E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. x, No. x (xx) x–x.

Paper Type: Original Article

Optimal Multi-Period Portfolio Selection with Different Investment Horizons Using Uncertainty Theory

Younes nozarpour [1], sayyed mohammad reza davoodi[2*] , Mahdi fadaee [3]

1 PhD student in Industrial Management, Financial Orientation, Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran.

2 faculty of management
3 Assistant Professor, Department of Economics, Payame Noor University, Iran;

Citation:

LastName, (Abreviation of FirstName)., & LastName, (Abreviation of FirstName. (Date). Paper Title. *Journal of decisions and operations research,* Volume (Issue), PP.

Received: Reviewed: Revised: Accept:

Abstract

Purpose: The multi-period portfolio after closing, can be reviewed and modified at regular intervals. The philosophy behind using multi-period stock portfolio models is that investors often have a multi-period view of future asset changes that can be derived from technical, fundamental, or statistical models. In conventional multi-period portfolio models, it is assumed that the forecast and correction horizons are the same for all assets. However, one asset may be predicted for the one-month horizon and another for the two-month horizon, and may be revised in the future in these periods. The purpose of this study is to present a multi-period stock portfolio model in which assets have different time horizons for correction or an asset can not be traded for the first few periods and then enter the correction cycle. **Methodology:** In this model, uncertainty variables defined on an uncertainty space are used to describe the returns. The objective function of the model is to maximize the ultimate wealth of the portfolio, and to limit portfolio risk, a constraint is used in which the uncertainty of the ultimate wealth below a threshold is controlled at a confidence level. To find the optimal solution, the model is converted into a form of linear programming by a change of variable method.

Findings: After explaining how to model the research portfolio, using a numerical example the model is implemented on two portfolios with 6 and 10 stocks and 4 monthly time steps on the Tehran Stock Exchange. **Originality/Value:** The present study extends the uncertain multi-period portfolio to a multi-period portfolio with different time horizons and offers an optimal solution through linear programming. In the research stock portfolio, transaction costs are also considered to be more in line with the real conditions.

Keywords: Multi-period portfolio, Different investment horizons, Uncertainty theory, Uncertainty variable.

Corresponding Author:
https://doi.org/10.22105/dmor.2022.322209.1547

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره x، شماره (x)، (xx)، x-x

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

انتخاب سبد سهام بهینه چند دوره‌ای با افق‌های زمانی متفاوت با رویکرد نظریه نا اطمینانی

یونس نوذرپور[1]؛ سید محمد رضا داودی[2*]؛ مهدی فدائی۳

۱ دانشجوی دکترای مدیریت صنعتی گرایش مالی، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران.

۲ گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران.

۳ گروه اقتصاد، دانشگاه پیام نور، اصفهان، ایران.

چکیده

هدف: سبد سهام چند دوره ای پس از بسته شدن می تواند در فواصل زمانی منظم مورد بازنگری و اصلاح قرار گیرد. فلسفه استفاده از مدل‌های سبد سهام چند دوره ای این است که غالباً سرمایه گذاران دارای یک دیدگاه چند دوره ای نسبت به تغییرات آتی دارایی‌ها هستند که این خود می‌تواند برآمده از تحلیل های تکنیکی، بنیادی یا مدل های آماری باشد. در مدل‌های متداول سبد سهام چند دوره‌ای فرض می‌شود که افق‌های زمانی پیش‌بینی و اصلاح برای تمام دارایی‌ها یکسان است. این در حالی است که ممکن است یک دارایی در افق یک ماهه و دیگری در افق دو ماهه پیش‌بینی شود و در آینده نیز در این افق‌ها مورد اصلاح قرار گیرد. هدف پژوهش حاضر ارائه یک مدل سبد سهام چند دوره‌ای می باشد که در آن دارایی‌ها دارای افق‌های زمانی متفاوت برای اصلاح هستند و یا یک دارایی می تواند برای چند دوره اولیه مورد معامله قرار نگیرد و سپس وارد چرخه اصلاح شود.

روش‌شناسی پژوهش : در مدل پژوهش برای توصیف بازده از متغیر نااطمینانی تعریف شده بر روی یک فضای نااطمینانی استفاده می‌شود. تابع هدف مدل بیشینه سازی ثروت نهایی سبد سهام می‌باشد و برای کنترل ریسک سبد از یک محدودیت استفاده می‌شود که در آن اندازه نااطمینانی قرار گرفتن ثروت نهایی زیر یک حد آستانه در یک سطح اطمینان مشخص کنترل می‌شود. برای یافتن جواب بهینه، مدل طراحی شده توسط یک تغییر متغیر به فرم یک برنامه ریزی خطی تبدیل می‌گردد.

یافته‌ها: پس از تشریح نحوه مدل سازی، ضمن دو مثال عددی نحوه پیاده سازی و بهینه سازی عملی مدل بر دو سبد سهام شش و ده عضوی با ۴ گام زمانی ماهیانه بر روی بورس اوراق بهادار تهران تشریح می‌گردد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: پژوهش حاضر سبد سهام چند دوره‌ای نااطمینانی را به یک سبد سهام چند دوره ای با افق های زمانی متفاوت گسترش می‌دهد و بوسیله برنامه ریزی خطی یک راه حل بهینه برای یافتن جواب بهینه ارائه می‌دهد. در سبد سهام پژوهش برای تطابق بیشتر با شرایط واقعی هزینه‌های معاملاتی نیز در نظر گرفته شده اند.

کلیدواژه‌ها: سبد سهام چند دوره‌ای، افق‌های زمانی متفاوت، نظریه نا اطمینانی، متغیر نااطمینانی.

* نویسنده مسئول

https://doi.org/10.22105/dmor.2022.322209.1547

۱- مقدمه

بهینه‌سازی سبد سهام یکی از حوزه‌های پویا در تحقیقات نظری و کاربردی می‌باشد. مسئله عمده در انتخاب سبد سهام، تخصیص یک سرمایه اولیه بین چند دارایی برای یک افق زمانی مشخص می‌باشد، به‌صورتی که بازده ای مناسب در قبال پذیرش یک ریسک کمینه یا به‌اندازه حاصل شود. ازاین‌رو برای مدل‌سازی سبد سهام نیاز است تا بازده مورد انتظار و ریسک سبد مورد کمی سازی قرار گیرد. رویکردهای مختلفی در برآورد بازده مورد انتظار دارایی‌ها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به شبیه‌سازی بر اساس داده‌های تاریخی، سناریو سازی برای آینده بازار به کمک افراد خبره یا استفاده از مدل‌های آماری و هوش مصنوعی اشاره کرد. برای کمی سازی ریسک نیز سنجه‌های مختلفی در ادبیات مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد که به‌عنوان نمونه انحراف معیار بازده، نیم انحراف معیار، مجموع قدر مطلق انحرافات، ضریب بتا و ... از این جمله هستند. یکی از اجزای تعریف سبد سهام، افق زمانی سرمایه‌گذاری می‌باشد. درصورتی‌که تنها یک افق زمانی برای سبد سهام در نظر گرفته شود و سبد پس‌ازآن انتخاب اولیه در زمان بسته شدن تا سررسید، مورد تغییر یا اصلاح قرار نگیرد، آن را سبد تک دوره‌ای می‌گویند [۱]. در نظر گرفتن یک افق زمانی چندان با واقعیت سرمایه‌گذاری سازگار نمی‌باشد. بسیاری از سرمایه‌گذاران بازده مورد انتظار دارایی‌ها و ریسک را برای چند افق زمانی آتی پیش‌بینی می‌کنند و دارای یک برنامه و طرح برای اصلاح یا تغییر در اندازه دارایی‌ها در سبد خود در فواصل زمانی مشخص هستند. به سبد سهامی که بیش از یک افق زمانی را در محاسبات خود دخیل کند، سبد سهام چند دوره‌ای[1] گفته می‌شود. مدل‌های سبد سهام چند دوره‌ای این امکان را می‌دهد که در فواصل زمانی منظم، محتویات سبد مورد بازنگری قرار گیرد و متناسب با اطلاعات جدید تعدیل شود. ازاین‌رو انتظار می‌رود تا مدل‌های چند دوره‌ای با واقعیت تطابق بیشتری داشته باشد [۳].

