



Paper Type: Original Article



Parameter Estimation Using EM Algorithm and Test Design Optimization of Constant Stress Accelerated Life Test with Non-Constant Parameters under Type-I Progressive Censoring

Nooshin Hakamipour*

Department of Mathematics and Engineering Science, Imam Khomeini International University -Buin Zahra Higher Education Center of Engineering and Technology, Buin Zahra, Iran; n.hakamipour@bzeng.ikiu.ac.ir, n.hakamipour@gmail.com.

Citation:



Hakamipour, N. (2022). Parameter estimation using EM algorithm and test design optimization of constant stress accelerated life test with non-constant parameters under type-I progressive censoring. *Journal of decisions and operations research*, 6(4), 570-591.

Received: 16/07/2021

Reviewed: 15/08/2021

Revised: 09/09/2021

Accept: 16/10/2021

Abstract

Purpose: In this paper k-level constant stress accelerated life test under Type-I progressive censoring for Lomax distribution with non-constant shape and scale parameters is investigated. The purpose of this paper is to estimate the model parameters using the EM algorithm and optimize the test design.

Methodology: Life testing often consumes a very long time for testing and this is a fundamental problem in test design. This problem is solved by accelerated life tests. There is a recommended method for reducing the time of failure, such that the stress level of the test units will increase and then they will fail earlier than normal operating conditions. Therefore, these approaches reduced the running time. In this paper, the k-level constant stress accelerated life test under progressive Type-I censoring used. The Expectation-Maximization (EM) algorithm is used to determine the maximum likelihood estimates of the unknown parameters. This algorithm is a very powerful tool in handling the incomplete data problem. Two different criteria used to optimize the test plan. And the effect of the sample size, number of stress levels and inspection and the intermediate censoring proportion are assessed on the design efficiency.

Findings: based on the simulation study and a real data set, it is demonstrated that the EM estimator is good. Also, under the optimization criterion II, a more efficient test was obtained than the optimization criterion I. In addition, the small sample size, the small number of stress levels, the small number of inspections and the large intermediate censoring proportion lead to a more efficient test.

Originality/Value: In this paper, the periodic inspection is used to collect lifetime data. Although continuous is an ideal mode. But sometimes due to technical limitations and/or budgetary constraints, the continuous inspection is not possible in practice and the experimenter has to use the periodic inspection. In this case, the exact times of test units may not be available and only the failure counts are collected at certain time points during the test. Also, in this paper, we assumed that both scale and shape parameters to be log linear model by operating stress.

Keywords: EM algorithm, Maximum likelihood estimation, Numerical methods, Periodic inspection, Test design optimization.

Corresponding Author: nooshin.hakami@aut.ac.ir

doi 10.22105/DMOR.2021.287322.1405



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



برآورد پارامترها با استفاده از الگوریتم EM و بهینه‌سازی طرح آزمون عمر شتابیده تنش ثابت با پارامترهای غیر ثابت تحت سانسور فزاینده نوع اول

نوشین حکمی پور

گروه ریاضی و علوم مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) - مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین‌زهره، بوئین‌زهره، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله آزمون عمر شتابیده تنش ثابت k مرحله‌ای تحت سانسور فزاینده نوع اول، برای توزیع لومکس در حالتی که هر دو پارامتر آن غیر ثابت هستند، مورد بررسی قرار گرفته است. هدف از این مقاله برآورد پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم EM و بهینه‌سازی طرح چنین آزمونی است.

