E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 8, No. 4 (2023) 906–916.

Paper Type: Original Article

Presenting a One-Objective Optimization Model to Determine the Reliability of the Components of a Coherent System

Elham Basiri*

Department of Mathematics and Applications, Faculty of Sciences, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran; elham_basiri2000@yahoo.com.

Citation:

Basiri, E. (2023). Presenting a one-objective optimization model to determine the reliability of the components of a coherent system. *Journal of decisions and operations research, 8*(4), 906-916.

Received: 12/11/2021 Reviewed: 14/12/2021 Revised: 09/01/2022 Accepted: 18/02/2022

Abstract

Purpose: In this paper, the amount required to increase the reliability of the components of a coherent system is determined so that the cost of this increase is minimized and the reliability of the whole system is not less than the predetermined value.

Methodology: In this research, after introducing the objective and constraint functions in the optimization problem, the Lagrange method is used and then the problem is solved by presenting an algorithm. In this article, several cost functions are considered, and then the results are presented in the general case for a coherent system and then for two special cases, series-parallel and parallel-series systems.

Findings: In this article, two numerical examples are presented and solved. In the first example, a bridge structure is evaluated and in the second example, a series-parallel system is studied. In both examples, the required values are determined to increase the reliability of the system components.

Originality/Value: This research, using a mathematical model and numerical calculations with the help of R software, examines the optimization problem for a coherent system.

Keywords: Lagrangian method, Coherent system, Reliability.

Corresponding Author: elham_basiri2000@yahoo.com

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۸، شماره (۴)، (۱۴۰۲)، ۹۱۶-۹۰۶

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

ارایه یک مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه برای تعیین میزان قابلیت اعتماد اجزای یک سیستم منسجم

الهام بصیری*

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله، مقدار مورد نیاز برای افزایش قابلیت اعتماد اجزای یک سیستم منسجم تعیین شده است، به‌گونه‌ای‌که هزینه حاصل از این افزایش به حداقل برسد و قابلیت اعتماد کل سیستم از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای کم‌تر نشود.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش، بعد از معرفی توابع هدف و محدودیت در مساله بهینه‌سازی، روش لاگرانژ مورد استفاده قرار می‌گیرد و سپس با ارایه یک الگوریتم مساله حل می‌شود. در این مقاله، چند تابع هزینه در نظر گرفته می‌شوند و در ادامه نتایج در حالت کلی برای یک سیستم منسجم و سپس برای دو حالت خاص سیستم‌های سری-موازی و موازی-سری ارایه می‌شوند.

یافته‌ها: در این مقاله، دو مثال عددی بیان و حل می‌شوند. در مثال اول یک سیستم شبکه پل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در مثال دوم یک سیستم سری-موازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در هر دو مثال، مقادیر مورد نیاز برای افزایش قابلیت اعتماد اجزای سیستم تعیین می‌شوند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: در این پژوهش، با استفاده از یک مدل ریاضی و محاسبات عددی با کمک نرم‌افزار R، مساله بهینه‌سازی برای یک سیستم منسجم بررسی می‌شود.

کلیدواژه‌ها: روش لاگرانژ، سیستم منسجم، قابلیت اعتماد.

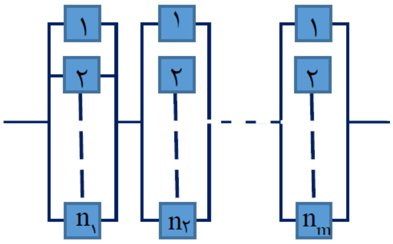
۱- مقدمه

امروزه با سیستم‌هایی سروکار داریم که از اجزا و قطعات متعددی تشکیل شده‌اند و بر اساس یک ساختار از پیش تعیین‌شده برای یک هدف معین در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند و هرکدام از اجزا به‌طور مستقل یا وابسته به دیگر اجزا، وظیفه‌ای را انجام می‌دهند. به این سیستم‌ها، سیستم‌های منسجم گفته می‌شود.

از معروف‌ترین و ساده‌ترین سیستم‌های منسجم می‌توان به سیستم‌های سری و موازی اشاره کرد. اغلب سیستم‌ها از نوع سری یا موازی نیستند بلکه ترکیبی از این سیستم‌ها هستند. یک سیستم سری-موازی متشکل از m زیرسیستم است که به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند و هرکدام از زیرسیستم‌ها شامل n_i مولفه $(i = 1, \ldots, m)$، هستند که به‌صورت موازی به‌هم متصل شده‌اند. یک سیستم موازی-سری نیز شامل m زیرسیستم موازی است که هرکدام از زیرسیستم‌ها شامل n_i مولفه $(i = 1, \ldots, m)$، هستند که به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند. ساختاری از سیستم‌های سری-موازی و موازی-سری به‌ترتیب در **شکل‌های ۱** و **۲** نمایش داده شده است.

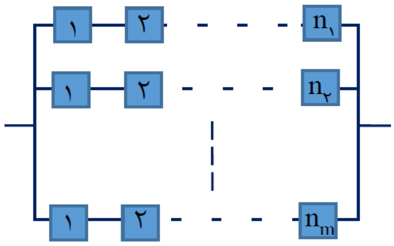
* نویسنده مسئول

elham_basiri2000@yahoo.com



شکل ۱- نمایشی از یک سیستم سری-موازی.

Figure 1- A representation of a series-parallel system.



شکل ۲- نمایشی از یک سیستم موازی-سری.

Figure 2- A representation of a parallel-series system.

