Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷

www.journal-dmor.ir

حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی از روش بهینه‌سازی نلدرمید

اژدر سلیمانپور باکفایت *

گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان ارومیه، ارومیه، ایران.

چکیده

در این مقاله، یک روش ابتکاری برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی که دارای قیود و تابع هدف محدب هستند طراحی‌شده است. در این روش، یک تابع هزینه تعریف می‌گردد، سپس مقادیر متغیرها طوری تعیین می‌شوند که آن تابع هدف مینیمم شود. جهت ایجاد تابع هزینه مناسب، از شرایط بهینگی K.K.T استفاده‌شده است. مینیمم‌سازی تابع هزینه با استفاده از روش بهینه‌سازی بدون مشتق نلدرمید انجام‌شده است. کاربردها نشان می‌دهند کارایی این روش برای مسائل با ابعاد بزرگ مانند $\mathbb{R}^{10}$ نسبت به روش‌های مشابه بیشتر است و به‌کارگیری این روش، آسان‌تر از روش‌های مشابه است. توسط مثال‌هایی کارایی روش توضیح داده‌شده است.

واژه‌های کلیدی: روش نلدرمید، شرایط بهینگی KKT، بهینه‌سازی نامقید، برنامه‌ریزی غیرخطی.

دریافت: ۱۳۹۷/۱/۱   پذیرش: ۱۳۹۷/۳/۳۰

۱- مقدمه

تحقیقات زیادی در راستای حل مسائل برنامه‌ریزی محدب از روش‌های مختلف انجام‌شده است؛ به‌طور مثال: یانگ و گائو (۲۰۰۸) مسائل بهینه‌سازی غیرخطی با قیود خطی را با در نظر گرفتن شرایط KKT[1] و ایجاد یک شبکه عصبی دینامیکی، حل کرده‌اند که در آن شبکه، نقطه بهینه مسئله، همان نقطه تعادل شبکه است. همچنین یانگ و گائو (۲۰۱۱) مسائل بهینه‌سازی مقید محدب را بدون استفاده از شرایط KKT و با در نظر گرفتن یک تابع هزینه (از نوع تابع جریمه‌ای) و مینیمم کردن این تابع، توسط یک شبکه عصبی دینامیکی حل کرده‌اند. در این تحقیق، شبکه‌های عصبی بازگشتی به‌صورت یک دنباله از شبکه‌ها در نظر گرفته می‌شوند که در هر مرحله، یک شبکه به نقطه تعادل خود رسیده و شبکه بعدی از نقطه تعادل شبکه قبلی کار را ادامه می‌دهد تا زمانی که نقطه تعادل نهایی جواب بهینه مسئله اصلی می‌شود. ناظمی (۲۰۱۲) با ایجاد یک شبکه عصبی دینامیکی که توسط شرایط KKT طراحی می‌شود، مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را حل کرده است. لی، یان و ونگ (۲۰۱٤) مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی یک‌لایه حل‌کرده است. تابع هدف این مسئله‌ها محدب نیستند. لیو، تنگ و یانگ (۲۰۰۹) با ایجاد تابع لاگرانژین تعمیم‌یافته و یافتن شرایط کافی برای نقطه زینی آن، مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مفروض را حل کرده‌اند. تحقیقات خیلی زیادی برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی مشابه روش این مقاله وجود دارند و از ذکر آن‌ها خودداری می‌شود.

* Corresponding author (E-mail: asad87000@yahoo.com)

[1] Karush-Kuhn-Tucker

در این مقاله، مسائل بهینه‌سازی غیرخطی محدب و نیز غیر محدب با استفاده از همان شرایط KKT اما نه به‌صورت شبکه دینامیکی، بلکه با استفاده از ایجاد یک تابع هزینه حل می‌شوند. در این حالت با استفاده از شرایط KKT یک تابع هزینه تعریف می‌شود که هدف مسئله یافتن نقطه‌ای است که آن نقطه، تابع هزینه را مینیمم می‌کند و برای مینیمم کردن تابع هزینه از روش بهینه‌سازی نامقید نلدرمید[۱] استفاده می‌شود (بلوم و لی، ۱۹۹۱). این روش در دسته روش‌های جستجو بوده و ویژگی منحصربه‌فرد آن این است که از مشتق (گرادیان) تابع هدف استفاده نکرده و با سه عمل انبساط، انقباض و انعکاس روی یک سیمپلکس، تکرارهایی را تشکیل می‌دهد و پس از انجام چندین تکرار، بهترین رأس سیمپلکس نهایی نقطه بهینه را ایجاد می‌کند. این روش در برخی موارد دارای کارایی بیشتری نسبت به روش‌های مشابه است و در کاربردهای فنی و مهندسی زیادی بکار رفته است (نلدر و مید، ۱۹٦۵؛ رائو، ۱۹۹۷). فاج‌فر، پوهان و برمر (۲۰۱۷) یک روش برنامه‌ریزی ژنتیک را برای حل مسائل بهینه‌سازی استاندارد به‌کار برده‌اند که بر اساس روش نلدرمید طراحی‌شده است. لورسن و ریچ (۲۰۰٤) فرم تعمیم‌یافته‌ای از روش نلدرمید را به‌کار برده‌اند. روش نلدرمید در این فرم برای حل مسائل بهینه‌سازی کراندار به‌کار می‌رود و به آن، روش نلدرمید کراندار تعمیم‌یافته[۲] می‌گویند.

