



مدل جدید تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای فازی با بازده به

مقیاس متغیر

محمد جواد گلیج *

دانشکده مهندسی صنایع، موسسه آموزش عالی آیندگان، تنکابن، مازندران.

*نویسنده مسئول

چکیده

یکی از بهترین ابزارها برای بررسی عملکرد واحدها، تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها است. تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها، ابزاری برای رتبه‌بندی و شناسایی واحدهای کارا و ناکارا است. از آنجایی که در بسیاری از موارد واحدهای تصمیم‌گیرنده در یک سازمان دارای مقادیر میانی هستند و همچنین در برخی مواقع مقادیر موجود در دنیای واقعی برای ورودی‌ها و خروجی‌ها مبهم و غیرقطعی هستند، استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک، ما را به نتیجه قطعی نمی‌رساند. در این مقاله، ما یک مدل جدید برای تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای فازی ارائه می‌دهیم و برای ارزیابی عملکرد آن به مطالعه کارایی کارگاه‌های صنعتی بین ۱۰ تا ۴۹ نفر کارکن می‌پردازیم. کارایی کارگاه‌های صنعتی برحسب استان مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. نتایج به‌دست‌آمده، اهمیت مدل پیشنهادی را مشخص می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: کارایی، تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای فازی، اعداد فازی، کارگاه‌های صنعتی.

دریافت: ۱۳۹۶/۶/۲۰ پذیرش: ۱۳۹۶/۹/۲۷

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها^۱ (DEA) یک رویکرد برنامه‌ریزی خطی^۲ برای ارزیابی کارایی نسبی و یا محاسبه بهره‌وری تعداد متناهی از واحدهای تصمیم‌گیری مشابه است که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه می‌باشند (تونه و ساتسوی، ۲۰۰۹). سه مدل معروف و متداول در زمینه تحلیل پوششی داده‌ها مطرح شده است. اولین مدل ارائه‌شده در تحلیل پوششی داده‌ها مدل CCR^۳ است. این مدل برای اولین بار توسط چارنز، کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ با فرض بازده به مقیاس ثابت معرفی گردید (چارنز و همکاران، ۱۹۸۵). بنکر، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴ با تغییر در مدل CCR و برای حل مشکل آن و با فرض بازده به مقیاس متغیر مدل جدیدی را معرفی کردند که بر اساس حروف اول نام خانوادگی آنان به مدل BCC^۴ شهرت یافت و در سال ۱۹۸۵ چارنز و همکارانش مدل جمعی^۵ را به‌عنوان یکی دیگر از مدل‌های اساسی در DEA مطرح کردند (چارنز و همکاران، ۱۹۸۵). در چند سال اخیر مطالعاتی در مورد ساختار دومرحله‌ای داده‌ها صورت گرفته است که علاوه بر ورودی‌ها و خروجی‌ها، مجموعه‌ای از "اندازه‌های میانی" را نیز داریم، که بین این دو مرحله واقع است. در واقع اندازه‌های میانی،

* E-mail: m.javadgoleij93@gmail.com

¹ Data Envelopment Analysis

² Linear Programming

³ Charnes & Chopper & Rohdes

⁴ Banker & Charnes & Chopper

⁵ The Additive Model



خروجی‌های حاصل از مرحله اول هستند که به‌عنوان ورودی در مرحله دوم استفاده می‌شوند (احمدی و نورا، ۱۳۹۰). کائو و هوانگ (۲۰۰۸) مدل DEA دومرحله‌ای را معرفی کردند که روابط مجموعه‌ای دو زیرفرآیند را در کل فرآیند در نظر می‌گرفت. در چارچوب آن‌ها کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده^۱ (DMU) به کارایی دو زیرمجموعه DMU تجزیه می‌شد. آن‌ها مجموعه‌ای از شرکت‌های بیمه عمر را در تایوان در نظر گرفتند و فرآیند دومرحله‌ای ایجاد سود و حاشیه سود را برای آن‌ها بررسی کردند. چن و همکارانش (۲۰۰۹) کارایی کلی فرآیند دومرحله‌ای را به‌عنوان جمع موزون کارایی‌های دو مرحله به‌تنهایی محاسبه کردند. روش آن‌ها را می‌توان بر اساس بازده مقیاس ثابت^۲ (CRS) و بازده مقیاس متغیر^۳ (VRS) اجرا کرد. وانگ و چین^۴ (۲۰۱۰) کارایی کلی فرآیند دومرحله‌ای را به‌عنوان یک میانگین هارمونیک وزنی از کارایی دو مرحله جداگانه مدل‌سازی کردند و آن را با فرض بازده به مقیاس متغیر گسترش دادند. آن‌ها همچنین به‌منظور در نظر گرفتن اهمیت نسبی وزن‌ها، دو مرحله را به‌صورت جداگانه تعمیم دادند. رستمی مال خلیفه و آقابازاده (۱۳۹۰) با در نظر گرفتن واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای، از مدل‌های جمعی متناظر کارایی کل جهت اندازه‌گیری کارایی شبکه‌ها استفاده کردند. آن‌ها در مقاله خود با تعریف شبکه دومرحله‌ای بازه‌ای، مدل‌های جمعی بازه‌ای دومرحله‌ای را توسعه دادند. همچنین مدل‌هایی جهت یافتن کران‌های بالا و پایین کارایی کل شبکه‌های بازه‌ای و درنهایت بازه‌ای به‌عنوان بازه‌ی کارایی پیشنهاد کردند. احمدی و نورا (۱۳۹۰) ابتدا به سنجش کارایی فرآیندهای دومرحله‌ای که به‌صورت سری باهم در ارتباطند پرداختند و ضمن معرفی رویکردهای DEA موجود در این زمینه، ارتباط و برابری بین این رویکردها را بررسی کردند. آن‌ها با بسط مدل‌های فوق، یک مدل DEA چندمرحله‌ای که به‌صورت سری باهم در ارتباطند را معرفی کردند که ارتباطات میان فرآیندهای داخلی موجود در سیستم نیز در محاسبه کارایی سیستم در نظر گرفته می‌شود. فرقانی و نجفی (۲۰۱۵) در مقاله خود به مدل ترکیبی DEA دومرحله‌ای پرداختند و تجزیه و تحلیل حساسیت را به DMU ها در سراسر مرز اعمال کردند. در واقع، در زمانی که تغییرات داده‌های مختلف برای همه DMU ها اعمال می‌شود شرایط لازم و کافی برای حفظ طبقه‌بندی کارایی DMU وجود دارد. سالاری و زندیه (۱۳۹۵) با استفاده از مدل CCR ورودی‌محور کارایی فروشگاه‌های اینترنتی را اندازه‌گیری کردند. در مقاله آن‌ها، فرآیند خدمت‌دهی فروشگاه‌های اینترنتی به دو مرحله عرضه پذیری و سودآوری تقسیم شده است. براین اساس، آن‌ها از یک مدل دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کردند و کارایی کلی و دو مرحله را به‌صورت مجزا به دست آوردند.