قابلیت اعتماد یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های یک سیستم به شمار می‌آید چراکه با شناسایی قابلیت اعتماد یک سیستم می‌توان خرابی یک سیستم را پیش‌بینی کرد. قابلیت اعتماد عبارت است از احتمال آن‌که یک سیستم وظیفه خود را تا زمان مشخصی به‌صورت مطلوب انجام دهد. اگر T یک متغیر تصادفی پیوسته متناظر با طول عمر یک سیستم باشد آن‌گاه تابع قابلیت اعتماد این سیستم در زمان t برابر است با

$$R(t)=P(T>t).$$

قابلیت اعتماد یک سیستم سری-موازی متشکل از m زیرسیستم سری که هرکدام از زیرسیستم‌ها شامل n_i مولفه $(i=1,\dots,m)$، موازی هستند و هرکدام دارای قابلیت اعتماد R_i باشند، را می‌توان از **رابطه (۱)** محاسبه کرد.

$$R_{sys}=\prod_{i=1}^{m}\left[1-(1-R_i)^{n_i}\right]. \tag{۱}$$

هم‌چنین، قابلیت اعتماد یک سیستم موازی-سری شامل m زیرسیستم موازی که هرکدام از زیرسیستم‌ها شامل n_i مولفه $(i=1,\dots,m)$، سری هستند و هرکدام دارای قابلیت اعتماد R_i باشند، از **رابطه (۲)** تعیین می‌شود.

$$R_{sys}=1-\prod_{i=1}^{m}\left[1-R_i^{n_i}\right]. \tag{۲}$$

برای مطالعه بیش‌تر درمورد قابلیت اعتماد و سیستم‌ها می‌توان به منابع [3]-[1] مراجعه نمود.

واضح است که قابلیت اعتماد هر سیستم به ساختار و قابلیت اعتماد هر یک از اجزای آن بستگی دارد؛ بنابراین، یک راه برای افزایش قابلیت اعتماد هر سیستم، بهبود قابلیت اعتماد اجزای آن سیستم است. از طرفی افزایش قابلیت اعتماد اجزای سیستم‌ها منجر به افزایش هزینه‌ها می‌شود. از آن‌جا که هزینه نیز همواره یکی از معیارهای مهم برای تصمیم‌گیری است، لازم است تا یک موازنه بین این دو ایجاد شود.

مساله بهینه‌سازی تاکنون توسط پژوهش‌گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال، کویت و اسمیت [4] در پژوهش خود مساله بهینه‌سازی قابلیت اعتماد و هزینه را با به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک در یک سیستم سری-موازی با انتخاب‌های چندگانه برای هر زیرسیستم، مورد مطالعه قرار دادند. در پژوهش کلاهان و همکاران [5] با در نظرگرفتن یک سیستم چندجزیی، پژوهش‌گران به ارایه یک مدل برنامه‌ریزی بهینه نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه بر اساس قابلیت اعتماد، پرداختند. در این پژوهش، هزینه‌های در نظر گرفته‌شده شامل هزینه‌های تعمیر، جایگزینی، خواب سیستم و خرابی‌های اتفاقی، به حداقل رسانده شد. در پژوهش جلالی نائینی و احمدی زر [6] با به‌کارگیری الگوریتم مورچگان، مساله بهینه‌سازی قابلیت اعتماد در سیستم‌های سری با انتخاب‌های چندگانه برای هر زیرسیستم

