E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 9, No. 1 (1403) 17–29.

Paper Type: Original Article

Binary Fuzzy Linear Programming Problems: A New Solution Approach

Malihe Niksirat[1,*], Majid Abdolrazzagh-Nezhad[1]

[1] *Department of Computer Science, Faculty of Computer and Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Iran; niksirat@birjandut.ac.ir; abdolrazzagh@birjandut.ac.ir.*

Citation:

Niksirat, M., & Abdolrazzagh-Nezhad, M. (2024). Binary fuzzy linear programming problems: a ne solution. *Journal of decisions and operations research, 9*(1), 17-29.

Received: 18/08/2022 Reviewed: 20/09/2022 Revised: 09/10/2022 Accepted: 11/11/2022

Abstract

Purpose: In this paper, a Binary Fuzzy Linear Programming Problem (BFLPP) with fuzzy objective function and fuzzy constraints is considered. This paper proposes a new approach that solves the problem based on Kerre's adapted method, which maintains the assumption of being fuzzy in the solving process. Therefore, the solution is more consistent with the uncertainty governing the problem.

Methodology: This paper proposes a new fuzzy branch-and-bound approach based on Kerre's adapted method to solve the fuzzy binary integer programming problem. In each node of the branch-and-bound tree, the linear relaxation of the fuzzy problem is solved with a new fuzzy simplex method based on Kerre's adapted method.

Findings: Numerical examples are presented to illustrate the proposed method step by step, and the results are compared with those of other approaches that solve fuzzy binary integer programming problems.

Originality/Value: Unlike the available defuzzification procedures and fuzzy ranking functions in the research problem literature, the proposed approach considers the assumption of being fuzzy in the solution process and thus offers a more realistic solution.

Keywords: Fuzzy binary integer programming problem, Fuzzy branch-and-bound algorithm, Fuzzy simplex algorithm, Adapted Kerre's method.

Corresponding Author: niksirat@birjandut.ac.ir

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۹، شماره (۱)، (۱۴۰۳)، ۲۹-۱۷

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی دودویی: یک راهکار جدید

ملیحه نیک‌سیرت[۱,*]، مجید عبدالرزاق نژاد[۱]

[۱]گروه علوم کامپیوتر، دانشکده مهندسی کامپیوتر و صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله، یک مساله برنامه‌ریزی خطی صفرویک فازی با ضرایب تابع هدف و محدودیت‌های فازی در نظر گرفته شده است. هدف مقاله ارایه یک روش جدید برای حل مساله موردنظر است که فرض فازی بودن پارامترها را در فرآیند حل حفظ می‌کند و بنابراین، جواب به‌دست‌آمده انطباق بیش‌تری با شرایط عدم قطعیت حاکم برمساله دارد.

روش‌شناسی پژوهش: در این مقاله، یک رویکرد جدید بر اساس روش کر تطبیق داده‌شده برای حل مساله موردبررسی پیشنهاد شده است. ایده پیشنهادی یک روش شاخه‌وکران فازی جدید است که در آن هر گره از درخت شاخه‌وکران، فرم آزادسازی‌شده خطی مساله با یک روش سیمپلکس فازی جدید برمبنای روش کر تطبیق‌داده‌شده حل می‌شود.

یافته‌ها: مثال‌های عددی جهت تشریح روش پیشنهادی به‌صورت گام‌به‌گام ارایه شده است و نتایج به‌دست‌آمده با سایر روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی صفرویک فازی مقایسه شده است.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: رویکرد پیشنهادی مقاله، برخلاف فرآیندهای غیرفازی‌سازی یا استفاده از توابع رتبه‌بندی فازی در ادبیات موجود برای مساله تحقیق، فرض فازی بودن را در فرآیند حل حفظ نموده و در نتیجه، راه حل واقعی‌تری ارایه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک فازی، الگوریتم شاخه‌وکران فازی، الگوریتم سیمپلکس فازی، روش کر تطبیق داده شده.

۱- مقدمه

تئوری مجموعه‌های فازی کاربردهای موفقیت‌آمیز زیادی در بسیاری از زمینه‌ها مانند کنترل، شبیه‌سازی، هوش مصنوعی، مدیریت، تحقیق در عملیات و بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی دارد [1]. بسیاری از مسایل صنعتی و مدیریتی به‌صورت مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فرمول‌سازی می‌شوند که در آن تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند مقادیر دقیق پارامترهای مساله را تعیین کند و بنابراین جنبه‌هایی از عدم قطعیت و ابهام در مساله وجود دارد [2]. به‌منظور غلبه بر عدم قطعیت، راهکارهایی در ادبیات موجود پیشنهاد شده است که بهینه‌سازی تصادفی، بهینه‌سازی پایدار و بهینه‌سازی فازی ازجمله این راهکارها می‌باشد [3]. در این میان، برنامه‌ریزی ریاضی فازی به‌عنوان یکی از راهکارهای غلبه بر عدم قطعیت با توجه به کاربرد گسترده آن از سوی محققین بسیار موردتوجه بوده است [4]. برنامه‌ریزی ریاضی فازی اولین‌بار توسط تاناکا و همکاران ارایه شد [5]. پس‌ازآن، مدل‌های مختلفی از مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی معرفی شدند و روش‌های مختلفی برای حل آن ارایه شد. مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی[1] با توجه به نوع مدل به سه گروه تقسیم می‌شوند: ۱- گروه اول (مسایل برنامه‌ریزی ریاضی با متغیرهای فازی)، متغیرهای مساله به شکل اعداد فازی

[1] Fuzzy Programming Problem (FPP)

مدل‌سازی می‌شوند، ۲- گروه دوم (مسایل برنامه‌ریزی ریاضی با پارامترهای فازی)، پارامترهای مساله به‌صورت اعداد فازی در نظر گرفته می‌شوند و ۳- گروه سوم (مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی کامل)، متغیرها و پارامترها به‌صورت اعداد فازی در نظر گرفته می‌شوند [6]. فارغ از نوع و سطح گستردگی استفاده از اعداد فازی در این نوع مسایل، این مسایل به خطی-غیرخطی، صحیح-حقیقی و صفرویک-غیرصفرویک تقسیم می‌شوند [7]. با بررسی ادبیات موجود در این حوزه، عدم توسعه تحقیقات در زمینه مسایل برنامه‌ریزی فازی خطی صفرویک[1] به‌عنوان یک چالش آشکار مشاهده می‌شود؛ لذا، مساله این پژوهش بر حل این نوع خاص و پرکاربرد مسایل برنامه‌ریزی ریاضی تمرکز کرده است. مسایل برنامه‌ریزی فازی صفرویک، طیف وسیعی از کاربردها را در زمینه‌های مختلف دارند:

۱. برنامه‌ریزی حمل‌ونقل: برنامه‌ریزی فازی صفرویک را می‌توان برای بهینه‌سازی مسیرها و برنامه‌های حمل‌ونقل با در نظر گرفتن عوامل نامشخص مانند تراکم ترافیک و شرایط آب‌وهوایی استفاده کرد [8].
۲. بهینه‌سازی سبد مالی: این مدل برنامه‌ریزی به‌منظور بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری با درنظرگرفتن نامشخص بودن شرایط بازار و ریسک مرتبط با گزینه های مختلف سرمایه‌گذاری استفاده می‌شود [9].
۳. تخصیص منابع: با توجه به عدم قطعیت تقاضا و در دسترس‌بودن می‌توان از *BFLPP* برای تخصیص منابعی مانند نیروی انسانی، تجهیزات و مواد استفاده کرد [10].
۴. برنامه‌ریزی تولید: جهت بهینه‌سازی زمان‌بندی‌های تولید با درنظرگرفتن عدم قطعیت تقاضا و محدودیت‌های ظرفیت مورد استفاده قرار می‌گیرد [11].
۵. مدیریت زیست‌محیطی: برای بهینه‌سازی تصمیمات مدیریت زیست‌محیطی، با درنظرگرفتن عدم قطعیت اثرات زیست‌محیطی و الزامات نظارتی مورد استفاده قرار می‌گیرد [12].
۶. مدیریت مراقبت‌های بهداشتی: به‌منظور بهینه‌سازی تخصیص منابع مراقبت‌های بهداشتی با درنظرگرفتن عدم قطعیت تقاضای بیمار و در دسترس بودن منابع مانند پزشکان، پرستاران و اتاق‌های عمل استفاده می‌شود [13].