داده‌ها در مدل استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها قطعی هستند؛ با توجه به مسائل در دنیای واقعی و همچنین در نظر گرفتن ماهیت داده‌ها و ستاده‌ها در مدل‌های DEA، دیگر نمی‌توان به ریاضیات کلاسیک برای حل این مدل‌ها اکتفا کرد و برای حل این مشکل با در نظر گرفتن بعد خاکستری در منطق کلاسیک که همان منطق فازی است می‌توان نتایج به‌دست‌آمده در مدل‌های DEA را بهبود بخشید. تئوری مجموعه‌های فازی که در مقابل منطق قطعی است برای اولین بار توسط پروفیسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ مطرح شد که هدف اولیه او در آن زمان، توسعه مدلی کارآمدتر برای توصیف فرآیند پردازش زبان‌های طبیعی بود (لطفی زاده، ۱۹۷۸). رضایی و همکاران (۱۳۹۱) با استفاده از مدل بهبودیافته کائو و هوانگ برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای با داده‌های فازی استفاده کردند. بدین‌صورت که روش حل فازی بر اساس آلفا برش را برای یافتن بازه کارایی پیشنهاد کردند. ضمناً در مدل ارائه‌شده توسط کائو و هوانگ، کارایی کلی ثابت نبوده که در یافتن اندازه کارایی مرحله اول و دوم دقت کافی وجود نداشت و رضایی و همکاران به رفع برخی از نقاط ضعف آن پرداختند. خلیلی دامغانی و همکاران (۲۰۱۲) مدل فازی تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای کارا را برای محاسبه مقادیر کارایی هر DMU پیشنهاد کردند و از رویکرد شبیه‌سازی مونت کارلو برای رتبه‌بندی آن استفاده کردند. آن‌ها همچنین در مدل پیشنهادی خود، کارایی هر مرحله را نیز به‌صورت مجزا برای کسب نتایج دقیق‌تر ارائه دادند. مدل

¹ Decision Making Units

² Constant Return to scale

³ Variable Return to scale

⁴ Wang & Chin

پیشنهادی آن‌ها خطی و مستقل از متغیرهای آلفابرش بود. گالچ بیگی و غلامی (۲۰۱۴) مدلی را برای برآورد نمره کارایی DMU ها با ساختار دومرحله‌ای و داده‌های فازی پیشنهاد کردند. آن‌ها روش جدیدی را برای تخصیص منابع به DMU ها پیشنهاد کردند. هدف آن‌ها حفظ نمره کارایی DMU ها بعد از تخصیص بود. توانا و خلیلی دامغانی (۲۰۱۴) مدل فازی DEA دومرحله‌ای کارا را برای تخصیص مقادیر کارایی یک DMU و زیرمجموعه‌های DMU آن پیشنهاد کردند و از رویکرد تئوری بازی استاکلبرگ^۱ (رهبر، پیشرو) برای اولویت‌بندی و تجزیه مقادیر کارایی DMU ها به مجموعه‌ای از مقادیر کارایی زیرمجموعه‌های DMU استفاده کردند. مدل‌های پیشنهادی آن‌ها خطی و مستقل از متغیرهای آلفابرش بود. نباهات^۲ (۲۰۱۴) مدل دومرحله‌ای کائو و هوانگ را در محیط فازی که اعداد آن به صورت فازی مثلثی متقارن بودند ارائه داد و برای تبدیل آن به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی، از دیدگاه آلفابرش استفاده کرد. ژو و همکارانش (۲۰۱۷) مدل تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای فازی با خروجی‌های نامطلوب برای ارزیابی کردن سیستم بانکداری را پیشنهاد کردند. در این مقاله، سیستم بانکداری به دو زیرسیستم: مرحله تولید و مرحله سود تقسیم شده است. آن‌ها مدل خود را با دو فرض بازده به مقیاس ثابت و بازده به مقیاس متغیر و پارامترهای فازی با فاکتورهای غیرقطعی مطرح کردند و در پایان، مدل پیشنهادی‌شان را برای ارزیابی ۱۶ بانک تجاری چینی به کاربرند و تفاوت و مزیت مدل خود با دیگر مدل‌ها را بیان کردند. بازده به مقیاس، یک بحث بسیار مهم در تحلیل پوششی داده و اقتصاد است و می‌تواند اطلاعات مفیدی راجع به وضعیت واحدهای تصمیم‌گیرنده در اختیار ما بگذارد. بازده به مقیاس، مفهومی است بلندمدت که منعکس‌کننده نسبت افزایش در خروجی به ازای افزایش در میزان ورودی‌ها می‌باشد. تعاریف مختلفی از بازده به مقیاس وجود دارد که از آن جمله تعریفی است که در اقتصاد خرد از آن می‌شود؛ به این صورت که بازده به مقیاس، تأثیر عوامل تولید بر تولید است. در این مقاله بر اساس مدل قطعی چین و وانگ یک مدل جدید دومرحله‌ای DEA را با داده‌های فازی با فرض بازده به مقیاس متغیر ارائه می‌دهیم (وانگ و چین، ۲۰۱۰) و با استفاده از تکنیک آلفابرش مسئله اصلی را تبدیل به مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌کنیم. در ادامه برای تست مدل از کارگاه‌های صنعتی با ۱۰-۴۹ نفر کارکن استفاده کردیم.

۲- مفاهیم و پیش‌نیازها

مانند موارد دنیای واقعی، شاخص‌های کیفی با مقادیر بزرگ ابهام باید برای اندازه‌گیری ورودی‌ها و خروجی‌های هر مرحله در مدل تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شوند. اعداد فازی دوزنقه‌ای (TrFNs) در کل این مقاله برای توسعه مدل تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای در محیط فازی استفاده شده است. برای ایجاد مفهوم بهتر برخی تعاریف و مفاهیم در محیط فازی به صورت زیر ارائه شده است:

تعریف ۱-۲ (توانا و خلیلی دامغانی، ۲۰۱۴): فرض کنید X فضای گفتمان، $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد و مجموعه فازی \tilde{A} از X یک مجموعه از زوج‌های مرتب $\{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \dots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}$ است که در آن، $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت \tilde{A} و $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ درجه عضویت x_i در \tilde{A} است.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

$$\tilde{A} = \{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \dots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n))\} \quad \mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$$

تعریف ۲-۲ (توانا و خلیلی دامغانی، ۲۰۱۴): آلفابرش \tilde{A}_α و آلفابرش قوی $\tilde{A}_{\alpha+}$ مجموعه فازی \tilde{A} در فضای گفتمان X بر اساس فرمول‌های ۲ و ۳ تعریف می‌شوند که در آن $\alpha \in [0, 1]$ است.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x_i: \mu_{\tilde{A}}(x_i) \geq \alpha, x_i \in X\} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (2)$$

$$\tilde{A}_{\alpha+} = \{x_i: \mu_{\tilde{A}}(x_i) > \alpha, x_i \in X\} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (3)$$

¹ Stackelberg

² Nabahat

تعریف ۲-۳ (توانا و خلیلی دامغانی، ۲۰۱۴): یک عدد فازی ذوزنقه‌ای را می‌توان به‌عنوان $\tilde{X} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ تعریف کرد که در آن تابع عضویت $\mu_{\tilde{m}}$ از \tilde{m} به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x - x^1}{x^2 - x^1} & (x^1 \leq x \leq x^2) \\ 1 & (x^2 \leq x \leq x^3) \\ \frac{x^4 - x}{x^4 - x^3} & (x^3 \leq x \leq x^4) \end{cases} \quad (4)$$

که در آن $[x^2, x^3]$ یک فاصله نمای \tilde{x} و x^1 حدود بالا و x^2 حدود پایین \tilde{x} هستند. همانطور که مطرح شد، ما عدد فازی ذوزنقه‌ای (TrFNs) را در کل پژوهش لحاظ کرده‌ایم و محاسبه با این فرض بسط می‌یابد.

۳- مدل دومرحله‌ای وانگ و چین

در این قسمت، ابتدا به بیان مدل وانگ و چین که مدل دومرحله‌ای DEA چین و همکاران را تعمیم داده‌اند، پرداخته می‌شود. سپس در ادامه، یک مدل جدید فازی دومرحله‌ای بر اساس مدل وانگ و چین ارائه می‌دهیم. مدل‌های زیر، مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (LP) پیشنهادی توسط وانگ و چین را به‌منظور محاسبه کارایی بازده به مقیاس متغیر (VRS) کل فرآیند دومرحله‌ای ارائه می‌کند. فرض کنید که تعداد DMUها با ساختار دومرحله‌ای که باید ارزیابی شوند برابر n باشد و هر $DMU_j, (j=1,2,\dots,n)$ دارای m ورودی در مرحله اول، $X_{ij}, (i=1,2,\dots,m)$ و خروجی در این مرحله باشد، $Z_{dj}, (d=1,2,\dots,D)$ این خروجی، تبدیل به ورودی‌های مرحله دوم می‌شوند و به‌عنوان مقادیر میانی محسوب می‌شوند. خروجی مرحله دوم با $y_{rj}, (r=1,2,\dots,s)$ نشان داده می‌شوند. کارایی کل، با بازده به مقیاس متغیر در مدل وانگ و چین برابر است با (وانگ و چین، ۲۰۱۰):

$$\begin{aligned} e_0^* = \max & \lambda_1 \left(\sum_{d=1}^D w_d z_{d0} + \sigma_1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + \sigma_2 \right) \\ \text{s.t.} & \lambda_1 \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \lambda_2 \sum_{d=1}^D w_d z_{d0} = 1 \\ & \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sigma_1 \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} + \sigma_2 \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & w_d, v_i, u_r \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m ; r = 1, \dots, s ; d = 1, \dots, D). \\ & \sigma_1 \text{ and } \sigma_2 \text{ free in sign} \end{aligned} \quad (5)$$