و با در نظرگرفتن محدودیت بودجه، حل شد. مساله تخصیص افزونگی برای یک سیستم سری-موازی با به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک و با هدف به حداکثر رساندن قابلیت اعتماد سیستم، در پژوهش توکلی مقدم و صفری [7] مورد بررسی قرار گرفت. کرباسیان و همکاران [8] مدلی چندهدفه ارایه نمودند که بین قابلیت اعتماد سیستم و هزینه مکان‌یابی، نگهداری و تعمیرات سیستم موازنه‌ای برقرار می‌کند. در ادامه با کمک نرم‌افزار لینگو به حل این مدل پرداختند. سیستم مورد مطالعه در این پژوهش از نوع سری بود و طول عمر کلیه‌ی قطعات نیز از توزیع وایبل پیروی می‌کرد. صفائی و احمدی [9] طول دوره جایگذاری بهینه در سیستم‌های تعمیرپذیر را با توجه به تابع هزینه و با در نظرگرفتن توابع نرخ خطر مختلف و هم‌چنین با احتمال تعمیر مینیمال متفاوت، به‌دست آوردند و مورد مقایسه قرار دادند. بررسی و حل مساله مکان‌یابی-مسیریابی با در نظرگرفتن قابلیت اعتماد در پژوهش بهرام پور و همکاران [10] انجام شد. این مساله به‌صورت مدل دوهدفه شامل حداقل کردن هزینه و حداکثر کردن قابلیت اعتماد تعریف و حل شد. در پژوهش بصیری [11] تعداد بهینه برای شکست‌ها در یک نمونه سانسور شده نوع دو بر اساس هزینه و مساله پیش‌بینی شکست‌های آینده تعیین شد. نصیری [12] با در نظرگرفتن یک سیستم سری-موازی با نرخ شکست وانی شکل، مکان بهینه اجزای سیستم و زمان بهینه نگهداری پیشگیرانه طوری تعیین شد که هزینه کل حداقل و قابلیت اعتماد کل سیستم حداکثر شود. یک رویکرد بهبودیافته برای تعیین قابلیت اعتماد و در دسترس بودن یک سیستم در پژوهش شفیعی و همکاران [13] ارایه شد. برای این منظور از پژوهش‌گران روش بیزین استفاده کردند. در پژوهش خلیلی [14] یک مدل ریاضی جهت زمان‌بندی ماشین‌های موازی نامرتبط با هدف حداقل کردن مجموع وزنی زمان تکمیل کارها ارایه نشد. برای حل این مساله از دو روش فرا ابتکاری الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید استفاده گردید و عملکرد آن‌ها مورد مقایسه قرار گرفت. ارایه یک مدل موازنه زمان-هزینه-کیفیت با سه تابع هدف، حداقل کردن زمان ختم پروژه، حداقل کردن هزینه کل پروژه و حداکثر کردن کیفیت کل انجام فعالیت‌ها در یک شبکه *PERT* در پژوهش یوسفی هنومرور و همکاران [15] انجام شد. یک الگوریتم فرا ابتکاری جدید به نام الگوریتم بهینه‌سازی نظامی در پژوهش رجبی‌مقدم و همکاران [16] معرفی گردید و با الگوریتم‌های ژنتیک، ازدحام ذرات، کلونی زنبور مصنوعی، قورباغه جهنده، رقابت استعماری، گرگ خاکستری، بهینه‌سازی وال و بهینه‌سازی ملخ مورد مقایسه قرار گرفت که نشان‌دهنده عملکرد مطلوب الگوریتم پیشنهادی بود. پژوهش کیم و آهن [17] نیز یکی از مسایل بهینه‌سازی قابلیت اعتماد یعنی مکان‌یابی اجزای یک سیستم سری را مورد بحث قرار داد. مساله مورد بررسی در این پژوهش حداقل کردن تابع هزینه به‌منظور دستیابی به قابلیت اعتماد مورد نظر بود. مساله بهینه‌سازی دوهدفه قابلیت اعتماد-هزینه در یک سیستم سری-موازی در پژوهش گارگ [18] مورد مطالعه قرار گرفت. سپس با در نظرگرفتن ترکیبی از توابع هدف و توابع عضویت فازی به حل مساله پرداخته شد. در پژوهش المرسی [19] روش جدیدی برای مدل‌سازی و مدیریت بودجه در محیط فازی با اعداد فازی مثلثی برای توصیف داده‌های بودجه نادقیق تشریح شد. در پژوهش گل‌محمدی و همکاران [20] مدلی برای حل مساله مسیریابی مکان‌یابی چندهدفه با وسایل نقلیه دارای ظرفیت ارایه شد. هدف اصلی این مدل یافتن تعداد و مکان بهینه انبارها، تعداد بهینه خودروها و بهترین تخصیص مشتریان به مراکز توزیع و خودروها بود. دو تابع هدف در این مقاله بررسی شد. تابع هدف اول هزینه کل سیستم را به حداقل می‌رساند و دومی فاصله بین مسافت طی شده وسایل نقلیه را به حداقل می‌کرد. در پژوهش بصیری [21] یک مساله بهینه‌سازی دوهدفه برای یک سیستم موازی با تعداد مولفه تصادفی مورد مطالعه قرار گرفت. در پژوهش بصیری [22]، به تعیین قابلیت اعتماد مورد نیاز اجزای یک سیستم سری-موازی پرداخته شدند به‌گونه‌ای‌که قابلیت اعتماد این سیستم به حداکثر برسد و با در نظرگرفتن این شرط که تابع هزینه حاصل از افزایش قابلیت اعتماد اجزای این سیستم از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای بیش‌تر نشود. به‌عنوان تعمیمی از پژوهش بصیری [22]، در این مقاله هدف تعیین میزان افزایش مورد نیاز برای قابلیت اعتماد هر مولفه یک سیستم منسجم است به‌گونه‌ای‌که هزینه حاصل از این افزایش به حداقل برسد با این شرط که مقدار قابلیت اعتماد کل سیستم از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای کم‌تر نشود. برای این منظور، در ابتدا مساله برای یک سیستم منسجم دلخواه مطرح و در ادامه برای مطالعه با جزییات بیش‌تر دو حالت خاص برای سیستم منسجم به‌صورت سری-موازی و موازی-سری در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین، چهار حالت برای تابع هزینه فرض می‌شود و در تمام حالت‌ها مساله بهینه‌سازی حل می‌شود.

بخش‌های مختلف این مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده‌اند: در بخش ۲، با در نظرگرفتن یک سیستم منسجم، تابع هدف و محدودیت مساله بهینه‌سازی مورد معرفی قرار گرفته‌اند. برای مطالعه با جزییات بیش‌تر دو حالت خاص برای سیستم‌های منسجم، به‌صورت سیستم های سری-موازی و موازی-سری در نظر گرفته می‌شوند. هم‌چنین، چهار تابع هزینه مورد معرفی قرار می‌گیرند. در ادامه با ارایه یک الگوریتم مساله بهینه‌سازی حل می‌شود. در بخش ۳، برای ارزیابی نتایج پژوهش دو مثال عددی بیان شده‌اند. در انتها، جمع‌بندی نتایج پژوهش ارایه می‌شود.

۲- نتایج اصلی

فرض کنید یک سیستم منسجم دارای N جزء و قابلیت اعتماد R_{sys} باشد. اگر هر جزء سیستم دارای قابلیت اعتماد R_i باشد، آن‌گاه به‌منظور افزایش قابلیت اعتماد هر جزء این سیستم به‌اندازه x_i، هزینه‌های سیستم افزایش می‌یابد. در این پژوهش، هدف به حداقل رساندن هزینه کل است به‌شرط آن‌که قابلیت اعتماد کل سیستم از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای مانند R^*، کم‌تر نشود. به‌عبارت‌دیگر

$$MinC_{total} = \sum_{i=1}^{N} C_i(x_i), \quad s.t. \quad R_{sys} \geq R^*, \tag{۳}$$

هرگاه $C_i(x_i)$ هزینه حاصل از افزایش قابلیت اعتماد جزء ith به‌اندازه x_i است. معمولا توابع C_{total} و R_{sys} توابعی غیر نزولی از x_i هستند؛ بنابراین، با در نظرگرفتن محدودیت $R_{sys} \geq R^*$، هزینه زمانی حداقل می‌شود که رابطه $R_{sys} = R^*$ برقرار شود. برای تعیین متغیرهای تصمیم یعنی x_i می‌توان از روش تابع لاگرانژ استفاده کرد. برای این منظور تابع لاگرانژ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{N} C_i(x_i) + \lambda\left\{R_{sys} - R^*\right\}, \tag{۴}$$

که در آن ضریب λ لاگرانژ است. در ادامه با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ نسبت به x_i و λ و مساوی صفر قرار دادن آن‌ها به نتیجه خواهیم رسید.

