



Paper Type: Original Article



Performance Measurement in Data Envelopment Analysis: A BCC-Based Approach

Azam Pourhabib Yekta^{1,*}, Mahnaz Maghbouli²

¹ Department of Mathematics, Sowmesara Branch, Islamic Azad University, Guilan, Iran; apourhabibyekta@yahoo.com.

² Department of Mathematics, Aras Branch, Islamic Azad University, East Azerbaijan, Iran; mmaghbouli@gmail.com.

Citation:



Pourhabib Yekta, A., & Maghbouli, M. (2023). Performance measurement in data envelopment analysis: A BCC-based approach. *Journal of decisions and operations research*, 8(3), 800-813.

Received: 03/07/2022

Reviewed: 06/08/2022

Revised: 19/09/2022

Accepted: 14/11/2022

Abstract

Purpose: Data Envelopment Analysis (DEA) is a technique used to assess performance and measure the relative efficiency of Decision Making Units (DMUs) through linear programming. In most cases, DEA models evaluate inefficient units on the boundary of the production possibility set using reference points that are not Pareto efficient. Consequently, these models often yield zero weights for multipliers, failing to justify all sources of inefficiency. This paper aims to introduce a model that generates non-zero weights.

Methodology: Weight restriction methods have primarily addressed the issue of non-realistic weights. We impose constraints on the weights in the proposed model to achieve our objectives.

Findings: This paper presents a one-stage method based on the BCC model, incorporating weight restrictions, to evaluate the relative efficiency of decision-making units. The proposed model ensures non-zero weights and prevents dissimilarity between weights while maintaining feasibility. Notably, the proposed model does not require any prior information on weights or the classification of units, reducing the complexity of the problem.

Originality/Value: To highlight the strength of the proposed method, the model is implemented on two case studies and compared with the results obtained from standard BCC models and those of Ramon and colleagues. The results indicate the superior performance of the proposed model.

Keywords: Data envelopment analysis, Efficiency, Weight restriction, Weight dissimilarity, Input/output weights.



Corresponding Author: apourhabibyekta@yahoo.com



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



نوع مقاله: پژوهشی

ارزیابی کارایی نسبی بدون متغیر کمکی بر پایه مدل BCC در تحلیل پوششی داده‌ها

اعظم پور حبیب یکتا^{۱*}، مهناز مقبولی^۲

^۱گروه ریاضی، واحد صومعه‌سرا، دانشگاه آزاد اسلامی، گیلان، ایران.

^۲گروه ریاضی، واحد ارس، دانشگاه آزاد اسلامی، آذربایجان شرقی، ایران.

چکیده

هدف: تحلیل پوششی داده‌ها^۱ تکییکی برای تحلیل عملکرد و سنجش میزان کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده^۲ با استفاده از برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. در اکثر موارد، مدل‌های *DEA* واحدهای ناکارا را با استفاده از نقاط مرجع روی مرز مجموعه امکان تولیدی که کارایی پارتو نیستند، ارزیابی می‌کنند؛ بنابراین، این مدل‌ها معمولاً وزن‌های صفر را برای مضراب‌ها بهینه ارایه می‌دهند، درنتیجه، نمرات کارایی به دست آمده از این واحدها، تمام منابع ناکارایی را توجیه نمی‌کند. هدف ما در این مقاله ارایه مدلی است که وزن‌های غیرصفر را تولید کنند.

روش شناسی پژوهش: مساله وزن‌های غیرواقعی اساساً با روش‌های محدودیت وزنی حل شده است. محدودیت وزنی در مدل‌های *DEA* از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برخی از نویسندها عمدها از مدل‌های نسبت مخروطی یا مدل‌های ناچیه اطمینان استفاده کرده‌اند که محدودیت‌هایی را بر وزن‌ها اعمال می‌کنند. چنین محدودیت‌هایی نیاز به اطلاعات یا قضاوت‌های کارشناسان دارند. در نبود هرگونه اطلاعات از متخصصان یا اطلاعات هزینه‌قیمت برای تعیین کران‌های وزن، مجبور هستیم تا از یک معیار فرعی برای انتخاب وزن، میان وزن‌های بهینه دگرین استفاده کنیم. در مدل پیشنهادی برای رسیدن به اهداف خود بروی وزن‌های مدل، محدودیت اعمال می‌کنیم به طوری که نیاز به اطلاعات اولیه ندارد. این مدل وزن‌های مثبت تولید می‌کند و در عین حال از تجانس شدید بین وزن‌ها جلوگیری می‌کند.

یافته‌ها: در این مقاله یک روش یک مرحله‌ای بر پایه مدل *BBC* و با اعمال محدودیت وزنی، برای ارزیابی عملکرد کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارایه شده است که وزن‌های غیرصفر را تصمیم می‌کند و از تشابه وزن‌ها جلوگیری می‌کند. به علاوه نشدنی بودن مدل رخ نمی‌دهد. مدل پیشنهادی، نیاز به هیچ‌گونه اطلاعات اولیه روی وزن‌ها در طبقه‌بندی واحدها ندارد و این موضوع پیچیدگی مساله را کاهش می‌دهد.

اصالت / ارزش افزوده علمی: برای تأکید بر قوت روش پیشنهادی، مدل معرفی شده بر روی دو مثال پیاده‌سازی شده و با نتایج حاصل از مدل‌های استاندارد *BCC*, رامون و همکاران [1] مقایسه می‌گردد. نتایج حاصل حاکی از عملکرد بهتر مدل پیشنهادی است.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، محدودیت وزنی، وزن‌های ورودی/خروجی.

۱- مقدمه

مطالعات در مورد چگونگی بهبود عملکرد نسبی شرکت‌های تولیدی یکی از مسائلی است که اغلب مورد مطالعه در زمینه مدیریت عملکرد قرار می‌گیرد. تحلیل پوششی داده‌ها یکی از معروف‌ترین روش‌های تحلیلی کارایی است. تحلیل پوششی داده‌ها یک رویکرد مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری همگن که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه می‌باشند به کار می‌رود. در بسیاری از زمینه‌ها از جمله واحدهای مراقبت بهداشتی، تولیدات کشاورزی، ارتش و ... استفاده می‌شود. مساله تعیین وزن‌های

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

² Decision Making Units (DMUs)

* نویسنده مسئول



بهینه در مدل‌های اندازه‌گیری کارایی، موضوع مهمی در ادبیات *DEA* است که توجه محققان زیادی را به خود جلب کرد [1]-[11]. مدل‌های نسبی تحلیل پوششی داده‌ها در انتخاب بهترین وزن‌ها آزاد هستند [12]. بنابراین، وزن‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها طوری تعیین می‌گردند که کارایی، ماکریم شود. یکی از مشکلات حاصل از آزادی وزن‌ها در جواب بهینه، اختصاص وزن بزرگ به متغیرهای کم‌اهمیت و وزن کوچک یا حتی صفر به متغیرهای بالاهمیت می‌باشد. در این روش‌ها وزن را بدون هیچ محدودیتی جز نامنفی بودن آن‌ها می‌توان انتخاب نمود. پس امکان صفر شدن وزن‌های متغیر برای بالا بودن کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده وجود دارد. علاوه‌براین مشکل، تفاوت زیاد در وزن‌ها از یک قلم اطلاعات به دیگری می‌تواند نگران‌کننده باشد. یکی دیگر از مشکلات حاصل از آزادی وزن‌ها در مدل‌های *DEA* این است که به واحدهای تصمیم‌گیرنده اجازه داده می‌شود تا مطلوب‌ترین وزن‌ها را جهت رسیدن به