برخی از تعاریف متغیرهای استفاده‌شده در مدل به‌صورت زیر است:

- v_i با $i=1,2,\dots,m$ نشان‌دهنده ضریب ورودی i ام در مرحله اول است.
- w_d^1 با $d=1,2,\dots,D$ نشان‌دهنده ضریب ورودی d ام در مرحله اول است.
- w_d^2 با $d=1,2,\dots,D$ نشان‌دهنده ضریب ورودی d ام در مرحله دوم است.
- u_r با $r=1,2,\dots,s$ نشان‌دهنده ضریب خروجی r ام در مرحله دوم است.
- λ_1, λ_2 وزن نسبی.



کارایی مرحله اول با بازده به مقیاس متغیر در مدل وانگ و چین برابر است با (وانگ و چین، ۲۰۱۰):

$$\begin{aligned}
 e_0^{1*} &= \max \sum_{d=1}^D w_d z_{d0} + \sigma_1 \\
 \text{s. t.} \quad &\sum_{i=1}^m x_{i0} v_i = 1 \\
 (\lambda_1 - \lambda_2 e_0^*) \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + \lambda_2 \sigma_2 &= \lambda_1 e_0^* \\
 \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sigma_1 &\leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} + \sigma_2 &\leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 w_d, v_i, u_r &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, m ; r = 1, \dots, s ; d = 1, \dots, D). \\
 \sigma_1 \text{ and } \sigma_2 &\text{ free in sign}
 \end{aligned} \tag{6}$$

کارایی مرحله دوم با بازده به مقیاس متغیر در مدل وانگ و چین برابر است با (وانگ و چین، ۲۰۱۰):

$$\begin{aligned}
 e_0^{2*} &= \max \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + \sigma_2 \\
 \text{s. t.} \quad &\sum_{d=1}^D w_d z_{d0} = 1 \\
 \lambda_2 \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + \lambda_2 \sigma_2 - \lambda_1 e_0^* \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \lambda_1 \sigma_1 &= \lambda_2 e_0^* - \lambda_1 \\
 \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sigma_1 &\leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} + \sigma_2 &\leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 w_d, v_i, u_r &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, m ; r = 1, \dots, s ; d = 1, \dots, D). \\
 \sigma_1 \text{ and } \sigma_2 &\text{ free in sign}
 \end{aligned} \tag{7}$$

۴- روش جدید

اعداد فازی ذوزنقه‌ای را به صورت گسترده به عنوان ورودی‌ها، معیارهای واسطه‌ای و خروجی‌های n در DMU با فرآیند دومرحله‌ای در نظر می‌گیریم. هر $DMU_j (j=1, 2, \dots, n)$ از m ورودی فازی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2, x_{ij}^3, x_{ij}^4), i = 1, 2, \dots, m$ برای تولید D معیار واسطه‌ای $\tilde{z}_{dj} = (z_{dj}^1, z_{dj}^2, z_{dj}^3, z_{dj}^4), d = 1, 2, \dots, D$ در مرحله اول استفاده می‌کند. تمامی معیارهای واسطه‌ای D به عنوان ورودی‌های مرحله دوم برای تولید s خروجی $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^1, y_{rj}^2, y_{rj}^3, y_{rj}^4)$ که $r = 1, 2, \dots, s$ استفاده می‌شود. برای یک آلفابرش دلخواه برای هر ورودی، معیار واسطه و خروجی، کران بالا و پایین توابع عضویت، به صورت معادلات (۸ تا ۱۳) محاسبه می‌شود (توانا و خلیلی دامغانی، ۲۰۱۴).

$$(x_{ij}^L)_{\alpha_i} = x_{ij}^1 + \alpha_i (x_{ij}^2 - x_{ij}^1), \quad \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \tag{8}$$

$$(x_{ij}^U)_{\alpha_i} = x_{ij}^4 - \alpha_i (x_{ij}^4 - x_{ij}^3), \quad \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \tag{9}$$

$$(z_{dj}^L)_{\alpha_d} = z_{dj}^1 + \alpha_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1), \quad \alpha_d \in [0, 1], d = 1, \dots, D ; j = 1, \dots, n \tag{10}$$

$$(z_{dj}^U)_{\alpha_d} = z_{dj}^4 - \alpha_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3), \quad \alpha_d \in [0, 1], d = 1, \dots, D ; j = 1, \dots, n \tag{11}$$

$$(y_{rj}^L)_{\alpha_r} = y_{rj}^1 + \alpha_r (y_{rj}^2 - y_{rj}^1), \quad \alpha_r \in [0, 1], r = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, n \tag{12}$$

$$(y_{rj}^U)_{\alpha_r} = y_{rj}^4 - \alpha_r (y_{rj}^4 - y_{rj}^3), \quad \alpha_r \in [0, 1], r = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, n \tag{13}$$



در این مرحله با جایگزینی معادلات (۸ تا ۱۳) در رابطه (۵) می‌توانیم کران بالا (e_0^U) و کران پایین (e_0^L) مقادیر کارایی کلی را با شاخص بازده به مقیاس متغیر (VRS) از طریق اعداد دوزنقه‌ای فازی به دست بیاوریم.

$$\begin{aligned}
 e_0^U = \max & \lambda_1 \left(\sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^L)_{\alpha_d} + \sigma_1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{r=1}^S u_r (y_{ro}^U)_{\alpha_r} + \sigma_2 \right) \\
 \text{s. t.} & \lambda_1 \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^L)_{\alpha_i} + \lambda_2 \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^U)_{\alpha_d} = 1 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^L)_{\alpha_d} - \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^U)_{\alpha_i} + \sigma_1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^U)_{\alpha_d} - \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^L)_{\alpha_i} + \sigma_1 \leq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{rj}^L)_{\alpha_r} - \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^U)_{\alpha_d} + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{ro}^U)_{\alpha_r} - \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^L)_{\alpha_d} + \sigma_2 \leq 0 \\
 & w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 & v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{14}$$

مدل کران بالای فوق، یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی است و بهینه عمومی آن نمی‌تواند به آسانی به دست آید. به علاوه مدل کران بالا، به آلفابرش بستگی دارد و باید برای سطوح مختلف آلفابرش با اندازه گام از پیش تعیین شده حل شود. به همین دلیل از معادلات (۸ تا ۱۳) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 e_0^U = \max & \sum_{d=1}^D \lambda_1 w_d (z_{do}^1 + \alpha_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)) + \sigma_1 + \max \sum_{r=1}^S \lambda_2 u_r (y_{ro}^4 - \alpha_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)) \\
 & + \sigma_2 \\
 & \lambda_1 \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^1 + \alpha_i (x_{io}^2 - x_{io}^1)) + \lambda_2 \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^4 - \alpha_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)) = 1 \\
 \text{s. t.} & \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^1 + \alpha_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)) - \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^4 - \alpha_i (x_{ij}^4 - x_{ij}^3)) + \sigma_1 \leq 0 \quad j \\
 & = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^4 - \alpha_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)) - \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^1 + \alpha_i (x_{io}^2 - x_{io}^1)) + \sigma_1 \leq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{rj}^1 + \alpha_r (y_{rj}^2 - y_{rj}^1)) - \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^4 - \alpha_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3)) + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{ro}^4 - \alpha_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)) - \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^1 + \alpha_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)) + \sigma_2 \leq 0 \\
 & w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 & v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{15}$$