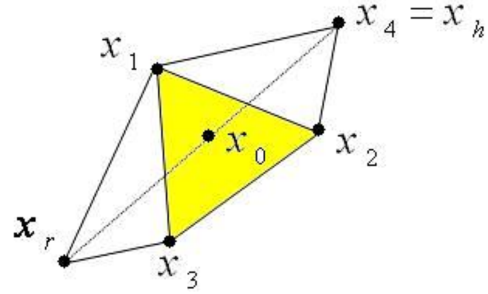
۲- روش بهینه‌سازی بدون مشتق نلدرمید

این روش، یکی از روش‌های جستجوی بدون استفاده از مشتق است و کارایی زیادی در بهینه‌سازی نامقید دارد (رائو ۱۹۹۷). یک سیمپلکس[۳] شکل هندسی است که توسط مجموعه‌ای از $n+1$ نقطه در فضای n بعدی تشکیل می‌شود؛ بنابراین یک سیمپلکس در فضای دوبعدی، یک مثلث و در فضای سه‌بعدی یک چهاروجهی است. ایده اصلی روش نلدرمید بر مقایسه مقادیر تابع هدف در $n+1$ رأس یک سیمپلکس اصلی و حرکت تدریجی این سیمپلکس به سمت نقطه بهینه طی یک فرآیند تکراری است؛ با این روش همواره نقطه کمینه را می‌یابیم. حرکت سیمپلکس توسط سه عمل انعکاس[٤]، انقباض[٥] و انبساط[٦] صورت می‌گیرد. در سیمپلکس آغازین بدترین و بهترین رأس با ارزیابی تابع در رئوس سیمپلکس معلوم می‌شود، سپس در هر تکرار با استفاده از تعدادی از اعمال سه‌گاه انقباض، انبساط یا انعکاس به سیمپلکس جدیدی می‌رسیم که مقادیر تابع در رئوس آن نسبت به سیمپلکس قبلی کمتر(بهتر) است. به همین ترتیب، این تکرارها تا رسیدن به نقطه کمینه ادامه می‌یابد.

در فضای سه‌بعدی سیمپلکس‌ها دارای چهار رأس می‌باشند. نمونه‌ای از این سیمپلکس در شکل ۱ نشان داده‌شده است. در روش نلدرمید ابتدا با محاسبه مقدار تابع در رئوس سیمپلکس بهترین و بدترین رأس مشخص می‌شود. در شکل ۱ فرض کنیم x_1 بهترین و x_4 بدترین باشد. میانگین همه نقاط به‌جز بدترین را با x_0 نشان می‌دهیم. می‌توان انتظار داشت که قرینه بدترین رأس نسبت به نقطه x_0 دارای مقدار تابع کمتری باشد این عمل که حاصل آن نقطه x_r است را یک انعکاس می‌نامند. به همین ترتیب، اعمال دیگر انجام‌شده و هر بار با یک سیمپلکس جدید مواجه می‌شویم که رئوس آن دارای مقدار تابع کمتری نسبت به سیمپلکس‌های قبلی است. سلیمانپور (۱۳۹۲) ضمن بیان جزئیات این الگوریتم آن را در کاربردهای علمی و عددی زیادی به‌کار برده است.

[1] Nelder-Mead
[2] Globalized Bounded Nelder-Mead (GBNM)
[3] Convex Hull
[4] Reflection
[5] Contraction
[6] Expantion

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۱-۱۰



شکل ۱- نمایش انعکاس در روش نلدرمید در فضای سه‌بعدی.