روش‌های مختلفی برای حل مساله برنامه‌ریزی ریاضی فازی وجود دارد. دو نکته در این روش‌ها قابل توجه هستند، رویکرد کلی حل مساله و رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی در فرآیند حل مساله. به‌عنوان مثال، مالکی و همکاران [14] برای حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی که تنها ضرایب تابع هدف آن اعداد فازی ذوزنقه‌ای با متغیرهای غیرفازی بودند اقدام به ارایه رتبه‌بندی اعداد فازی با رویکرد غیرفازی‌کننده و مبتنی بر شاخص مرکزی عدد فازی کردند. مهدوی امیری و ناصری [15] به بررسی برخی ویژگی‌های دوگانی در مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی کامل با استفاده از رویکرد رتبه‌بندی کریمی پرداختند. آن‌ها از بین رویکردهای رتبه‌بندی غیرفازی‌کننده اعداد فازی مانند فانگ [16]، لای و وانگ [17]، مالکی و همکاران [14]، شواچنگ [18] و تاناکا و همکاران [5] رتبه‌بندی مالکی را انتخاب کردند. نهی و همکاران [19] رتبه‌بندی سلسله‌مراتبی را برای مرتب‌سازی اعداد فازی پیشنهاد دادند و مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی را با تابع رتبه‌بندی سلسله‌مراتبی حل کردند. گانسان و ویرامانی [20] نوعی از محاسبات فازی را برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای متقارن معرفی کردند. سپس یک روش سیمپلکس اولیه برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی پیشنهاد دادند که در آن ضرایب محدودیت‌ها با اعداد حقیقی و سایر پارامترها و هم‌چنین متغیرها با اعداد فازی ذوزنقه‌ای متقارن نمایش داده می‌شدند.

باکلی و فیورینگ [21] نخست یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی فازی کامل که متغیرها و پارامترهای آن اعداد فازی مثلثی بودند را به یک مساله سه هدفه بیشینه‌سازی مساحت نیمه سمت راست مقدار تابع هدف فازی، بیشینه‌سازی محتمل‌ترین مقدار تابع هدف فازی و کمینه‌سازی مساحت نیمه سمت چپ مقدار تابع هدف فازی تبدیل کردند. رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی در این تحقیق نیز، وابسته به سه‌تایی مساحت نیمه سمت راست، محتمل‌ترین مقدار و مساحت نیمه سمت چپ عدد فازی تعریف شد. آن‌ها از یک الگوریتم تکاملی برای حل این مساله سه هدفه به‌منظور یافتن جواب‌های تقریبی خوب استفاده کردند. لین [22] یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با ضرایب محدودیت‌ها و منابع سمت راست فازی را در نظر گرفت. او از رویکرد رتبه‌بندی فازی فاصله علامت‌دار شده[2] که بر اساس اصل گسترش، حساب بازه‌ای و عملیات α- برش بهره برده و این مساله فازی را به یک مساله غیرفازی تبدیل کرد. سپس با استفاده از تابع جریمه مساله مقید را به یک مساله نامقید تبدیل و با استفاده از الگوریتم ژنتیک تلاش به یافتن یک جواب تقریبی خوب نمود. در مقاله پاتیل و همکاران [23] یک رویکرد تبدیل مساله فازی به چند مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای براساس (α, k)- برش پیشنهاد شد که تا حدودی مشابه با رویکرد تبدیلی لین بود. به‌منظور بهینه‌سازی هزینه‌های حمل‌ونقل ورودی و خروجی یک

[1] Binary Fuzzy Linear Programming Problem (BFLPP)
[2] The signed distance

زنجیره‌تامین چندلایه با نرخ تقاضا و زمان تحویل نادقیق، یک مساله برنامه‌ریزی فازی صفرویک چندهدفه توسط مهدی راجی و همکاران [24] برای شبکه تامین فولاد ایران در نظر گرفته شد. آن‌ها با استفاده از مفاهیم فواصل موردانتظار، درجه بین دو عدد فازی و نیز سطح رضایتمندی α، اقدام به تبدیل مساله فازی به یک مساله غیرفازی نمودند. دامغانی و همکاران [9] به‌منظور مدل کردن انتخاب یک سبد بهینه از چندین شانس برای سرمایه‌گذاری از برنامه‌ریزی فازی صفرویک استفاده کردند. آن‌ها با غیرفازی‌سازی مساله توسط عملیات α- برش، اقدام به تحلیل نتایج خوش‌بینانه و بدبینانه مدل برنامه‌ریزی فازی صفرویک کردند. فان و هوانگ [10] از عملگرهای امیدریاضی برای اعداد فازی و احتمالی در غیرفازی سازی *BFLPP* که به‌منظور مدل‌کردن مساله تخصیص منابع فازی-احتمالی در نظر گرفته بودند بهره گرفتند. غلامیان و همکاران [11] نیز، یک مساله برنامه‌ریزی صحیح فازی چندهدفه به‌منظور مدل کردن برنامه‌ریزی تولید طی سه مرحله به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح غیرفازی چندهدفه تبدیل کردند.

ابراهیم نژاد و همکاران [25] مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی کامل که در صنعت زغال سنگ کاربرد دارند را بررسی کرده و با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی خطی اقدام به تبدیل مساله فازی به یک مساله غیرفازی کردند. سپس، یک الگوریتم سیمپلکس استاندارد برای حل مساله تبدیل‌شده ارایه نمودند. بهرا و همکاران [26] مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرها، ضرایب تابع هدف و مقادیر سمت راست فازی و ضرایب محدودیت‌های غیرفازی را در نظر گرفتند. آن‌ها با استفاده از مفاهیم مرکز، هسته و شعاع اعداد فازی اقدام به تبدیل مساله فازی به مسایل غیرفازی کرده و سپس مسایل غیرفازی را توسط روش سیمپلکس کلاسیک حل و جواب‌های به‌دست‌آمده را به قالب عدد فازی مثلثی برمی‌گرداند.

مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح، مسایل بهینه‌سازی هستند که یک تابع هدف را با درنظرگرفتن محدودیت‌ها و متغیرهای عدد صحیح کمینه یا بیشینه می‌کنند. کاربردهای گسترده برنامه‌ریزی عدد صحیح در حوزه مدیریت، صنعت، کسب‌وکار و سایر زمینه‌های متعدد تصمیم‌گیری، در ادبیات موجود موردبررسی قرار گرفته است [4]، [34–27]. پریزکندو و وردگی [35] از یک روش سلسله‌مراتبی برای یافتن مقادیر تابع هدف فازی بهینه منحصربه‌فرد برای مسایل برنامه‌ریزی ریاضی خطی فازی استفاده کردند و نتایج به‌دست‌آمده را با نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های تابع رتبه‌بندی خطی مقایسه کردند. مرور سیستماتیک بر روی مسایل چندهدفه فازی و روش‌های حل آن در [36] ارایه شده است.