اکثر پژوهش‌های صورت گرفته در حوزه انتخاب سبد سهام بهینه چند دوره‌ای، افق‌های زمانی را برای تمام دارایی‌ها یکسان در نظر گرفته‌اند. این فرض مستلزم این است که سرمایه‌گذار برای تمام دارایی‌ها و تمام افق‌های زمانی پیش رو، بازده مورد انتظار را پیش‌بینی کند. این در حالی است که در واقعیت ممکن است سرمایه‌گذاران دارایی‌ها را در افق‌های زمانی مختلف مورد پیش‌بینی قرار دهند. به‌عنوان نمونه ممکن است یک سهم را برای افق یک ماه آتی (چند ماه آتی) و یک سهم را برای افق زمانی دو ماه آتی (چند دو ماه آتی) مورد پیش‌بینی و تحلیل قرار دهند که این امر خود می‌تواند ریشه در تحلیل‌های تکنیکی، بنیادی و یا آماری داشته باشد. پیش‌بینی بازده در افق‌های زمانی مختلف دارای ریسک‌های مختلف می‌باشد و میزان ریسک محاسبه شده می‌تواند سرمایه‌گذار را مجاب به استفاده از یک افق زمانی کند. بر این اساس خلأ تحقیقاتی که پژوهش حاضر مورد بررسی قرار می دهد، وجود سررسیدهای مختلف برای دارایی های موجود در سبد سهام چند دوره ای و مدل سازی آن بر اساس نظریه نا اطمینانی[2] می باشد.

ازاین‌رو هدف پژوهش حاضر ارائه یک مدل‌سازی منعطف از سبد سهام چند دوره‌ای با قابلیت افق‌های زمانی متفاوت برای دارایی‌ها می‌باشد. متغیرهای نا اطمینانی امکان مدل‌سازی بازده بر اساس دیدگاه سرمایه‌گذاران و خبرگان را فراهم کرد و اندازه نا اطمینانی نیز برای کنترل میزان ضرر سبد سهام استفاده می شود. مدل ارائه شده در نهایت به یک مدل مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل شد تا جواب بهینه آن به‌راحتی محاسبه می شود. در ادامه ساختار مقاله شامل بخش مبانی نظری و پیشینه تحقیق، روش تحقیق، یافته‌های پژوهش و نتیجه‌گیری و پیشنهادها می‌باشد.

۲- پیشینه تحقیق

به منظور مدل‌سازی منطقی درجات اعتقاد، لیو [۸] نظریه نا اطمینانی یا عدم قطعیت را با فروض نرمالیتی، دوآلیتی، زیرجمعی و اصل ضرب ارائه داد و ثابت کرد که درجه اعتقاد از قوانین عدم قطعیت پیروی می‌کند. مدل انتخاب سبد سهام پژوهش برای مدل‌سازی بازده و همچنین اطمینان از وقوع محدودیت‌های مرتبط با حداقل ثروت مورد انتظار سبد به‌عنوان معیار سنجش ریسک، از نظریه نا اطمینانی استفاده می‌کند که در ادامه به‌اجمال معرفی می‌گردد. نظریه نا اطمینانی متعاقباً با موفقیت در برنامه‌ریزی نا اطمینانی، مالی نا اطمینانی، تجزیه‌وتحلیل ریسک نا اطمینان و ... به کار گرفته شد. ازآنجاکه نظریه نا اطمینانی بر اساس اصول اعتقاد پیاده‌سازی شده است، در تمام شاخه‌های علمی اعم از شاخه‌های علوم انسانی قابل پیاده‌سازی می‌باشد. نظریه احتمال خود یک رویکرد ریاضی صرف نسبت به مقوله نا اطمینانی می‌باشد و بنابراین گستره کاربرد نظریه نا اطمینانی بیشتر است [۹]. غالباً در مدل‌های انتخاب سبد، بازده دارایی‌ها به‌عنوان

---

[1] Multi-Period Portfolio
[2] Uncertainty Theory

متغیرهای تصادفی با توزیع احتمال مشخص در نظر گرفته می‌شوند و برای محاسبه آن از داده‌های تاریخی استفاده می‌شود. این رویکرد بر این فرض استوار است که بازده‌های آتی را می‌توان دقیقاً با داده‌های تاریخی منعکس کرد. بااین‌حال، در عمل به دست آوردن توزیع‌های احتمالی دقیق و همچنین داده‌های کافی با توجه به تغییر مداوم محیط اقتصادی دشوار است. از سوی دیگر در دنیای واقعی بسیاری از عوامل غیر احتمالی در انتخاب سبد سهام وجود دارد که از آن جمله می‌توان به عوامل اجتماعی، سیاسی، روانشناسی مردم و ... اشاره کرد. به‌علاوه سرمایه‌گذاران اغلب اطلاعات را به‌صورت مبهم با توصیفات زبانی مانند ریسک بالا، سود کم و غیره به دست می آورند یا توصیف می‌کنند. نظریه نا اطمینانی کمک می‌کند که دیدگاه سرمایه‌گذاران یا خبرگان در مورد بازده و ریسک آتی دارایی‌ها منعکس شود [۱].

ژو [۱۲] بر اساس نظریه نا اطمینانی، کنترل بهینه نا اطمینانی را مورد مطالعه قرار داد و سپس آن را در مورد بهینه‌سازی سبد سهام به کار برد. پس‌ازآن، هوانگ [٤] با معرفی منحنی ریسک، دو مدل میانگین- واریانس جدید را توسعه داد. لی و شین [٦] یک مسئله انتخاب سبد سهام را با معیار متوسط انحراف نیمه مطلق و در چارچوب نظریه نا اطمینانی فرموله کردند. ژانگ و همکاران [۱۰] دو مدل انتخاب سبد سهام نا اطمینانی را بر اساس میانگین، واریانس و شانس پیشنهاد کردند. چن و همکاران [۲] یک مسئله انتخاب سبد سهام چند منظوره نا اطمینانی را در چارچوب میانگین-واریانس-چولگی- کشیدگی مطالعه کردند. کار و همکاران [٥] یک مدل چندهدفه برای انتخاب سبد سهام بر اساس میانگین، واریانس و آنتروپی متقابل در چهارچوب نظریه نا اطمینانی معرفی کردند. لی و همکاران [۷] یک مدل غیرخطی صحیح مختلط میانگین -واریانس را برای مسئله انتخاب سبد سهام پویا با تقسیم‌پذیری در محیط نا اطمینانی پیشنهاد کردند.

گو و همکاران [۳] در پژوهشی با عنوان "انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای فازی با افق‌های سرمایه‌گذاری مختلف" یک مدل انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای را با تابع هزینه معاملاتی وی شکل و با در نظر گرفتن افق‌های زمانی مختلف ارائه کردند. برای این منظور دو مدل میانگین-واریانس یکی با تابع هدف بیشینه‌سازی درآمد کل و دیگری کمینه‌سازی واریانس ثروت نهایی سبد طراحی گردید. در پایان ضمن یک مثال عددی، مدل‌های مذکور به کمک الگوریتم ژنتیک فازی بر روی یک سبد ٥ سهمی در بورس چین مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. رهیافت پژوهش حاضر از چند لحاظ با پژوهش گو و همکاران [۳] متفاوت است. در زمینه بهره‌گیری از نظریه نا اطمینانی در مدل‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای می‌توان به سه پژوهش زیر اشاره کرد. ژو و همکاران [۹] در یک محیط نا اطمینانی برای بیان بازده‌های آتی دارایی‌ها به‌جای استفاده از داده‌های تاریخی از نظرات کارشناسان استفاده کردند. مدل ارائه شده دارای محدودیت‌های واقعی شامل هزینه‌های معاملاتی، محدودیت نقد شوندگی، تنوع‌پذیری و ریسک زمینه می‌باشد. برای حل مدل غیرخطی مطرح شده یک صورت خطی معادل از آن ارائه شده و بر روی یک سبد ۲۰ سهمی در بورس چین مورد بهینه‌سازی قرار گرفته است. چانگ و همکاران [۱] مدل انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای با در نظر گرفتن حسابداری ذهنی را در چهارچوب نظریه نا اطمینانی فرموله کردند و مدل غیرخطی تولید شده را به یک برنامه‌ریزی خطی تبدیل کردند. در پایان مدل پژوهش بر روی یک سبد سهام با شش دارایی در بورس چین مورد پیاده‌سازی و بهینه‌سازی قرار گرفت. ژانگ [۱۱] نیز مدل چند دوره‌ای را در چهارچوب نظریه نا اطمینانی و با معیار ریسک قدر مطلق انحراف مدل‌سازی کرد. در پژوهش‌های ژو و همکاران [۹]، چانگ و همکاران [۱] و ژانگ [۱۱] همچنان افق‌های زمانی اصلاح برای تمام دارایی‌ها به‌صورت یکسان در نظر گرفته شده است.