برای مطالعه بیش‌تر چند حالت خاص را برای سیستم منسجم در نظر می‌گیریم.

سیستم سری-موازی: یک سیستم سری-موازی متشکل از m زیرسیستم سری با n_i مولفه $(i = 1, \dots, m)$، که به‌صورت موازی به‌هم متصل شده‌اند، را در نظر بگیرید. در چنین حالتی با توجه به **رابطه‌های (۱)** و **(۳)** را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R_{sys} = \prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-(R_i + x_i)\right)^{n_i}\right] \geq R^*. \tag{۵}$$

حال برای تابع هزینه کل چند حالت را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} C_{total}^1 = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i + x_i), \\ C_{total}^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i (R_i + x_i)^2, \\ C_{total}^3 = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i e^{(R_i + x_i)}, \\ C_{total}^4 = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i \ln\left(1 + (R_i + x_i)\right). \end{cases} \tag{۶}$$

برای حل این مساله با توجه به اینکه توابع هزینه و قابلیت اعتماد نسبت به x_i غیر نزولی هستند، کم‌ترین مقدار قابل‌قبول برای تابع قابلیت اعتماد منجر به کم‌ترین مقدار ممکن برای تابع هزینه می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، کم‌ترین مقدار برای تابع هزینه زمانی رخ می‌دهد که در **رابطه (۵)** تساوی باشد. حال بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $y_i = R_i + x_i$، $i = 1, \dots, m$. در این حالت تابع لاگرانژ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C_{total}^k + \lambda\left\{\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] - R^*\right\}, \quad k = 1,2,3,4. \tag{۷}$$

با مشتق‌گیری از **رابطه (۷)** نسبت به λ و مساوی صفر قرار دادن آن نتیجه می‌شود که

$$\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = R^*. \tag{۸}$$

هم‌چنین با مشتق‌گیری از **رابطه (۷)** نسبت به $y_i = R_i + x_i$ و مساوی صفر قرار دادن آن، برای هر تابع هزینه داریم

$$\begin{cases} c_i n_i + \lambda n_i \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[1-\left(1-y_j\right)^{n_j}\right] = 0, \; i=1,\ldots,m, \quad k=1, \\ 2c_i n_i y_i + \lambda n_i \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[1-\left(1-y_j\right)^{n_j}\right] = 0, \; i=1,\ldots,m, \quad k=2, \\ c_i n_i e^{y_i} + \lambda n_i \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[1-\left(1-y_j\right)^{n_j}\right] = 0, \; i=1,\ldots,m, \quad k=3, \\ \dfrac{c_i n_i}{\left(1+y_i\right)} + \lambda n_i \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left[1-\left(1-y_j\right)^{n_j}\right] = 0, \; i=1,\ldots,m, \quad k=4. \end{cases} \qquad (۹)$$

با ضرب طرفین **رابطه (۹)** در $\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]$ نتیجه می‌شود که (به‌ازای $i = 1, \ldots, m$)

$$\begin{cases} c_i \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=1, \\ 2c_i y_i \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=2, \\ c_i e^{y_i} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=3, \\ \dfrac{c_i \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]}{\left(1+y_i\right)} + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=4. \end{cases} \qquad (۱۰)$$

از **رابطه‌های (۸)** و **(۱۰)** می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{cases} c_i \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=1, \\ 2c_i y_i \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=2, \\ c_i e^{y_i} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=3, \\ \dfrac{c_i \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]}{\left(1+y_i\right)} + \lambda \left(1-y_i\right)^{n_i-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = 0, \quad k=4. \end{cases} \qquad (۱۱)$$

برای حل معادله‌های **رابطه (۱۱)** باید از روش‌های عددی استفاده کرد. از **رابطه (۱۱)** می‌توان مشاهده کرد که جواب معادله‌ها به مقدار λ بستگی دارد؛ بنابراین، برای حل این معادله‌ها از الگوریتم زیر که در [22] به‌کار گرفته شده است، می‌توان استفاده کرد.

الگوریتم ۱- فرض کنید مقادیر R_i ، n_i ، c_i ، $i=1,\ldots,m$ ، m و R^* از پیش تعیین‌شده باشند. در این‌صورت:

۱. مقدار دلخواهی برای λ در نظر بگیرید.
۲. مقادیر $y_i = R_i + x_i$ ، $i=1,\ldots,m$ ، را از حل معادله‌های **رابطه (۱۱)** بیابید.
۳. حاصل $\prod\limits_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]$ را به‌دست آورید.
۴. اگر رابطه $\prod\limits_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right] = R^*$ برقرار باشد آن‌گاه فرایند را پایان دهید و قرار دهید $x_i = y_i - R_i$ ، $i=1,\ldots,m$. در غیر این‌صورت، مقدار λ را تغییر دهید و به مرحله ۲ بروید.

سیستم موازی-سری: با فرض یک سیستم موازی-سری شامل m زیرسیستم موازی که هرکدام شامل n_i مولفه $(i = 1, \dots, m)$، سری هستند، با توجه به **رابطه‌های (۲)** و **(۳)** محدودیت را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R_{sys} = 1 - \prod_{i=1}^{m}\left[1 - \left(R_i + x_i\right)^{n_i}\right] \geq R^*,$$

که معادل است با

$$\prod_{i=1}^{m}\left[1 - \left(R_i + x_i\right)^{n_i}\right] \leq R^{**},$$

هرگاه $R^{**} = 1 - R^*$. با در نظرگرفتن $y_i = R_i + x_i$ و توابع هزینه **رابطه (۶)** و استفاده از روش لاگرانژ داریم

$$C_{total}^{k} + \lambda\left\{\prod_{i=1}^{m}\left[1 - y_i^{n_i}\right] - R^{**}\right\}, \qquad k = 1,2,3,4. \tag{۱۲}$$