همان‌طور که در بررسی ادبیات موجود در حوزه *FPPth* و به‌طور خاص‌تر در حوزه *BLFPP* اشاره شد، اکثر روش‌های حل پیشنهادی یا مستقیما اقدام به تبدیل مساله فازی به غیرفازی کرده یا در رویکردهای رتبه‌بندی اعداد فازی اقدام به استفاده از روش‌های غیرفازی‌کننده کرده‌اند [23]، [37]. در این تبدیل‌ها، شرایط عدم قطعیت حاکم بر مساله به سطح قطعیت یا نزدیک به قطعیت تنزل یافته که از منظر کاربردهای دنیای واقعی مناسب و قابل‌قبول نیستند؛ بنابراین به‌منظور پر نمودن این چالش و نیز توسعه پژوهش‌ها در زمینه *BLFPPth*، در این مقاله یک مساله با ضرایب محدودیت‌ها و تابع هدف فازی در نظر گرفته‌شده که در آن پارامترها به‌صورت اعداد فازی مثلثی هستند. به‌منظور حل مستقیم این مساله، از رویکردی مبتنی بر روش کر و شاخه‌وکران فازی استفاده‌شده که در آن در هر گره از درخت شاخه‌وکران فرم آزادسازی‌شده خطی مساله با یک روش سیمپلکس فازی جدید بر مبنای روش کر تطبیق‌داده‌شده حل می‌شود. این رویکرد، برخلاف استفاده از توابع رتبه‌بندی فازی، فرض فازی بودن را در فرآیند حل در نظر می‌گیرد و در نتیجه راه حل واقعی‌تری ارایه می‌دهد.

مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش بعد، در ابتدا مقدماتی در زمینه تئوری مجموعه‌های فازی، محاسبات روی اعداد فازی، روش کر و مسایل برنامه‌ریزی ریاضی فازی ارایه شده است و سپس روش پیشنهادی مقاله بر اساس روش کر تطبیق‌داده‌شده تشریح شده است. در بخش سوم، روش پیشنهادی مقاله با استفاده از مثال‌های عددی به‌صورت گام‌به‌گام پیاده‌سازی و نتایج ارایه شده است. در نهایت، مقاله در بخش چهار با یک نتیجه‌گیری کوتاه و جهت‌گیری‌های آتی به پایان می‌رسد.

۲- روش پژوهش

در این بخش، ابتدا مقدماتی در موردنظریه مجموعه‌های فازی، روش کر و برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک فازی ارایه می‌شود. سپس، روش شاخه‌وکران فازی مبتنی بر روش کر تطبیق‌داده‌شده برای حل مساله موردنظر مقاله با محدودیت‌های فازی پیشنهاد می‌شود. مفاهیم مقدماتی از منبع [38] استخراج شده است.

دوره ۹، شماره ۱، (۱۴۰۳)
صفحه: ۲۹-۱۷

تعریف ۱- یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در مجموعه جهانی X با $\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x\in X, 0\le \mu_{\tilde{A}}(x)\le 1\}$ تعریف می‌شود که در آن $\mu_{\tilde{A}}$ تابع عضویت $\tilde{A}$ است. تمام مجموعه‌های فازی در مجموعه جهانی X با $F(X)$ نشان داده می‌شوند.

تعریف ۲- فرض کنید $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از X با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: X\to[0,1]$ باشد. α- برش $\tilde{A}$ با $[\tilde{A}]_\alpha$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\tilde{A}]_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}.$$

تعریف ۳- یک عدد فازی LR با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود [17].

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} R\left(\dfrac{x-m}{\delta_2}\right), & x\ge m,\delta_2>0,\\ 1, & o.w.,\\ L\left(\dfrac{m-x}{\delta_1}\right), & x\le m,\delta_1>0,\end{cases}$$

که در آن $L,R:[0,\infty)\to[0,1]$ توابع غیر افزایشی هستند و $R(0)=L(0)=1$.

یک عدد فازی مثلثی که با (a^l,a,a^h)، $a^l\le a\le a^h$ نمایش داده می‌شود، نوع خاصی از عدد فازی LR است که در آن

$$R(x)=L(x)=max(0,1-x),\ \delta_1=a-a^l,\ \delta_2=a^h-a,\ m=a.$$

تعریف ۴- عملیات محاسباتی روی اعداد فازی مثلثی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(a^l+b^l,a+b,a^h+b^h),\\ &k\tilde{A}=(ka^l,ka,ka^h), \quad k>0,\\ &k\tilde{A}=(ka^h,ka,ka^l), \quad k<0.\end{aligned}$$

تعریف ۵- فرض کنید $\tilde{A}=(a^l,a,a^h)$ و $\tilde{B}=(b^l,b,b^h)$ دو عدد فازی مثلثی باشند و $\tilde{O}=\tilde{max}(\tilde{A},\tilde{B})$، تعریف کنید [39]:

$$r(\tilde{A},\tilde{B})=d(\tilde{A},\tilde{O})-d(\tilde{B},\tilde{O}).$$

که در آن d فاصله همینگ بین دو عدد فازی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{A},\tilde{B})=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{A}(x)-\tilde{B}(x)|dx.$$

هم‌چنین $\tilde{max}(\tilde{A},\tilde{B})$ بر اساس اصل گسترش به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{max}(\tilde{A},\tilde{B})(z)=sup\{min(\tilde{A}(x),\tilde{B}(y)) \mid max(x,y)=z\}.$$

در این صورت بر اساس روش کر اگر $r(\tilde{A},\tilde{B})\ge 0$ آنگاه $\tilde{A}\preceq^k\tilde{B}$ در غیر صورت $\tilde{B}\preceq^k\tilde{A}$.

گزاره ۱- فرض کنید $\tilde{A}=(a^l,a,a^h)$ و $\tilde{B}=(b^l,b,b^h)$ دو عدد فازی مثلثی باشند. در این صورت [39]:

اگر $a=b$ آنگاه

$$r(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{b^h+b^l}{2}-\frac{a^h+a^l}{2}.$$

اگر $a<b$ آنگاه

$$r(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{b^h-b^l}{2}+\frac{a^h-a^l}{2}-\bar{y}(a^h-b^l),\quad \bar{y}=\frac{a^h-b^l}{(b-b^l)+(a^h-a)}.$$

مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک با تابع هدف و محدودیت‌های فازی به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} & max \quad \tilde{z} \simeq^k \sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j , \\ & s.t. \\ & \qquad \sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \preceq^k \tilde{b}_i , \; for \;\; all \;\; j=1,\dots,m. \\ & \qquad x_j \in \{0,1\}, \; for \;\; all \;\; j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

درصورتی‌که پارامترهای مساله به‌صورت اعداد فازی مثلثی مدل‌سازی شود، می‌توان مدل مساله را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & max \quad \tilde{z} \simeq^k \sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j , \\ & s.t. \\ & \qquad \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^l_{ij} x_j , \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j \right) \preceq^k \left(b^l_i , b_i , b^h_i \right), \; for \;\; all \;\; i=1,\dots,m, \\ & \qquad x_j \in \{0,1\}, \; for \;\; all \;\; j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

حالت ۱- اگر $\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ آنگاه

$$r\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j , \tilde{b}_i \right) = \frac{\left(b^h_i + b^l_i \right)}{2} - \frac{\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a^l_{ij} x_j \right)}{2} \geq 0.$$

این محدودیت معادل یکی از دو محدودیت زیر می‌باشد:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i .$$

یا

$$r\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j , \tilde{b}_i \right) \leq 0.$$

ابتدا محدودیت تساوی را به دو محدودیت نامساوی تبدیل می‌کنیم. با معرفی متغیر $w^1_i \in \{0,1\}$ می‌توان برقرار بودن یکی از دو محدودیت بالا را به شکل زیر مدل‌سازی کرد.