۳- مبانی نظری

بازار سرمایه همواره با نوسان همراه است و جریان عرضه و تقاضا به‌صورت پویا باعث افزایش یا کاهش قیمت دارایی‌های مالی می‌گردد. این نوسان‌ها به همراه همبستگی‌های موجود بین آن‌ها باعث می‌شود تا پیش‌بینی سرمایه‌گذاران از بازده‌های آتی دارایی‌های مختلف، غالباً بر پایه یک دیدگاه چند دوره‌ای شکل گیرد. شاهد این مدعا توصیف زبانی بسیاری از سرمایه‌گذاران از آینده بازار می‌باشد. به‌عنوان نمونه توصیف‌هایی از قبیل اینکه "پیش‌بینی می‌کنم که این سهام ابتدا رشد کند، بعد یک دوره نزول را بگذراند و دوباره به رشد خود ادامه دهد" یا توصیف‌هایی از قبیل اینکه "ابتدا سهام موجود در این صنعت را خریداری می‌کنم و پس از پایان رشد به سراغ صنعت دیگر می‌روم" نشان دهنده دیدگاه چند دوره‌ای سرمایه‌گذاران و ضرورت مطالعه سبد سهام چند دوره‌ای می‌باشد [۱۱].

با مرور ادبیات تحقیق دیده می‌شود که اکثر پژوهش‌های صورت گرفته در حوزه انتخاب سبد سهام بهینه چند دوره‌ای، افق‌های زمانی را برای تمام دارایی‌ها یکسان در نظر گرفته‌اند. این فرض مستلزم این است که سرمایه‌گذار برای تمام دارایی‌ها و تمام افق‌های زمانی پیش

رو، بازده مورد انتظار را پیش‌بینی کند. این در حالی است که در واقعیت ممکن است سرمایه‌گذاران دارایی‌ها را در افق‌های زمانی مختلف مورد پیش‌بینی قرار دهند. به‌عنوان نمونه ممکن است سهم A را برای افق یک ماه آتی (چند ماه آتی) و سهم B را برای افق زمانی دو ماه آتی (چند دو ماه آتی) مورد پیش‌بینی و تحلیل قرار دهند که این امر خود می‌تواند ریشه در تحلیل‌های تکنیکی، بنیادی و یا آماری داشته باشد. پیش‌بینی بازده در افق‌های زمانی مختلف دارای ریسک‌های مختلف می‌باشد و میزان ریسک محاسبه شده می‌تواند سرمایه‌گذار را مجاب به استفاده از یک افق زمانی کند.

سبد سهام چند دوره‌ای معرفی شده در پژوهش حاضر امکان تفاوت در افق‌های زمانی را برای دارایی‌های مختلف لحاظ می‌کند و چهارچوبی را برای مدل‌سازی این محدودیت‌ها فراهم می‌کند. ازاین‌رو هر دارایی می‌تواند فواصل زمانی منظم مخصوص به خود در جهت اصلاح‌های دوره‌ای تا سررسید نهایی را داشته باشد. همچنین توجه به افق‌های زمانی متفاوت به یک مفهوم دیگر نیز در پژوهش حاضر مورد مدل‌سازی قرار می‌گیرد. یک دارایی می‌تواند تا قبل از یک دوره زمانی خاص مورد معامله قرار نگیرد و بعد از یک زمان مشخص در جریان معاملات قرار گیرد. در واقع ممکن است سرمایه‌گذار در مورد حداقل زمان نگهداری یک یا چند دارایی دیدگاه‌هایی داشته باشد و بخواهد تا یک زمان مشخص دارایی معامله نگردد.

نا اطمینانی یا عدم قطعیت در بسیاری از رخدادها وجود دارد. نظریه نا اطمینانی بر اساس اصولی که در نحوه اعتقاد افراد به رخ دادن رویدادها وجود دارد، شکل گرفته است که در ادامه بررسی می‌شود. فرض کنیم تمام رخدادهای ممکن در یک مجموعه مرجع قرار گیرد. بدیهی است که میزان اطمینان به رخ دادن یکی از اعضای مجموعه مرجع برابر یک (حداکثر ممکن) است. این اصل در نظریه نا اطمینانی با نام نرمالیتی[1] شناخته می‌شود. فرض کنیم اتفاق افتادن یک رخداد مانند A به مفهوم اتفاق افتادن رخداد دیگری مانند B نیز باشد (مثلاً اگر A رخداد بارندگی شدید و B رخداد بارندگی باشد، در این حالت رخ دادن A به مفهوم رخ دادن B نیز می‌باشد) در این صورت اطمینان به وقوع رخداد A از B کمتر است. این اصل در نظریه نا اطمینانی با نام یکنوایی[2] شناخته می‌شود. اصل خود دوآلی[3] بیان می‌کند که مجموع اطمینان به وقوع یک رخداد و مکمل آن برابر یک است. مثلاً اگر شخصی ٪۹۰ به بارندگی فردا اعتقاد دارد، پس ٪۱۰ به آفتابی بودن آن اعتقاد دارد. اصل آخر با نام زیر جمعی[4] نیز بیان می‌کند که میزان اطمینان به رخداد حاصل از اجتماع چند رخداد (اینکه حداقل یکی از رخدادها روی دهد)، از مجموع اطمینان به تک تک آن‌ها کمتر است. به‌عنوان نمونه اطمینان به اینکه فردا بارندگی یا بارندگی شدید است، از مجموع اطمینان به رخدادهای بارندگی و بارندگی شدید کمتر است که این امر به علت همپوشانی رخدادها می‌باشد [۳].

رهیافت پژوهش حاضر از چند لحاظ با پژوهش گو و همکاران [۳] متفاوت است. مهم‌ترین تفاوت در این است که مدل پژوهش حاضر به‌صورتی تنظیم شده است که تابع هدف، تابعی خطی از متغیرهای نا اطمینانی (نشان دهنده بازده) گردد که این خاصیت موجب می‌شود تا امید ریاضی بتواند به‌صورت خطی پخش شود و تابع هدف را از فرم یک متغیر نا اطمینانی خارج کند و به شکل خطی درآورد. تفاوت مهم دیگر در مدل‌سازی ریسک می‌باشد که در پژوهش گو و همکاران [۳] از واریانس برای این منظور استفاده شده است. واریانس هم تغییرات مثبت و هم تغییرات منفی حول میانگین را لحاظ می‌کند، مستقیماً با مقدار ضرر در ارتباط نمی‌باشد و تعیین مقدار کنترل کننده آن مشکل است. در پژوهش حاضر مشابه معیار ارزش در معرض ریسک، به کمک اندازه نا اطمینانی، میزان ضرر سبد در یک سطح اطمینان مشخص کنترل می‌شود. همچنین مدل پژوهش حاضر خود تأمین[5] می‌باشد. در نظریه سبد سهام، سبد سهام خود تأمین به سبد سهامی اطلاق می‌شود که هزینه لازم برای خرید سهام و یا پرداخت حق معامله را خود سبد سهام تأمین می‌کند؛ یعنی بودجه لازم از طریق فروش محتویات سبد سهام تأمین می‌گردد.

پژوهش حاضر سبد سهام چند دوره‌ای نا اطمینانی را به یک سبد سهام چند دوره‌ای با افق‌های زمانی متفاوت گسترش می‌دهد و بوسیله برنامه‌ریزی خطی یک راه‌حل بهینه برای یافتن جواب بهینه ارائه می‌دهد. در سبد سهام پژوهش برای تطابق بیشتر با شرایط واقعی هزینه‌های معاملاتی نیز در نظر گرفته شده اند. در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی باعث می‌شود تا انتخاب سبد سهام بهینه در شرایط واقعی‌تری

---

[1] Normality
[2] Monotonicity
[3] Self-dual
[4] Subadditivity
[5] Self-finance

صورت گیرد، خصوصاً زمانی که تعداد دفعات معامله یا ارزش معامله بالا می‌رود. جزئیات مربوط به مدل در بخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴- روش پژوهش

در این بخش ابتدا به معرفی اجمالی نظریه نا اطمینانی می‌پردازیم و سپس مدل چند دوره‌ای سبد سهام تشریح می‌گردد. در ادامه تعاریف و قضیه‌های ارائه شده در مورد نظریه نا اطمینانی برگرفته از کتاب نظریه نا اطمینانی نوشته لیو [۸] می‌باشد.

