*, 60(5), 1228-1236.
- Zhao, J., & Liu, S. (2015). Two regularization methods for inverse source problem on the Poisson equation. *Complex variables and elliptic equations*, 60(10), 1374-1391.
- Hasanov, A. (2007). Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: weak solution approach. *Journal of mathematical analysis and applications*, 330(2), 766-779.
- Tikonov, A. N., & Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. New York: Winston.
- Masjed-Jamei, M. (2009). Error control process in function interpolation using statistical spline model. *Mathematical and computer modelling*, 49(7-8), 1483-1493.
- Kelley, C. T. (1999). *Iterative methods for optimization*. Siam.
- Hanke, M. (2010). The regularizing Levenberg-Marquardt scheme is of optimal order. *The journal of integral equations and applications*, 259-283.
- Cannon, J. R. (1984). *The one-dimensional heat equation*. Cambridge University Press.
- Ozisik, M. N., & Orlande, H. R. B. (2000). *Inverse heat transfer, fundamentals and applications*. Taylor & Francis, New York.