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + M(1-w^1_i), \\ & -\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i + M(1-w^1_i), \\ & r\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j , \tilde{b}_i \right) = \frac{\left(b^h_i + b^l_i \right)}{2} - \frac{\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a^l_{ij} x_j \right)}{2} \leq M w^1_i . \end{aligned}$$

حالت ۲- اگر $\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ آنگاه

$$r\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j , \tilde{b}_i \right) = \frac{\left(b^h_i - b^l_i \right)}{2} + \frac{\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j - \sum\nolimits_{j=1}^{n} a^l_{ij} x_j \right)}{2} - \overline{y} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j - b^l_i \right) \geq 0,$$

که در آن

$$\overline{y} = \frac{\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j - b^l_i}{\left(b_i - b^l_i \right) + \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j - \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)} .$$

مجددا، با در نظر گرفتن متغیر $w^2_i \in \{0,1\}$ ، محدودیت اگر...آنگاه ... در حالت ۲ به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + M(1-w^2_i), \\ & r\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j , \tilde{b}_i \right) = \frac{\left(b^h_i - b^l_i \right)}{2} + \frac{\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j - \sum\nolimits_{j=1}^{n} a^l_{ij} x_j \right)}{2} - \overline{y} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^h_{ij} x_j - b^l_i \right) \leq M w^2_i . \end{aligned}$$

حالت ۳- اگر $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$ آنگاه

$$r\left(\tilde{b}_i, \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\right) = \frac{\left(b_i^h - b_i^l\right)}{2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a^h{}_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right)}{2} - \bar{y}\left(b_i^h - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right) \le 0,$$

که در آن

$$\bar{y} = \frac{b_i^h - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j}{\left(b_i^h - b_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right)}.$$

با معرفی متغیر $w_i^3 \in \{0,1\}$، دو محدودیت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i + M(1-w_i^3),$$

$$r\left(\tilde{b}_i, \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\right) = \frac{\left(b_i^h - b_i^l\right)}{2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a^h{}_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right)}{2} - \bar{y}\left(b_i^h - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right) \ge Mw_i^3.$$

بنابراین، با استفاده از روش کر تطبیق داده‌شده و روش‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح برای مدل‌سازی محدودیت اگر...آنگاه ...، مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح فازی با محدودیت‌ها و تابع هدف فازی به مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی عدد صحیح با تابع هدف فازی که مدل آن در ادامه آمده است، تبدیل می‌شود. نکته قابل توجه این است که در مدل به‌دست‌آمده تا این مرحله، صرفا تابع هدف فازی است و محدودیت‌ها با بکاربردن روش کر تطبیق‌داده‌شده به شرحی که در بالا گفته شد غیرفازی شده‌اند.

$$\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{z} \simeq^k \sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j,\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + M(1-w_i^1) + M\lambda_i^1 \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i + M(1-w_i^1) + M\lambda_i^1, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad \frac{\left(b_i^h + b_i^l\right)}{2} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a^h{}_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right)}{2} \le Mw_i^1 + M\lambda_i^1, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + M(1-w_i^2) + M\lambda_i^2, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad \frac{\left(b_i^h - b_i^l\right)}{2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a^h{}_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right)}{2} - \bar{y}\left(\sum_{j=1}^{n} a^h{}_{ij}x_j - b_i^l\right) \le Mw_i^2 + M\lambda_i^2, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad b_i + M(1-w_i^3) \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + M\lambda_i^3, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad Mw_i^3 \le \frac{\left(b_i^h - b_i^l\right)}{2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a^h{}_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right)}{2} - \bar{y}\left(b_i^h - \sum_{j=1}^{n} a^l{}_{ij}x_j\right) + M\lambda_i^3, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad \lambda_i^1 + \lambda_i^2 + \lambda_i^3 = 2, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad w_i^1, w_i^2, w_i^3, \lambda_i^1, \lambda_i^2, \lambda_i^3 \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,m,\\
&\quad x_j \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,n.
\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که مدل تبدیل‌یافته در بالا غیرخطی است. با این وجود، دلیل غیرخطی‌بودن مساله ضرب دو متغیر صفرویک است که می‌توان با استفاده از راهکار زیر به خطی تبدیل کرد. فرض کنید، δ_1 و δ_2 دو متغیر صفرویک هستند و متغیر صفرویک $\delta = \delta_1 * \delta_2$ را در نظر بگیرید. در این صورت، کافی است محدودیت‌های زیر به مساله اضافه شود:

$$2\delta \le \delta_1 + \delta_2 \le 1+\delta,$$
$$\delta \le \delta_1, \delta \le \delta_2, \quad \delta \in \{0,1\}.$$

با استفاده از تغییر متغیری که در بالا تشریح شد، مدل نهایی یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک با تابع هدف فازی خواهد بود. در ادامه، یک الگوریتم شاخه‌وکران فازی جدید برای حل مدل نهایی پیشنهاد شده است. در هر گره از درخت شاخه‌وکران، مدل خطی‌سازی‌شده مساله با استفاده از یک روش سیمپلکس فازی جدید که بر مبنای روش کر تطبیق داده شده ارایه می‌شود، حل خواهد شد. برای سادگی، فرض می‌کنیم فرم خطی‌سازی‌شده مساله به‌صورت زیر مدل‌سازی شده است:

$$\begin{aligned} &\max \quad \tilde{z} \simeq^k \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j, \\ &s.t. \\ &\qquad A'X' \le b', \\ &\qquad X' \ge 0, \end{aligned}$$

که در آن، $X' = \left((x_j)_{j=1,\dots,n}, (w_i^1, w_i^2, w_i^3)_{i=1,\dots,m}, (\lambda_i^1, \lambda_i^2, \lambda_i^3)_{i=1,\dots,m}\right)$ و $A' = (a'_j)_{j=1,\dots,n+2m}$ ماتریس ضرایب محدودیت‌ها می‌باشد. در ادامه، گام‌های الگوریتم سیمپلکس فازی بر اساس روش کر تطبیق داده شده برای حل مدل خطی‌سازی‌شده نهایی با تابع هدف فازی تشریح شده است.

گام ۱- مدل خطی‌سازی‌شده نهایی را به شکل زیر بازنویسی کنید:

$$\begin{aligned} &\max \quad \tilde{z} \simeq^k \tilde{C}'_B X'_B + \tilde{C}'_N X'_N, \\ &s.t. \\ &\qquad B'X'_B + N'X'_N = b', \\ &\qquad X'_B \ge 0, X'_N \ge 0. \end{aligned}$$

که در آن، $A' = [B', N']$، B' یک ماتریس معکوس‌پذیر است و $(B')^{-1} b' \ge 0$. در این حالت، $X'_B = (B')^{-1} b'$ و $X'_B = 0$ یک جواب پایه‌شدنی برای مساله با مقدار تابع هدف $\tilde{z}_0 \simeq^k \tilde{C}'_B (B')^{-1} b'$ است.