در مدل فوق از حد پایین متغیرهای ورودی مرحله دوم و حد بالای متغیرهای خروجی مرحله دوم استفاده شده است. همچنین برای تمامی DMU ها و DMU های فرعی (خط سوم مدل)، متغیرهای ورودی حد بالا و متغیرهای خروجی حد پایین را اتخاذ می‌کنند. بنابراین مدل (۱۵)، حد بالای کارایی کل (e_0^U) را به دست می‌آورد. همچنین برای کران پایین داریم:

$$\begin{aligned}
 e_0^L &= \max \lambda_1 \left(\sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^U)_{\alpha_d} + \sigma_1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{r=1}^S u_r (y_{ro}^L)_{\alpha_r} + \sigma_2 \right) \\
 \text{s. t.} \quad & \lambda_1 \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^U)_{\alpha_i} + \lambda_2 \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^L)_{\alpha_d} = 1 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^U)_{\alpha_d} - \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^L)_{\alpha_i} + \sigma_1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^L)_{\alpha_d} - \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^U)_{\alpha_i} + \sigma_1 \leq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{rj}^U)_{\alpha_r} - \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^L)_{\alpha_d} + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{ro}^L)_{\alpha_r} - \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^U)_{\alpha_d} + \sigma_2 \leq 0 \\
 & w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 & v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 e_0^L &= \max \sum_{d=1}^D \lambda_1 w_d (z_{do}^4 - \alpha_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)) + \sigma_1 + \max \sum_{r=1}^S \lambda_2 u_r (y_{ro}^1 + \alpha_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)) + \sigma_1 \\
 \text{s. t.} \quad & \lambda_1 \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^4 - \alpha_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)) + \lambda_2 \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^1 + \alpha_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)) = 1 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^4 - \alpha_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3)) - \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^1 + \alpha_i (x_{ij}^2 - x_{ij}^1)) + \sigma_1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^1 + \alpha_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)) - \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}^4 - \alpha_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)) + \sigma_1 \leq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{rj}^4 - \alpha_r (y_{rj}^4 - y_{rj}^3)) - \sum_{d=1}^D w_d (z_{dj}^1 + \alpha_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)) + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{r=1}^S u_r (y_{ro}^1 + \alpha_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)) - \sum_{d=1}^D w_d (z_{do}^4 - \alpha_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)) + \sigma_2 \leq 0 \\
 & w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 & v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

فرض کنید $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, 2, \dots, m$ و $\alpha_r = \beta$, $r = 1, 2, \dots, s$ و $\alpha_d = \gamma$, $d = 1, 2, \dots, D$ برای تمامی ورودی‌ها، خروجی‌ها و معیارهای واسطه‌ای برقرار باشد. در اینجا $\rho_i = \alpha v_i$ را تعریف می‌کنیم که در آن $0 \leq \rho_i \leq v_i$ و $0 \leq \eta_r = \beta u_r$ به‌طوریکه $0 \leq \eta_r \leq u_r$ و $\theta_d = \gamma w_d$ که در آن $0 \leq \theta_d \leq w_d$ و $0 \leq \gamma \leq w_d$ (۱۸ تا ۲۳) می‌تواند برای کران بالا و پایین ورودی‌ها، خروجی‌ها و معیارهای واسطه‌ای در سطح آلفابرش دلخواه تعریف شود. توجه کنید که این تبدیل‌ها برای تضمین خطی بودن مدل (۲۴) و (۲۵) ضروری هستند.



$$\sum_{i=1}^m v_i(x_{ij}^L)_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^m v_i(x_{ij}^1 + \alpha(x_{ij}^2 - x_{ij}^1)) = \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^1 + \rho_i(x_{ij}^2 - x_{ij}^1)] \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i(x_{ij}^U)_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^m v_i(x_{ij}^4 - \alpha(x_{ij}^4 - x_{ij}^3)) = \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^4 - \rho_i(x_{ij}^4 - x_{ij}^3)] \quad (19)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r(y_{rj}^L)_{\alpha_r} = \sum_{r=1}^s u_r(y_{rj}^1 + \beta(y_{rj}^2 - y_{rj}^1)) = \sum_{r=1}^s [u_r y_{rj}^1 + \eta_r(y_{rj}^2 - y_{rj}^1)] \quad (20)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r(y_{rj}^U)_{\alpha_r} = \sum_{r=1}^s u_r(y_{rj}^4 - \beta(y_{rj}^4 - y_{rj}^3)) = \sum_{r=1}^s [u_r y_{rj}^4 - \eta_r(y_{rj}^4 - y_{rj}^3)] \quad (21)$$

$$\sum_{d=1}^D w_d(Z_{dj}^L)_{\alpha_d} = \sum_{d=1}^D w_d(z_{dj}^1 + \gamma(z_{dj}^2 - z_{dj}^1)) = \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d(z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] \quad (22)$$

$$\sum_{d=1}^D w_d(Z_{dj}^U)_{\alpha_d} = \sum_{d=1}^D w_d(z_{dj}^4 - \gamma(z_{dj}^4 - z_{dj}^3)) = \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d(z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] \quad (23)$$

با جایگزینی معادلات (۱۸ تا ۲۳) در مدل (۱۵)، مدل (۲۴) به دست می‌آید.

$$e_0^U = \lambda_1 \max \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d(z_{do}^2 - z_{do}^1)] + \sigma_1 + \lambda_2 \max \sum_{r=1}^s [u_r y_{ro}^4 - \eta_r(y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] + \sigma_2$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda_1 \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^1 + \rho_i(x_{io}^2 - x_{io}^1)] + \lambda_2 \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d(z_{do}^4 - z_{do}^3)] = 1$$

$$\sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d(z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^4 - \rho_i(x_{ij}^4 - x_{ij}^3)] + \sigma_1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$\sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d(z_{do}^4 - z_{do}^3)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^1 + \rho_i(x_{io}^2 - x_{io}^1)] + \sigma_1 \leq 0 \quad (24)$$

$$\sum_{r=1}^s [u_r y_{rj}^1 + \eta_r(y_{rj}^2 - y_{rj}^1)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d(z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$\sum_{r=1}^s [u_r y_{ro}^4 - \eta_r(y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d(z_{do}^2 - z_{do}^1)] + \sigma_2 \leq 0$$

$$w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s$$

جواب بر اساس مدل فوق همواره شدنی و کران‌دار است، چون تمام محدودیت‌ها در مدل، شدنی هستند و ورودی‌ها، مقادیر میانی و خروجی‌ها به همراه هر سطح از آلفابرش مستقل‌اند. بنابراین مدل فوق، شدنی است و کارایی تابع هدف برابر با مقدار بهینه است، به این معنا که در بهترین حالت ممکن مقدار e برابر با ۱ می‌باشد. با جایگزینی معادلات (۱۸ تا ۲۳) در مدل (۱۷)، مدل (۲۵) به دست می‌آید.

$$e_0^L = \lambda_1 \max \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d(z_{do}^4 - z_{do}^3)] + \sigma_1$$

$$+ \lambda_2 \max \sum_{r=1}^s (u_r y_{ro}^1 + \eta_r(y_{ro}^2 - y_{ro}^1)) + \sigma_1$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda_1 \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^4 - \rho_i(x_{io}^4 - x_{io}^3)] + \lambda_2 \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d(z_{do}^2 - z_{do}^1)] = 1 \quad (25)$$

$$\sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d(z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^1 + \rho_i(x_{ij}^2 - x_{ij}^1)] + \sigma_1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$\sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^4 - \rho_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)] + \sigma_1 \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^S [u_r y_{rj}^4 - \eta_r (y_{rj}^4 - y_{rj}^3)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$\sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] + \sigma_2 \leq 0$$

$$w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s$$

جواب بر اساس مدل فوق، همانند مدل (۲۴)، همواره شدنی و کران‌دار است.

مدل‌های (۲۴) و (۲۵) اکنون مدل‌های برنامه‌ریزی خطی هستند که شکل عمومی تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای دیفازی شده مدل فازی (۱۶) و (۱۷) مربوطه می‌باشند. مدل‌های (۲۴) و (۲۵) بر اساس شرایط خوش‌بینانه و بدبینانه توسعه یافته است. مقادیر بهینه θ_d و ρ_i و η_r از طریق بهینه‌سازی مدل در جهت حداکثر سازی توابع بهینه مدل‌های (۲۴) و (۲۵) محاسبه می‌شوند. این امر منجر به کاهش چشمگیر در انجام محاسبات می‌شود. بنابراین نیاز به اجرای مدل‌های (۲۴) و (۲۵) برای مقادیر مختلف متغیرهای مبتنی بر آلفا برش است.