۳- بهینه‌سازی غیرخطی

مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی محدب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Min\ f(x) \qquad (۱)$$
$$S.t: \begin{cases} g(x) \le 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$، $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$. توابع f و $g_m(x), \dots, g_1(x)$ فرض می‌شود که محدب بوده و دو بار مشتق‌پذیر باشند. همچنین $h(x) = Ax - b$ که در آن $A_{1\times n}$ ، $rank(A) = l (0 \le l \le n)$ و $b \in \mathbb{R}^l$. در این مقاله فرض بر این است که مسئله (۱) دارای جواب بهین منحصربه‌فرد باشد. تابع لاگرانژین مربوط به (۱) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم (ناظمی، ۲۰۱۲):

$$L(x,u,v) = f(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} u_k^2 g_k(x) + \sum_{p=1}^{l} v_p h_p(x), \qquad (۲)$$

که در آن $u \in \mathbb{R}^m$ و $v \in \mathbb{R}^l$ مضارب لاگرانژ هستند. می‌دانیم نقطه x^* در $\mathbb{R}^n$ یک جواب بهینه برای (۱) است اگر و تنها اگر بردارهای $u^* \in \mathbb{R}^m$ و $v^* \in \mathbb{R}^l$ موجود باشند بطوریکه سه‌تایی $\left(x^{*T}, u^{*T}, v^{*T}\right)^T$ در سیستم KKT زیر صدق کنند (بازارا، ۱۹۹۳):

$$S.t: \begin{cases} u^* \ge 0, g(x^*) \le 0, {u^*}^T g(x^*) = 0 \\ \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^* + \nabla h(x^*)^T v^* = 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن x^* را نقطه KKT می‌نامند و زوج $\left(u^{*T}, v^{*T}\right)^T$ نیز بردار مضارب لاگرانژ متناظر با x^* نامیده می‌شود.

لم ۱: اگر توابع f، $g_k, (k = 1, \dots, m)$ همگی محدب باشند آنگاه x^* یک جواب بهینه برای مسئله (۱) است اگر و تنها اگر x^* یک نقطه KKT برای (۱) باشد.

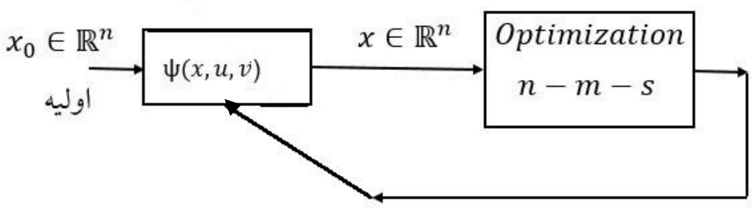
اثبات: به (بازارا، شرالا و شلی، ۱۹۹۳) مراجعه شود.

اکنون هدف ما یافتن x^*، u^* و v^* است که در (۳) صدق کنند. برای این کار یک تابع هزینه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(x^*,u^*,v^*) = ||\nabla f(x) + \nabla g(x)^T u^* + \nabla h^T(x) v||_p + ||u^T g(x)||_p + ||h(x)||_p + ||g^+(x)||_p \qquad (٤)$$

که در آن $g^+ = \max\{0, g\}$ و نرم مذکور در (٤)، نرم اقلیدس در بردارها است و چون فضا متناهی‌البعد است لذا از تمام نرم‌های دیگر نیز می‌توان استفاده کرد زیرا در فضاهای متناهی‌العبد تمام نرم‌ها معادل هستند (کریزیک، ۱۹۷۸). واضح است که مینیمم ψ زمانی حاصل می‌شود که جملات تشکیل‌دهنده آن تک‌تک صفر شوند و اگر این مینیمم در نقطه‌ای مانند x^*، u^* و v^* رخ دهد آنگاه این نقطه، نقطه صادق در (۳) است که همان بهین مسئله اصلی می‌باشد. درنتیجه، مجهول مسئله، یافتن x ، u و v است به‌طوری‌که به ازای آن‌ها مقدار ψ مینیمم شود. مسئله مینیمم کردن تابع هزینه، یک مسئله بهینه‌سازی نامقید است. در این مقاله برای مینیمم کردن تابع ψ از روش نلدرمید استفاده می‌کنیم. مزیت این روش در کمینه کردن تابع (٤) این است که غالباً برای نقاط اولیه حتی نشدنی به جواب کمینه همگرا می‌شود. در روش‌های مشابه برای شروع تکرارها یک نقطه شدنی باید در دست باشد. در حالتی که نقطه آغازین نشدنی است روش نلدرمید ممکن است ناسازگار باشد. به این معنی که الگوریتم همگرا می‌شود اما نقطه حاصل جواب موردنظر نیست. در این حالت با اجرای مجدد الگوریتم و تغییر نقاط آغازین نقطه بهین را به دست می‌آوریم. درنتیجه در به‌کارگیری روش نلدرمید همواره نقاط آغازین را مقادیری کوچک و تصادفی اختیار می‌کنیم. روش نلدرمید همگرا است. به‌عبارت‌دیگر با هر سیمپلکس اولیه این روش به نقطه مینیمم موضعی همگرا می‌شود و اگر سیمپلکس اولیه نامناسب باشد (مثلاً به جوابی ناسازگار برسیم) آنگاه با تغییر سیمپلکس اولیه و اجرای مجدد الگوریتم به جواب بهینه می‌رسیم. در این روش، جواب‌های بهین دوگان (ضرایب لاگرانژین) نیز حاصل می‌شود. چون بحث روی این جواب‌ها بر پیچیدگی مسئله افزوده و موضوع اصلی تحت تأثیر قرار می‌گیرد لذا در مثال‌ها همواره به جواب‌های بهین مسئله اصلی توجه خواهیم کرد.