۸۰۱

حداکثر کارایی خود انتخاب کنند؛ بنابراین، کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، با مجموعه مختلفی از وزن‌ها حاصل می‌شود. درنتیجه، مقایسه و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر یک اساس و عادلانه نخواهد بود. علاوه‌براین به خاطر انعطاف‌پذیری در انتخاب وزن‌ها، همیشه بیش از یک واحد کارا خواهد شد. از این‌رو، تمایز بین واحدهای تصمیم‌گیرنده مشکل خواهد بود. تلاش‌های گوناگونی برای غلبه بر این مشکل صورت گرفته است و مساله وزن‌های غیرواقعی در تحلیل پوششی داده‌ها اساساً با روش محدودیت وزنی حل شده است که این محدودیت‌ها امکان اعمال نظر کارشناسان و متخصصان را در مورد اهمیت و اولویت متغیرها نسبت بهم فراهم می‌آورد. محدودیت وزنی در مدل‌های *DEA* از دیدگاه‌های مختلف مورد بحث قرار گرفته است. روش‌هایی مانند نسبت مخروطی [13] یا مدل‌های ناحیه اطمینان [14] وجود دارد که محدودیت‌هایی را بر وزن‌ها اعمال می‌کند و برخی محققین عمدتاً از این روش‌ها استفاده کرده‌اند؛ اما چنین محدودیت‌هایی نیاز به اطلاعات اولیه دارند و در غیاب کارشناسان یا اطلاعات هزینه/قیمت، این مدل‌ها با مشکلات جدی مواجه می‌شوند. بهمنظور کاهش انعطاف‌پذیری وزن‌ها در مدل‌های *DEA*، لیو [15] از رویکرد ناحیه اطمینان استفاده کرد. او مدلی را برای مدل فازی دو مرحله‌ای پیشنهاد کرد که در آن داده‌های ورودی و خروجی به عنوان اعداد فازی در نظر گرفته می‌شوند. وovo همکاران [16] یک مدل تابع هدف ثانویه برای انتخاب وزن‌ها در ارزیابی کارایی مقاطع پیشنهاد کردند. یک توسعه ساده در مدل سنتی *DEA*، گنجاندن یک کران پایین بسیار کوچک روی وزن‌های ورودی و خروجی است. پونسکی و بوzedین چامیوا [17] مشکلات حاصل از این توسعه را شناسایی کردند. آن‌ها نشان دادند که استفاده از کران‌های پایین بسیار کوچک ممکن است منجر به یک هدف کارا با ورودی‌های منفی شود. در بعضی از مدل‌های پیشنهادی، کران‌هایی روی وزن‌ها پیشنهاد شده است که وجود وزن‌های بهینه چندگانه را در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها اصلاح می‌کند. در این مدل‌ها، وزن‌های اکیدا مثبت تولید می‌شود و طبق قضیه دوآل، متغیرهای کمکی متناظر با این وزن‌ها، صفر اختیار می‌شوند. هم‌چنین پونسکی [18] بیان کردند که قرار دادن محدودیت‌های وزنی روی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ممکن است منجر به تولید آزاد یا نامحدود خروجی‌ها گردد. آن‌ها شرایط تحلیلی را برای دسته بزرگی از محدودیت‌های وزنی در مدل وزنی تحلیل پوششی داده‌ها ایجاد کردند که نتایج مدل آن‌ها، وزن‌های بهینه واحد تحت ارزیابی را در بهترین حالت در مقایسه با سایر فناوری توسعه‌یافته محدودیت وزنی نشان می‌دهد. پورحیب و همکاران [19] مدلی را بر پایه محدودیت وزنی پیشنهاد کردند و عملکرد نسبی شرکت‌های توزیع برق ایران را با استفاده از مدل مبتنی بر *CCR-DEA* مورد ارزیابی قرار دادند. مدل پیشنهادی آن‌ها وزن‌هایی مثبت تولید می‌کند و از عدم تجانس شدید بین وزن‌ها جلوگیری می‌کند؛ ولی مدل ممکن است جواب‌های بهینه چندگانه داشته باشد. پورحیب یکتا و مقبولی [20] مدلی را بر پایه محدود کردن اوزان ورودی و خروجی مبتنی بر *CCR* در تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کردند که وزن‌های بهینه منحصر به فرد تولید می‌کند و هم‌زمان وزن‌های بهینه اکیدا مثبت هستند و از عدم تجانس شدید بین وزن‌ها جلوگیری می‌شود. احذف زاده نمین و همکاران [21] مدلی را مبتنی بر محدودیت وزنی در تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کردن و با این مدل عملکرد شعب بانک را ارزیابی نمودند. زهرا بداقی و همکاران [12] روش وزن مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه رضایت مشتریان شرکت‌های فعل در بورس اوراق بهادر تهران را پیشنهاد کردند. رامون و همکاران [1] مدل دو مرحله‌ای را پیشنهاد کردند که براساس محدودیت وزنی در مدل مضری *CCR* است. در مرحله اول با استفاده از یک برنامه‌ریزی خطی تعدادی از کران‌های وزنی را برای واحدهای کارای راسی مشخص کردند. این کار را به وسیله محدودسازی وزن‌های ورودی و خروجی انجام دادند و ضرایب ورودی و خروجی را مجبور کردند تا در یک کران بالا و پایین مناسب قرار گیرند. سپس به دنبال ماکریم کردن حداقل نسبت کران‌های بالا و پایین وزن‌های ورودی و خروجی هستند به طوری که کارایی واحد تحت ارزیابی حفظ شود. در پایان مرحله اول یک کران پایین برای نسبت‌هایی که از مضرب‌ها بهینه واحدهای کارای راسی آمده می‌کنند. در مرحله دوم با استفاده از کران پایین نسبت‌های بهینه حاصل از مرحله اول، واحدهای ناکارا را ارزیابی می‌کنند. تقریب دو مرحله‌ای آن‌ها وزن‌های اکیدا مثبت را نتیجه می‌دهد و تا حد امکان از عدم تجانس شدید بین مضرب‌ها اجتناب می‌کنند. روش رامون و همکاران [1] در سه مرحله صورت می‌گیرد. در مرحله اول باید مدل مضری *CCR* برای تمامی واحدها اجرا شود تا واحدهای کارای راسی مشخص شوند. مرحله دوم فقط برای واحدهای کارای راسی اجرا می‌شود





تا به یک کران پایین برای نسبت مابین مضرب‌ها بهینه از واحدهای کارایی راسی برسند. مرحله سوم برای واحدهای ناکارا اجرا می‌گردد تا نمره کارایی و اوزان بهینه آن‌ها به دست آید؛ بنابراین، پیچیدگی مساله زیاد است و به علاوه مدل آن‌ها در مرحله سوم غیرخطی است. نکته قابل توجه در تمام مطالعات قبلی، ارایه مدل‌هایی عمدتاً تک مرحله‌ای بر پایه مدل CCR استاندارد است. با توجه به اهمیت تولید وزن‌های غیر صفر و هم‌چنین کاهش پیچیدگی‌هایی که در مطالعات قبلی وجود داشت، هدف ما در این مقاله ارایه تقریب تک مرحله‌ای مبتنی بر مدل BBC با محدودیت وزنی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده است. مدل ارایه شده شامل سه ویژگی عمدی، ۱- ایجاد وزن‌های اکیدا مثبت، ۲- اجتناب از تجانس شدید بین وزن‌ها و ۳- پیچیدگی محاسباتی اندک می‌باشد. ساختار مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، مدل مضربی BCC ارایه شده است. تقریب پیشنهادی در بخش ۳ بیان شده است. مثال‌های عددی در بخش ۴ تشریح شده‌اند. مقاله در بخش ۵ با نتیجه‌گیری پایان می‌یابد.

۲- مروری بر بعضی از روش‌های موجود

۲-۱- مدل مضربی BCC

فرض کنید مجموعه‌ای از n واحد تصمیم‌گیرنده متجانس داریم که هر واحد تصمیم‌گیرنده از m ورودی برای تولید s خروجی استفاده می‌کند. کارایی نسبی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده با حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر که معروف به مدل مضربی BCC است، به دست می‌آید:

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r^o y_{ro} + u_o, \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i^o x_{io} = 1, \quad (\text{الف})$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i^o x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r^o y_{rj} + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{ب})$$

$$u_r^o, v_i^o \geq 0 \text{ for all } i \text{ and } r, \quad (\text{ج})$$

$$u_o \text{ is free in sign.} \quad (\text{د})$$

این مدل براساس حرف اول نام پدیدآورندگانش یعنی بنکر، چارنز و کوپرنانگذاری شده است و برخلاف مدل CCR که فرض بازده به مقیاس ثابت دارد، در مدل BCC فرض بازده به مقیاس متغیر در نظر گرفته شده است. متغیرهای v_i^o و u_r^o به ترتیب وزن‌های i^{th} ورودی و r^{th} خروجی هستند. جواب مدل (۱) به طور مستقیم میزان کارایی نسبی واحد تحت ارزیابی را محاسبه می‌کند. درصورتی که مقدار تابع هدف برای واحد تحت بررسی مساوی یک باشد، بدین مفهوم است که واحد تحت ارزیابی کارا است و درصورتی که مقدار آن کوچک‌تر از یک باشد، واحد تحت ارزیابی ناکارا می‌باشد. مدل فوق، مدل مضربی BCC در حالت ورودی محور می‌باشد و مدل دوگان آن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Min} \quad \theta, \quad (2)$$

s.t.

$$x_{io}\theta - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (\text{ج})$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{د})$$

در مدل (۲) بردار n -تایی $(\lambda_j, j=1, \dots, n)$ ، متغیر دوگان تعریف شده نظیر با محدودیت (۲-الف) است و به دلیل وجود متغیر آزاد در

علامت u_o ، محدودیت تحدیب $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ در مدل ظاهر شده است. مدل (۲) فرم پوششی BCC در حالت ورودی محور نیز نامیده

می شود. در این مدل نیز اگر مقدار بهینه تابع هدف، برابر یک باشد یا همان 1^* ، واحد مورد ارزیابی کارا و در غیر این صورت ناکارا ارزیابی می شود.