۱-۴ مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی پیشنهادی در مرحله اول

۱-۱-۴ کران بالا در مرحله اول

با اعمال روش‌های انجام‌شده در مدل‌های قبل بر روی مدل (۶) منتج به ایجاد مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت مدل (۲۶) می‌شود که می‌تواند مقادیر خوش‌بینانه حداکثر کارایی دست‌یافتنی DMU فرعی را در مرحله اول اندازه‌گیری کند.

$$[e_0^{1+}]^U = \max \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] + \sigma_1$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^1 + \rho_i (x_{io}^2 - x_{io}^1)] = 1$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2 e_0^{U*}) \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] + \lambda_1 \sigma_1$$

$$+ \lambda_2 \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^4 - \eta_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] + \lambda_2 \sigma_2 = \lambda_1 e_0^{U*}$$

$$\sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^4 - \rho_i (x_{ij}^4 - x_{ij}^3)] + \sigma_1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$\sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^1 + \rho_i (x_{io}^2 - x_{io}^1)] + \sigma_1 \leq 0 \tag{26}$$

$$\sum_{r=1}^S [u_r y_{rj}^1 + \eta_r (y_{rj}^2 - y_{rj}^1)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] + \sigma_2 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$\sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^4 - \eta_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] + \sigma_2 \leq 0$$

$$w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s$$

همچنین در مدل فوق مقدار e_0^{U*} برابر است با :

$$\sum_{r=1}^s [u_r y_{ro}^4 - \eta_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] = e_0^{U*} \quad (27)$$

جواب بر اساس مدل فوق همانند مدل (24) همواره شدنی و کران دار است.

۲-۱-۴ کران پایین در مرحله اول

$$\begin{aligned}
 [e_0^{1+}]^L &= \max \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] + \sigma_1 \\
 \text{s. t.} \quad &\sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^4 - \rho_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)] = 1 \\
 (\lambda_1 - \lambda_2 e_0^{L*}) &\sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] + \lambda_1 \sigma_1 \\
 &+ \lambda_2 \sum_{r=1}^s [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] + \lambda_2 \sigma_2 = \lambda_1 e_0^{L*} \\
 \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^1 + \rho_i (x_{ij}^2 - x_{ij}^1)] + \sigma_1 &\leq 0 \quad j \\
 &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^4 - \rho_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)] + \sigma_1 &\leq 0 \\
 \sum_{r=1}^s [u_r y_{rj}^4 - \eta_r (y_{rj}^4 - y_{rj}^3)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] + \sigma_2 &\leq 0 \quad j \\
 &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 \sum_{r=1}^s [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] + \sigma_2 &\leq 0 \\
 w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \quad (28)$$

همچنین در مدل فوق مقدار e_0^{L*} برابر است با :

$$\sum_{r=1}^s [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] = e_0^{L*} \quad (29)$$

جواب بر اساس مدل فوق همانند مدل (24) همواره شدنی و کران دار است.

۲-۴ مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی در مرحله دوم

در این قسمت، با اعمال روش‌های انجام شده همانند مرحله اول بر روی مدل (۷) مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت مدل (۳۰) و (۳۱) ایجاد می‌شود که می‌تواند مقادیر خوش بینانه و بدبینانه حداکثر کارایی دست‌یافتنی DMU فرعی را در مرحله دوم اندازه‌گیری کند.

۲-۴-۱ کران بالا در مرحله دوم



$$\begin{aligned}
 [e_0^{2+}]^U &= \max \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^4 - \eta_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] + \sigma_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] = 1 \\
 \lambda_2 \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^4 - \eta_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] + \lambda_2 \sigma_2 \\
 & - \lambda_1 e_0^{U*} \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^1 + \rho_i (x_{io}^2 - x_{io}^1)] + \lambda_1 \sigma_1 = \lambda_2 e_0^{U*} - \lambda_1 \\
 \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^4 - \rho_i (x_{ij}^4 - x_{ij}^3)] + \sigma_1 &\leq 0 \quad j \\
 &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^1 + \rho_i (x_{io}^2 - x_{io}^1)] + \sigma_1 &\leq 0 \\
 \sum_{r=1}^S [u_r y_{rj}^1 + \eta_r (y_{rj}^2 - y_{rj}^1)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] + \sigma_2 &\leq 0 \quad j \\
 &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^4 - \eta_r (y_{ro}^4 - y_{ro}^3)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] + \sigma_2 &\leq 0 \\
 w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{30}$$

جواب بر اساس مدل فوق همانند مدل (۲۴) همواره شدنی و کران دار است.

۲-۲-۴ کران پایین در مرحله دوم

$$\begin{aligned}
 [e_0^{2+}]^L &= \max \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] + \sigma_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] = 1 \\
 \lambda_2 \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] + \lambda_2 \sigma_2 - \lambda_1 e_0^{L*} \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^4 - \rho_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)] + \lambda_1 \sigma_1 \\
 &= \lambda_2 e_0^{L*} - \lambda_1 \\
 \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^4 - \theta_d (z_{dj}^4 - z_{dj}^3)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{ij}^1 + \rho_i (x_{ij}^2 - x_{ij}^1)] + \sigma_1 &\leq 0 \quad j \\
 &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^1 + \theta_d (z_{do}^2 - z_{do}^1)] - \sum_{i=1}^m [v_i x_{io}^4 - \rho_i (x_{io}^4 - x_{io}^3)] + \sigma_1 &\leq 0 \\
 \sum_{r=1}^S [u_r y_{rj}^4 - \eta_r (y_{rj}^4 - y_{rj}^3)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{dj}^1 + \theta_d (z_{dj}^2 - z_{dj}^1)] + \sigma_2 &\leq 0 \quad j \\
 &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0 \\
 \sum_{r=1}^S [u_r y_{ro}^1 + \eta_r (y_{ro}^2 - y_{ro}^1)] - \sum_{d=1}^D [w_d z_{do}^4 - \theta_d (z_{do}^4 - z_{do}^3)] + \sigma_2 &\leq 0 \\
 w_d \geq 0 \quad , \quad d = 1, 2, \dots, D \\
 v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \tag{31}$$

جواب بر اساس مدل فوق همانند مدل (۲۴) همواره شدنی و کران دار است.

لازم به ذکر است که کارایی نهایی از فرمول زیر به دست می آید:

$$e = (w_1 \times e_0^U) + (w_2 \times e_0^L). \quad (۳۲)$$

مقادیر w_1 و w_2 نیز از دو فرمول زیر حاصل می شود:

$$w_1 = \frac{\lambda_1 (\sum_{d=1}^D w_d z_{d0} + \sigma_1)}{\lambda_1 (\sum_{d=1}^D w_d z_{d0} + \sigma_1) + \lambda_2 (\sum_{r=1}^S u_r y_{r0} + \sigma_2)}. \quad (۳۳)$$

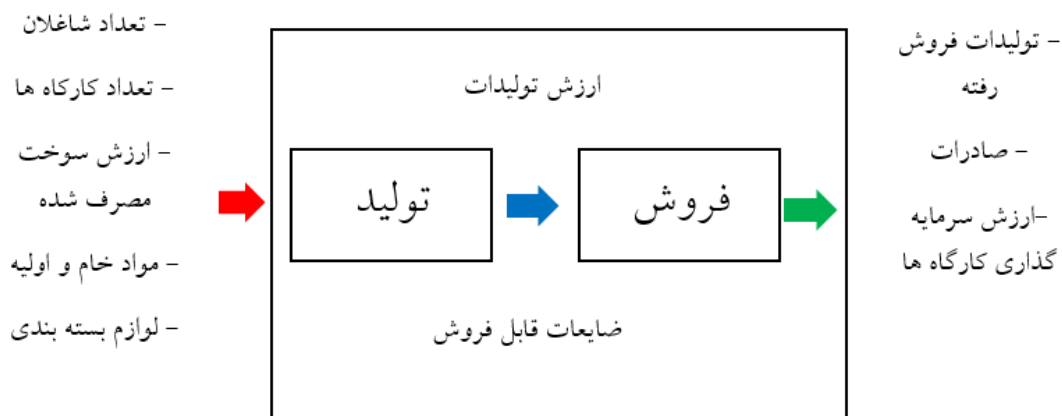
$$w_2 = \frac{\lambda_2 (\sum_{r=1}^S u_r y_{r0} + \sigma_2)}{\lambda_1 (\sum_{d=1}^D w_d z_{d0} + \sigma_1) + \lambda_2 (\sum_{r=1}^S u_r y_{r0} + \sigma_2)}. \quad (۳۴)$$

مقادیر λ_1 و λ_2 در مدل های ذکر شده در این مقاله برابر با ۰/۵ می باشد و برای روابط (۳۳ تا ۳۴) به ترتیب برابر با ۰/۴ و ۰/۶ است.