با مشتق‌گیری از **رابطه (۱۲)** نسبت به λ و مساوی صفر قرار دادن آن نتیجه می‌شود که

$$\prod_{i=1}^{m}\left[1 - y_i^{\,n_i}\right] = R^{**}. \tag{۱۳}$$

هم‌چنین با مشتق‌گیری از **رابطه (۱۲)** نسبت به $y_i = R_i + x_i$ ، $i = 1,\dots,m$ و مساوی صفر قرار دادن آن، برای هر تابع هزینه داریم

$$\begin{cases} c_i n_i + \lambda n_i y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m}\left[1 - y_j^{n_j}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 1, \\ 2c_i n_i y_i + \lambda n_i y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m}\left[1 - y_j^{n_j}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 2, \\ c_i n_i e^{y_i} + \lambda n_i y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m}\left[1 - y_j^{n_j}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 3, \\ \dfrac{c_i n_i}{\left(1 + y_i\right)} + \lambda n_i y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m}\left[1 - y_j^{n_j}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 4. \end{cases} \tag{۱۴}$$

با ضرب طرفین **رابطه (۱۴)** در $\left[1 - y_i^{n_i}\right]$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} c_i\left(1 - y_i^{n_i}\right) + \lambda y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left[1 - y_i^{n_i}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 1, \\ 2c_i y_i\left(1 - y_i^{n_i}\right) + \lambda y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left[1 - y_i^{n_i}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 2, \\ c_i e^{y_i}\left(1 - y_i^{n_i}\right) + \lambda y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left[1 - y_i^{n_i}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 3, \\ \dfrac{c_i\left(1 - y_i^{n_i}\right)}{\left(1 + y_i\right)} + \lambda y_i^{n_i - 1}\prod\limits_{i=1}^{m}\left[1 - y_i^{n_i}\right] = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 4. \end{cases} \tag{۱۵}$$

از **رابطه‌های (۱۳)** و **(۱۵)** می‌توان نتیجه گرفت که

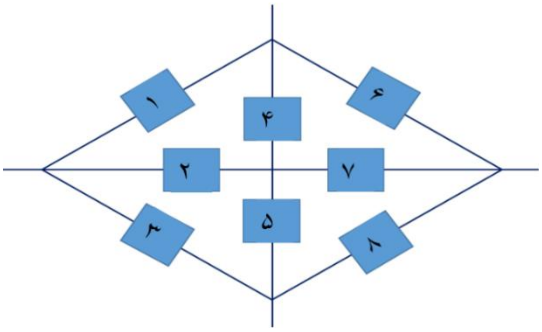
$$\begin{cases} c_i\left(1 - y_i^{n_i}\right) + \lambda y_i^{n_i - 1} R^* = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 1, \\ 2c_i y_i\left(1 - y_i^{n_i}\right) + \lambda y_i^{n_i - 1} R^* = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 2, \\ c_i e^{y_i}\left(1 - y_i^{n_i}\right) + \lambda y_i^{n_i - 1} R^* = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 3, \\ \dfrac{c_i\left(1 - y_i^{n_i}\right)}{\left(1 + y_i\right)} + \lambda y_i^{n_i - 1} R^* = 0, & i = 1,\dots,m, \quad k = 4. \end{cases} \tag{۱۶}$$

برای حل **معادله (۱۶)** نیز باید از روش‌های عددی استفاده کرد. برای این منظور می‌توان از الگوریتمی مشابه **الگوریتم ۱** بهره گرفت.

۳- مثال عددی

برای ارزیابی نتایج بخش ۲، در این بخش به ارایه دو مثال پرداخته می‌شود.

مثال ۱ – در این مثال سیستم شبکه پل را که در پژوهش کرباسیان و همکاران [23] مورد مطالعه قرار گرفته است را بررسی می‌نماییم. **شکل ۳** ساختار این سیستم را نمایش می‌دهد. اگرچه در ظاهر این سیستم ساده است، اما در بسیاری از سیستم‌های صنعتی و مدارهای الکترونیکی کاربرد دارد.



شکل ۳- سیستم شبکه پل.

Figure 3- Bridge network system.

در این سیستم $N = 8$ است و با فرض مستقل بودن اجزای سیستم، کرباسیان و همکاران [23] قابلیت اعتماد چنین سیستمی را به‌صورت زیر به‌دست آوردند:

$$\begin{aligned} R_{sys} = 1-&(1-R_1R_6)(1-R_3R_8)(1-R_2R_7) \\ &(1-R_1R_4R_7)(1-R_2R_4R_6)(1-R_2R_5R_8)(1-R_3R_5R_7) \\ &(1-R_1R_4R_5R_8)(1-R_3R_4R_5R_6). \end{aligned} \tag{۱۷}$$

در ادامه با فرض $R^* = 0.99$ ، $R_i = R = 0.6$ و $x_i = x$ ، به‌ازای $i = 1,\ldots,N$ ، به دنبال تعیین مقدار x هستیم به‌گونه‌ای‌که تابع هزینه ناشی از افزایش قابلیت اعتماد به حداقل برسد و مقدار قابلیت اعتماد کل سیستم از R^* بیش‌تر نشود. برای این منظور با قرار دادن $y = R + x$ تابع قابلیت اعتماد در **رابطه (۱۷)** را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$R_{sys} = 1-(1-y^2)^3(1-y^3)^4(1-y^4)^2. \tag{۱۸}$$

هم‌چنین در این مثال تابع هزینه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$C_{total} = Ny^2. \tag{۱۹}$$

با توجه به **رابطه‌های (٤)، (۱۸)** و **(۱۹)** تابع لاگرانژ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$8y^2 + \lambda\left\{1-(1-y^2)^3(1-y^3)^4(1-y^4)^2 - R^*\right\}. \tag{۲۰}$$