۲-۲- مدل پیشنهادی رامون و همکاران

مدل پیشنهادی رامون و همکاران [1] در ارزیابی تحلیل پوششی داده ها با متغیر کمکی غیر صفر مقابله می کند که براساس محدودیت مضربی در فرمول مدل مضربی CCR است. این روش، وزن مثبت دقیق را تضمین می کند. آن ها یک روش دوم رحله ای ارایه می دهند که در مرحله اول، هدف تشخیص برخی از کران هایی است که بعدا در مرحله دوم در محدودیت وزن استفاده می شوند که ترکیبی از فرمول مضربی DEA است. ویژگی این کران ها این است که براساس یک معیار فرعی، وزن هایی را از میان جواب های بهینه دگرین مدل مضربی DEA انتخاب می کنند که از عدم تجانس شدید بین وزن ها اجتناب کند که اغلب در برنامه کاربردی DEA وجود دارد. در مرحله دوم نمرات کارایی واحد های ناکارا را محاسبه می کنند که تمام منابع ناکارایی را توجیه کند یعنی وزن غیر صفر را ارایه دهد. آن ها مجموعه $DMUs$ را به گروه های E ، E' ، NE ، NE' ، F و NF تقسیم کنند. E کارای قوی هستند، E' شامل واحد های کارایی کارایی کارایی کارای ضعیف است NE ، NE' و NF واحد های ناکارا هستند که تصویر آن ها روی نقاط E ، E' و F می افتد.

مرحله ۱- در این مرحله با استفاده از یک برنامه ریزی خطی (LP) تعدادی از کران های وزن برای واحد های کارای راسی (E) مشخص می شود به طوری که برای هر وزن ورودی / خروجی به یک کران پایین مثبت برای نسبت هایی از مضرب ها برسند. این کار را به وسیله محدود سازی وزن های ورودی و خروجی انجام می دهند. ضرایب ورودی و خروجی را مجبور می کنند تا در یک کران بالا و پایین مناسب قرار گیرند. سپس به دنبال ماکریزم کردن، حداقل نسبت کران های بالا و پایین وزن های ورودی و خروجی است به طوری که کارایی واحد تحت ارزیابی، حفظ شود. برای هر واحد کارای راسی DMU_{jo} مساله زیر را حل می کند:

$$\text{Min} \quad \varphi_{jo} = \frac{z}{h}, \quad (3)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} = 1, \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj_0} = 1, \quad (\text{ب})$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} \leq 0, \quad j \in E, \quad (\text{ج})$$

$$z \leq v_i \leq h, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{د})$$

$$z \leq \mu_r \leq h, \quad r = 1, \dots, s, \quad (\text{ه})$$

$$v_i, \mu_r, z, h \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s. \quad (\text{و})$$

متغیر های z و h به ترتیب کران های پایین و بالا برای وزن های ورودی / خروجی واحد تحت ارزیابی را نشان می دهد. این مدل برای تمام واحد های کارای راسی حل می شود. تابع هدف مدل بالا، کسر $\frac{z}{h}$ را ماکریزم می کند که بدین ترتیب حداقل نسبت مابین مضرب ها را نتیجه می دهد؛ بنابراین، مدل وزن های بهینه با حداقل تجانس که اجازه دهد DMU_o کارا شود را جستجو می کند. با حل مدل (3) برای تمام واحد های کارای راسی (E)، همه اطلاعات حاصله را از طریق اسکالر زیر جمع آوری می کیم:

$$\mathbf{f}^* = \text{Min } \mathbf{f}_o^*, \\ o \in E,$$

که φ^* یک کران پایین برای نسبت های پایین مضرب ها بهینه از واحد های کارای راسی را آماده می کند که $0 < \varphi^*$ می باشد.

مرحله ۲- فرض کنید DMU_o یک واحد ناکارا در $FUNF$ باشد. برای ارزیابی کارایی نسبی DMU_o با استفاده از φ^* محاسبه شده از مرحله ۱، مساله LP زیر پیشنهاد می شود:



(۴)

s.t.

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj_0} = 1, \quad (4-\text{الف})$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} \leq 0, \quad j \in E, \quad (4-\text{ب})$$

$$z \leq v_i \leq h, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4-\text{ج})$$

$$z \leq \mu_r \leq h, \quad r = 1, \dots, s, \quad (4-\text{د})$$

$$\frac{z}{h} \geq f^*, \quad (4-\text{ه})$$

$$v_i, \mu_r, z, h \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s. \quad (4-\text{و})$$

تقریب دومرحله‌ای فوق، وزن‌های اکیدا مثبت را نتیجه می‌دهد و واحد مرجع کارایی پاراتو یا به طور معادل متغیر کمکی صفر را تضمین می‌کند؛ بنابراین، این مدل از *DEA* کلاسیکی حرکت می‌کند که امکان تفاوت زیاد بین وزن‌های *DMU* تحت بررسی را با ماکزیمم‌سازی نمرات کارایی حاصله فراهم می‌آورد و در مسیر مخالف به دنبال وزن غیرصفر حرکت می‌کند. درحالی که همزمان سعی می‌شود تا حد امکان از عدم تجانس شدید بین مضرب‌ها اجتناب شود. فواید دیگر این روش این است که دارای مشکلات نشدنی نیست و مشکلاتی با جواب بهینه دگرین وزن در مدل‌های *DEA* ندارد.

۳- مدل پیشنهادی

فراوانی بالای متغیرهای کمکی غیرصفر یا معادل آن وزن صفر در حین ارزیابی واحدهای ناکارا تا حد زیادی ناشی از انعطاف‌پذیری وزن مطلق در تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که منجر به نتایج غیرمنطقی می‌شود. این قضیه حاکمی از این است که در هنگام ارزیابی کارایی، واحدهای ناکارا روی وجهه‌های مرز کارایی ضعیف تصویر می‌شوند؛ یعنی این واحدهای با نقاط مرجعی ارزیابی می‌شوند که کارایی پاراتو نیستند؛ بنابراین، نمرات کارایی حاصل، تمام منابع ناکارایی را توجیه نمی‌کند. در این بخش یک تقریب دومرحله‌ای مبتنی بر مدل *BCC* با محدودیت وزنی برای ارزیابی واحدهای ناکارا پیشنهاد می‌شود که این تقریب، متغیر کمکی صفر یا معادل آن وزن‌های اکیدا مثبت تولید می‌کند و از عدم تجانس شدید بین وزن‌ها جلوگیری می‌کند. یکی از عمده‌ترین نقاط قوت مدل پیشنهادی این است که این مدل نیازی به طبقه‌بندی واحدهای به زیرمجموعه‌های کارایی راسی، کارایی پاراتو و کارایی ضعیف ندارد. علاوه‌بر این در مدل پیشنهادی نیازی به اطلاعات اولیه برای اعمال محدودیت روی مضرب‌ها وجود ندارد و تلاش محاسباتی در مدل پیشنهادی به طور قابل توجهی کمتر است. روش پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود. براساس مدل (۵)، وزن‌های بهینه اکیدا مثبت (با عدم تجانس شدید بین وزن‌ها) برای واحد تحت ارزیابی انتخاب می‌شود.