روش‌شناسی پژوهش: اغلب آزمون‌های طول عمر به مدت‌زمان زیادی جهت انجام آزمون نیازمندند و این‌یک مسئله در طراحی آزمون است. یک‌راه مواجهه با این مشکل، استفاده از آزمون‌های عمر شتابیده می‌باشد. مکانیزم این آزمون‌ها به این صورت است که با اعمال تنشی بیش‌ازحد طبیعی به محصولات، روند تخریب محصول را افزایش می‌دهند و به‌این‌ترتیب مدت‌زمان انجام آزمون کاهش می‌یابد. آزمون‌های عمر شتابیده انواع مختلفی دارند که در این مقاله از مدل تنش ثابت استفاده شده است. برای برآورد ماکسیمم درستی پارامترهای مجهول از الگوریتم EM استفاده شده که برای داده‌های مفقود شده روش مناسبی است. همچنین به‌منظور بهینه‌سازی طرح آزمون مورد بررسی از دو معیار استفاده شد و تأثیر عواملی همچون حجم نمونه، تعداد سطوح تنش، تعداد بازبینی‌ها و احتمال سانسور میانی بر کارایی آزمون مورد بررسی قرار گرفت.

یافته‌ها: بر مبنای مطالعات شبیه‌سازی و یک مجموعه داده واقعی نشان داده شد که برآورد EM ارائه شده، خوب است. همچنین تحت معیار بهینه‌سازی دوم، آزمون کاراتری نسبت به معیار اول حاصل شد. به‌علاوه برای دست‌یابی به آزمون کاراتر، بهتر است از حجم نمونه، تعداد سطوح تنش و تعداد بازبینی کمتر و احتمال سانسور میانی بیشتر استفاده کرد.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: در این بررسی برای جمع‌آوری داده‌های طول عمر از روش بازبینی دوره‌ای استفاده شده است. گرچه روش بازبینی مداوم یک روش ایده آل است. ولی گاهی اوقات به دلیل محدودیت‌های موجود در آزمون و یا محدودیت بودجه، امکان بازبینی مداوم وجود ندارد و آزمایشگر ناچار به استفاده از روش بازبینی دوره‌ای است. در این صورت، زمان دقیق شکست محصولات در دسترس نیست و فقط تعداد شکست‌ها در زمان‌های خاصی در دسترس می‌باشد. به‌علاوه در این مقاله در نظر گرفته شده که هر دو پارامتر شکل و مقیاس در توزیع لومکس دارای رابطه لگ خطی با سطوح تنش هستند.

کلیدواژه‌ها: الگوریتم EM، بازبینی دوره‌ای، برآورد ماکسیمم درستی، بهینه‌سازی طرح آزمون، روش‌های عددی.





امروزه با پیشرفت تکنولوژی و قوانین حمایت از مصرف‌کننده، تولیدکنندگان بر این شدند که محصولاتی باکیفیت و قابلیت اطمینان بالاتر تولید کنند. این امر، مطالعه طول عمر محصولات با قابلیت اطمینان بالا را تحت شرایط طبیعی استفاده از آن، مشکل و گاهی غیرممکن می‌سازد. درحالی‌که اجرای کارکرد محصول در سطح تنش بالا، منجر به کوتاه شدن طول عمر محصول می‌شود. نکته قابل تأمل در مقوله مطالعه طول عمر محصولات این است که، ممکن است شکست یک محصول به مدت زمان طولانی مانند چندین سال نیاز داشته باشد. یک‌راه مقابله با این مشکل استفاده از آزمون‌های عمر شتابیده^۱ می‌باشد که برای تسریع روند خرابی محصولات و استخراج اطلاعات قابلیت اطمینان در شرایط استفاده طبیعی فراهم شده است. در مجموعه‌ی این آزمون‌ها واحدهای آزمودنی در معرض تشیی بالاتر از سطح معمول قرار می‌گیرند تا به این وسیله واحدها سریع‌تر از بین بروند. اطلاعات به‌دست‌آمده از این آزمون‌ها، بر اساس نوع رابطه‌ای که بین طول عمر با تنش وجود دارد تجزیه و تحلیل می‌شوند. درنهایت، نتایج به‌دست‌آمده برای برآورد توزیع طول عمر محصول تحت شرایط استفاده طبیعی تعمیم داده می‌شوند. میکرو اسکوپار^۲ (۱۹۹۸) سه فصل کامل را به این مبحث و اجرای صحیح چنین آزمون‌هایی اختصاص دادند. نلسون^۳ (۱۹۹۰) انواع گسترده‌ای از مدل‌های آماری، طرح آزمایش‌ها و روش‌های تحلیلی که در آزمون عمر شتابیده مورد استفاده قرار می‌گیرند را ارائه داد. برای جزئیات بیشتر در مورد تحقیقات و مسائل مربوط به آزمون عمر شتابیده به بالاکریشنان و هان^۴ (۲۰۰۸)، بالاکریشنان و همکاران^۵ (۲۰۰۷) و کتری و کمپس^۶ (۲۰۱۵) مراجعه کنید.