عملکرد شماتیک و کلی روش نلدرمید بر اساس دیاگرام شکل ۲ است. بر این اساس، ابتدا $n + 1$ نقطه اولیه و تصادفی از فضای n بعدی اختیار کرده، سپس با محاسبه تابع هزینه ψ در آن نقاط اگر مقدار آن به‌اندازه کافی کوچک باشد توقف کرده و در غیر این صورت از روش نلدرمید یک نقطه جدید پیدا می‌کنیم. این روند تا رسیدن به یک سیمپلکس جدید که مقدار تابع هزینه آن تا حد دلخواه کم باشد ادامه می‌یابد. در هر تکرار از روش نلدرمید، شاهد کاهش مقدار تابع هزینه هستیم و این اتفاق به دلیل همگرا بودن روش نلدرمید است (رائو، ۱۹۹۷).



شکل ۲- دیاگرام عملکرد روش نلدرمید در حل مسئله بهینه‌سازی.

۴- مثال‌ها

در این بخش، با ذکر مثال‌هایی کارایی روش نلدرمید در بهینه‌سازی غیرخطی را نشان می‌دهیم. ابتدا یک مثال از روش نلدرمید در بهینه‌سازی نامقید بیان کرده سپس چند مثال از بهینه‌سازی غیرخطی و مقید ذکر و با روش‌های جدید دیگر مقایسه می‌کنیم. برنامه‌های کامپیوتری در کامپیوتر پنتیوم ٤ با CPU به‌اندازه $2.4\ GHz$ و حافظه RAM به‌اندازه $4G$ در محیط نرم‌افزار متلب اجراشده است. زمان اجرا در برخی از مثال‌ها که تعداد متغیرهایشان کمتر از ۱۰ باشد خیلی کم و در حد چند ثانیه است؛ در برنامه از دقت مضاعف استفاده‌شده است.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷ ، صفحه: ۱۰-۱

مثال ۱- می‌خواهیم کمینه تابع $f(x_1,x_2)=x_1-x_2+2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ را بیابیم. جواب بهینه، نقطه $x^*=(-1,1.5)$ است و $f(x^*)=-1.25$. با به‌کارگیری روش نلدرمید بعد از ٤۰ تکرار، به همین نتیجه می‌رسیم. در برنامه نوشته‌شده مقادیر اولیه، اعداد تصادفی از بازه $[-1,1]$ گرفته‌شده‌اند. البته با ادامه تکرارهای روش نلدرمید، جواب دقیق‌تر می‌شود. زمان اجرا در حد چند ثانیه بوده و در محاسبات از دقت مضاعف استفاده‌شده است. الگوریتم روش نلدرمید جهت نوشتن برنامه کامپیوتری در ضمیمه آورده شده است. توجه داریم دقت در حل این مسئله خیلی بالا بوده و می‌توان گفت که جواب دقیقاً و بدون خطا حاصل‌شده است. به این معنی که از مرحله‌ای به بعد الگوریتم به جواب دقیق همگرا می‌شود.