فرض کنیم Ω یک مجموعه و P یک سیگما جبر (مجموعه‌ای شامل زیرمجموعه‌های Ω که در تعدادی اصل صدق می‌کند) روی Ω باشد. به هر مجموعه $A \in P$ یک رخداد گفته می‌شود. تابع $\mu : P \to [0,1]$ را یک اندازه نا اطمینانی گویند هرگاه دارای خاصیت‌های زیر باشد:

۱. نرمالیتی: $\mu(\Omega) = 1$.
۲. یکنوایی: $\mu(A) \le \mu(B)\ if\ \ A \subseteq B$.
۳. خود دوآلی: $\mu(A) + \mu(A^c) = 1\ \forall A \in P$.
۴. زیر جمعی: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\ \forall A_1, A_2, \ldots \in P$.

اگر μ یک اندازه نا اطمینانی روی Ω باشد، سه‌گانه (Ω, P, μ) را فضای نا اطمینانی گویند. تابع حقیقی مقدار ξ را یک متغیر نا اطمینانی روی (Ω, P, μ) گویند، هرگاه نسبت به سیگما فیلد P اندازه پذیر باشد، یعنی برای هر زیرمجموعه برل[1] B از خط اعداد حقیقی رابطه $\{\xi \in B\} = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\} \in P$ برقرار باشد. هر متغیر نا اطمینانی یک توزیع بر روی اعداد حقیقی به‌صورت $\Phi(x) = \mu(\xi \le x)$ ایجاد می‌کند. متغیر نا اطمینانی $\xi \sim N(e, \sigma)$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه تابع توزیع آن به شکل

$$\Phi(x) = (1 + exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{۱}$$

باشد که به e میانگین و به σ انحراف معیار گفته می‌شود. وارون توزیع نا اطمینانی نرمال نیز به‌صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad \alpha \in (0,1). \tag{۲}$$

محاسبه می‌شود. امید ریاضی متغیر نا اطمینانی ξ به‌صورت

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} \mu(\xi \ge x)dx - \int_{-\infty}^{0} \mu(\xi \le x)dx. \tag{۳}$$

و واریانس نیز به‌صورت

$$V(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2. \tag{۴}$$

تعریف می‌شود. به‌عنوان نمونه برای متغیر نا اطمینانی نرمال، میانگین برابر e و واریانس برابر σ^2 محاسبه می‌شود. امید ریاضی تعریف شده دارای خاصیت خطی می‌باشد، یعنی برای دو متغیر نا اطمینانی ξ, η و $a \in R$ داریم:

$$E(a\xi + \eta) = aE(\xi) + E(\eta). \tag{۵}$$

متغیرهای نا اطمینانی $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ را مستقل گویند هر گاه

[1] Borel

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{m}(\xi_i \in B_i)) = \min_{1\le i\le m} \mu(\xi_i \in B_i) \quad B_1, B_2, ..., B_n \in P. \qquad (۶)$$

در این حالت توزیع نا اطمینانی توام متغیرهای مستقل به‌صورت

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_m) = \min_{1\le i\le m} \Phi_i(x_i). \qquad (۷)$$

می‌باشد. قضیه بنیادی زیر اساس مدل‌سازی در پژوهش حاضر می‌باشد.

قضیه ۱. فرض کنیم $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$ متغیرهای نا اطمینانی مستقل بر روی فضای نا اطمینانی (Ω,P,μ) با توزیع‌های $\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_m$ باشند. اگر $f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m)$ نسبت به $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$ اکیداً صعودی باشد آنگاه توزیع $\xi = f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m)$ که با ψ^{-1} نشان داده می‌شود برابر است با

$$\psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha),\Phi_2^{-1}(\alpha),...,\Phi_m^{-1}(\alpha)) \;\; 0 \le \alpha \le 1. \qquad (۸)$$

با مرور اجمالی نظریه نا اطمینانی، در ادامه به مدل‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای با افق‌های زمانی متفاوت بر اساس این نظریه می‌پردازیم. فرض کنیم تعداد دارایی‌های سبد سهام برابر N با مجموعه اندیس $I = \{1,2,...,N\}$ باشد. سبد سهام چند دوره‌ای پژوهش در لحظه $t=0$ بسته می‌شود و در سررسید $t=T$ فروخته می‌شود و در زمان‌های $t \in \{1,2,...,T-1\}$ پس از بسته شدن می‌تواند مورد اصلاح و یا تغییر وزن قرار گیرد. دارایی‌های سبد از لحاظ افق زمانی به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول دارایی‌ها می‌باشد که بازده‌های آن در همه افق‌های زمانی موجود است (در تمام افق‌های زمانی امکان تغییر در آن‌ها از طریق خریدوفروش وجود دارد) که این دسته با S_1 نشان داده می‌شود. دسته دوم که با S_2 نشان داده می‌شود شامل دارایی‌ها می‌باشد که بازده آن‌ها در فواصل زمانی منظم با فاصله $\delta > 1$ موجود است و بنابراین در تعدادی از افق‌های زمانی امکان تغییر دارند. بازده دسته سوم که با S_3 نشان داده می‌شود پس از یک دوره زمانی اولیه به طول $\delta > 1$، برای تمام افق‌های بعدازآن موجود می‌باشد. با این تعاریف، مجموعه افق‌های زمانی موجود برای دارایی i که با H_i نشان داده می‌شود، عبارتند از:

$$H_i = \begin{cases} \{0,1,2,...,T-1,T\} & i \in S_1, \\ \{0,\delta_i,2\delta_i,...,[\frac{T}{\delta_i}]\delta_i,T\} & i \in S_2, \\ \{0,\delta_i,\delta_i+1,...,T-1,T\} & i \in S_3. \end{cases} \qquad (۹)$$

همچنین $H_i^- = H_i - \{T\}$ مجموعه افق‌های متناظر با دارایی i با امکان اصلاح دارایی می‌باشد و به این دلیل زمان سررسید نهایی حذف شده است. با توجه به افق‌های زمانی متفاوت، برای هر $t \in \{1,2,...,T-1\}$ تعدادی از دارایی‌ها دارای قابلیت تغییر در جهت اصلاح سبد سهام می‌باشد که این مجموعه دارایی‌ها با Π_t نشان داده می‌شود؛ بنابراین

$$\Pi_t = \{i \in I, t \in H_i\} \quad t \in \{1,2,...,T-1\}. \qquad (۱۰)$$

تابع b یا شیفت به عقب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که برای هر زمان، زمان متناظر با بازده موجود قبل از آن زمان را با توجه به نوع دارایی محاسبه می‌کند.

$$b_i(t) = \begin{cases} t-1 & i \in S_1, \\ (n-1)\delta_i & i \in S_2, t = n\delta_i, \\ 0 & i \in S_3, t \le \delta_i, \\ t-1 & i \in S_3, t > \delta. \end{cases} \qquad (۱۱)$$

بازده سبد برای افق‌های زمانی مختلف توسط سرمایه‌گذار یا افراد خبره می‌تواند مورد تخمین و پیش‌بینی قرار گیرد که برای این منظور از متغیر نا اطمینانی نرمال استفاده می‌شود. این متغیر با دو پارامتر بازده و انحراف معیار مشخص می‌شود و در ادامه فرض می‌شود که برای

توصیف بازده‌ها از متغیرهای نا اطمینانی $\xi_{i,t}\quad i\in I,t\in H_i^-$ استفاده می‌شود. $\xi_{i,t}$ بازده سهام *i* در گام حرکتی *t* به *t+1* می‌باشد. سهم هر دارایی در سبد سهام برحسب واحد پول (نه درصد) در افق‌های زمانی مختلف نیز با متغیر $x_{i,t}\quad i\in I,t\in H_i$ نشان داده می‌شود. در هر زمان و قبل از حرکت به افق زمانی بعدی سرمایه‌گذار می‌تواند محتوای سبد خود را برای دارایی‌های قابل اصلاح در آن زمان، اصلاح کند و برای این منظور $\Delta x_{i,t}\quad i\in I,t\in H_i^-$ نشان دهنده میزان اصلاح یا تغییر در هر دارایی می‌باشد که می‌تواند مقدار مثبت به مفهوم خرید یا منفی به مفهوم فروش را اخذ کند. بدیهی است که در اولین گام حرکت یعنی حرکت از زمان صفر به یک $\Delta x_{i,0}=0\quad i\in I$. در ادامه دینامیک حاکم بر ارزش هر دارایی در زمان‌های مختلف به‌صورت

$$x_{i,t}=(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})(1+E(\xi_{i,b(t)}))\quad i\in I,t\in H_i,t\geq 1. \qquad (۱۲)$$