$$\text{Min} \quad s_o^* (\beta - \alpha), \quad (5)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i^o x_{io} = 1, \quad (5-\text{الف})$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^o y_{ro} + s_o + u_o = 1, \quad (5-\text{ب})$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i^o x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r^o y_{rj} + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq o, \quad (5-\text{ج})$$

$$\alpha \leq v_i^o x_{io} \leq \beta, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5-\text{د})$$

$$\alpha \leq u_r^o y_{ro} \leq \beta, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5-\text{ه})$$

$$u_r^o, v_i^o, \alpha, \beta, s_o \geq 0 \text{ for all } i \text{ and } r. \quad (5-\text{و})$$

محدودیت (۱) و محدودیت (۳) در مدل (۵) مشابه محدودیت‌های مدل *BCC* است. علاوه‌بر این، محدودیت‌های (۵-الف) و (۵-ب) کارایی واحد تحت ارزیابی را تضمین می‌کند. همچنین محدودیت (۵-ج) شدنی بودن وزن‌ها را حفظ می‌کند. متغیر کمکی



s_0 ، در محدودیت (۵-ج) مقدار انحراف واحد تحت ارزیابی را از مرز کارایی نشان می‌دهد. دو محدودیت آخر، محدودیت (۵-د) و (۵-ه) پروفایل وزن‌های غیر صفر را تضمین می‌کنند. همان‌طور که از محدودیت‌ها برمی‌آید، α کران پایین وزن‌ها و β کران بالای وزن‌ها است. همان‌طور که از مدل (۵) برمی‌آید، به هیچ‌گونه اطلاعات اولیه درباره واحد تحت ارزیابی برای اعمال محدودیت روی وزن‌ها، احتیاج نداریم. با مینیمم کردن $(\alpha - \beta)^*$ در تابع هدف، وزن‌های بهینه ورودی و خروجی را با مینیمم کردن متغیر انحراف (۵-ه) و کران بالای اوزان (β) و هم‌زمان ماکزیمم کردن کران پایین اوزان (α) جستجو می‌کنیم. با افزایش α یک کران پایین مثبت برای اوزان ورودی و خروجی مایین مضرب‌ها شدنی واحد تحت ارزیابی جستجو می‌کنیم و با کاهش β از عدم تجانس شدید بین مضرب‌ها جلوگیری می‌شود؛ اما نکته جالب توجه در خصوص مدل پیشنهادی، غیرخطی بودن آن است. برای حل مدل غیرخطی (۵)، روش دو مرحله‌ای زیر پیشنهاد می‌شود:

ابتدا با حداقل کردن متغیر انحراف، نمرات کارایی واحدهای تحت ارزیابی را مینیمم کردن می‌شود. در گام دوم با استفاده از جواب‌های بهینه مرحله ۱، در مرحله ۲، هم‌زمان کران بالای وزن‌ها را مینیمم کردن و کران پایین وزن‌ها را ماکزیمم کردن می‌شود که این دو مرحله به صورت زیر بیان می‌شود.

مرحله ۱- با استفاده از مدل (۶)، نمرات کارایی واحد تحت ارزیابی حداقل می‌شود:

$$\text{Min } s_o, \quad (6)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i^o x_{io} = 1, \quad (6-\text{الف})$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^o y_{ro} + s_o + u_o = 1, \quad (6-\text{ب})$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i^o x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r^o y_{rj} + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq o, \quad (6-\text{ج})$$

$$\alpha \leq v_i^o x_{io} \leq \beta, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6-\text{د})$$

$$\alpha \leq u_r^o y_{ro} \leq \beta, \quad r = 1, \dots, s, \quad (6-\text{ه})$$

$$u_r^o, v_i^o, \alpha, \beta, s_o \geq 0, \text{ for all } i \text{ and } r. \quad (6-\text{و})$$

همان‌طور که از مدل (۶) برمی‌آید متغیر انحراف s_0 در تابع هدف حداقل می‌شود با فرض اینکه جواب بهینه تابع هدف در این مرحله به صورت $(s_0^*, \dots, s_n^*) = \vec{s}$ باشد. به سراغ مرحله دوم می‌رویم:

مرحله ۲- در مرحله دوم هم‌زمان کران بالای وزن‌ها را مینیمم کردن و کران پایین وزن‌ها را ماکزیمم کردن و نمرات کارایی محاسبه شده مرحله اول را در محدودیت مربوطه جایگزین می‌کنیم، درنتیجه یک کران پایین مثبت برای وزن‌های ورودی و خروجی جستجو می‌کنیم و با کاهش β ، از عدم تجانس شدید مضرب‌ها مایین همه مضرب‌ها شدنی واحد تحت ارزیابی جلوگیری می‌کنیم.

$$\text{Min } (\beta - \alpha), \quad (7)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i^o x_{io} = 1, \quad (7-\text{الف})$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^o y_{ro} + s_o^* + u_o = 1, \quad (7-\text{ب})$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i^o x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r^o y_{rj} + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq o, \quad (7-\text{ج})$$

$$\alpha \leq v_i^o x_{io} \leq \beta, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7-\text{د})$$

$$\alpha \leq u_r^o y_{ro} \leq \beta, \quad r = 1, \dots, s, \quad (7-\text{ه})$$

$$u_r^o, v_i^o, \alpha, \beta, s_o \geq 0 \text{ for all } i \text{ and } r. \quad (7-\text{و})$$



همان طور که از تابع هدف مدل (۷) برمی آید، کران بالا تا حد امکان مینیمم و کران پایین تا حد ماکریمم می شود به این ترتیب وزن های ایجاد شده برای واحد تحت ارزیابی غیر صفر است و از تجانس شدید بین وزن ها هم جلوگیری می شود. در حقیقت با حل دو مرحله، مدل غیر خطی (۵) حل می شود. قضیه زیر نشان می دهد که مدل پیشنهادی (۵) توانایی تشخیص واحد های کارا و ناکارا را دارد.

قضیه ۱ - واحد تحت ارزیابی (DMU_o) کارایی BCC است اگر و تنها اگر در مدل (۵) داشته باشیم $s_o^* = 0$.

برهان: فرض کنید DMU_o کارایی BCC باشد. پس یک جواب بهینه مانند $(\bar{u}_r, \bar{v}_i, \bar{u}_o)$ در مدل (۱)

$$\text{وجود دارد به طوری که } s_o^* = 0, (\bar{u}_r, \bar{v}_i, \bar{u}_o), (i=1, \dots, m, r=1, \dots, s, o=1, \dots, m, r=1, \dots, s) \text{ واضح است که متغیر کمکی آن صفر است؛ لذا} \\ \sum_{r=1}^s \bar{u}_r y_{ro} + u_o = 1 \text{ یک جواب شدنی و بهینه برای مدل (۵) می باشد.}$$

$$\alpha = \min_{r,i} \{\bar{u}_r, \bar{v}_i\}, \beta = \max_{r,i} \{\bar{u}_r, \bar{v}_i\}$$

قضیه ۲ نشان می دهد که مدل پیشنهادی همواره شدنی است و در بهینگی وزن های مثبت تولید می کند.

قضیه ۲ - مدل (۵) شدنی است و در بهینگی $\alpha > 0$ است.

برهان: فرض کنید DMU_p واحد مرجع برای ارزیابی DMU_o (واحد تحت ارزیابی) باشد. پس وزن بهینه $u_r^p > 0, v_i^p > 0$ ($i=1, \dots, m, r=1, \dots, s, o=1, \dots, m, r=1, \dots, s$) در ارزیابی DMU_p با مدل (۱) BCC وجود دارد؛ بنابراین $s_o = 1 - \sum_{r=1}^s u_r^o y_{ro} - u_o$ با $u_r^p, v_i^p, \alpha = \min_{i,r} \{u_r^p, v_i^p\} > 0, \beta = \max_{i,r} \{u_r^p, v_i^p\} > 0$ یک جواب شدنی با مدل (۵) است.