مثال ۲- برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Min\, f(x)=1+x_1^2-e^{-x_2^2} \qquad (۵)$$

$$S.t\colon \begin{cases} x_1^2-x_2+\dfrac{1}{4}\le 0 \\ -|x_1|+x_2-1\le 0 \end{cases}.$$

مسئله (۵) توسط لی و همکاران، (۲۰۱٤) با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی یک لایه حل‌شده است. تابع هدف این مسئله محدب نمی‌باشد. جواب دقیق این مسئله نقطه $x^*=\left(0,\frac{1}{4}\right)^T$ است. با تشکیل تابع هزینه ψ و به‌کارگیری روش نلدرمید پس از ۸۰۰۰ تکرار به جواب زیر با مقدار تابع هزینه $\psi=0.10588741761$ می‌رسیم:

$$x_1=0.000000000000237,\qquad x_2=0.249999999984172$$

سیمپلکس آغازین در این مثال دارای ۵ رأس می‌باشد. این ۵ رأس تصادفی نقاط زیر هستند:

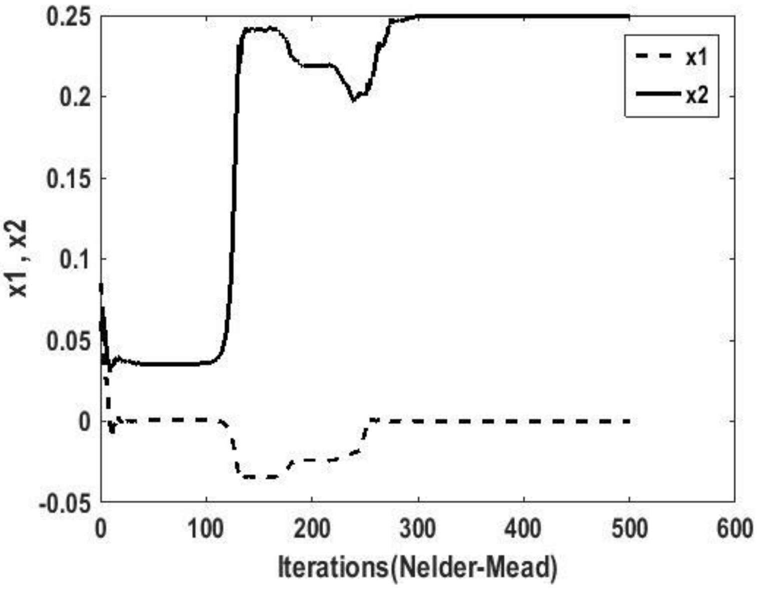
$$\begin{pmatrix}0.085071\\0.056055\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0.058279\\0.081539\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0.000052\\0.086543\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0.052768\\0.047952\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0.049809\\0.090085\end{pmatrix}$$

مراحل همگرایی حالت‌ها و خطای تکرارها در شکل ۳ و ٤ دیده می‌شود. در روش گوچنق و همکاران، این مسئله توسط شبکه عصبی با تلرانس $\epsilon=10^{-5}$، حل‌شده است. در این مقاله، دقت در برآورد x_1 خیلی بهتر بوده و دقت در برآورد x_2 مشابه با روش گوچنق است.

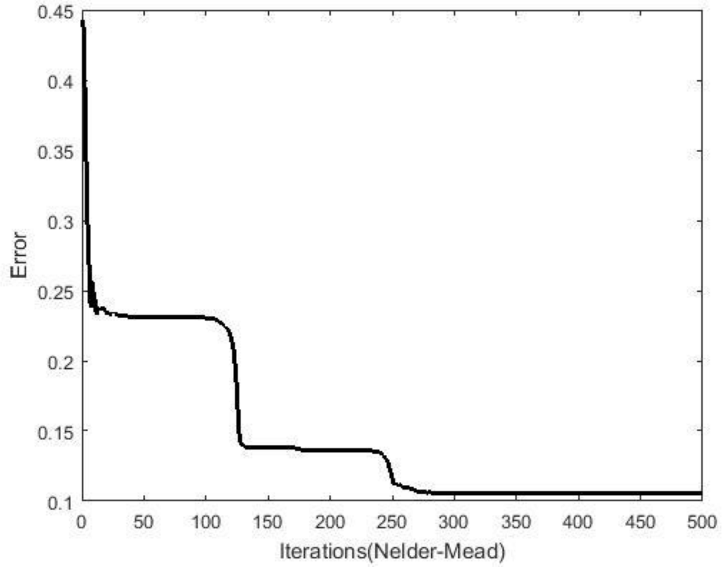
مثال ۳- برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Min\, f(x)=e^{x_2^2-x_1^2} \qquad (٦)$$

$$S.t\colon \begin{cases} x_1^2-1\le 0 \\ e^{-x_2}-1\le 0 \end{cases}$$



شکل ۳- همگرایی حالت‌ها و خطای تکرارها در مثال۲.



شکل ۴- همگرایی خطای تکرارها در مثال ۲.