در نظر گرفته می‌شود. تابع هدف، بیشینه‌سازی ثروت سبد در سررسید نهایی با در نظر گرفتن هزینه معاملاتی می‌باشد. تاکنون فرض عمده‌ای که صورت گرفت، قرار دادن یک دینامیک با در نظر گرفتن امید ریاضی بازده برای حرکت قیمتی سهام می‌باشد. این در حالی است که امکان انحراف از امید ریاضی در هر گام زمانی وجود دارد زیرا در اصل تغییر ارزش یک دارایی از گام *t-1* تا *t* بر اساس **رابطه (۱۳)** محاسبه می‌شود.

$$x_{i,t}=(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})(1+\xi_{i,b(t)})\quad i\in I,t\in H_i,t\geq 1. \qquad (۱۳)$$

توجه کنیم که در **رابطه (۱۳)** فرض می‌شود که $x_{i,b(t)}$ یک عدد ثابت مثبت است اما $x_{i,t}$ تابعی از متغیر نا اطمینانی $\xi_{i,b(t)}$ است و لذا خود یک متغیر نا اطمینانی محسوب می‌شوند. سبد سهام پژوهش هزینه‌های معاملاتی را نیز محسوب می‌کند که برای مدل‌سازی آن از ضریب *c* (درصدی که نشان دهنده هزینه معاملاتی برای مجموع خریدوفروش است) استفاده می‌شود؛ بنابراین تغییر ارزش سبد در گام حرکتی *t-1* به *t* که با ΔW_t نشان داده می‌شود، یک متغیر نا اطمینانی است که به‌صورت **رابطه (۱۴)** محاسبه می‌شود.

$$\Delta W_t=\sum_{i\in\Pi_t}(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})(1+\xi_{i,b(t)})-\sum_{i\in\Pi_t}x_{i,b(t)}-c\sum_{i\in\Pi_t}|\Delta x_{i,b(t)}|=$$
$$\sum_{i\in\Pi_t}(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})\xi_{i,b(t)}+\sum_{i\in\Pi_t}\Delta x_{i,b(t)}-c\sum_{i\in\Pi_t}|\Delta x_{i,b(t)}|. \qquad (۱۴)$$

با مشخص شدن میزان تغییر ارزش سبد در هر گام زمانی، تغییر ارزش سبد سهام از زمان صفر تا ارزش نهایی در سررسید نهایی که با W_T نشان داده می‌شود برابر است با:

$$W_T=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})\xi_{i,b(t)}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}\Delta x_{i,b(t)}-c\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}|\Delta x_{i,b(t)}|. \qquad (۱۵)$$

همان‌طور که بیان شد، مدل انتخاب سبد سهام پژوهش به دنبال بیشینه‌سازی ثروت نهایی سبد سهام ضمن در نظر گرفتن تعدادی محدودیت می‌باشد. از جمله این محدودیت‌ها، در نظر گرفتن ریسک است که برای مدل‌سازی آن از اندازه نا اطمینانی استفاده می‌شود. سرمایه‌گذار مایل است تا تغییرات ارزش سبد سهام در سررسید نسبت به زمان صفر از یک مقدار آستانه در یک سطح اطمینان مشخص (مثلا ۹۵%) بیشتر باشد. برای این منظور، اندازه نا اطمینانی ناشی از رویداد مربوط به قرار گرفتن ارزش سبد زیر یک مقدار مشخص توسط محدودیت $\mu(W_T<d)<\alpha$ کنترل می‌شود که در آن d آستانه‌ای ازتغییر ثروت می‌باشد که باید در سطح اطمینان خطای α (که به‌عنوان نمونه می‌تواند ۰٫۰۵ باشد) کنترل می‌شود؛ بنابراین مدل انتخاب سبد سهام پژوهش به‌صورت زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
& max\;\; E(W_T) \\
& st: \\
& \mu(W_T < d) < \alpha, \\
& x_{i,t} = (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)})(1 + E(\xi_{i,b(t)}))\;\; i \in I, t \in H_i, t \ge 1, \\
& \sum_{i \in I} x_{i,0} = P, \\
& \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,t} = 0\;\; t = 0,1,\ldots,T-1, \\
& x_{i,t} + \Delta x_{i,t} \ge 0\;\; i \in I, t \in H_i^-, \\
& \Delta x_{i0} = 0\;\; i \in I, \\
& x_{i,t} \ge 0\;\; i \in I, t \in H_i.
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

که در آن محدودیت $\sum_{i\in I} x_{i,0} = P$ نشان دهنده مقدار سرمایه‌گذاری اولیه به‌اندازه P واحد پول و $\sum_{i\in \Pi_t} \Delta x_{i,t} = 0$ نشان دهنده خود تأمینی سبد سهام می‌باشد. محدودیت $x_{i,t} + \Delta x_{i,t} \ge 0$ نیز نشان می‌دهد که امکان فروش استقراضی وجود ندارد.

در این قسمت الگوریتمی برای حل **مدل (۱۶)** ارائه می‌شود. در ابتدا با توجه به خاصیت خطی امید ریاضی در مورد متغیرهای نا اطمینانی مطابق **رابطه (۵)** داریم:

$$
E(W_T) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)}) E(\xi_{i,b(t)}) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,b(t)} - c \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} |\Delta x_{i,b(t)}|. \tag{۱۷}
$$

و بنابراین تابع هدف از شکل متغیر نا اطمینانی به‌صورت خطی تغییر شکل می‌دهد. برای محدودیت تغییرات ارزش سبد در سررسید نهایی در یک سطح اطمینان مشخص مطابق **قضیه (۱)** و با فرض استقلال بازده‌ها داریم:

$$
\begin{aligned}
& \mu(W_T < d) < \alpha \Leftrightarrow \\
& \mu\Big(\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)}) \xi_{i,b(t)} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,b(t)} - c \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} |\Delta x_{i,b(t)}| < d\Big) < \alpha \Leftrightarrow \\
& \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)}) \Phi_{i,b(t)}^{-1}(\alpha) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,b(t)} - c \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} |\Delta x_{i,b(t)}| \ge d.
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

بر این اساس **مدل (۱۶)** به‌صورت **مدل (۱۹)** تغییر شکل می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
& max\;\; E(W_T) = max \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)}) E(\xi_{i,b(t)}) \\
& \qquad + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,b(t)} - c \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} |\Delta x_{i,b(t)}| \\
& st: \\
& \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)}) \Phi_{i,b(t)}^{-1}(\alpha) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,b(t)} - c \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \Pi_t} |\Delta x_{i,b(t)}| \ge d, \\
& x_{i,t} = (x_{i,b(t)} + \Delta x_{i,b(t)})(1 + E(\xi_{i,b(t)}))\;\; i \in I, t \in H_i, t \ge 1, \\
& \sum_{i \in I} x_{i,0} = P, \\
& \sum_{i \in \Pi_t} \Delta x_{i,t} = 0\;\; t = 0,1,\ldots,T-1, \\
& x_{i,t} + \Delta x_{i,t} \ge 0\;\; i \in I, t \in H_i, \\
& \Delta x_{i0} = 0\;\; i \in I, \\
& x_{i,t} \ge 0\;\; i \in I, t \in H_i.
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

مدل (۱۹) به خاطر وجود قدر مطلق، یک مدل غیرخطی می‌باشد. برای خطی سازی ابتدا با معرفی

$$y=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}\Delta x_{i,b(t)}-c\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}|\,\Delta x_{i,b(t)}\,|. \quad (۲۰)$$

مدل (۱۹) به شکل **مدل (۲۱)** تغییر شکل می‌دهد.

$$\begin{aligned}
&\max\ \ E(W_T)=E(W_T)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})E(\xi_{i,b(t)})+y\\
&st:\\
&y\geq\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}\Delta x_{i,b(t)}-c\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}|\,\Delta x_{i,b(t)}\,|\ ,\\
&\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})\Phi_{i,b(t)}^{-1}(\alpha)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}\Delta x_{i,b(t)}-c\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\Pi_t}|\,\Delta x_{i,b(t)}\,|\geq d,\\
&x_{i,t}=(x_{i,b(t)}+\Delta x_{i,b(t)})(1+E(\xi_{i,b(t)}))\ \ i\in I,t\in H_i,t\geq 1,\\
&\sum_{i\in I}x_{i,0}=P,\\
&\sum_{i\in\Pi_t}\Delta x_{i,t}=0\ \ t=0,1,\dots,T-1,\\
&x_{i,t}+\Delta x_{i,t}\geq 0\ \ i\in I,t\in H_i,\\
&\Delta x_{i0}=0\ \ i\in I,\\
&x_{i,t}\geq 0\ \ i\in I,t\in H_i.
\end{aligned} \quad (۲۱)$$