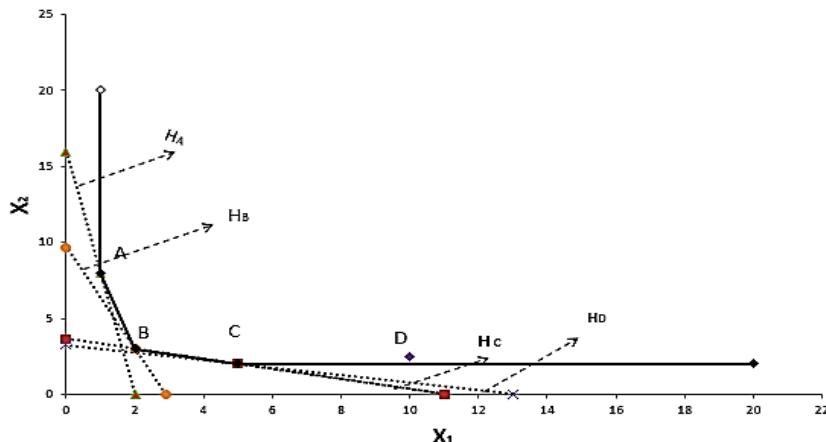
مدل (۵) علاوه بر تولید وزن های مثبت در بهینگی، در مقایسه با مدل های موجود در DEA نقطه قوت دیگری هم دارد، از جمله این که بعضی از مدل های محدودیت وزنی مانند مدل رامون و همکاران [۱]، نیاز به مشخص کردن واحد های کارای راسی و واحد های ناکارا دارند تا مدل دو مرحله ای خود را حل کنند که این کار پیچیدگی حل مدل را افزایش می دهد. در صورتی که قضیه ۲ نشان می دهد که بر اساس مدل (۵) نیاز به طبقه بندی واحد ها به دو دسته کارا و ناکارا قبل از حل مدل نیست؛ بلکه خود مدل بعد از اجرا، واحد های کارا و ناکارا را مشخص می کند در حالی که در مدل رامون و همکاران [۱] قبل از حل مدل دو مرحله ای باید با یک مدل پایه ای تحلیل پوششی داده ها، واحد ها را طبقه بندی کرد. همچنین مدل پیشنهادی نیاز به اعمال هیچ گونه شرطی بر روی وزن ها نیست و در نبود اطلاعات متخصصان و هزینه و قیمت مدل قابل اجرا خواهد بود. اکنون ادعا می کنیم نمرات کارایی نسبی در مدل پیشنهادی ما کمتر یا مساوی نمرات کارایی مدل BCC است.

قضیه ۳ - نمره کارایی نسبی مدل پیشنهادی کمتر یا مساوی نمرات کارایی مدل BCC می باشد.

برهان: واضح است که ماکریمم در مدل BCC معادل مفهوم در تابع هدف مدل (۵) می باشد. فرض کنید $(\bar{u}_r^*, \bar{v}_i^*, \alpha^*, \beta^*, \bar{u}_o^*)$ با $\alpha^* > 0, \beta^* = \max_{i,r} \{\bar{u}_r^*, \bar{v}_i^*\} > 0$ یک جواب بهینه مدل (۵) باشد. به آسانی می توان نشان داد $(\bar{u}_r^*, \bar{v}_i^*, \bar{u}_o^*)$ جواب شدنی در مدل BCC است و این اثبات را کامل می کند.

نقطه قوت مدل پیشنهادی این است که تولید وزن های مثبت را تضمین می کند و از عدم تجانس شدید بین وزن ها جلوگیری می کند. به علاوه نشدنی بودن مدل رخ نمی دهد. مدل پیشنهادی نیاز به هیچ گونه اطلاعات اولیه روی وزن ها در طبقه بندی واحد ها ندارد و این موضوع پیچیدگی مساله را کاهش می دهد.

برای تصویر و مقایسه بهتر وزن‌های جدید، روش پیشنهادی را در یک مثال با مقیاس کوچک برای چهار واحد به کار می‌بریم. چهار واحد با دو ورودی و یک خروجی ثابت داریم. مجموعه امکان تولید در فضای دو ورودی برای $y = 1$ در شکل ۱ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۱- مجموعه امکان تولید برای یک مثال ساده.

Figure 1- Production possibility set for a simple example.

مدل BCC را برای واحدهای کارای راسی A و C و واحد ناکارای D به کار بردیم. جدول ۱ شامل داده‌های ورودی و خروجی و اوزان بھینه مربوط به مدل BCC می‌باشد. همان‌طور از ستون هشتم جدول ۱ مشخص است تمام اوزان بھینه خروجی مساله صفر هستند.

جدول ۱- داده‌های ورودی/خروجی و اوزان بھینه مدل BCC .

Table 1- Input/output data and optimal weights of BCC model.

DMU	x_1	x_2	y	u_o	v_1^*	v_2^*	u^*	Eff^{BCC}
A	1	8	1	1	1	0	0	1
B	2	3	1	1	0.38	0.076	0	1
C	5	2	1	1	0	0.5	0	1
D	10	2.5	1	0.8	0	0.4	0	0.8

مدل (۵) را برای مجموعه داده‌های ورودی/خروجی جدول ۱ به کار بردیم. نتایج اوزان بھینه ورودی/خروجی و نمرات کارایی حاصل از این مدل در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲- اوزان بھینه و نمرات کارایی مدل پیشنهادی.

Table 2- Optimal weights and efficiency scores of the proposed model.

DMU	Eff^{new}	u_o	v_1^*	v_2^*	u^*
A	1	0.5	0.5	0.0625	0.5
B	1	0.5	0.344	0.1037	0.5
C	1	0.5455	0.909	0.2727	0.4545
D	0.65	0.15	0.05	0.2	0.5

مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی همانند مدل BCC دارای سه واحد کارای A ، B و C می‌باشد و واحد ناکارای D و دو مدل است با این تفاوت که نمره کارایی واحد ناکارا در مدل پیشنهادی کمتر از مدل BCC است که در قضیه ۳ اثبات شده است. هم‌چنین وزن‌های خروجی در مدل BCC صفر شد درحالی که در مدل پیشنهادی وزن صفر وجود ندارد که در قضیه ۲ اثبات گردید. اوزان حاصل از مدل پیشنهادی منجر به ابر صفحه‌هایی کارای زیر در مجموعه امکان تولید می‌شود:

$$H_A = \{ (x, y) : 0.5y - 0.05x_1 - 0.0625x_2 + 0.5 = 0 \} \cap T_v.$$

$$H_B = \{ (x, y) : 0.5y - 0.344x_1 - 0.1037x_2 + 0.5 = 0 \} \cap T_v.$$

$$H_C = \{ (x, y) : 0.5455y - 0.0609x_1 - 0.2727x_2 + 0.5455 = 0 \} \cap T_v.$$

$$H_D = \{ (x, y) : 0.5y - 0.05x_1 - 0.2x_2 + 0.15 = 0 \} \cap T_v.$$



مدل (۵) نهتیها مطلوب‌ترین وزن‌ها را برای هر DMU تعیین می‌کند بلکه کارایی نسبی $DMUs$ را که در جدول ۲ با Eff_d^{new} نشان داده شده، مشخص می‌نماید. بر پایه نتایج جدول ۱ و جدول ۲، نمره کارایی مدل BCC مربوط به $DMUD$ ، $0/8$ و کارایی مدل پیشنهادی ما $Eff_d^{new} = 0.65$ می‌باشد که واضح است نمره کارایی تقریب پیشنهادی نسبت به روش BCC کمتر است. مشاهده می‌کنیم تعدادی از اوزان بهینه ورودی و خروجی در مدل BCC صفر هستند؛ بنابراین، نمرات کارایی حاصل از این وزن‌ها، تمام منابع ناکارایی را توجیه نمی‌کند اما در مدل پیشنهادی تمامی اوزان بهینه مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها اکیدا مثبت هستند.



۵- مثال‌ها

۸۰۸

مثال ۱- به منظور نمایش کاربرد روش پیشنهادی، بیست واحدهای تصمیم‌گیرنده که در مقاله رامون و همکاران [1] به کار گرفته شده است و شامل چهار ورودی و دو خروجی می‌باشند را در نظر می‌گیریم. مجموعه داده‌های ورودی/خروجی در جدول ۳ لیست شده است. مدل BCC برای داده‌های جدول ۳ اجرا کردیم. وزن‌های بهینه مربوط به ورودی و خروجی‌های مدل مضری BCC در جدول زیر بیان شده است. همان‌طور که نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد تعدادی از اوزان بهینه ورودی و خروجی در مدل BCC مضری صفر هستند؛ بنابراین، نمرات کارایی حاصل از این وزن‌ها، تمام منابع ناکارایی را توجیه نمی‌کند ولی وزن‌های حاصل از فرمول پیشنهادی اکیدا مثبت هستند. مدل پیشنهادی را برای داده‌های جدول ۳ اجرا کردیم و نتایج در جدول ۵ بیان شده است.