لیو و همکاران (۲۰۰۹) با ایجاد تابع لاگرانژین تعمیم‌یافته و یافتن شرایط کافی برای نقطه زینی آن، مسئله بهینه‌سازی غیرخطی موردنظر را حل کرده‌اند. کمترین مقدار تابع هدف در دو نقطه رخ می‌دهد. دو نقطه بهین به‌صورت زیر موجود است:

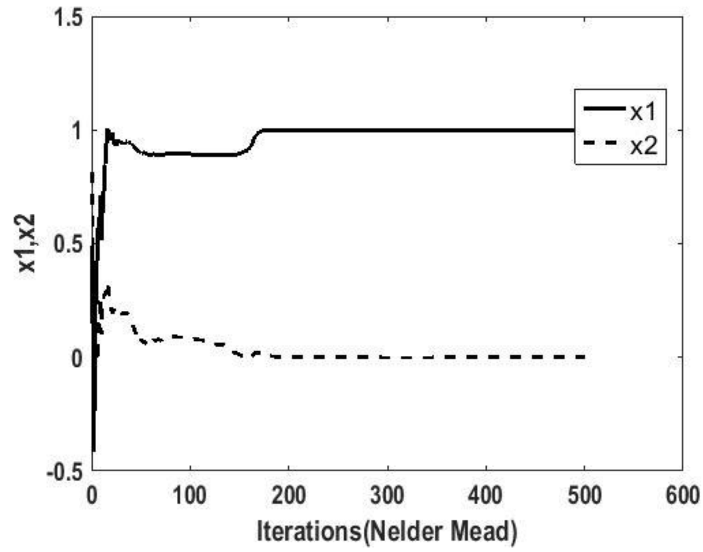
$$x_1^* = \binom{1}{0}, \qquad x_2^* = \binom{-1}{0}$$

این مسئله نیز محدب نیست و روش جدید قادر است به جواب‌های بهین همگرا شود. تابع هزینه ψ را ایجاد کرده و با شروع از نقاط آغازین تصادفی در یکی از حالت‌ها پس از ۸۵۱۷ تکرار به جواب x_1^* با $\psi = 5.8917 \times 10^{-4}$ و پس از ۹۹۲۳ تکرار به جواب x_2^* با $\psi = 2.6227 \times 10^{-4}$ می‌رسیم. این دو جواب به‌صورت زیر هستند.

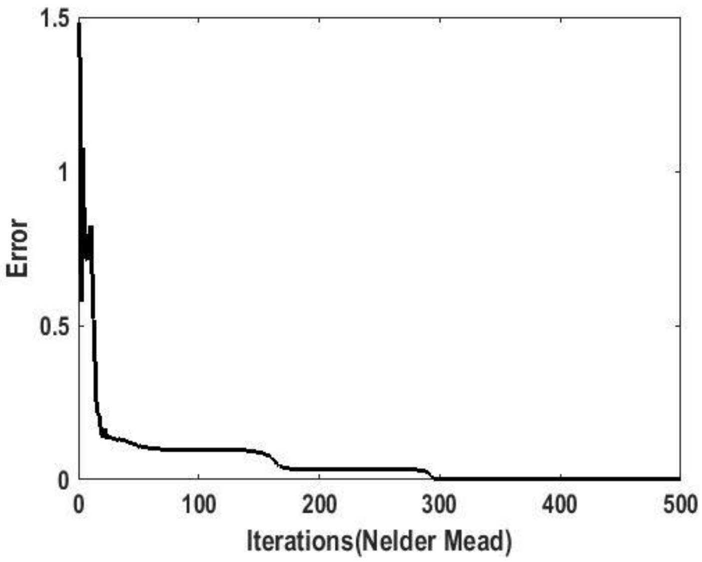
$$x_1^* = \binom{1.0000001150}{-0.0000588227}, \quad x_2^* = \binom{-1.00000000}{-0.0187885}$$

فرآیند همگرایی حالت‌ها و خطا برای محاسبه x_1^* در شکل ۵ و ٦ آمده است؛ فرآیند همگرایی حالت‌ها و خطا در محاسبه x_2^* در شکل ۷ و ۸ دیده می‌شود. لازم به ذکر است با شروع از نقاط اولیه متفاوت، دو جواب بهین به‌دست‌آمده است.

به‌عبارت‌دیگر، یک‌بار با شروع از نقاط آغازین تصادفی، یکی از جواب‌های بهین حاصل‌شده و بار دیگر با شروع از نقاط آغازین دیگر جواب بعدی به‌دست‌آمده است. ممکن است در یک اجرا، به جوابی ناسازگار برسیم، در این صورت با اجرای مجدد الگوریتم، جواب بهین حاصل می‌شود.