در جهت خطی سازی قدر مطلق از تغییر متغیر زیر استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\Delta x_{it}=u_{it}-v_{it}\ \ \ i\in I,t\in H_i,\\
&u_{it}\geq 0,\ v_{it}\geq 0,\ u_{it}.v_{it}=0.
\end{aligned} \quad (۲۲)$$

بنابراین $|\Delta x_{it}|=u_{it}+v_{it}$. اضافه کردن این تبدیل تا حدودی مسئله را خطی می‌کند، اما همچنان محدودیت غیرخطی $u_{it}.v_{it}=0$ وجود دارد؛ بنابراین تاکنون مدل به فرم **مدل (۲۳)** درآمده است.

$$\begin{aligned}
&\max\ \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\Pi_t}(x_{i,b(t)}+u_{i,b(t)}-v_{i,b(t)})E(\xi_{i,b(t)})+y\\
&s.t.\\
&y^{3}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\Pi_t}(u_{i,b(t)}-v_{i,b(t)})-c\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\Pi_t}(u_{i,b(t)}+v_{i,b(t)}),\\
&\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\Pi_t}(x_{i,b(t)}+u_{i,b(t)}-v_{i,b(t)})\Phi_{i,b(t)}^{-1}(\alpha)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\Pi_t}(u_{i,b(t)}-v_{i,b(t)})-c\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\Pi_t}|u_{i,b(t)}+v_{i,b(t)}|\ ^{3}d,\\
&x_{i,t}=(x_{i,b(t)}+u_{i,b(t)}-v_{i,b(t)})(1+E(\xi_{i,b(t)}))\ \ i\hat{I}I,t\hat{I}H_i,t^{3}1,\\
&\sum_{i\hat{I}I}x_{i,0}=P,\\
&\sum_{i\Pi_t}u_{i,t}-v_{i,t}=0\ \ t=0,1,\dots,T-1,\\
&x_{i,t}+u_{i,t}-v_{i,t}\ ^{3}0\ \ i\hat{I}I,t\hat{I}H_i,\\
&u_{i,0}-v_{i,0}=0\ \ i\hat{I}I,\\
&u_{i,t}.v_{i,t}=0\ \ i\hat{I}I,t\hat{I}H_i,\\
&x_{i,t}\ ,u_{i,t}\ ,v_{i,t}\ ^{3}0\ \ i\hat{I}I,t\hat{I}H_i.
\end{aligned} \quad (۲۳)$$

فرض کنیم $\hat{u}_{it},\hat{v}_{it},\hat{x}_{it},\hat{\Delta x}_{it}$ جواب‌های **مدل (۲۳)** بدون در نظر گرفتن محدودیت‌های $u_{i,t}.v_{i,t}=0$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{u}_{it}=\begin{cases}\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it} & \hat{u}_{it}>\hat{v}_{it}\,,\,\hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}\neq 0\\ \hat{u}_{it} & \hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}=0\\ 0 & o.w\end{cases}\qquad \tilde{v}_{it}=\begin{cases}\hat{v}_{it}-\hat{u}_{it} & \hat{v}_{it}>\hat{u}_{it}\,,\,\hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}\neq 0\\ \hat{v}_{it} & \hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}=0\\ 0 & o.w\end{cases}\quad . \tag{۲۴}$$

ادعا می‌کنیم که $\tilde{u}_{it},\tilde{v}_{it},\hat{x}_{it},\hat{\Delta x}_{it}$ جواب بهینه **مدل (۲۳)** می‌باشد. به‌راحتی می‌توان دید که محدودیت‌های $\tilde{u}_{i,t}.\tilde{v}_{i,t}=0$ برقرار است. با توجه به اینکه تابع هدف به مقادیر $u_{i,t},v_{i,t}$ وابسته نیست برای نشان دادن بهینگی $\tilde{u}_{it},\tilde{v}_{it},\hat{x}_{it},\hat{\Delta x}_{it}$ کافی است نشان دهیم که یک نقطه شدنی می‌باشد. برای این منظور داریم:

$$\tilde{u}_{it}+\tilde{v}_{it}=\begin{cases}\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it}\leq\hat{u}_{it}+\hat{v}_{it} & \hat{u}_{it}>\hat{v}_{it},\hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}\neq 0\\ \hat{v}_{it}-\hat{u}_{it}\leq\hat{u}_{it}+\hat{v}_{it} & \hat{u}_{it}<\hat{v}_{it}=0,\hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}\neq 0\\ \hat{u}_{it}+\hat{v}_{it}\ or\ 0\leq\hat{u}_{it}+\hat{v}_{it} & o.w\end{cases}\quad , \tag{۲۵}$$
$$\tilde{u}_{it}-\tilde{v}_{it}=\begin{cases}\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it}\geq\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it} & \hat{u}_{it}>\hat{v}_{it},\hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}\neq 0\\ \hat{v}_{it}-\hat{u}_{it}\geq\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it} & \hat{u}_{it}<\hat{v}_{it},\hat{u}_{it}.\hat{v}_{it}\neq 0\\ \hat{u}_{it}-\hat{v}_{it}\geq\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it}\ \ or\ 0\geq\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it}=0 & o.w\end{cases}\quad .$$

و بنابراین $\tilde{u}_{it}+\tilde{v}_{it}\leq\hat{u}_{it}+\hat{v}_{it}$ و $\tilde{u}_{it}-\tilde{v}_{it}\geq\hat{u}_{it}-\hat{v}_{it}$ و لذا $c(\tilde{u}_{it}+\tilde{v}_{it})\leq c(\hat{u}_{it}+\hat{v}_{it})$ و به‌راحتی می‌توان دید که همه محدودیت‌ها برقرار هستند.

۵- پیاده‌سازی مدل

در این قسمت به پیاده‌سازی دو مدل چند دوره‌ای بر اساس رویکرد پژوهش در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته می شود. سبد اول بر اساس سناریوسازی یک سرمایه گذار از تغییرات آتی دارایی ها شکل می گیرد و سبد دوم ، یک سبد سهام متنوع است که به جای سناریوسازی، بر داده های تاریخی استوار است.

همانطور که بیان شد، سبد طراحی شده در پژوهش این قابلیت را بوجود می آورد تا شخص سرمایه گذار دیدگاه شخصی و چند گامی خود را در مورد بازده، ریسک، سطح اطمینان و ثروت نهایی سبد اعمال کند. سبد سهام اول برای یک سرمایه گذار طراحی گردید که دارای یک دیدگاه چند دوره ای می باشد و در زمان بستن سبد سهام، تمایل به سرمایه گذاری در شش سهم بانک صادرات، بیمه البرز، گسترش سرمایه‌گذاری ایران خودرو، سیمان شرق و پتروشیمی تهران دارد. پژوهش‌های ژانگ و همکاران [۱۰]، گو و همکاران [۳]، لی و همکاران [۷] و ژو و همکاران [۹] نیز به ترتیب از شش، پنج، پنج و شش دارایی استفاده کردند . در ادامه این دارایی ها به ترتیب با شماره‌های یک تا شش مورد استفاده قرار می‌گیرند. سبد سهام چهار دوره‌ای می‌باشد که هر دوره معادل یک ماه است و زمان بسته شدن سبد نیز برابر یک مهر ۱۴۰۰ می‌باشد. سهام شماره یک و دو به‌صورت ماهیانه و سهام شماره دو و سه به‌صورت دو ماه یک‌بار تا سررسید نهایی قابل معامله و اصلاح خواهند بود. سهام شماره پنج و شش نیز تا قبل از دو ماه اول قابل معامله نمی‌باشد و سپس به‌صورت ماهیانه قابل معامله می‌باشد؛ بنابراین مطابق **روابط (۹)** و **(۱۰)** داریم:

$$H_i=\begin{cases}\{0,1,2,3,4\} & i\in S_1=\{1,2\}\\ \{0,2,4\} & i\in S_2=\{3,4\},\\ \{0,2,3,4\} & i\in S_3=\{5,6\}\end{cases} \tag{۲۶}$$
$$\Pi_0,\Pi_2=\{1,2,3,4,5,6\}\quad \Pi_1=\{1,2\},$$
$$\Pi_3=\{1,2,5,6\}\quad \Pi_4=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

داده‌های **جدول ۱** مربوط به پیش‌بینی سرمایه‌گذار از تغییرات آتی شش سهم موجود در سبد پژوهش در افق‌های چهارگانه می‌باشد که هر پیش‌بینی یک متغیر نا اطمینانی نرمال می‌باشد که ضمن یک زوج مرتب شامل بازده و انحراف معیار معرفی گردیده است. توجه شود که افق زمانی هر پیش‌بینی با توجه به نوع سهم متفاوت است. به‌عنوان نمونه برای سهام عضو مجموعه S_2 پیش‌بینی‌ها به‌صورت دو ماهه می‌باشد.