دو تا از مهم‌ترین انواع آزمون‌های عمر شتابیده، تنش گام‌به‌گام^۷ و تنش ثابت^۸ هستند. در این مقاله آزمون عمر شتابیده تنش ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این نوع آزمون، هر نمونه در معرض سطح تشیی ثابت که بالاتر از میزان طبیعی آن می‌باشد، قرار می‌گیرد تا زمانی که محصول با شکست مواجه شود و یا با اعمال کردن نوعی سانسور، آزمون به پایان برسد. اگر تنها دو سطح تنش مختلف برای آزمون به کار برده شود، به آن آزمون عمر شتابیده ساده^۹ و اگر از بیش از دو سطح تنش مختلف استفاده شود، به آن آزمون عمر شتابیده چندگانه^{۱۰} گفته می‌شود.

از آنجاکه داده‌های طول عمر اغلب به‌طور کامل مشاهده نمی‌شوند، حذف واحدهای آزمایش به روشی از قبل برنامه‌ریزی شده یا به‌صورت تصادفی بسیار متداول است. این امر به دلیل زیاد بودن متوسط طول عمر محصولات، کم بودن فرصت اعلام نتایج، محدودیت هزینه و عدم قطعیت موجود در نمونه‌های تحت آزمون رخ می‌دهد که به آن سانسور می‌گوییم. یکی از کاراترین روش‌های سانسور، سانسور فزاینده نوع اول^{۱۱} است. در این نوع سانسور در پایان هر بازه زمانی از پیش تعیین شده، تعداد مشخصی از واحدهای آزمایش سالم، از آزمون خارج می‌شوند. دلیل کارایی سانسور فزاینده در این است که واحدهای آزمایشی سالم حذف شده از آزمون را می‌توان در آزمایش‌های دیگر استفاده کرد. مطالعات زیادی در زمینه استنباط روی آزمون عمر شتابیده تنش ثابت تحت سانسورهای مختلف و برای توزیع‌هایی از قبیل نمایی^{۱۲}، وایبل^{۱۳} و نمایی تعمیم‌یافته^{۱۴} انجام گرفته است.

¹ Accelerated Life Tests

² Meeker and Escobar

³ Nelson

⁴ Balakrishnan and Han

⁵ Balakrishnan et al.