گام ۲- فرض کنید $X'' = \left((x''_j)_{j=1,\dots,n}, (w_i''^1, w_i''^2, w_i''^3)_{i=1,\dots,m}, (\lambda_i''^1, \lambda_i''^2, \lambda_i''^3)_{i=1,\dots,m}\right)$ یک جواب شدنی برای مساله تبدیل یافته خطی‌سازی‌شده باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \tilde{z} &\simeq^k \tilde{C}'_B X''_B + \tilde{C}'_N X''_N =^k \tilde{C}'_B B'^{-1} b' - \sum_{\{j:j \text{ is an index of nonbasic variables}\}} \left(\tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j - \tilde{c}'_j\right) x''_j \\ &=^k \tilde{z}_0 - \sum_{\{j:j \text{ is an index of nonbasic variables}\}} \left(\tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j - \tilde{c}'_j\right) x''_j. \end{aligned}$$

بنابراین اگر برای هر متغیر غیرپایه‌ای $\tilde{c}'_j \le^k \tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j$، جواب به‌دست‌آمده بهینه است؛ بنابراین، لازم است مقدار زیر را حساب کنیم:

$$\min\left\{r\left(\tilde{c}'_j, \tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j\right) : j \text{ is a non-basic variable}\right\}.$$

اگر $\min\left\{r\left(\tilde{c}'_j, \tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j\right) : j \text{ is a non-basic variable}\right\} \ge 0$، آنگاه جواب به‌دست‌آمده بهینه است و الگوریتم متوقف می‌شود.

گام ۳- اگر $\min\left\{r\left(\tilde{c}'_j, \tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j\right) : j \text{ is a non-basic variable}\right\} < 0$، اندیس j با کم‌ترین مقدار $r\left(\tilde{c}'_j, \tilde{C}'_B B'^{-1} a'_j\right)$ را انتخاب کنید. متغیر مربوطه وارد پایه می‌شود. از آن‌جایی که محدودیت‌های مساله با استفاده از روش کر تطبیق‌داده‌شده به محدودیت‌های غیرفازی تبدیل شده‌اند، متغیر خروج از پایه با استفاده از روش مینیمم تست کلاسیک انتخاب می‌شود. با انتخاب متغیرهای ورودی و خروجی به روشی که تشریح شد، محورگیری مشابه الگوریتم سیمپلکس معمولی انجام خواهد شد. بعد از انجام محورگیری به **گام ۲** بروید. مشاهده می‌شود که ایده ارایه شده، محدودیت‌هایی که ممکن است در فرآیند تبدیل به یک مدل غیرفازی روی مساله رخ دهد را ندارد و فرض فازی‌بودن را در فرآیند حل مساله حفظ می‌کند.

دوره ۹، شماره ۱، (۱۴۰۳)
صفحه: ۲۹-۱۷

۳- نتایج عددی

در این بخش، ایده ارایه شده مقاله برای حل مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح فازی صفرویک با استفاده از مثال‌های عددی به صورت گام‌به‌گام تشریح شده است و مزیت روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌های حل مساله مورد بحث‌وبررسی قرار گرفته است.

مثال ۱ - مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{z} \simeq^{k} (8,10,12)x_1 + (19,20,22)x_2,\\
&s.t.\\
&\qquad (5,7,8)x_1 + (6,8,11)x_2 \preceq^{k} (46,48,60),\\
&\qquad (1,2,4)x_1 + (2,4,6)x_2 \preceq^{k} (10,12,20),\\
&\qquad x_1, x_2 \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

مساله تبدیل‌یافته با تابع هدف فازی و محدودیت‌های غیرفازی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{z} \simeq^{k} (8,10,12)x_1 + (19,20,22)x_2,\\
&s.t.\\
&\quad 7x_1 + 8x_2 \le 48 + M(1-w_1^1) + M\lambda_1^1,\\
&\quad 2x_1 + 4x_2 \le 12 + M(1-w_2^1) + M\lambda_2^1,\\
&\quad -7x_1 - 8x_2 \le -48 + M(1-w_1^1) + M\lambda_1^1,\\
&\quad -2x_1 - 4x_2 \le -12 + M(1-w_2^1) + M\lambda_2^1,\\
&\quad 53 - \frac{(13x_1 + 17x_2)}{2} \le Mw_1^1 + M\lambda_1^1,\\
&\quad 15 - \frac{(5x_1 + 8x_2)}{2} \le Mw_2^1 + M\lambda_2^1,\\
&\quad 7x_1 + 8x_2 \le 48 + M(1-w_1^2) + M\lambda_1^2,\\
&\quad 2x_1 + 4x_2 \le 12 + M(1-w_2^2) + M\lambda_2^2,\\
&\quad 7 + \frac{(3x_1 + 5x_2)}{2} - \left(\frac{8x_1 + 11x_2 - 46}{2 + (x_1 + 3x_2)}\right)(8x_1 + 11x_2 - 46) \le Mw_1^2 + M\lambda_1^2,\\
&\quad 5 + \frac{(3x_1 + 4x_2)}{2} - \left(\frac{4x_1 + 6x_2 - 10}{2 + (2x_1 + 2x_2)}\right)(4x_1 + 6x_2 - 10) \le Mw_2^2 + M\lambda_2^2,\\
&\quad 7x_1 + 8x_2 \ge 48 + M(1-w_1^3 - \lambda_1^3),\\
&\quad 2x_1 + 4x_2 \ge 12 + M(1-w_2^3 - \lambda_2^3),\\
&\quad 7 + \frac{(3x_1 + 5x_2)}{2} - \left(\frac{60 - 5x_1 - 6x_2}{12 + (2x_1 + 2x_2)}\right)(60 - 5x_1 - 6x_2) \ge Mw_1^3 - M\lambda_1^3,\\
&\quad 5 + \frac{(3x_1 + 4x_2)}{2} - \left(\frac{20 - x_1 - 2x_2}{8 + (x_1 + 2x_2)}\right)(20 - x_1 - 2x_2) \ge Mw_2^3 - M\lambda_2^3,\\
&\quad \lambda_i^1 + \lambda_i^2 + \lambda_i^3 = 2, \qquad i = 1,2,\\
&\quad w_i^j, \lambda_i^j, x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1,2, \quad j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