۵- اجرای مدل

هدف از انجام مقاله حاضر، استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده ها دمرحله ای فازی برای سنجش کارایی می باشد. لذا به این منظور در این مقاله از مدل مطرح شده برای تعیین کارایی کارگاه های صنعتی ۱۰ تا ۴۹ نفر کارکن کشور در سال ۱۳۹۳ استفاده شده است. در این قسمت نتایج کارایی حاصل از حل این مدل ها ارائه می گردد و نشان داده می شود که کدام یک از واحدها کارا و کدام یک ناکارا عمل می کنند. برای انجام محاسبات از نرم افزار گمز استفاده می گردد.

۵-۱- تعریف سطوح تحلیل پوششی داده ها دمرحله ای مقاله



شکل ۱- نمایش فرآیند دمرحله ای مورد بررسی.

در این مقاله فرآیند دمرحله ای را به دو قسمت تولید و فروش تفکیک می کنیم.

تولید: در قسمت تولید، تمام اجزا و مواد مورد نیاز جهت تولید محصول و خروجی پایانی مورد نظر است که مرحله اول پژوهش می باشد.

فروش: ارزش خروجی که در بخش تولید به دست آمده با میزان درآمد حاصل از فعالیت های انجام شده، مورد بررسی قرار می گیرد.



نتایج حاصله از کارایی کارگاه‌های صنعتی در جداول زیر نمایش داده می‌شود.

جدول ۱- خروجی نهایی برحسب $\alpha=1$.

ردیف	استان	کران بالا	کران پایین	w1	w2	کارایی	رتبه
۱	کل کشور	۰/۸۳۴۵	۰/۶۱۴۱	۰/۵۸۳۳	۰/۴۱۶۷	۰/۷۴۲۷	۱۳
۲	آذربایجان شرقی	۰/۸۲۰۷	۰/۶۱۹۱	۰/۵۸۰۰	۰/۴۲۰۰	۰/۷۳۶۰	۲۱
۳	آذربایجان غربی	۰/۸۴۷۰	۰/۶۲۴۲	۰/۵۸۴۵	۰/۴۱۵۵	۰/۷۵۴۴	۹
۴	اردبیل	۰/۸۲۳۹	۰/۶۲۱۳	۰/۵۸۱۲	۰/۴۱۸۸	۰/۷۳۹۱	۱۷
۵	اصفهان	۰/۸۲۳۳	۰/۶۲۰۸	۰/۵۸۰۹	۰/۴۱۹۱	۰/۷۳۸۴	۱۸
۶	البرز	۰/۷۹۹۵	۰/۶۵۹۳	۰/۵۴۴۱	۰/۴۵۵۹	۰/۷۳۵۶	۲۲
۷	ایلام	۰/۸۴۵۹	۰/۶۳۵۵	۰/۵۸۴۶	۰/۴۱۵۴	۰/۷۵۸۵	۶
۸	بوشهر	۰/۸۰۰۰	۰/۶۱۸۳	۰/۵۸۰۴	۰/۴۱۹۶	۰/۷۲۳۸	۲۸
۹	تهران	۰/۸۲۴۹	۰/۶۲۱۸	۰/۵۸۱۷	۰/۴۱۸۳	۰/۷۳۹۹	۱۶
۱۰	چهارمحال و بختیاری	۰/۸۲۰۰	۰/۶۳۰۰	۰/۵۸۰۶	۰/۴۱۹۴	۰/۷۴۰۳	۱۵
۱۱	خراسان جنوبی	۰/۷۹۶۲	۰/۶۱۴۸	۰/۵۷۷۵	۰/۴۲۲۵	۰/۷۱۹۶	۳۱
۱۲	خراسان رضوی	۰/۸۴۷۵	۰/۶۳۵۸	۰/۵۸۶۶	۰/۴۱۳۴	۰/۷۶۰۰	۴
۱۳	خراسان شمالی	۰/۸۷۱۵	۰/۶۲۰۰	۰/۶۱۰۲	۰/۳۸۹۸	۰/۷۷۳۵	۲
۱۴	خوزستان	۰/۷۹۸۶	۰/۶۱۷۷	۰/۵۷۹۰	۰/۴۲۱۰	۰/۷۲۲۴	۲۹
۱۵	زنجان	۰/۷۹۷۰	۰/۶۱۶۷	۰/۵۷۸۱	۰/۴۲۱۹	۰/۷۲۰۹	۳۰
۱۶	سمنان	۰/۷۹۹۴	۰/۶۴۷۷	۰/۵۶۱۵	۰/۴۳۸۵	۰/۷۳۲۹	۲۳
۱۷	سیستان و بلوچستان	۰/۷۹۶۷	۰/۶۲۶۰	۰/۵۷۸۱	۰/۴۲۱۹	۰/۷۲۴۷	۲۷
۱۸	فارس	۰/۷۹۵۶	۰/۵۹۵۳	۰/۵۹۶۸	۰/۴۰۳۲	۰/۷۱۴۸	۳۲
۱۹	قزوین	۰/۸۴۵۲	۰/۶۳۴۵	۰/۵۸۴۱	۰/۴۱۵۹	۰/۷۵۷۶	۷
۲۰	قم	۰/۸۲۰۷	۰/۶۱۹۸	۰/۵۸۰۶	۰/۴۱۹۴	۰/۷۳۶۴	۲۰
۲۱	کردستان	۰/۸۴۵۰	۰/۶۱۴۶	۰/۵۸۳۳	۰/۴۱۶۷	۰/۷۴۹۰	۱۲
۲۲	کرمان	۰/۸۲۱۷	۰/۶۲۰۰	۰/۵۸۰۶	۰/۴۱۹۴	۰/۷۳۷۱	۱۹
۲۳	کرمانشاه	۰/۷۹۸۵	۰/۶۲۷۰	۰/۵۷۸۸	۰/۴۲۱۲	۰/۷۲۶۳	۲۶
۲۴	کهگیلویه و بویراحمد	۰/۷۹۷۹	۰/۶۴۷۵	۰/۵۶۰۶	۰/۴۳۹۴	۰/۷۳۱۸	۲۴
۲۵	گلستان	۰/۸۷۰۰	۰/۶۲۰۰	۰/۶۰۷۱	۰/۳۹۲۹	۰/۷۷۱۸	۳
۲۶	گیلان	۰/۸۴۳۵	۰/۶۲۴۲	۰/۵۸۲۴	۰/۴۱۷۶	۰/۷۵۱۹	۱۱
۲۷	لرستان	۰/۸۲۱۲	۰/۶۳۰۵	۰/۵۸۱۶	۰/۴۱۸۴	۰/۷۴۱۴	۱۴
۲۸	مازندران	۰/۸۴۵۰	۰/۶۲۴۲	۰/۵۸۳۳	۰/۴۱۶۷	۰/۷۵۳۰	۱۰
۲۹	مرکزی	۰/۸۴۶۵	۰/۶۳۵۶	۰/۵۸۵۰	۰/۴۱۵۰	۰/۷۵۹۰	۵
۳۰	هرمزگان	۰/۸۹۷۵	۰/۵۸۷۵	۰/۶۳۴۶	۰/۳۶۵۴	۰/۷۸۴۲	۱
۳۱	همدان	۰/۸۴۴۵	۰/۶۳۴۵	۰/۵۸۳۳	۰/۴۱۶۷	۰/۷۵۷۰	۸
۳۲	یزد	۰/۷۹۸۴	۰/۶۳۷۹	۰/۵۶۰۶	۰/۴۳۹۴	۰/۷۲۷۹	۲۵



جدول ۲- خروجی مرحله اول برحسب $\alpha=1$.