جدول ۳- ورودی و خروجی ۲۰ واحد تصمیم‌گیرنده.

Table 3- Input and output of 20 decision making units.

DMU	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
1	1.7	1.7	2.3	1	2	1
2	5.9	3.3	3.3	1.3	1	2
3	5.6	5	3.3	1.4	1	2
4	2.9	2	1.7	2	2	2
5	2.6	3.3	3.3	1.7	1	2
6	1.7	2.5	1.4	2	1.5	1.5
7	3	5	2.5	2	2	1
8	1.6	4	2	1.5	2	1
9	5.3	2.5	3.3	2	1	2
10	3.3	2	2	2	2	1
11	4	2.5	5	3.3	2	2
12	8	5	1.7	1.1	2	3
13	8	4	3.5	1.7	2	2
14	4.3	3.2	3.3	2	1.5	1
15	1.9	2.5	3.5	1.7	2	1
16	3	5.5	2.4	1.3	1	1.5
17	5.9	4.2	4.9	2	2	2
18	2.8	4.6	2.3	1.9	1	2
19	1.7	2.2	1.4	1.3	1	1
20	3.3	1.7	3.3	3.3	2	1

جدول ۴- اوزان بهینه مدل BCC .

Table 4- Optimal weights of BCC model.

DMU	Eff^{BCC}	u_o	v_1	v_2	v_3	v_4	u_1	u_2
1	1	0	0	0	0	1	0.5	0
2	0.941	0.272	0	0.194	0	0.276	0	0.334
3	0.812	0.176	0.096	0	0	0.331	0	0.318
4	1	0	0	0.5	0	0	0.35	0.15
5	1	0.217	0.118	0	0	0.408	0	0.392
6	1	0.044	0.125	0	0.563	0	0	0.638
7	0.772	0	0.021	0	0.282	0.116	0.386	0
8	1	0	0.097	0	0.422	0	0.5	0
9	0.906	0.262	0	0.187	0	0.266	0	0.322
10	0.95	0	0	0.333	0.167	0	0.475	0
11	0.8	0	0	0.4	0	0	0	0.4
12	1	0	0	0	0	0.909	0	0.333
13	0.755	0	0	0.156	0	0.221	0.109	0.268
14	0.591	0.591	0	0.194	0.11	0.008	0	0
15	0.883	0	0.498	0.022	0	0	0.283	0.317
16	0.933	0.307	0.136	0	0.082	0.304	0	0.417
17	0.7	-0.133	0.1	0	0	0.205	0.092	0.325
18	0.996	-2.161	0.309	0	0.058	0	0	1.578
19	1	1	0	0	0.714	0	0	0
20	1	0	0	0.588	0	0	0.5	0

جدول ۵- اوزان بهینه حاصل از مدل پیشنهادی.

Table 5- Optimal weights obtained from the proposed model.

DMU	s	u_0	v1	v2	v3	v4	u1	u2	References in Proposed Model
1	0	0.5	0.147059	0.147059	0.108696	0.25	0.125	0.25	-
2	0.557628	-0.0576	0.042373	0.075758	0.075758	0.192308	0.25	0.125	1,12
3	0.611293	-0.1113	0.044643	0.05	0.075758	0.178571	0.25	0.125	1
4	0	0.4473	0.086207	0.125	0.147059	0.125	0.125	0.125	-
5	0.511449	-0.0114	0.096154	0.075758	0.075758	0.147059	0.25	0.125	1
6	0	0.4557	0.147059	0.1	0.178571	0.125	0.166666	0.6666	-
7	0.488333	0.0117	0.083333	0.05	0.1	0.125	0.125	0.25	4
8	0.173958	0.326	0.15625	0.0625	0.125	0.166667	0.125	0.25	1
9	0.575569	-0.0756	0.04717	0.1	0.075758	0.125	0.25	0.125	1
10	0.317803	0.1822	0.075758	0.125	0.125	0.125	0.125	0.25	4
11	0.407992	0.092	0.0625	0.1	0.05	0.075758	0.125	0.125	1
12	0	0.3703	0.03125	0.05	0.147059	0.227272	0.125	0.08333	-
13	0.40428	0.0957	0.03125	0.0625	0.071429	0.147059	0.125	0.125	1
14	0.629691	-0.1297	0.05814	0.078125	0.075758	0.125	0.166667	0.25	4
15	0.294971	0.205	0.131579	0.1	0.071429	0.147059	0.125	0.25	1
16	0.515836	-0.0158	0.083333	0.045455	0.104167	0.192308	0.25	0.166667	1
17	0.459429	0.0406	0.042373	0.059524	0.05102	0.125	0.125	0.125	1
18	0.499244	0.0008	0.089286	0.054348	0.108696	0.131579	0.25	0.125	1
19	0.20379	0.2962	0.144059	0.113636	0.178571	0.192308	0.25	0.25	1
20	0.455882	0.0441	0.075758	0.147059	0.075758	0.075758	0.125	0.25	4

همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده شد، وزن‌های حاصل از فرمول پیشنهادی اکیدا مثبت هستند. واحدهای کارا دارای مقدار کمکی صفر می‌باشند که این موضوع در قضیه ۱ اثبات شده است. در مدل پیشنهادی نیاز به طبقه‌بندی واحدهای کارا و ناکارا نداریم؛ زیرا همان‌طور که در ستون دوم جدول فوق مشاهده می‌شود واحدهای کارا دارای $0 = \text{د}_0$ می‌باشند و واحدهای ناکارا مقدار $0 \neq \text{د}_0$ دارند. درنتیجه می‌توان به راحتی دریافت که در مدل پیشنهادی، می‌توان واحدهای کارا و ناکارا را مشخص کرد؛ مانند مدل رامون و همکاران [1] نیاز به طبقه‌بندی واحدها قبل از حل مدل نیست و مشاهده می‌شود مدل پیشنهادی بعد از حل، خودش واحدهای کارا و ناکارا را مشخص می‌کند و این مزیت مهم مدل است درحالی که در مدل رامون و همکاران [1] قبل از حل مدل باید واحدها را با کمک مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها طبقه‌بندی می‌کرد و بعد وارد پروسه حل مدل دورمرحله‌ای می‌شد و هم‌زمان به وزن‌های اکیدا مثبت دست پیدا کرد به‌طوری که از تجارت‌شدن بین وزن‌ها اجتناب شود. در ستون آخر جدول ۵ مجموعه مرجع متناظر با هر واحد ناکارا مشاهده می‌شود. نتایج این ستون نشان می‌دهد که واحدهای یک و چهار برای سایر واحدها معیار است. برای مقایسه نتایج، نتایج نمرات کارایی حاصل از سه مدل، مدل مضربی BCC ، مدل رامون و همکاران [1] و مدل پیشنهادی برروی داده‌های جدول ۳، در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۶- نتایج نمرات کارایی سه مدل.

Table 6- Results of three models' performance scores.

DMU	Eff ^{new}	Eff ^{BCC}	Eff ^{Ramon}
1	1	1	1
2	0.44	0.94	0.8
3	0.38	0.81	0.77
4	1	1	1
5	0.48	1	1
6	1	1	1
7	0.51	0.77	0.71
8	0.82	1	1
9	0.42	0.9	0.78
10	0.68	0.95	0.89
11	0.59	0.8	0.71
12	1	1	1
13	0.59	0.75	0.7
14	0.37	0.59	0.46
15	0.70	0.88	0.81
16	0.48	0.93	0.76
17	0.54	0.7	0.66
18	0.50	0.99	0.92
19	0.79	1	0.78
20	0.54	1	0.8
Average	0.6446	0.9005	0.8275





در جدول ۶ مشاهده می‌شود تعداد واحدهای کارا در مدل پیشنهادی پنج واحد، در مدل BCC هشت واحد و در مدل رامون و همکاران [1] شش واحد می‌باشد. واضح است که نمرات کارایی واحدهای ناکارا در روش پیشنهادی کمتر از دو روش مورد مقایسه است. میانگین نمرات کارایی در روش BCC ، ۹۰۰۵، در روش رامون و همکاران [1]، ۸۲۷۵، و در مدل پیشنهادی، ۶۴۴۶، می‌باشد؛ بنابراین میانگین نمرات کارایی در روش پیشنهادی کمتر از دو روش دیگر می‌باشد که این موضوع در قضیه ۳ به اثبات رسیده بود. این نتیجه دلالت بر این دارد که مدل پیشنهادی می‌تواند وزن‌هایی اکیدا مثبت تولید نماید و از تجانس شدید بین وزن‌ها اجتناب کند.