در گام بعد، لازم است مدل مساله خطی‌سازی شود که با استفاده از روش پیشنهادی مقاله خطی‌سازی انجام خواهد شد. این روند برای اولین محدودیت غیرخطی مدل بالا در ادامه نشان داده شده است. روش خطی‌سازی سایر محدودیت‌ها به صورت مشابه انجام می‌شود. با توجه به این‌که مقدار عبارت $2(2+(x_1+3x_2))$ همواره مثبت است، طرفین نامعادله را بدون تغییر جهت نامعادله در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$7+\frac{(3x_1+5x_2)}{2}-\left(\frac{8x_1+11x_2-46}{2+(x_1+3x_2)}\right)(8x_1+11x_2-46)\le Mw_1^2+M\lambda_1^2,$$

$$\Updownarrow$$

$$14\left(2+(x_1+3x_2)\right)+(3x_1+5x_2)\left(2+(x_1+3x_2)\right)-2(8x_1+11x_2-46)(8x_1+11x_2-46),$$
$$\le 2\left(Mw_1^2+M\lambda_1^2\right)\left(2+(x_1+3x_2)\right),$$
$$-4202+1364x_1+1849x_2-338x_{12}\le 2M(w_1^2+\lambda_1^2)+M(wx_{11}^2+\lambda x_{11}^2)+3M(wx_{12}^2+\lambda x_{12}^2)$$

$$2x_{12}\le x_1+x_2\le 1+x_{12},x_{12}\le x_1,x_{12}\le x_2,$$
$$wx_{11}^2\le x_1+w_1^2\le 1+wx_{11}^2,wx_{11}^2\le x_1,wx_{11}^2\le w_1^2,$$
$$wx_{12}^2\le x_2+w_1^2\le 1+wx_{12}^2,wx_{12}^2\le x_2,wx_{12}^2\le w_1^2,$$
$$\lambda x_{11}^2\le x_1+\lambda_1^2\le 1+\lambda x_{11}^2,\lambda x_{11}^2\le x_1,\lambda x_{11}^2\le \lambda_1^2,$$
$$\lambda x_{12}^2\le x_2+\lambda_1^2\le 1+\lambda x_{12}^2,\lambda x_{12}^2\le x_2,\lambda x_{12}^2\le \lambda_1^2.$$

بعد از حل مساله با روش پیشنهادی مقاله جواب مساله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: $x_1=1$ ، $x_2=1$ و $\tilde{z}\simeq^k(27,30,34)$. مدل نهایی مساله با استفاده از نرم‌افزار بهینه‌سازی *AMPL* حل شده است.

مثال ۲- هیات مدیره یک شرکت تولیدی بزرگ در حال بررسی یک پروژه سرمایه‌گذاری می‌باشد که در جدول زیر نشان داده شده است. هیات مدیره مایل است کل بازده مورد انتظار را با سرمایه‌گذاری در محدوده بودجه سالانه موجود به حداکثر برساند. پنج پروژه برای اجرا در سه سال آینده در نظر گرفته شده است. با این وجود، بازده مورد انتظار برای هر پروژه به طور طبیعی نامشخص است. بازده، وجوه موجود و سرمایه‌گذاری سالانه مورد نیاز (به میلیون دلار) در **جدول ۱** نمایش داده شده است.

جدول ۱- اطلاعات پروژه سرمایه‌گذاری.

Table 1- Investment project information.

پروژه	سرمایه گذاری برای (a_{ij})			بازده (r_j)
	سال اول	سال دوم	سال سوم	
1	(5,6,7)	(1,2,3)	(7,8,9)	(18,20,23)
2	(4,5,6)	(7,8,9)	(9,10,11)	(38,40,41)
3	(9,10,11)	(2,3,4)	(2,3,4)	(19,20,21)
4	(4,5,6)	(6,7,8)	(1,2,3)	(13,15,16)
5	(6,7,8)	(8,9,10)	(9,10,11)	(28,30,34)
سرمایه موجود (b_i)	(22,25,27)	(22,25,27)	(22,25,27)	

مساله تصمیم‌گیری فوق به شکل زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\max\quad & \tilde{z}\simeq^k(18,20,23)x_1+(38,40,41)x_2+(19,20,21)x_3+(13,15,16)x_4+(28,30,34)x_5,\\
s.t.\quad & \\
& (5,6,7)x_1+(4,5,6)x_2+(9,10,11)x_3+(4,5,6)x_4+(6,7,8)x_5\preceq^k(22,25,27),\\
& (1,2,3)x_1+(2,3,4)x_2+(7,8,9)x_3+(6,7,8)x_4+(8,9,10)x_5\preceq^k(22,25,27),\\
& (7,8,9)x_1+(2,3,4)x_2+(9,10,11)x_3+(1,2,3)x_4+(9,10,11)x_5\preceq^k(22,25,27),\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\{0,1\}.
\end{aligned}$$

با استفاده از روش ارایه شده در مقاله، مساله فوق حل شده است. هم‌چنین مدل مساله با استفاده از تابع رتبه‌بندی فازی ییگر به مدل غیرفازی تبدیل شده است و مدل غیرفازی با استفاده از نرم‌افزار بهینه سازی *AMPL* حل شده است. نتایج در **جدول ۲** خلاصه شده است.

دوره ۹، شماره ۱، (۱۴۰۳)
صفحه: ۲۹-۱۷

جدول ۲، مقادیر جواب بهینه مساله سرمایه‌گذاری فازی را با استفاده از روش ارایه‌شده در مقاله و هم‌چنین با استفاده از تابع رتبه‌بندی فازی ییگر ارایه می‌دهد. نتایج این جدول نشان می‌دهد که روش ارایه شده، مقدار تابع هدف بالاتری در مقایسه با روش استفاده از تابع رتبه‌بندی فازی ارایه می‌دهد.

جدول ۲- مقایسه جواب مساله سرمایه‌گذاری با استفاده از روش ارایه شده در مقاله و روش‌های مختلف رتبه‌بندی فازی.

Table 2- Comparison of the solution of the investment problem using the proposed method and different fuzzy ranking methods.

روش	مقدار متغیرهای تصمیم (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)	مقدار تابع هدف
روش کر تطبیق داده‌شده	(1,1,0,1,1)	(97,105,114)
تابع رتبه‌بندی ییگر	(0,1,1,0,1)	90

مثال ۳ (مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید)- در این مثال، توسیع مساله کوتاه‌ترین مسیر که مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید نامیده می‌شود در نظر گرفته شده است. هدف این مساله یافتن کوتاه‌ترین مسیر از گره s به گره t است به‌صورتی‌که زمان طی این مسیر کم‌تر از T باشد.

برخلاف مساله کوتاه‌ترین مسیر که در زمان چندجمله‌ای قابل حل است، این مساله در دسته مسایل NP- کامل قرار می‌گیرد. فرض کنید $G=(N,A)$ یک شبکه با $|N|$ گره و $|A|$ کمان باشد. هم‌چنین هر کمان (i,j) دارای دو برچسب d_{ij} و $\tilde{t}_{ij}$ می‌باشد که مقادیر d_{ij} قطعی و مشخص است. با این وجود، در کاربرهای واقعی تعیین دقیق مقادیر پارامترهای $\tilde{t}_{ij}$ ممکن نیست. مدل برنامه‌ریزی ریاضی مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید فازی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

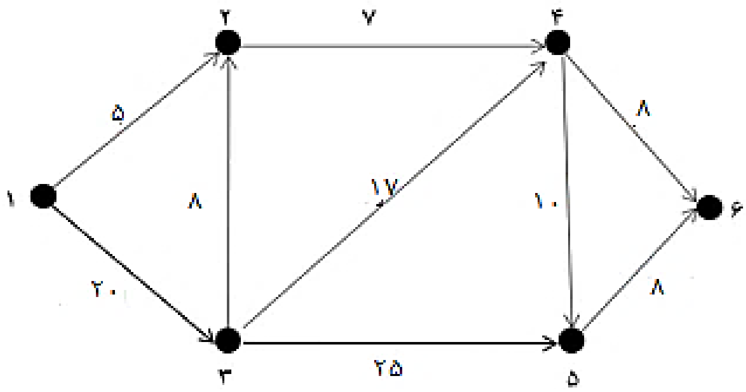
$$\min \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij},$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i=s, \\ 0, & i\notin\{s,t\}, \\ -1, & i=t, \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} \tilde{t}_{ij}x_{ij} \le T,$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}.$$

در این مثال، روش تشریح‌شده در مقاله برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر مقید از گره ۱ به گره ۶ در شبکه زیر به‌کار رفته است. پارامترهای روی کمان‌ها در این شبکه طول کمان را نشان می‌دهد. مقادیر پارامترهای $\tilde{t}_{ij}$ در **جدول ۳** گزارش شده است. هم‌چنین مقدار $T=35$ فرض شده است.