ردیف	استان	کران بالا	کران پایین	w1	w2	کارایی
۱	کل کشور	۱	۱	۰/۷۱۹۵	۰/۲۸۰۵	۱
۲	آذربایجان شرقی	۱	۱	۰/۶۸۱۸	۰/۳۱۸۲	۱
۳	آذربایجان غربی	۱	۱	۰/۶۹۵۵	۰/۳۰۴۵	۱
۴	اردبیل	۱	۱	۰/۷۴۵۶	۰/۲۵۴۴	۱
۵	اصفهان	۱	۱	۰/۷۳۹۴	۰/۲۶۰۶	۱
۶	البرز	۱	۱	۰/۶۴۵۸	۰/۳۵۴۲	۱
۷	ایلام	۱	۱	۰/۶۷۹۳	۰/۳۲۰۷	۱
۸	بوشهر	۱	۱	۰/۷۳۵۰	۰/۲۶۵۰	۱
۹	تهران	۱	۱	۰/۷۲۲۰	۰/۲۷۸۰	۱
۱۰	چهارمحال و بختیاری	۱	۱	۰/۷۱۲۱	۰/۲۸۷۹	۱
۱۱	خراسان جنوبی	۱	۱	۰/۷۸۳۸	۰/۲۱۶۲	۱
۱۲	خراسان رضوی	۱	۱	۰/۷۱۸۴	۰/۲۸۱۶	۱
۱۳	خراسان شمالی	۱	۱	۰/۷۰۷۹	۰/۲۹۲۱	۱
۱۴	خوزستان	۱	۱	۰/۷۴۳۶	۰/۲۵۶۴	۱
۱۵	زنجان	۱	۱	۰/۶۹۷۷	۰/۳۰۲۳	۱
۱۶	سمنان	۱	۱	۰/۶۷۶۹	۰/۳۲۳۱	۱
۱۷	سیستان و بلوچستان	۱	۱	۰/۷۱۰۰	۰/۲۹۰۰	۱
۱۸	فارس	۱	۱	۰/۷۹۱۷	۰/۲۰۸۳	۱
۱۹	قزوین	۱	۱	۰/۷۱۵۵	۰/۲۸۴۵	۱
۲۰	قم	۱	۱	۰/۶۷۷۸	۰/۳۲۲۲	۱
۲۱	کردستان	۱	۱	۰/۷۰۳۶	۰/۲۹۶۴	۱
۲۲	کرمان	۱	۱	۰/۶۹۸۸	۰/۳۰۱۲	۱
۲۳	کرمانشاه	۱	۱	۰/۷۳۷۵	۰/۲۶۲۵	۱
۲۴	کهگیلویه و بویراحمد	۱	۱	۰/۶۷۵۸	۰/۳۲۴۲	۱
۲۵	گلستان	۱	۱	۰/۷۲۸۵	۰/۲۷۱۵	۱
۲۶	گیلان	۱	۱	۰/۶۹۳۲	۰/۳۰۶۸	۱
۲۷	لرستان	۱	۱	۰/۷۲۳۶	۰/۲۷۶۴	۱
۲۸	مازندران	۱	۱	۰/۷۱۴۳	۰/۲۸۵۷	۱
۲۹	مرکزی	۱	۱	۰/۶۸۰۲	۰/۳۱۹۸	۱
۳۰	هرمزگان	۱	۱	۰/۷۵۶۴	۰/۲۴۳۶	۱
۳۱	همدان	۱	۱	۰/۶۷۷۸	۰/۳۲۲۲	۱
۳۲	یزد	۱	۱	۰/۷۱۸۹	۰/۲۸۱۱	۱



جدول ۳- خروجی مرحله دوم برحسب $\alpha=1$.

ردیف	استان	کران بالا	کران پایین	w1	w2	کارایی
۱	کل کشور	۱	۰/۶۳۸۵	۰/۶۵۵۷	۰/۳۴۴۳	۰/۸۷۵۵
۲	آذربایجان شرقی	۱	۰/۶۶۷۴	۰/۶۱۰۰	۰/۳۹۰۰	۰/۸۷۰۳
۳	آذربایجان غربی	۱	۰/۷۱۱۱	۰/۶۰۸۳	۰/۳۹۱۷	۰/۸۸۶۸
۴	اردبیل	۱	۰/۶۴۷۰	۰/۶۲۵۰	۰/۳۷۵۰	۰/۸۶۷۶
۵	اصفهان	۱	۰/۶۵۵۹	۰/۶۱۳۳	۰/۳۸۶۷	۰/۸۶۶۹
۶	البرز	۱	۰/۶۷۲۶	۰/۵۹۷۰	۰/۴۰۳۰	۰/۸۶۸۱
۷	ایلام	۱	۰/۷۱۹۷	۰/۶۰۶۱	۰/۳۹۳۹	۰/۸۸۹۶
۸	بوشهر	۱	۰/۶۲۴۳	۰/۶۱۶۵	۰/۳۸۳۵	۰/۸۵۵۹
۹	تهران	۱	۰/۶۵۹۲	۰/۶۱۵۴	۰/۳۸۴۶	۰/۸۶۸۹
۱۰	چهارمحال و بختیاری	۱	۰/۶۷۱۷	۰/۶۱۷۲	۰/۳۸۲۸	۰/۸۷۴۳
۱۱	خراسان جنوبی	۱	۰/۶۰۵۵	۰/۶۲۵۰	۰/۳۷۵۰	۰/۸۵۲۱
۱۲	خراسان رضوی	۱	۰/۷۱۲۶	۰/۶۱۹۲	۰/۳۸۰۸	۰/۸۹۴۴
۱۳	خراسان شمالی	۱	۰/۷۵۷۰	۰/۶۰۷۰	۰/۳۹۳۰	۰/۹۰۴۵
۱۴	خوزستان	۱	۰/۶۰۹۲	۰/۶۲۵۰	۰/۳۷۵۰	۰/۸۵۳۵
۱۵	زنجان	۱	۰/۶۳۴۰	۰/۶۰۸۴	۰/۳۹۱۶	۰/۸۵۶۷
۱۶	سمنان	۱	۰/۶۵۷۶	۰/۶۰۷۵	۰/۳۹۲۵	۰/۸۶۵۶
۱۷	سیستان و بلوچستان	۱	۰/۶۲۸۵	۰/۶۱۴۸	۰/۳۸۵۲	۰/۸۵۶۹
۱۸	فارس	۱	۰/۵۸۱۸	۰/۶۳۴۹	۰/۳۶۵۱	۰/۸۴۷۳
۱۹	قزوین	۱	۰/۷۱۲۸	۰/۶۱۵۲	۰/۳۸۴۸	۰/۸۸۹۵
۲۰	قم	۱	۰/۶۶۷۹	۰/۶۰۷۱	۰/۳۹۲۹	۰/۸۶۹۵
۲۱	کردستان	۱	۰/۶۹۹۴	۰/۶۰۶۶	۰/۳۹۳۴	۰/۸۸۱۷
۲۲	کرمان	۱	۰/۶۶۷۴	۰/۶۰۶۱	۰/۳۹۳۹	۰/۸۶۹۰
۲۳	کرمانشاه	۱	۰/۶۲۸۷	۰/۶۱۵۴	۰/۳۸۴۶	۰/۸۵۷۲
۲۴	کهگیلویه و بویراحمد	۱	۰/۶۵۵۷	۰/۶۰۶۱	۰/۳۹۳۹	۰/۸۶۴۴
۲۵	گلستان	۱	۰/۷۵۱۰	۰/۶۱۵۰	۰/۳۸۵۰	۰/۹۰۴۱
۲۶	گیلان	۱	۰/۷۰۹۵	۰/۶۰۶۱	۰/۳۹۳۹	۰/۸۸۵۶
۲۷	لرستان	۱	۰/۶۶۹۳	۰/۶۱۵۴	۰/۳۸۴۶	۰/۸۷۲۸
۲۸	مازندران	۱	۰/۷۰۲۴	۰/۶۱۵۹	۰/۳۸۴۱	۰/۸۸۵۷
۲۹	مرکزی	۱	۰/۷۲۳۸	۰/۶۰۷۷	۰/۳۹۲۳	۰/۸۹۱۶
۳۰	هرمزگان	۱	۰/۷۸۳۶	۰/۶۱۵۴	۰/۳۸۴۶	۰/۹۱۶۸
۳۱	همدان	۱	۰/۷۱۷۵	۰/۶۰۵۰	۰/۳۹۵۰	۰/۸۸۸۴
۳۲	یزد	۱	۰/۶۳۶۹	۰/۶۱۵۴	۰/۳۸۴۶	۰/۸۶۰۴