با مشتق‌گیری از **رابطه (۲۰)** نسبت به λ و مساوی صفر قرار دادن آن نتیجه می‌شود که

$$1-(1-y^2)^3(1-y^3)^4(1-y^4)^2 = R^*. \tag{۲۱}$$

هم‌چنین با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ **رابطه (۲۰)** نسبت به y و مساوی صفر قرار دادن آن به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} 8 + \lambda\{&3(1-y^2)^2(1-y^3)^4(1-y^4)^2 + 6y(1-y^2)^3(1-y^3)^3(1-y^4)^2 \\ &+4y^2(1-y^2)^3(1-y^3)^4(1-y^4)\} = 0. \end{aligned} \tag{۲۲}$$

با توجه به **رابطه (۲۱)**، می‌توان **رابطه (۲۲)** را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$8 + \lambda(1-R^*)\left\{\frac{3}{(1-y^2)} + \frac{6y}{(1-y^3)} + \frac{4y^2}{(1-y^4)}\right\} = 0, \tag{۲۳}$$

بنابراین، با به‌کارگیری روشی مشابه **الگوریتم ۱**، مقادیر متفاوت برای λ و انتخاب و سپس مقادیر y از حل **معادله (۲۳)** تعیین می‌شوند. این کار تا زمانی ادامه می‌یابد که **رابطه (۲۱)** برقرار شود. در ابتدا فرض می‌کنیم $\lambda = 100$ ، در این‌صورت به‌دست می‌آوریم $y = 0.47$. در

بصیری / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲، صفحه: ۹۱۶-۹۰۶

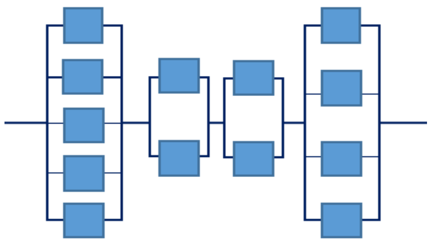
این حالت مقادیر تابع قابلیت اعتماد و تابع هزینه به‌ترتیب برابر هستند با $R_{sys}=0.732$ و $C_{total}=1.798$؛ بنابراین، شرط **رابطه (۲۱)** برقرار نیست. نتایج برای انتخاب‌های متفاوت برای λ در **جدول ۱** ارایه شده‌اند. از **جدول ۱** مشاهده می‌شود که به‌ازای $\lambda=51$، شرط **رابطه (۲۱)** برقرار می‌شود. در این‌صورت به‌دست می‌آوریم $y=0.71$ که معادل است با $x=0.11$. در این حالت مقدار تابع هزینه برابر است با $C_{total}=4.094$؛ بر این اساس، با توجه به نتایج به‌دست آمده برای اینکه تابع هزینه به حداقل برسد و رابطه $R_{sys}\ge R^*$ برقرار باشد لازم است تا قابلیت اعتماد اجزای این سیستم به‌اندازه $x=0.11$ واحد افزایش یابند.

جدول ۱- نتایج عددی مثال ۱.

Table 1- The numerical results of Example 1.

Ctotal	Rsys	y	λ
1.798	0.732	0.47	100
2.155	0.816	0.52	90
2.566	0.887	0.56	80
3.035	0.939	0.62	70
3.564	0.973	0.67	60
4.156	0.991	0.72	50
4.094	0.990	0.71	51

مثال ۲- در این مثال سیستم سری- موازی **شکل ٤** را در نظر بگیرید. همچنین اطلاعات مربوط به این سیستم در **جدول ۲** گزارش شده است.



شکل ۴- سیستم سری-موازی مثال ۲.

Figure 4- Series-parallel system of Example 2.

جدول ۲- اطلاعات مربوط به سیستم شکل ۴.

Table 2- The information related to the system in Figure 4.

c_i	n_i	R_i	زیرسیستم
100	4	0.5	زیرسیستم اول
120	2	0.75	زیرسیستم دوم
200	2	0.65	زیرسیستم سوم
150	5	0.4	زیرسیستم چهارم

با توجه به **شکل ٤**، $m=4$ است و همچنین فرض کنید $R^*=0.95$، با به‌کارگیری **الگوریتم ۱** می‌توان معادله‌های **رابطه (۱۱)** را حل کرد. برای حل معادله‌ها از دستور *uniroot* در نرم‌افزار *R* استفاده می‌شود. نتایج حاصل در **جدول ۳** گزارش شده است. برای به‌دست آوردن این نتایج مقادیر مختلفی برای λ در نظر گرفته می‌شود تا زمانی‌که شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-(1-y_i)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار شود. برای نمونه برای C^1_{total}، در ابتدا مقدار ۱۰۰۰ را برای λ در نظر می‌گیریم که در این حالت داریم $\prod_{i=1}^{m}\left[1-(1-y_i)^{n_i}\right]=0.807$؛ بنابراین، شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-(1-y_i)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار نیست. پس نیاز است تا مقدار λ را تغییر دهیم. در انتها به‌ازای $\lambda=1660$ شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-(1-y_i)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار می‌شود و مقدار تابع هزینه در این حالت برابر است با $C^1_{total}=1140.762$. در این حالت داریم

$$y_1=0.59,\quad y_2=0.92,\quad y_3=0.86,\quad y_4=0.44,$$

که معادل است با

$$x_1=0.09,\quad x_2=0.27,\quad x_3=0.11,\quad x_4=0.04.$$

مقادیر فوق به این معنی هستند که قابلیت اعتماد اجزای اولین زیرسیستم باید به‌اندازه 0.09، زیرسیستم دوم به‌اندازه 0.27، زیرسیستم سوم به‌اندازه ۰/۱۱ و زیرسیستم چهارم به‌اندازه ۰/۰۴افزایش یابند تا درعین‌حال که شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار است تابع هزینه حداقل گردد. به‌عبارت‌دیگر کم‌ترین مقدار ممکن برای تابع هزینه با در نظرگرفتن محدودیت $R_{sys}\geq R^*$ برابر $C_{total}^{1}=1140.762$ است.
به‌طور مشابه برای تابع هزینه C_{total}^{2} به ازای $\lambda=2120$ شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار می‌شود و مقدار تابع هزینه در این حالت برابر است با $C_{total}^{2}=785.497$. در این حالت داریم