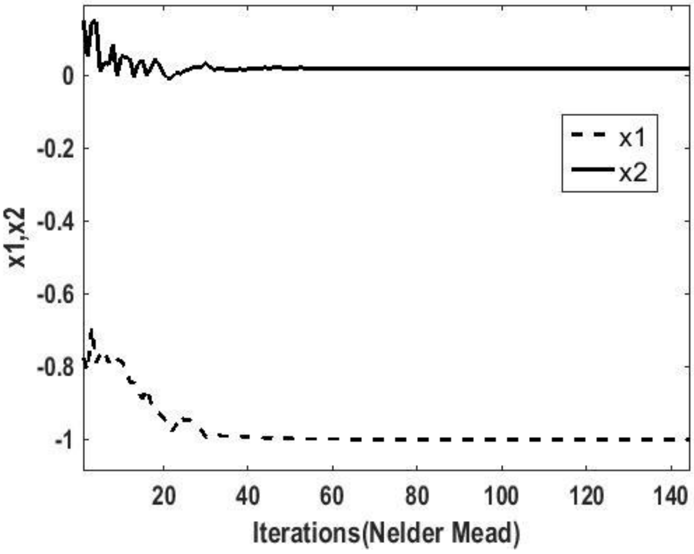


شکل ۵- همگرایی حالت‌ها در مثال ۳ برای محاسبه x_1^*

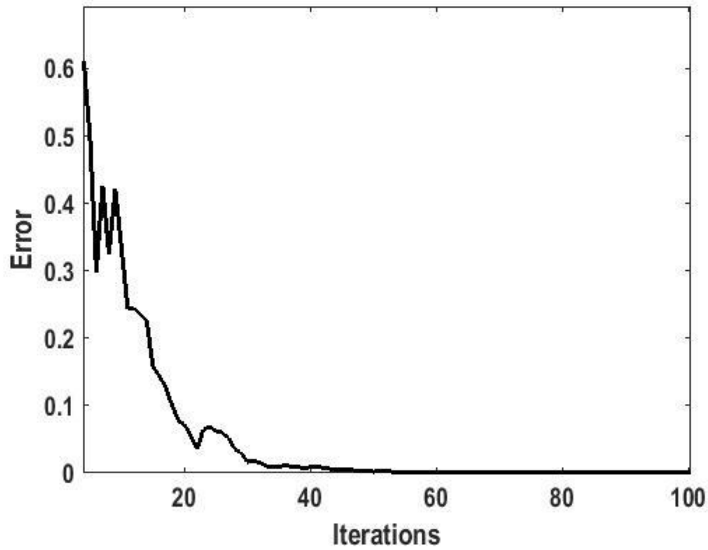


شکل ۶- همگرایی خطا در مثال ۳ برای محاسبه x_1^*.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷ ، صفحه: ۱-۱۰



شکل ۷- همگرایی حالت‌ها در مثال ۳ برای محاسبه x_2^*.



شکل ۸- همگرایی خطا در مثال ۳ برای محاسبه x_2^*.

توجه داریم کیان و همکاران در حل این نمونه، از تابع لاگرانژین تعمیم‌یافته استفاده کرده‌اند. درنتیجه، برآورد آن‌ها عددی نبوده و جنبه تحلیلی دارد. دقت عددی برآورد از روش جدید در هر دو نقطه بهینه خیلی مناسب بوده و به‌طور متوسط در حد $\epsilon = 10^{-5}$ است. لازم به ذکر است در روش جدید میزان کم یا زیاد بودن تابع هزینه ψ نشان‌دهنده دقت تقریب نبوده و این دقت فقط از نتایج عددی حاصل برای حالت‌ها به دست می‌آید؛ به‌عبارت‌دیگر، ممکن است دقت برآورد حالت‌ها در حد $\epsilon = 10^{-5}$ باشد اما مقدار به‌دست‌آمده برای تابع هزینه ψ بیش از آن یا کمتر از آن باشد.

۵- نتیجه‌گیری

دیدیم که کمینه کردن تابع هزینه ایجادشده توسط روش نلدرمید انجام شد. در به‌کارگیری این روش بهینه‌سازی نامقید، توجه دو نکته زیر ضروری است.