شکل ۱- مثالی از مساله کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌ای با ۶ گره و ۹ کمان.

Figure 1- An example of the shortest path problem in a network with 6 nodes and 9 arcs.

جدول ۳- مقادیر پارامترهای $\tilde{t}_{ij}$ برای شبکه شکل ۱.

Table 3- Values of $\tilde{t}_{ij}$ for the network in figure 1.

کمان	مقدار $\tilde{t}_{ij}$
(1,2)	(8,9,10)
(1,3)	(1,3,4)
(2,4)	(34,35,36)
(3,2)	(6,7,8)
(3,4)	(1,2,3)
(3,5)	(14,15,16)
(4,5)	(2,3,4)
(4,6)	(27,28,30)
(5,6)	(10,12,13)

بعد از حل مثال با روش پیشنهادی، مسیر بهینه مقید در **جدول ۴** گزارش شده است. به‌منظور مقایسه ایده پیشنهادی با سایر روش‌های موجود، مثال فوق با استفاده از روش برنامه‌ریزی اعتباری فازی حل شده است [40] و نتیجه در **جدول ۴** گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش ارایه شده در مقاله مسیر بهینه‌تری نسبت به روش برنامه‌ریزی اعتباری فازی ارایه می‌دهد.

جدول ۴- مقایسه جواب مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید با استفاده از روش پیشنهادی و روش برنامه‌ریزی اعتباری فازی.

Table 4- Comparison of the solution of constraint shortest path problem using the proposed method and Fuzzy credibility programming.

روش	مسیر بهینه	مقدار بهینه تابع هدف
روش کر تطبیق‌داده‌شده	$1 \to 3 \to 4 \to 6$	45
روش برنامه‌ریزی اعتباری‌فازی	$1 \to 3 \to 5 \to 6$	53

۴- نتیجه‌گیری

با بررسی اجمالی تحقیقات انجام‌شده در حوزه مسایل برنامه‌ریزی فازی و مسایل برنامه‌ریزی خطی صفرویک فازی ، مشاهده شد که اولا تحقیقات در حوزه *BFLPPth* توسعه مناسبی متناسب با حجم کاربرد آن نیافته و ثانیا در اکثر تحقیقات در حوزه *FPPth* و کلیه تحقیقات موجود در حوزه *BFLPPth* از فرآیندهای غیرفازی‌سازی یا رویکردهای رتبه‌بندی اعداد فازی که مبتنی بر غیرفازی‌سازی هستند استفاده نموده‌اند. لذا، در این مقاله یک *BFLPP* که در آن ضرایب محدودیت‌ها و تابع هدف به‌صورت فازی‌مثلثی هستند در نظر گرفته شد. بر اساس روش کر تطبیق‌داده‌شده، روش جدیدی برای توسعه محدودیت‌های فازی در مساله پیشنهاد شده است. با توجه به این‌که مدل به‌دست‌آمده بعد از تبدیل غیرخطی است، روشی برای خطی‌سازی مساله پیشنهاد شده است. آنگاه برای حل مساله توسعه‌یافته از یک روش شاخه وکران جدید بر اساس روش کر تطبیق‌داده‌شده پیشنهاد شده است که در هر یک از گره‌های درخت شاخه‌وکران فرم آزادسازی‌شده‌خطی مساله با یک الگوریتم سیمپلکس فازی جدید حل می‌شود. روش پیشنهادی مقاله فرض فازی بودن مساله را در فرآیند حل حفظ می‌کند. مثال‌های عددی برای تشریح روش و الگوریتم حل پیشنهادی ارایه شده است. نتایج حاصل از روش پیشنهادی مقاله بر اساس روش کر تطبیق‌داده‌شده با تابع رتبه‌بندی ییگر و برنامه‌ریزی اعتباری فازی مقایسه شده است. در هر دو مورد، روش کر تطبیق‌داده‌شده، جواب بهینه مساله را بهبود داده است.

تلاش شد این تحقیق ضمن مطرح‌کردن یک ایده برای حل مستقیم *BFLPPth*، زمینه تحقیقات بیش‌تر در این حوزه را فراهم سازد. بدیهی است، استفاده از رویکردهای مختلف رتبه‌بندی اعداد فازی که مبتنی بر حفظ ماهیت نادقیق اعداد هستند و مقایسه عملکرد آن‌ها می‌تواند یکی از زمینه‌های تحقیقاتی آتی در این حوزه خواهد بود. هم‌چنین استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری و فرا ابتکاری مختلف با توجه به *NP*- سخت‌بودن این مسایل می‌تواند زمینه تحقیقاتی دیگری در پیش روی توسعه حل *BFLPPth* باشد.

قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی خود را از داوران محترم اعلام می‌دارند. بی‌شک نقطه نظرات ارزشمندشان در بهبود کیفیت مقاله نقش به‌سزایی داشته است.

دوره ۹، شماره ۱، (۱۴۰۳)
صفحه: ۲۹-۱۷

تعارض با منافع

نویسندگان مقاله اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد و همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده و قبلا چاپ نشده است. هم‌چنین در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

[1] Zimmermann, H. J. (2011). *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer.

[2] Ghatee, M., & Niksirat, M. (2013). A hopfield neural network applied to the fuzzy maximum cut problem under credibility measure. *Information sciences*, *229*, 77–93. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025512007827

[3] Gutierrez, F., Lujan, E., Asmat, R., & Vergara, E. (2019). Fully fuzzy linear programming model for the berth allocation problem with two quays. *Uncertainty management with fuzzy and rough sets: recent advances and applications* (pp. 87–113). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10463-4_5

[4] Niksirat, M. (2022). Intuitionistic fuzzy hub location problems: model and solution approach. *Fuzzy information and engineering*, *14*(1), 74–83. https://doi.org/10.1080/16168658.2021.2019434

[5] Tanaka, H., Uejima, S., & Asai, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE transactions on systems, man and cybernetics*, *SMC-12*(6), 903–907. DOI:10.1109/tsmc.1982.4308925

[6] Ghanbari, R., Ghorbani-Moghadam, K., Mahdavi-Amiri, N., & De Baets, B. (2020). Fuzzy linear programming problems: models and solutions. *Soft computing*, *24*(13), 10043–10073. https://doi.org/10.1007/s00500-019-04519-w

[7] Hosseinzadeh, E., & Tayyebi, J. (2023). A compromise solution for the neutrosophic multi-objective linear programming problem and its application in transportation problem. *Journal of applied research on industrial engineering*, *10*(1), 1–10. https://doi.org/10.22105/jarie.2022.328580.1451

[8] Nasseri, S. H., Ebrahimnejad, A., Cao, B. Y., Nasseri, S. H., Ebrahimnejad, A., & Cao, B. Y. (2019). *Fuzzy linear programming*. Springer.