جدول ۱- پیش‌بینی شش دارایی سبد برای ۴ افق زمانی بر اساس متغیر نا اطمینانی نرمال.

Table 1- Forecast of six portfolio assets for 4-time horizons based on normal uncertainty variable.

دارایی \ افق زمانی	**0**	**1**	**2**	**3**
1	[0.05,0.017]	[-0.01,0.014]	[0.02,0.033]	[0.02,0.020]
2	[0.06,0.018]	[-0.02,0.010]	[0.05,0.015]	[0.02,0.025]
3	[0.10,0.030]	-	[-0.01,0.035]	-
4	[0.05,0.014]	-	[0.06,0.025]	-
5	[0.15,0.026]	-	[-0.03,0.022]	[0.03,0.018]
6	[0.08,0.035]	-	[-0.04,0.002]	[0.05,0.012]

مقدار سرمایه اولیه سبد برابر ۱۰۰ میلیون تومان و هزینه معاملاتی مجموع خریدوفروش برابر $c = 0.015$ در نظر گرفته شده است. همچنین مطلوبیت سرمایه‌گذار، بیشینه‌سازی ثروت سبد سهام در سررسید نهایی می‌باشد و مایل است تا در سطح اطمینان ۹۵% ثروت نهایی از ۱۰۸ میلیون تومان کمتر نباشد؛ بنابراین اندازه نا اطمینانی ناشی از قرار گرفتن تغییرات ارزش سبد زیر ۸ میلیون تومان باید کمتر از ۰/۰۵ باشد؛ بنابراین

$$\alpha = 0.05, \;\; P = 100M, \;\; \mu(W_T < 8) < 0.05. \qquad (۲۷)$$

با در نظر گرفتن مفروضات بیان شده، **مدل (۲۳)** به کمک پکیج *pyomo*[1] در زبان برنامه‌نویسی پایتون مورد بهینه‌سازی خطی قرار گرفت. ازآنجاکه این پکیج به زبان پایتون نوشته شده است این اجازه را می‌دهد که به‌راحتی مجموعه اندیس‌های **مدل (۲۳)** مورد پیاده‌سازی قرار گیرد. مقدار بهینه هر دارایی برحسب واحد پول یعنی $x_{i,t}$ ها برای افق‌های زمانی مختلف در **جدول ۲** ارائه شده است. علامت - نشان می‌دهد که دارایی در این افق زمانی قابل معامله نمی‌باشد.

جدول ۲- مقدار بهینه ارزش دارایی‌ها در سبد بهینه.

Table 2- The optimal amount of asset value in the optimal portfolio.

دارایی \ افق زمانی	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	30.24	31.752	46.381	0	0
2	25.72	27.263	11.92	63.61	0
3	0	-	0	-	0
4	28.25	-	29.662	-	48.634
5	15.79	-	18.15	0	0
6	-	-	0	0	66.79

عملیات تغییر یا اصلاح بهینه سبد سهام در افق‌های زمانی یا $\Delta x_{i,t}$ ها در **جدول ۳** ارائه شده است که علامت مثبت به مفهوم خرید و علامت منفی به مفهوم فروش است. جمع هر ستون نیز برابر صفر می‌باشد که نشان دهنده خود تأمینی سبد سهام می‌باشد. علامت - نشان می‌دهد که دارایی در این افق زمانی قابل معامله نمی‌باشد.

[1] Python Optimization

جدول ۳- مقدار بهینه تغییرات یا اصلاح ارزش دارایی‌ها در سبد بهینه.
Table 3- Optimal number of changes or modification of assets value in the optimal portfolio.

افق زمانی / دارایی	0	1	2	3
1	0	+15.10	-46.381	0
2	0	-15.10	+48.66	-63.61
3	0	-	-	-
4	0	-	+16.22	-
5	-	-	-18.15	0
6	-	-	0	+63.61

ثروت نهایی سبد سهام برابر ۱۱۵/۴۲۴ میلیون تومان می‌باشد که میزان ۱۵/۴۲۴ میلیون تغییر را نشان می‌دهد؛ بنابراین بازده سبد برابر ۱۵/۴۲۴٪ و میزان هزینه معاملاتی نیز برابر ۴/۳۰۲ میلیون تومان می‌باشد و با احتساب هزینه‌های معاملاتی بازده سبد در سطح اطمینان ۰/۹۵ برابر ۱۱/۱۲۲ می‌باشد. از این رو خواسته سرمایه گذار در مورد ثروت نهایی سبد سهام در سطح اطمینان ۰٫۹۵ تأمین شده است.

در ادامه به پیاده‌سازی مدل چند دوره‌ای پژوهش بر روی یک سبد سهام نمونه‌ای متنوع از بورس اوراق بهادار تهران با ده دارایی شامل شاخص‌های کانی فلزی، شیمیایی، خودرو، بانک ها، فنی مهندسی، سیمان، فرآورده های نفتی، کاشی و سرامیک، چند رشته صنعتی و مواد دارویی پرداخته می شود که این دارایی ها به ترتیب با شماره های یک تا ده مورد استفاده قرار خواهند گرفت. استفاده از شاخص ها بعنوان دارایی به مفهوم تشکیل سبدی متنوع از سهام زیر مجموعه آن شاخص می باشد. در این سبد، هر دوره، معادل یک هفته می باشد و سهام شماره یک تا چهار به صورت هفتگی، سهام شماره پنج تا هشت به‌صورت دو هفته یک‌بار تا سررسید نهایی قابل معامله و اصلاح خواهند بود. سهام شماره نه و ده نیز تا قبل از دو هفته اول قابل معامله نمی‌باشد و سپس به‌صورت هفتگی قابل معامله می‌باشد. داده‌های **جدول ۴** شامل برآورد حداکثر درستنمایی از میانگین و انحراف معیار متغیرهای نااطمینانی نرمال نشان دهنده بازده بر اساس داده‌های های تاریخی در بازه ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۹ استفاده شده است. توجه شود که پیش‌بینی‌های صورت گرفته در مورد میانگین و انحراف معیار یک دارایی برای تمام گام های زمانی مربوط به آن دارایی یکسان فرض شده است.

جدول ۴- پیش‌بینی ده دارایی سبد برای ۴ افق زمانی بر اساس متغیر نا اطمینانی نرمال.
Table 4- Forecast of ten portfolio assets for 4-time horizons based on normal uncertainty variable.

افق زمانی / دارایی	میانگین	انحراف معیار
1	0.0069	0.0465
2	0.0080	0.0623
3	0,0100	0.0428
4	0.0102	0.0518
5	0.0198	0.0804
6	0.0226	0.0968
7	0.0166	0.0698
8	0.0180	0.0979
9	0.0091	0.0386
10	0.0100	0.0468

مقدار سرمایه اولیه سبد برابر ۱۰۰ میلیون تومان و هزینه معاملاتی مجموع خریدوفروش برابر $c = 0.015$ در نظر گرفته شده است. سرمایه‌گذار مایل است تا در سطح اطمینان ۹۵٪ ثروت نهایی از ۱۰۲ میلیون تومان کمتر نباشد. مقدار بهینه هر دارایی در گام های زمانی برحسب واحد پول در **جدول ۵** ارائه شده است.

جدول ۵- مقدار بهینه ارزش دارایی‌ها در سبد بهینه.

Table 5- The optimal amount of asset value in the optimal portfolio.

افق زمانی / دارایی	0	1	2	3	4
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	14.70	14.81	0	0	0
4	30.۲۰	30.48	45.75	46.22	46.69
5	18.74	-	19.11	-	19.49
6	0	-	0	-	0
7	20.1۸	-	20.48	-	10.17
8	16.08	-	16.40	-	8.35
9	-	-	0	0	0
10	-	-	0	18.68	18.87

عملیات تغییر یا اصلاح بهینه سبد سهام در افق‌های زمانی یا $\Delta x_{i,t}$ ها در **جدول ۶** ارائه شده است

جدول ۶- مقدار بهینه تغییرات یا اصلاح ارزش دارایی‌ها در سبد بهینه.

Table 6- Optimal number of changes or modification of assets value in the optimal portfolio.