۱- در روش نلدرمید باید $n \geq 2$ باشد، یعنی این روش برای توابع با بیش از دو متغیر قابل‌استفاده است.؛ ما باید توجه داشت می‌توان آن را برای توابع تک متغیره نیز به‌کار برد. به این صورت که یک متغیر مصنوعی با توان ۲ به تابع

هدف اضافه می‌شود و بدین ترتیب مسئله دومتغیره می‌شود. نهایتاً در جواب بهین مقدار متغیر مصنوعی برابر صفر می‌شود.

۲- در روش نلدرمید لازم است نقاط اولیه که سیمپلکس را تشکیل می‌دهند را مشخص کنیم، برای این‌کار می‌توان این نقاط را تصادفی انتخاب کرد. در این نوع انتخاب دو نکته را باید موردتوجه قرار داد: اولاً ممکن است بیش از سه نقطه روی یک خط یا صفحه قرار گیرند، در این صورت روش همگرا نخواهد شد. ثانیاً ممکن است تابع f محدب نباشد که درنتیجه کمینه موضعی به‌دست می‌آید و برای رسیدن به کمینه جامع باید نقاط اولیه را تغییر داد. پس از تشکیل سیمپلکس اولیه و شروع تکرارها هرگز ممکن نیست چندین نقطه روی خط یا صفحه قرار گیرند (روش واگرا شود).

با تغییر ماهیت تابع هزینه در (٤) می‌توان روش را کاراتر کرده یا برای مسائل دیگری مانند اعداد صحیح یا مسائل صفر و یک به‌کار برد. می‌توان با استفاده از سیستم KKT واقع در (۳) همانند ناظمی، (۲۰۱۲) یک سیستم دینامیکی طراحی کرد که جواب‌های مسئله اصلی نقطه تعادل سیستم بوده و سیستم همگرا به آن نقطه باشد. یک پیشنهاد برای ادامه کار این است که با تغییر نوع تکرارها در روش نلدرمید بتوان آن را در حل مسائل برنامه‌ریزی صفر و یک یا برنامه‌ریزی با مقادیر صحیح به‌کار برد. در این حالت می‌توان در هر یک از اعمال انعکاس، انقباض یا انبساط، حرکت نقاط سیمپلکس را به‌جای مقادیر مثبت حقیقی، اعداد صحیح در نظر گرفت. در خیلی از موارد سرعت همگرایی روش نلدرمید نسبت به روش‌های مشابه زیادتر است.

منابع

سلیمانپور باکفایت اژدر. (۱۳۹۲). شبکه‌های عصبی مصنوعی در علوم پایه، ارومیه: انتشارات مؤلف.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons New York. NY Google Scholar.

Rao, S. S., & Bard, J. (1997). Engineering optimization: theory and practice. *IIE transactions*, *29*(9), 799.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: wiley.

Blum, E. K., & Li, L. K. (1991). Approximation theory and feedforward networks. *Neural networks*, *4*(4), 511-515.

Nazemi, A. R. (2012). A dynamic system model for solving convex nonlinear optimization problems. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, *17*(4), 1696-1705.

Fajfar, I., Puhan, J., & Bűrmen, Á. (2017). Evolving a Nelder–Mead Algorithm for Optimization with Genetic Programming. *Evolutionary computation*, *25*(3), 351-373.

Li, G., Yan, Z., & Wang, J. (2014). A one-layer recurrent neural network for constrained nonsmooth invex optimization. *Neural networks*, *50*, 79-89.

Luersen, M. A., & Le Riche, R. (2004). Globalized Nelder–Mead method for engineering optimization. *Computers & structures*, *82*(23-26), 2251-2260.

Nelder, J. A., & Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The computer journal*, *7*(4), 308-313.

Liu, Q., Tang, W. M., & Yang, X. M. (2009). Properties of saddle points for generalized augmented Lagrangian. *Mathematical methods of operations research*, *69*(1), 111-124.

Yang, Y., & Cao, J. (2008). A feedback neural network for solving convex constraint optimization problems. *Applied mathematics and computation*, *201*(1-2), 340-350.

Yang, Y., & Gao, Y. (2011). A new neural network for solving nonlinear convex programs with linear constraints. *Neurocomputing*, *74*(17), 3079-3083.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۱۰-۱

ضمایم

الگوریتم نلدرمید که برنامه کامپیوتری بر اساس آن نوشته‌شده است.

نمودار گردشی مربوط به الگوریتم نلدر–مید سیمپلکس

یک معیار توقف می تواند بصورت زیر اختیار شود:

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\left(f(x_i) - f(x_0) \right)^2}{n+1} \right)^{0.5} \leq \varepsilon$$

فلش ⇓ نشان دهنده True و فلش ↓ نشانه False است.