⁶ Kateri and Kamps

⁷ Step Stress

⁸ Constant Stress

⁹ Simple Accelerated Life Test

¹⁰ Multiple Accelerated Life Test

¹¹ Progressive Type-I Censoring

¹² Exponential

¹³ Weibull

¹⁴ Generalized Exponential



در اغلب قریب به اتفاق مطالعات انجام‌گرفته در این زمینه، استنباط بر اساس این فرض انجام‌شده که فقط یکی از پارامترهای مدل با تنش اعمال‌شده بر واحدها مرتبط است و سایر پارامترها در تمام مراحل آزمایش ثابت می‌مانند. به‌عنوان مثال به پاسکال^۱ (۲۰۰۸)، میترا و همکاران^۲ (۲۰۱۳)، گوان و همکاران^۳ (۲۰۱۴) و فن و هسو^۴ (۲۰۱۴) مراجعه نمایید. با این وجود، در عمل مشاهده می‌شود که این فرض ممکن است مناسب نباشد و مدل با یک پارامتر ثابت که وابسته به سطح تنش نیست، نمی‌تواند برازش مناسبی برای داده‌های واقعی باشد. در اغلب مقالات که برای طول عمر واحدهای آزمون از توزیع طول عمری با بیش از یک پارامتر استفاده‌شده است؛ معمولاً فرض شده که پارامتر مقیاس^۵ وابسته به سطح تنش است ولی پارامترهای مکان^۶ و شکل^۷ برای تمامی سطوح تنش ثابت هستند. در صورتی که بررسی‌هایی وجود دارد که این مطلب را نقض می‌کنند.

به‌عنوان مثال، لی و همکاران^۸ (۱۹۸۹) و هیرجیست و همکاران^۹ (۱۹۸۹) دریافتند که پارامتر شکل توزیع وایبل به ترتیب متأثر از تنش میدان الکتریکی برای دی‌الکتریک‌ها و تنش دما در آزمایش خازن‌ها می‌باشد. به‌علاوه، نلسون (۱۹۸۴) و بوی‌کو و گولاج^{۱۰} (۱۹۸۹) مشاهده کردند که در تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی زمانی که توزیع مکان-مقیاس برای طول عمر واحدها استفاده‌شده، هر دو پارامتر مکان و مقیاس به تنش بستگی دارند. وانگ^{۱۱} (۲۰۱۷) خانواده توزیع‌های بریده‌شده^{۱۲} دو پارامتری و وانگ (۲۰۱۸) توزیع وایبل را در حالتی که هر دو پارامتر آن‌ها با تغییر سطح تنش غیرثابت می‌باشند برای آزمون شتابیده با دو سطح تنش (ساده)، مورد بررسی قرار دادند. از آنجاکه آزمون شتابیده ساده، به لحاظ محاسباتی ساده‌تر است ولی آزمون شتابیده چندگانه کارایی بیشتری دارد، در این مقاله قصد داریم آزمون عمر شتابیده تنش ثابت را در حالت چندگانه برای توزیع لومکس^{۱۳} و تحت سانسور فزاینده نوع اول مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. همچنین در نظر می‌گیریم هر دو پارامتر این توزیع متأثر از سطح تنش هستند. توزیع لومکس برای اولین بار توسط لومکس (۱۹۵۴) معرفی شد. تعداد کمی از محققان این توزیع را برای آزمون‌های عمر شتابیده استفاده کردند. به‌عنوان مثال حسن و همکاران^{۱۴} (۲۰۱۶) و چاندرا و خان^{۱۵} (۲۰۱۸) با در نظر گرفتن توزیع لومکس به بهینه کردن آزمون عمر شتابیده تنش گام‌به‌گام تحت معیارها و فرضیات مختلف پرداختند.

به‌طور کلی دو حالت بازرسی در آزمون‌های عمر شتابیده به‌کاربرده می‌شود. یکی بازرسی مستمر^{۱۶} و دیگری بازرسی دوره‌ای^{۱۷}. بازرسی مستمر، معمول‌ترین روش بازرسی است که در آن زمان دقیق خرابی موجود است؛ اما در بازرسی دوره‌ای، زمان دقیق خرابی در دسترس نیست. اگرچه بازرسی مستمر یک حالت ایده آل است، اما گاهی به دلیل محدودیت‌های فنی و یا محدودیت‌های مالی نمی‌توان از این روش استفاده کرد. در این صورت به‌جای زمان دقیق شکست محصولات، تعداد شکست محصولات در بازه‌های زمانی از پیش تعیین‌شده، ثبت می‌شود. از مزایای استفاده از بازمینی دوره‌ای می‌توان به سادگی اعمال این روش، ارزان و در دسترس بودن آن نام برد. در این مقاله، روش بازرسی دوره‌ای را برای جمع‌آوری اطلاعات تحت آزمون تنش ثابت مورد استفاده قرار می‌دهیم. برآورد پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم انتظار بیشینه^{۱۸} که به اختصار با نماد EM نمایش داده می‌شود، ارائه می‌شود. یکی از مهم‌ترین اقدامات در مواجهه با آزمون‌های طول عمر، بهینه کردن طرح این آزمون‌ها است. در اینجا هدف از بهینه کردن طرح آزمون، انتخاب بهترین زمان برای خاتمه آزمون است. البته این زمان بهینه، متأثر از انتخاب معیار مناسب جهت بهینه‌سازی است. در این مقاله از دو معیار برای بهینه‌سازی استفاده می‌شود که