افق زمانی / دارایی	0	1	2	3
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	-14.81	0	-
4	0	+14.81	0	-
5	0	-	0	-
6	0	-	0	-
7	0	-	-10.48	-
8	0	-	-8.20	-
9	0	-	0	0
10	0	-	+18.68	0

ثروت نهایی سبد سهام برابر ۱۰۳/۵۷ میلیون تومان می‌باشد که میزان ۳/۵۷ میلیون تغییر را نشان می‌دهد؛ بنابراین بازده سبد برابر ۰/۰۳۵۷ و میزان هزینه معاملاتی نیز برابر ۱ میلیون تومان می‌باشد و با احتساب هزینه‌های معاملاتی بازده سبد در سطح اطمینان ۰/۹۵ برابر ۰/۰۲۵۷ می‌باشد. از این رو خواسته سرمایه گذار در مورد ثروت نهایی سبد سهام در سطح اطمینان ۰/۹۵ تأمین شده است.

۶-نتیجه‌گیری و پیشنهادها

انتخاب مناسب و بهینه یک سبد سهام، لازمه فعالیت در بازارهای مالی می‌باشد. بر این اساس مدل‌های زیادی توسعه داده شده است که هر یک بر جنبه یا جنبه‌های خاصی از مسئله انتخاب سبد سهام تأکید دارد. تأکید اصلی مدل سبد سهام ارائه شده در پژوهش حاضر بر قابلیت تفاوت در افق‌های زمانی دارایی‌ها در ساختار یک سبد سهام چند دوره‌ای می‌باشد. پژوهش حاضر یک رویکرد منعطف برای مدل‌سازی چنین سبدی در چهارچوب متغیرهای نا اطمینانی تعریف شده بر یک فضای نا اطمینانی فراهم کرد. متغیرهای نا اطمینانی امکان مدل‌سازی بازده بر اساس دیدگاه سرمایه‌گذاران و خبرگان را فراهم کرد و اندازه نا اطمینانی نیز برای کنترل میزان ضرر سبد سهام استفاده شد. مدل ارائه شده در نهایت به یک مدل مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل شد تا جواب بهینه آن به‌راحتی محاسبه شود. در پایان ضمن یک مثال عددی ، مراحل مدل سازی سبد سهام چند دوره ای با افق های زمانی مختلف در بستر نظریه نااطمینانی تشریح گردیده است. نتایج بهینه سازی دو سبد سهام طراحی شده برای یک سرمایه گذار با دیدگاه جند دوره ای حاکی از بازده مناسب سبد در سطح اطمینان ۰/۹۵ ضمن در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی می باشد. همچنین سبدهای بهینه، خواسته سرمایه گذار در تأمین ثروت نهایی را نیز بخوبی پوشش داده است. با مرور ادبیات تحقیق با پژوهش گو و همکاران [۳] با عنوان "انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای فازی با افق‌های سرمایه‌گذاری مختلف" مواجه هستیم که ایده سبد چند دوره ای را ضمن سررسیدهای مختلف دنبال کرده اند. آنها یک مدل انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای را با تابع هزینه معاملاتی وی شکل و با در نظر گرفتن افق‌های زمانی مختلف در قالب دو مدل میانگین-

واریانس یکی با تابع هدف بیشینه‌سازی درآمد کل و دیگری کمینه‌سازی واریانس ثروت نهایی سبد طراحی کردند. رهیافت پژوهش حاضر از چند لحاظ با پژوهش اخیر متفاوت است. مهم‌ترین تفاوت در این است که مدل پژوهش حاضر به‌صورتی تنظیم شده است که تابع هدف، تابعی خطی از متغیرهای نا اطمینانی (نشان دهنده بازده) گردد که این خاصیت موجب می‌شود تا امید ریاضی بتواند به‌صورت خطی پخش شود و تابع هدف را از فرم یک متغیر نا اطمینانی خارج کند و به شکل خطی درآورد. توجه به افق‌های زمانی متفاوت به یک مفهوم دیگر نیز در پژوهش حاضر مورد مدل‌سازی قرار می‌گیرد. یک دارایی می‌تواند تا قبل از یک دوره زمانی خاص مورد معامله قرار نگیرد و بعد از یک زمان مشخص در جریان معاملات قرار گیرد. در واقع ممکن است سرمایه‌گذار در مورد حداقل زمان نگهداری یک یا چند دارایی دیدگاه‌هایی داشته باشد و بخواهد تا یک زمان مشخص دارایی معامله نگردد. تفاوت مهم دیگر در مدل‌سازی ریسک می‌باشد که در پژوهش مذکور از واریانس برای این منظور استفاده شده است. واریانس هم تغییرات مثبت و هم تغییرات منفی حول میانگین را لحاظ می‌کند، مستقیماً با مقدار ضرر در ارتباط نمی‌باشد و تعیین مقدار کنترل کننده آن مشکل است. در پژوهش حاضر مشابه معیار ارزش در معرض ریسک، به کمک اندازه نا اطمینانی، میزان ضرر سبد در یک سطح اطمینان مشخص کنترل می‌شود. همچنین مدل پژوهش حاضر خود تأمین[1] می‌باشد.

به سرمایه‌گذاران و مدیران سبد سهام علاقمند به مدل‌سازی مالی پیشنهاد می‌شود تا از مدل سبد چند دوره‌ای پژوهش برای مقاصد عملی در حضور دارایی‌های با افق‌های زمانی متفاوت استفاده کنند. برای این منظور نیاز است تا برای هر دارایی یک افق زمانی متناظر شود و مطلوب این است که ریسک پیش‌بینی در این افق زمانی پایین باشد. ازاین‌رو پیشنهاد می‌شود تا برای هر دارایی با مجموعه اطلاعات در دسترس، افق زمانی با کمترین ریسک برآورد شود. به سرمایه‌گذاران ریسک گریزی که دارای نگرش چند دوره‌ای هستند نیز توصیه می‌شود که با توجه به امکان کنترل تغییرات سبد از این مدل برای مقاصد عملی استفاده کنند. به محققین آتی بعنوان یک ایده توصیه می شود تا برای کنترل بیشتر ریسک سبد سهام از گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل سازی سبد سهام چند دوره ای در بستر نظریه نااطمینانی استفاده کنند. محدودیتی که می توان در مدل سازی سبد سهام پژوهش بدان اشاره کرد، انتخاب سطح اطمینان و ثروت نهایی مطلوب سرمایه گذار بعنوان دو پارامتر مدل انتخاب سبد سهام می باشد که نباید چنان اختیار شوند که موجب نشدنی شدن فضای جواب شود.

منابع

[1] Chang, J., Sun, L., Zhang, B., & Peng, J. (2020). Multi-period portfolio selection with mental accounts and realistic constraints based on uncertainty theory. *Journal of computational and applied mathematics*, *377*, 112892. https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112892

[2] Chen, W., Wang, Y., Zhang, J., & Lu, S. (2017). Uncertain portfolio selection with high-order moments. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *33*(3), 1397-1411.

[3] Guo, S., Yu, L., Li, X., & Kar, S. (2016). Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons. *European journal of operational research*, *254*(3), 1026-1035.

[4] Huang, X. (2011). Mean-risk model for uncertain portfolio selection. *Fuzzy optimization and decision making*, *10*(1), 71-89.

[5] Kar, M. B., Majumder, S., Kar, S., & Pal, T. (2017). Cross-entropy based multi-objective uncertain portfolio selection problem. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *32*(6), 4467-4483.

[6] Li, X., & Qin, Z. (2014). Interval portfolio selection models within the framework of uncertainty theory. *Economic modelling*, *41*, 338-344.

[7] Li, X., Wang, Y., Yan, Q., & Zhao, X. (2019). Uncertain mean-variance model for dynamic project portfolio selection problem with divisibility. *Fuzzy optimization and decision making*, *18*(1), 37-56.

[8] Liu, B. (2007). Uncertainty theory. In *Uncertainty theory* (pp. 205-234). Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-73165-8_5

[9] Xue, L., Di, H., Zhao, X., & Zhang, Z. (2019). Uncertain portfolio selection with mental accounts and realistic constraints. *Journal of computational and applied mathematics*, *346*, 42-52.

[10] Zhang, B., Peng, J., & Li, S. (2015). Uncertain programming models for portfolio selection with uncertain returns. *International journal of systems science*, *46*(14), 2510-2519.

[11] Zhang, P. (2019). Multiperiod mean absolute deviation uncertain portfolio selection with real constraints. *Soft computing*, *23*(13), 5081-5098.

[12] Zhu, Y. (2010). Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model. *Cybernetics and systems: an international journal*, *41*(7), 535-547.

[1] Self-finance