۶- نتیجه‌گیری

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک، DMUها را به‌عنوان "جعبه‌های سیاه" مشاهده می‌کنند که مجموعه‌ای از ورودی‌ها را برای تولید مجموعه‌ای از خروجی‌ها استفاده می‌کنند و مقادیر میانی در یک DMU در نظر گرفته نمی‌شود. در این مقاله، یک مدل جدید دومرحله‌ای فازی برای تحلیل پوششی داده‌ها ارائه گردید و مقدار کارایی به دو مرحله تقسیم شد که کران پایین و کران بالا در مقدار کارایی، با استفاده از روش پیشنهادی دومرحله‌ای فازی محاسبه گردید. سپس برای اعتبارسنجی مدل، کارایی کارگاه‌های صنعتی بین ۱۰ تا ۴۹ نفر کارکن موردبررسی قرار گرفت و نتایج آن در جداولی



مشخص شد. محتویات جدول و بررسی‌های انجام‌شده به وسیله مدل مطرح‌شده، مشخص نمود که این کارگاه‌های صنعتی در سال ۱۳۹۳، کارا نبودند. از آنجایی که در این مقاله از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها دو مرحله‌ای فازی استفاده شده است لذا کارگاه‌ها در دو بخش، مورد بررسی قرار گرفتند که بخش اول، تولید و بخش دوم، فروش کارگاه‌ها بود. ما توانستیم منبع این ناکارایی را در مرحله اول یا دوم بررسی کنیم. با توجه به اینکه مقدار کارایی در مرحله اول برای تمامی واحدها برابر با ۱ بود، نتیجه گرفتیم که منبع تغییرات در مقدار کارایی برای DMU ها، اولین مرحله نیست. این بدان معنی است که منبع ناکارآمدی DMU ها را می‌توان در مرحله دوم یافت. از این اطلاعات استفاده شده و به این نتیجه رسیدیم که کران‌های پایین و بالا از کارایی کل واحدها کمتر از ۱ بوده‌اند. در مرحله اول، کران‌های بالا و پایین از مقدار کارایی همه واحدها، برابر با ۱ بودند. در مرحله دوم، مقدار کارایی تمام DMU ها کمتر از یک بود. به‌طور خلاصه، مقدار کارایی در مرحله دوم کمتر از مقدار کارایی در مرحله اول برای تمام واحدهای کارگاه‌های صنعتی است. به‌عبارت‌دیگر، واحدها به‌طور کلی در تبدیل ورودی‌های (منابع) خود به خروجی‌ها موفق نبودند؛ یعنی منبع این ناکارایی، اجرای نامناسب در مرحله دوم برای همه واحدها می‌باشد.

منابع فارسی

- احمدی، غلامرضا و نورا، عباسعلی. (۱۳۹۰). بررسی کارایی فرآیندهای چند مرحله‌ای با ساختار سری به روش تحلیل پوششی داده‌ها. سومین همایش تحلیل پوششی داده‌ها، دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه، ۸-۱.
- نجفی، سید اسماعیل و عاشور، ندا. (۱۳۹۰). اندازه‌گیری عملکرد هتل‌های ایران با کمک تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای. سومین همایش تحلیل پوششی داده‌ها، دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه.
- رستمی مال خلیفه، محسن و آقابابا زاده، زینب. (۱۳۹۰). مدل‌هایی جهت ارزیابی کارایی کل یک شبکه بازه‌ای دو مرحله‌ای. سومین همایش ملی تحلیل پوششی داده‌ها، دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه.
- عمرانی، هاشم، قاری زاده بیرق، رامین و سلیمانپور، مقصود. (۱۳۹۲). طراحی سیستم ارزیابی عملکرد و رتبه بندی شرکت‌های برق منطقه‌ای ایران با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای. بیست و هشتمین کنفرانس بین‌المللی برق تهران-ایران.
- سالاری، مصطفی، زندیه، مصطفی. (۱۳۹۵). ارزیابی کارایی فروشگاه‌های اینترنتی با استفاده از مدل دو مرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها. پژوهش‌های مدیریت در ایران ۲۰(۳)، ۱۲۷-۱۵۲.
- رضایی، صادق، رستمی مال خلیفه، محسن، پایان، علی و اویسی، صالح. (۱۳۹۱). محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده دو مرحله‌ای با داده‌های فازی. چهارمین کنفرانس ملی تحلیل پوششی داده‌ها، دانشگاه مازندران.
- فرحناک رودسری، منا، حاله، حسن و حسین زاده لطفی، فرهاد. (۱۳۹۴). رتبه بندی شعب بانک با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با ورودی و خروجی فازی (مطالعه موردی: شعب بانک ملت تهران). کنفرانس بین‌المللی مدیریت، اقتصاد و مهندسی صنایع، تهران، موسسه مدیران ایده پرداز پایتخت ویرا.
- حسین زاده لطفی، فرهاد و رضوی، مریم. (۱۳۹۰). ارزیابی عملکرد شرکت‌های برق منطقه‌ای کشور با استفاده از DEA فازی، سومین همایش تحلیل پوششی داده‌ها/دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه.

منابع انگلیسی

- Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European journal of operational research*, 197(1), 243-252.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J. (1985). Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of econometrics*, 30(1-2), 91-107.
- Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, 185(1), 418-429.
- Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European journal of operational research*, 196(3), 1170-1176.
- Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2010). Some alternative DEA models for two-stage process. *Expert systems with applications*, 37(12), 8799-8808.
- Forghani, A., & Najafi, E. (2015). Sensitivity Analysis in Two-Stage DEA. *Iranian journal of optimization*, 7(2), 857-864.
- Khalili-Damghani, K., Taghavi-Fard, M., & Abtahi, A. R. (2012). A fuzzy two-stage DEA approach for performance measurement: real case of agility performance in dairy supply chains. *International journal of applied decision sciences*, 5(4), 293-317.
- Beigi, Z. G., & Gholami, K. (2014). Allocating the fuzzy resources to two-stage systems. *Journal of soft computing and applications*, 2014(unknown), 1-11.

- Tavana, M., & Khalili-Damghani, K. (2014). A new two-stage Stackelberg fuzzy data envelopment analysis model. *Measurement*, 53, 277-296.
- Nabahat., M. (2014). Two-stage DEA with Fuzzy Data. *International journal of applied operational research*, 5(1), 51-61. Retrieved from <http://ijorlu.liau.ac.ir/>.
- Zhou, X., Luo, R., Lev, B., & Tu, Y. (2017, July). Two-Stage Fuzzy DEA Models with Undesirable Outputs for Banking System. *Proceedings of eleventh international conference on management science and engineering management*, 1604-1615. https://doi.org/10.1007/978-3-319-59280-0_135.
- Najafi, H. S., & Edalatpanah, S. A. (2013). An improved model for iterative algorithms in fuzzy linear systems. *Computational mathematics and modeling*, 24(3), 443-451.
- Najafi, H. S., & Edalatpanah, S. A. (2013). A note on "A new method for solving fully fuzzy linear programming problems." *Applied mathematical modelling*, 37(14-15), 7865-7867.