[9] Damghani, K. K., Sadi-Nezhad, S., & Aryanezhad, M. B. (2011). A modular decision support system for optimum investment selection in presence of uncertainty: combination of fuzzy mathematical programming and fuzzy rule based system. *Expert systems with applications*, *38*(1), 824–834. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417410006688

[10] Fan, G. M., & Huang, H. J. (2017). A novel binary differential evolution algorithm for a class of fuzzy-stochastic resource allocation problems. *2017 13th ieee international conference on control & automation (ICCA)* (pp. 548–553). DOI: 10.1109/ICCA.2017.8003119

[11] Gholamian, N., Mahdavi, I., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Mahdavi-Amiri, N. (2015). Comprehensive fuzzy multi-objective multi-product multi-site aggregate production planning decisions in a supply chain under uncertainty. *Applied soft computing journal*, *37*, 585–607. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494615005499

[12] Li, Y. P., Huang, G. H., Nie, X. H., & Nie, S. L. (2008). A two-stage fuzzy robust integer programming approach for capacity planning of environmental management systems. *European journal of operational research*, *189*(2), 399–420. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221707004961

[13] Çetin, E., & Sarucan, A. (2015). Nurse scheduling using binary fuzzy goal programming. *2015 6th international conference on modeling, simulation, and applied optimization (ICMSAO)* (pp. 1–6). IEEE. DOI: 10.1109/ICMSAO.2015.7152212

[14] Maleki, H. R., Tata, M., & Mashinchi, M. (2000). Linear programming with fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, *109*(1), 21–33. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011498000669

[15] Mahdavi-Amiri, N., & Nasseri, S. H. (2006). Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function. *Applied mathematics and computation*, *180*(1), 206–216. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009630030501115X

[16] Fang, S. C., Hu, C. F., Wang, H. F., & Wu, S. Y. (1999). Linear programming with fuzzy coefficients in constraints. *Computers & mathematics with applications*, *37*(10), 63–76. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122199001261

[17] Lai, Y. J., & Hwang, C. L. (1992). Fuzzy mathematical programming. In *Fuzzy mathematical programming: methods and applications* (pp. 74–186). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48753-8_3

[18] Shaocheng, T. (1994). Interval number and fuzzy number linear programmings. *Fuzzy sets and systems*, *66*(3), 301–306. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011494900973

[19] Nehi, H. M., Maleki, H. R., & Mashinchi, M. (2004). Solving fuzzy number linear programming problem by lexicographic ranking function. *Italian journal of pure and applied mathematics*, *15*(1), 9–20.

[20] Ganesan, K., & Veeramani, P. (2006). Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. *Annals of operations research*, *143*(1), 305–315. https://doi.org/10.1007/s10479-006-7390-1

[21] Buckley, J. J., & Feuring, T. (2000). Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming. *Fuzzy sets and systems*, *109*(1), 35–53. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011498000220

[22] Lin, F. T. (2009). Solving the transportation problem with fuzzy coefficients using genetic algorithms .*2009 IEEE international conference on fuzzy systems* (pp. 1468–1473). IEEE. DOI: 10.1109/FUZZY.2009.5277202

[23] Patil, P. G., Elluru, V., & Shivashankar, S. (2023). A new approach to MCDM problems by fuzzy binary soft sets. *Journal of fuzzy extension and applications*, *4*(3), 207–216. DOI:10.22105/jfea.2023.390059.1257

[24] Mahdiraji, H. A., Beheshti, M., Hajiagha, S. H. R., & Zavadskas, E. K. (2018). A fuzzy binary bi objective transportation model: Iranian steel supply network. *Transport*, *33*(3), 810–820. https://jau.vgtu.lt/index.php/Transport/article/view/5800

[25] Ebrahimnejad, A., Tavana, M., & Charles, V. (2022). Analytics under uncertainty: a novel method for solving linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. *Soft computing*, *26*(1), 327–347. https://doi.org/10.1007/s00500-021-06389-7

[26] Behera, D., Peters, K., & Edalatpanah, S. A. (2022). Alternative methods for linear programming problem under triangular fuzzy uncertainty. *Journal of statistics and management systems*, *25*(3), 521–539. https://doi.org/10.1080/09720510.2021.1925431

[27] Ammar, E.-S., & Emsimir, A. (2021). A mathematical model for solving fuzzy integer linear programming problems with fully rough intervals. *Granular computing*, *6*(3), 567–578. https://doi.org/10.1007/s41066-020-00216-4

[28] Roy, S. K., & Midya, S. (2019). Multi-objective fixed-charge solid transportation problem with product blending under intuitionistic fuzzy environment. *Applied intelligence*, *49*(10), 3524–3538. https://doi.org/10.1007/s10489-019-01466-9

[29] Imeni, M. (2020). Fuzzy logic in accounting and auditing. *Journal of fuzzy extension and applications*, *1*(1), 66–72. https://www.journal-fea.com/article_114141.html

[30] Garai, T., Chakraborty, D., & Roy, T. K. (2019). Multi-objective inventory model with both stock-dependent demand rate and holding cost rate under fuzzy random environment. *Annals of data science*, *6*(1), 61–81. https://doi.org/10.1007/s40745-018-00186-0

[31] Niksirat, M., & Nasseri, H. S. (2022). Knapsack problem in fuzzy nature: different models based on credibility ranking method. *Yugoslav journal of operations research*, *32*(2), 203–218. https://doiserbia.nb.rs/Article.aspx?id=0354-02432100021N

[32] Goodarzian, F., Shishebori, D., Nasseri, H., & Dadvar, F. (2021). A bi-objective production-distribution problem in a supply chain network under grey flexible conditions. *RAIRO-operations research*, *55*(3), 1971–2000.

[33] Nasseri, S. H., & Darvishi, D. (2018). Planning livestock diet with fuzzy requirements. *Journal of information and optimization sciences*, *39*(7), 1527–1545. https://doi.org/10.1080/02522667.2017.1369654

[34] Nasseri, S. H., Chameh, R., & Paydar, M. M. (2020). A two-stage multi-parametric model for solving animal diet formulation with floating price based on a fuzzy flexible linear programming model. *Iranian journal of operations research*, *11*(2), 1–23. https://iors.ir/journal/article-1-698-en.html

[35] Pérez-Cañedo, B., & Verdegay, J. L. (2022). On the application of a lexicographic method to fuzzy linear programming problems. *Journal of computational and cognitive engineering*, *2*(1), 47–56. http://ojs.bonviewpress.com/index.php/JCCE/article/view/168

[36] Karimi, N., Feylizadeh, M. R., Govindan, K., & Bagherpour, M. (2022). Fuzzy multi-objective programming: a systematic literature review. *Expert systems with applications*, *196*, 116663. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095741742200149X

[37] Mahdavi-Amiri, N., Nasseri, S. H., & Y. (2009). Fuzzy primal simplex algorithms for solving fuzzy linear programming problems. *Operations research*, *1*(2), 68–84. http://www.iors.ir/journal/browse.php?a_code=A-10-83-6&slc_lang=en&sid=1&ftxt=1

[38] Niksirat, M., Hashemi, S. M., & Ghatee, M. (2016). Branch-and-price algorithm for fuzzy integer programming problems with block angular structure. *Fuzzy sets and systems*, *296*, 70–96. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011415004777

[39] Ghanbari, R., Ghorbani-Moghadam, K., & Mahdavi-Amiri, N. (2021). A time variant multi-objective particle swarm optimization algorithm for solving fuzzy number linear programming problems using modified Kerre's method. *Opsearch*, *58*(2), 403–424. https://doi.org/10.1007/s12597-020-00482-5

[40] Niksirat, M. (2020). Fuzzy integer credibility programming for modeling and solving humanitarian relief and transportation problem after the crisis under uncertainty. *Defensive future studies*, *4*(15), 61–84. http://www.dfsr.ir/article_38889.html