مثال -۲- یک مثال از کائو و هونگ [22] را در نظر می‌گیریم که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده، هفده حوزه جنگلی با چهار ورودی و سه خروجی می‌باشند. ورودی‌ها شامل بودجه (برحسب دلار آمریکا)، سهام اولیه (در مترمکعب)، کارگر (تعداد کارکنان) و زمین (هکتار) و خروجی‌ها شامل تولید اصلی (در متر مکعب)، خاک (در مترمکعب) و تفریح (تعداد بازدیدکنندگان) برای اندازه‌گیری کارایی می‌باشد. مجموعه داده‌های ورودی و خروجی در جدول ۷ ثبت شده است.

جدول -۷- ورودی و خروجی ۱۷ حوزه جنگلی.

Table 7- Input and output of 17 forest areas.

DMU	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
1	51.6	11.2	49.2	33.2	40.4	14.8	3166.7
2	85.7	123.9	55.1	108.4	43.5	173.5	6.4
3	66.6	104.1	257	13.6	139.7	115.9	0
4	57.87	107.6	14	146.4	25.4	131.7	0
5	51.2	117.5	32	84.5	46.2	144.9	0
6	36	193.3	59.5	8.2	46.8	190.8	822.9
7	25.8	105.8	9.5	227.2	19.4	120	0
8	123	82.4	87.3	98.8	43.3	125.8	404.6
9	61.9	99.7	33	86.3	45.4	79.6	1252.6
10	80.3	104.6	53.3	79	27.2	132.4	42.6
11	205.9	183.4	144.1	59.6	14	196.2	16.1
12	82	104.9	46.5	127.2	44.8	108.5	0
13	202.2	187.7	149.3	93.6	44.9	184.7	0
14	67.5	82.8	44.3	60.8	26	85	23.9
15	72.6	132.7	44.6	173.4	5.5	135.6	24.1
16	84.8	104.2	159.1	171.1	11.5	110.2	49
17	71.7	88.1	69.1	123.1	44.8	74.5	6.1

با اجرای مدل مضربی BCC برای داده‌های جدول ۷، وزن‌های بهینه مربوط به ورودی و خروجی‌های مدل BCC در جدول ۸ بیان شده است.

جدول -۸- اوزان بهینه مدل BCC
Table 8- Optimal weights of BCC model.

DMU	Eff^{BCC}	u_o	V_1	V_2	V_3	V_4	U_1	U_2	U_3
1	1	0	0	0.089	0	0	0	0	0
2	1	0	0.001	0.007	0	0	0	0.006	0
3	1	-0.152	0	0.001	0.003	0	0.008	0	0
4	1	0.282	0	0.006	0.023	0	0.022	0.001	0
5	1	0.191	0	0.004	0.016	0	0.015	0.001	0
6	1	-0.591	0	0.001	0.014	0	0.009	0.005	0
7	1	0.164	0.002	0.009	0.003	0	0.002	0.007	0
8	1	0.110	0	0.010	0.002	0	0	0.007	0
9	1	0.203	0	0.005	0.017	0	0.016	0.001	0
10	0.972	0.202	0	0.006	0.002	0.003	0	0.006	0
11	1	-0.735	0	0.005	0	0.002	0	0.009	0
12	0.831	-0.196	0	0.008	0.004	0	0.009	0.006	0
13	0.894	-3.211	0	0.005	0	0	0.005	0.021	0
14	0.934	0.925	0	0	0.015	0.005	0	0	0
15	0.794	0.164	0.002	0.006	0.002	0	0	0.005	0
16	0.779	0.149	0.003	0.007	0	0	0	0.006	0
17	0.696	0.163	0.008	0.001	0.004	0	0.012	0	0

مشاهده می‌کنیم تعدادی زیادی از اوزان بهینه ورودی و خروجی در مدل BCC صفر هستند؛ بنابراین نمرات کارایی حاصل از این وزن‌ها، تمام منابع ناکارایی را توجیه نمی‌کند. مدل پیشنهادی (۵) را برای داده‌های جدول ۷ اجرا کردیم و نتایج در جدول ۹ بیان شده است.

جدول ۹- اوزان بهینه مدل پیشنهادی.

Table 9- Optimal weights of the proposed model.

DMU	s	u_o	v1	v2	v3	v4	u1	u2	u3	References in Proposed Model
1	0	0.2381	0.00585	0.0205	0.00484	0.00687	0.00568573	0.02025	0.0000727	-
2	0	0.2139	0.00311	0.00195	0.00484	0.00207	0.00612886	0.001533	0.00000155	-
3	0	0.2285	0.0047	0.00289	0.00145	0.00094	0.00266807	0.002449	0.00000155	-
4	0	0.3652	0.00534	0.00325	0.00407	0.00194	0.00410805	0.002727	0.00000155	-
5	0	0.3086	0.00301	0.00321	0.00306	0.00438	0.00340935	0.002504	0.00000155	-
6	0	0.6615	0.00893	0.00166	0.00541	0.00421	0.00078288	0.0014	0.00004208	-
7	0	0.7423	0.01181	0.00237	0.00509	0.00174	0.00078234	0.00202	0.00004432	-
8	0.3767	0.0996	0.00213	0.0026	0.003	0.00265	0.00604308	0.002081	0.00000002	1,2,3
9	0	0.1398	0.0023	0.00143	0.01735	0.00165	0.01260051	0.00179	0.00011592	-
10	0.13352	0.4763	0	0.00296	0.00732	0.0038	0.00000037	0.002945	0.00000023	1,2,5,6
11	0.54863	0.2014	0.00121	0.00136	0.00173	0.00419	0.00000071	0.001274	0.00000062	1,2,3,6
12	0.37277	0.3823	0.00251	0.00238	0.00403	0.0028	0.00000071	0.002257	0.00000062	1,2,3,5
13	0.55418	0.1722	0.00135	0.00146	0.00183	0.00191	0.00000071	0.001481	0.00000062	1
14	0.09727	0.5407	0	0.00429	0.00816	0.00464	0.00000038	0.004259	0.00000042	1,4,6
15	0.31367	0.5007	0.00344	0.00188	0.0056	0.00144	0.0000018	0.001368	0.00000041	1,4,6
16	0.49464	0.2731	0.00295	0.0024	0.00157	0.00146	0.00000087	0.002107	0.0000002	1,6,7
17	0.37697	0.1899	0.00353	0.00287	0.00366	0.00195	0.00564868	0.002413	0.00000163	1,6,7

وزن‌های حاصل از فرمول پیشنهادی در جدول ۹ اکیدا مثبت هستند. واحدهای کارا دارای مقدار کمکی صفر می‌باشند، زیرا همان طور که در ستون دوم جدول فوق مشاهده می‌شود واحدهای کارا دارای $u_o = 0$ می‌باشند و واحدهای ناکارا مقدار $u_o \neq 0$ دارند؛ بنابراین مدل پیشنهادی نیاز به طبقه‌بندی واحدهای کارا و ناکارا نداریم درنتیجه می‌توان برای دریافت که در مدل پیشنهادی، می‌توان واحدهای کارا و ناکارا را مشخص کرد و هم‌زمان به وزن‌های اکیدا مثبت دست پیدا کرد به طوری که از تعجیس شدید بین وزن‌ها اجتناب شود. در ستون آخر جدول ۹ مجموعه مرجع متناظر با هر واحد ناکارا مشاهده می‌شود. نتایج این ستون نشان می‌دهد که واحد اول برای سایر واحدها معیار است. نتایج نمرات کارایی حاصل از سه مدل، مدل مضری BCC ، رامون و همکاران [1] و مدل پیشنهادی در جدول ۱۰ آورده شده است.

جدول ۱۰- نتایج نمرات کارایی سه مدل.

Table 10- The results of the performance scores of the three models.