$$y_1=0.60,\quad y_2=0.88,\quad y_3=0.83,\quad y_4=0.48,$$

که معادل است با

$$x_1=0.10,\quad x_2=0.23,\quad x_3=0.08,\quad x_4=0.08.$$

علاوه‌براین، برای تابع هزینه C_{total}^{3} که به ازای $\lambda=3160$ شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار می‌شود، مقدار تابع هزینه در چنین حالتی برابر است با $C_{total}^{3}=2308.456$. هم‌چنین، در این حالت داریم

$$y_1=0.60,\quad y_2=0.89,\quad y_3=0.84,\quad y_4=0.46,$$

که معادل است با

$$x_1=0.10,\quad x_2=0.24,\quad x_3=0.09,\quad x_4=0.06.$$

و بالاخره برای تابع هزینه C_{total}^{4} که به ازای $\lambda=1040$ شرط $\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار می‌شود، مقدار تابع هزینه در چنین حالتی برابر است با $C_{total}^{4}=601.24$. هم‌چنین، در این حالت داریم

$$y_1=0.59,\quad y_2=0.93,\quad y_3=0.88,\quad y_4=0.43,$$

که معادل است با

$$x_1=0.09,\quad x_2=0.28,\quad x_3=0.13,\quad x_4=0.03.$$

در **جدول ۳** مقادیر پررنگ‌شده جواب‌های بهینه هستند که در تمامی حالت‌ها رابطه $\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]=R^*$ برقرار شده است؛ پس تابع هزینه با شرط $R_{sys}\geq R^*$ حداقل شده است.

جدول ۳- نتایج عددی مثال ۲.

Table 3- The numerical results of Example 2.

C_{total}	$\prod_{i=1}^{m}\left[1-\left(1-y_i\right)^{n_i}\right]$	y_4	y_3	y_3	y_1	λ	تابع هزینه
1017.126	0.807	0.37	0.78	0.86	0.52	1000	C_{total}^{1}
1064.617	0.847	0.40	0.82	0.89	0.55	1200	
1118.075	0.886	0.43	0.85	0.91	0.58	1500	
1132.635	0.895	0.43	0.86	0.91	0.59	1600	
1145.950	0.903	0.44	0.87	0.92	0.60	1700	
1139.437	0.899	0.44	0.86	0.91	0.59	1650	
1140.762	**0.900**	**0.44**	**0.86**	**0.92**	**0.59**	**1660**	
586.107	0.770	0.40	0.71	0.79	0.52	1000	C_{total}^{2}
695.592	0.851	0.44	0.78	0.85	0.56	1500	
728.721	0.871	0.45	0.79	0.86	0.58	1700	
770.727	0.893	0.47	0.82	0.88	0.59	2000	
783.105	0.899	0.47	0.82	0.88	0.60	2100	
794.791	0.905	0.48	0.83	0.89	0.60	2200	
789.033	0.902	0.48	0.83	0.89	0.60	2150	
785.497	**0.900**	**0.48**	**0.83**	**0.88**	**0.60**	**2120**	
1486.021	0.639	0.33	0.63	0.73	0.45	1000	C_{total}^{3}
1993.643	0.826	0.41	0.77	0.84	0.54	2000	
2150.679	0.866	0.44	0.80	0.87	0.57	2500	
2274.181	0.893	0.46	0.83	0.89	0.59	3000	
2295.86	0.897	0.46	0.83	0.89	0.60	3100	
2316.69	0.901	0.46	0.84	0.89	0.60	3200	
2306.378	0.899	0.46	0.84	0.89	0.60	3150	
2308.456	**0.900**	**0.46**	**0.84**	**0.89**	**0.60**	**3160**	
593.758	0.894	0.42	0.88	0.93	0.59	1000	C_{total}^{4}
627.586	0.918	0.45	0.90	0.94	0.61	1200	
611.724	0.907	0.43	0.89	0.93	0.60	1100	
603.044	0.901	0.43	0.88	0.93	0.59	1050	
599.411	0.898	0.42	0.88	0.93	0.59	1030	
601.24	**0.900**	**0.43**	**0.88**	**0.93**	**0.59**	**1040**	

بصیری / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲، صفحه: ۹۱۶-۹۰۶

۴- نتیجه‌گیری

قابلیت اعتماد یکی از ویژگی‌های مهم هر سیستم است. پرواضح است که افزایش قابلیت اعتماد اجزای هر سیستم منجر به افزایش هزینه های آن سیستم می‌شود. از آن‌جاکه هزینه هم همواره یک معیار مهم تصمیم‌گیری است، لازم است تا یک موازنه بین قابلیت اعتماد و هزینه ایجاد شود. در این مقاله، به دنبال تعیین مقدار افزایش مورد نیاز برای قابلیت اعتماد اجزای یک سیستم منسجم هستیم به‌گونه‌ای‌که هزینه حاصل از این افزایش به حداقل برسد و مقدار قابلیت اعتماد کل سیستم از مقدار از پیش تعیین‌شده‌ای کم‌تر نشود. برای مطالعه با جزییات بیش‌تر دو سیستم سری-موازی و موازی-سری را در نظر می‌گیریم. در ادامه بعد از ارایه مدل، با به‌کارگیری روش لاگرانژ و یک الگوریتم، مساله مورد نظر حل شده است. در انتها، دو مثال عددی برای ارزیابی روش مورد استفاده نیز بیان شده‌اند.