¹ Pascual

² Mitra et al.

³ Guan et al.

⁴ Fan and Hsu

⁵ Scale

⁶ Location

⁷ Shape

⁸ Li et al.

⁹ Hiergeist et al.

¹⁰ Boyko and Gerlach

¹¹ Wang

¹² Truncated Family of Distributions

¹³ Lomax

¹⁴ Hassan et al.

¹⁵ Chandra and Khan

¹⁶ Continuous Inspection

¹⁷ Periodic Inspection

¹⁸ Expectation Maximization (EM)

هر دو بر پایه ماتریس اطلاع فیشر می‌باشند. در نهایت، تأثیر احتمال سانسور میانی، حجم نمونه، تعداد سطوح تنش و شاخص‌های دیگر در طراحی آزمون بهینه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در بخش ۲ مقاله حاضر، به توصیف مدل مورد بررسی و فرمول‌بندی آن پرداخته می‌شود. در بخش ۳، الگوریتم EM برای به دست آوردن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مجهول ارائه می‌شود. بهینه‌سازی طرح آزمون مورد بررسی با بهره‌گیری از دو معیار مختلف در بخش ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد که به دلیل این‌که هر دو معیار بر مبنای ماتریس اطلاع فیشر هستند، این ماتریس نیز در همین بخش ارائه می‌گردد. بخش ۵ نتایج مطالعات عددی انجام گرفته، در راستای مطالب تئوری بیان شده و همچنین بررسی عوامل مؤثر بر طراحی آزمون بهینه را ارائه می‌دهد. بخش ۶ به بررسی یک مجموعه داده واقعی می‌پردازد. نهایتاً نتایج به دست آمده از این بررسی در بخش ۷ بیان می‌شود.

۲- فرضیات اساسی و روش انجام آزمون

۲-۱- فرضیات اساسی

فرضیات زیر در این مقاله در نظر گرفته می‌شوند:

طول عمر واحدهای آزمون تحت سطح تنش نرمال S_0 و سطوح تنش شتابیده $S_1 < S_2 < \dots < S_k$ ، از توزیع لومکس با تابع توزیع زیر تبعیت می‌کند:

$$F_i(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i}, \quad t > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

که در این رابطه λ_i پارامتر شکل و θ_i پارامتر مقیاس در سطح تنش i ام هستند.

برای بیان رابطه بین تنش و طول عمر محصولات از مدل لگ-خطی، برای هر دو پارامتر شکل و مقیاس به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\log \lambda_i = \alpha_0 + \alpha_1 S_i. \quad (2)$$

$$\log \theta_i = \beta_0 + \beta_1 S_i. \quad (3)$$

به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ، که $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1$ و β_0 ضرایب مجهولی هستند که باید برآورد شوند.

۲-۲- روش انجام آزمون

۱. آزمون عمر شتابیده تنش ثابت، $\left(N = \sum_{i=1}^k n_i\right)$ ، در k سطح مختلف، برای نمونه‌ای به حجم k از محصولات به طور هم‌زمان انجام می‌شود.

به این صورت که در سطح تنش شتابیده S_i ، که $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ، تعداد n_i واحد از محصولات تحت آزمون قرار می‌گیرند.