DMU	Eff ^{new}	Eff ^{BCC}	Eff ^{Ramon}
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	0.62	1	1
9	1	1	1
10	0.86	0.97	0.93
11	0.45	1	0.925
12	0.62	0.83	0.805
13	0.44	0.89	0.799
14	0.90	0.93	0.768
15	0.68	0.79	0.776
16	0.50	0.77	0.732
17	0.62	0.69	0.654
Average	0.8080	0.935324	0.905235

واضح است که نمرات کارایی واحدهای ناکارا در تقریب پیشنهادی کمتر از مدل BCC و مدل رامون و همکاران [1] می‌باشد. میانگین نمرات کارایی در مدل BCC ، رامون و همکاران [1] و تقریب پیشنهادی به ترتیب $0/9052$ ، $0/9353$ و $0/8080$ می‌باشد؛ بنابراین میانگین نمرات کارایی در تقریب پیشنهادی کمتر از دو مدل دیگر می‌باشد. هم‌چنین تقریب پیشنهادی در ارزیابی کارایی نسبی، وزن‌های بهینه مثبت یا به طور معادل متغیر کمکی صفر را نتیجه می‌دهد و به طور هم‌زمان از تعجیس شدید بین وزن‌ها نیز اجتناب می‌کند.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

فراوانی بالای وزن صفر در حین ارزیابی واحدهای ناکارا تا حد زیادی ناشی از انعطاف‌پذیری وزن مطلق در مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که این انعطاف‌پذیری منجر به نتایج غیرمنطقی می‌شود. هم‌چنین انعطاف‌پذیری اوزان ورودی و خروجی در مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها موجب پراکنندگی شدید بین اوزان ورودی/خروجی می‌گردد که اساساً این مشکل با تحمیل





محدودیت وزنی حل می‌گردد و اغلب این کران‌ها را در محدودیت‌های وزنی با نظر متخصصان و یا هزینه‌ها و یا قیمت‌ها تنظیم می‌کنند. در این مقاله یک مدل برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده پیشنهاد می‌شود که براساس تحمیل محدودیت وزنی است. هنگام استفاده از محدودیت وزن، موضوع کلیدی، تنظیم کران‌ها است که در نبود اطلاعات متخصصان و یا قیمت و هزینه‌ها مجبوریم از یک معیار فرعی جهت انتخاب کران وزن کمک بگیریم که معیار کمکی استفاده شده ما براساس دیدگاه اجتناب از تجانس شدید بین وزن‌ها است.

بهیان دیگر، ویژگی این کران این است که وزن‌هایی را از میان جواب‌های بهینه دگرین مدل مضربی انتخاب می‌کنند که از پراکنده‌ی شدید بین وزن‌ها اجتناب کنند و وزن غیر صفر ارایه دهند. هم‌چنین، نمره کارایی یک واحد ناکارا نتیجه مقایسه واحد تحت ارزیابی با نقاط مرجع روی مرز کارایی قوی است که متغیر کمکی صفر را تضمین می‌کند. بدین ترتیب مدل پیشنهادی اوزان اکیدا مثبت تولید می‌کند و هم‌زمان از تجانس شدید وزن‌ها جلوگیری می‌کند. در این مدل نیازی به اطلاعات اولیه روی وزن‌های ورودی و خروجی وجود ندارد و نیاز به طبقه‌بندی واحدها نیست. تلاش محاسباتی در مدل توسعه‌یافته ما به‌طور قابل توجهی کمتر است و مساله پیشنهادی همواره شدنی می‌باشد.

می‌توان روش جدید را برای دیگر مدل‌های پایه‌ای *DEA* مورد مطالعه قرار داد. هم‌چنین می‌توان علاوه بر فرم مضربی، فرم پوششی را نیز مورد مطالعه قرار داد.

منابع

- [1] Ramón, N., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2010). A multiplier bound approach to assess relative efficiency in DEA without slacks. *European journal of operational research*, 203(1), 261–269.
- [2] Cooper, W. W., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2007). Choosing weights from alternative optimal solutions of dual multiplier models in DEA. *European journal of operational research*, 180(1), 443–458.
- [3] Mavi, R. K., Saen, R. F., & Goh, M. (2019). Joint analysis of eco-efficiency and eco-innovation with common weights in two-stage network DEA: A big data approach. *Technological forecasting and social change*, 144, 553–562.
- [4] Omrani, H., Valipour, M., & Mamakani, S. J. (2019). Construct a composite indicator based on integrating common weight data envelopment analysis and principal component analysis models: An application for finding development degree of provinces in Iran. *Socio-economic planning sciences*, 68, 100618. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2018.02.005>
- [5] Ghazi, A., & Lotfi, F. H. (2019). Assessment and budget allocation of Iranian natural gas distribution company-A CSW DEA based model. *Socio-economic planning sciences*, 66, 112–118.
- [6] Afsharian, M., Ahn, H., & Harms, S. G. (2021). A review of DEA approaches applying a common set of weights: The perspective of centralized management. *European journal of operational research*, 294(1), 3–15.
- [7] Izadikhah, M., Shamsi, M., Sheikhani, A., & Ghafouri, F. (2021). A new hybrid approach based on fitch ranking and data envelopment analysis to evaluate the credit performance of the bank's legal clients. *Journal of decisions & operations research*, 6(4), 553–569. (In Persian). <https://www.sid.ir/fileserver/jf/1527-262543-fa-1063951.pdf>
- [8] Shaban, R., Banimahd, B., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Nikoumaram, H. (2020). Evaluate the efficiency of audit firms using data envelopment analysis. *Journal of decisions and operations research*, 5(3), 402–413. (In Persian). <https://doi.org/10.22105/dmor.2020.236384.1160>
- [9] Abbasi Shureshjani, R., & Shakouri, B. (2021). A comment on. *Big data and computing visions*, 1(3), 156–160.
- [10] Mirzaei, S. H. (2019). Ranking aggregation of preferences with common set of weights using goal programming method. *Journal of applied research on industrial engineering*, 6(4), 283–293.
- [11] Monzeli, A., Daneshian, B., Tohidi, G., Razavian, S., & Sanei, M. (2021). A new model to measuring efficiency and returns to scale on data envelopment analysis. *International journal of research in industrial engineering*, 10(2), 128–137.
- [12] Bodaghi, Z., Ahadzadeh Namin, M., & Shahverdiani, S. (2019). Analysis of common weighting method in data envelopment analysis based on customer satisfaction of companies active in Tehran Stock Exchange. *Financial engineering and portfolio management*, 10(38), 19–41. (In Persian). <https://dorl.net/dor/20.1001.1.22519165.1398.10.38.2.8>
- [13] Charnes, A., Cooper, W. W., Huang, Z. M., & Sun, D. B. (1990). Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of econometrics*, 46(1–2), 73–91.
- [14] Thompson, R. G., Singleton Jr, F. D., Thrall, R. M., & Smith, B. A. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*, 16(6), 35–49.
- [15] Liu, S. T. (2014). Restricting weight flexibility in fuzzy two-stage DEA. *Computers & industrial engineering*, 74, 149–160.
- [16] Wu, J., Chu, J., Sun, J., Zhu, Q., & Liang, L. (2016). Extended secondary goal models for weights selection in DEA cross-efficiency evaluation. *Computers & industrial engineering*, 93, 143–151.

- 
-
- ۸۱۳
- [17] Podinovski, V. V., & Bouzdine-Chameeva, T. (2015). Consistent weight restrictions in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 244(1), 201–209.
 - [18] Podinovski, V. V. (2016). Optimal weights in DEA models with weight restrictions. *European journal of operational research*, 254(3), 916–924.
 - [19] Pourhabib, A., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., & Matin, R. K. (2018). Performance measurement in data envelopment analysis without slacks: an application to electricity distribution companies. *RAIRO-operations research*, 52(4–5), 1069–1085.
 - [20] Pourhabibyekta, A., & Maghbouli, M. (2021). Perturbation and uniqueness of optimal weights in cross efficiency evaluation: An application to Iranian Gas companies. *Modern research in decision making*, 6(4), 263–283.
 - [21] Ahadzadeh Namin, M., Khamse, E., & Mohammadi, F. (2019). Performance evaluation of bank branches using weight control approach in data coverage analysis. *Financial engineering and securities management*, 10 (40), 1–28. (In Persian). <https://www.sid.ir/fileserver/jf/6003813984001.pdf>
 - [22] Kao, C., & Hung, H. (2005). Data envelopment analysis with common weights: the compromise solution approach. *Journal of the operational research society*, 56(10), 1196–1203.