تشکر و قدردانی

لازم است تا از سردبیر، هیات تحریریه، داوران و ویراستار محترم مجله برای صرف وقت در مطالعه مقاله و ارایه پیشنهادهای ارزنده در جهت بهبود مقاله، تقدیر و تشکر شود.

تعارض با منافع

نویسنده این مقاله تضمین می‌کند که این مقاله، اثر اصلی او بوده، قبلا چاپ نشده، و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

[1] Rausand, M., & Hoyland, A. (2003). *System reliability theory: models, statistical methods, and applications* (Vol. 396). John Wiley & Sons.

[2] Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data.* John Wiley & Sons.

[3] Bain, L. (2017). *Statistical analysis of reliability and life-testing models: theory and methods.* Routledge.

[4] Coit, D. W., & Smith, A. E. (1996). Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm. *IEEE transactions on reliability*, *45*(2), 254–260.

[5] Kolahan, F., Doust, P. M., & Mamourian, M. (2007). Type and frequency of preventive maintenance for multi-component systems based on reliability. *Journal of faculty of engineering*, *41*(4), 511-523. (**In Persian**). https://www.sid.ir/paper/14083/fa

[6] Jalali Naeini, S. G. R., & Ahmadizar, F. (2007). An ant colony algorithm for reliability optimization of a series system with multiple-choice under budget constraint. *Management knowledge(not publish)*, *20*(76), 3-22. (**In Persian**). https://jmk.ut.ac.ir/article_18611.html

[7] Tavakkoli-Moghaddam, R., Safari, J., & Sassani, F. (2008). Reliability optimization of series-parallel systems with a choice of redundancy strategies using a genetic algorithm. *Reliability engineering & system safety*, *93*(4), 550–556.

[8] Karbasian, M., Ghandehary, M., & Abedi, S. (2010). Optimization of reliability centered maintenance bassed on maintenance costs and reliability with consideration of location of components. *Research in production and operations management*, *1*(1), 19-30. (**In Persian**). https://jpom.ui.ac.ir/article_19760.html

[9] Safaei, F., & Ahmadi, J. (2015). Comparison of optimal replacement times in repairable systems based on failure rate functions and probability of minimal repair times. *Journal of statistical sciences*, *9*(1), 61-76. (**In Persian**). http://jss.irstat.ir/article-1-283-fa.html

[10] Bahrampour, N., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Shahsavari Pour, N. (2017). Bi-objective optimization for a location-routing problem with reliability and fuzzy cost. *Journal of industrial engineering research in production systems*, *4*(8), 133-145. (**In Persian**). https://www.sid.ir/paper/241312/en

[11] Basiri, E. (2017). Optimal number of failures in Type II censoring for rayleigh distribution. *Journal of applied research on industrial engineering*, *4*(1), 67–74.

[12] Basiri, E. (2021). Optimization of reliability and cost in series-parallel-repairable systems with bathtub-shaped failure rate. *Journal of statistical sciences*, *14*(2), 351-366. (**In Persian**). http://jss.irstat.ir/article-1-622-fa.html

[13] Shafiee, M., Saleh, H., & Kaveh, A. (2020). Evaluating the system reliability and availability under fuzzy Bayesian approach. *Journal of decisions and operations research*, *5*(2), 133-150. (**In Persian**). DOI: 10.22105/dmor.2020.229706.1149

[14] Khalili, S. (2021). Unrelated parallel-machine scheduling with preventive and emergency maintenance. *Journal of decisions and operations research*, *6*(1), 25-40. (**In Persian**). DOI: 10.22105/dmor.2021.235558.1156

[15] Yousefi Hanoomarvar, A., Amiri, M., Olfat, L., & Naser Aadrabadi, A. (2021). designing time-cost-quality trade-off model in multimodal PERT network using simulations and NSGA-II and MOPSO algorithms. *Journal of decisions and operations research*, *6*(2), 146-173. (**In Persian**). DOI: 10.22105/dmor.2021.265922.1296

[16] Rajabi Moshtaghi, H., Toloie-Eshlaghy, A., & Motadel, M. R. (2021). A new meta-heuristic algorithm: military optimization algorithm (MOA). *Journal of decisions and operations research*, *6*(3), 304-329. (**In Persian**). DOI: 10.22105/dmor.2021.276125.1333

[17] Kim, S., & Ahn, N. (2021). An optimal algorithm for the reliability optimization problem of a series system with selectable alternatives. *Industrial engineering & management systems*, *20*(1), 61–68.

[18] Garg, H. (2021). Bi-objective reliability-cost interactive optimization model for series-parallel system. *International journal of mathematical, engineering and management sciences*, *6*(5), 1331–1344.

[19] El-Morsy, S. A. (2022). Optimization of fuzzy zero-base budgeting. *Computational algorithms and numerical dimensions*, *1*(4), 147–154.

[20] Golmohammadi, A.-M., Goli, A., & Rasay, H. (2022). Employing efficient algorithms to reduce the distance traveled in location-routing problem considering travel and service. *Innovation management and operational strategies*, *3*(1), 48-61. (**In Persian**). DOI: 10.22105/imos.2022.308682.1173

[21] Basiri, E. (2022). Bi-objective optimization problem of a parallel system with random number of units. *Journal of statistical modelling: theory and applications*, *3*(1), 31-49. (**In Persian**). DOI: 10.22034/jsmta.2023.19126.1068

[22] Basiri, E. (2022). Design of a series-parallel system based on the problem of optimization of reliability and cost. *Journal of quality engineering and management*, *12*(1), 39-50. (**In Persian**). https://www.pqprc.ir/article_164187.html

[23] Karbasian, M., Ahari, R., & Banitaba, M. (2020). Developing a method for allocating reliability to subsystems of a cube satellite adopting suppliers readiness level approach. *Journal of quality engineering and management*, *10*(1), 49-59. (**In Persian**). https://www.pqprc.ir/article_115125.html