۲. در سطح تنش i ام تعداد m_i بازرسی دوره‌ای در زمان‌های از پیش تعیین شده $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im_i}$ صورت می‌گیرد که t_{im_i} زمان خاتمه آزمون در سطح تنش i ام می‌باشد.

۳. در سطح تنش S_i ، تعداد واحدهایی که در بازه (t_{ij-1}, t_{ij}) با شکست مواجه می‌شوند، ثبت می‌شوند که آن را با نماد x_{ij} ، نمایش می‌دهیم که $j = 1, 2, \dots, m_i$ و $i = 0, 1, 2, \dots, k$ و $t_{i0} = 0$.

۴. سانسور فزاینده نوع اول را برای صرفه‌جویی در زمان و هزینه روی واحدهای آزمون اعمال می‌کنیم. به این صورت که در زمان t_{i1} ، C_{i1} تا از واحدهای سالم به طور تصادفی از آزمون حذف می‌شوند؛ به طور مشابه در زمان t_{i2} ، C_{i2} تا از واحدهای سالم به طور تصادفی کنار گذاشته می‌شوند و این روند به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا زمانی که به آخرین زمان بازرسی که معادل با زمان خاتمه آزمون در سطح تنش S_i می‌باشد،

$$C_{im_i} = n_i - \sum_{i=1}^{m_i} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m_i-1} C_{ij} \quad \text{یعنی } t_{im_i} \text{ می‌رسیم؛ در این زمان تمامی واحدهای سالم باقی مانده از آزمون حذف می‌شوند؛ یعنی}$$





روش‌های مختلفی برای تخمین داده‌های سانسور شده وجود دارد. در اینجا از روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی^۱ به دلیل سادگی محاسبات و برخورداری از توزیع مجانبی نرمال و تخمین واریانس مجانبی برآوردگرها، استفاده می‌شود (نلسون، ۱۹۹۰). تابع درست‌نمایی تحت سانسور فزاینده نوع اول با حذف‌های تصادفی، برای مشاهدات $\{x_{ij}\}$ ، $i=0, 1, 2, \dots, k$ و $j=1, 2, \dots, m_i$ و نسبت به پارامترهای $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L(\theta) = L(\theta/c)P(c). \quad (4)$$

که $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ به ازای $i=0, 1, 2, \dots, k$ و $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im_i})$ است. در این مقاله در نظر می‌گیریم، واحدهای سانسور شده یعنی $\{c_{ij}\}$ ، $i=0, 1, 2, \dots, k$ و $j=1, 2, \dots, m_i$ ، از توزیع دوجمله‌ای با احتمالات ثابت و از پیش تعیین شده $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ پیروی می‌کنند؛ که به ازای $i=0, 1, 2, \dots, k$ ، $\pi_i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{im_i})$ می‌باشد. به $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{im_i}$ احتمالات سانسور میانی گفته می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$P(c_i) = P(c_{i1})P(c_{i2}/c_{i1})P(c_{i3}/c_{i1} \cap c_{i2}) \dots P(c_{im_i-1}/c_{i1} \cap c_{i2} \cap \dots \cap c_{im_i-2}) \\ = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i-1} \binom{n_i - \sum_{l=1}^j x_{il} - \sum_{l=1}^{j-1} c_{il}}{c_{ij}} \pi^{c_{il}} (1-\pi)^{n_i - \sum_{l=1}^j x_{il} - \sum_{l=1}^j c_{il}}. \quad (5)$$

به یاد داریم که $c_{im_i} = n_i - \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m_i-1} c_{ij}$.

از طرف دیگر، با توجه به اینکه مشاهدات $\{x_{ij}\}$ ، از توزیع چندجمله‌ای با پارامترهای n_i و p_{ij} پیروی می‌کنند که p_{ij} احتمال شکست محصول در بازه زمانی (t_{ij-1}, t_{ij}) می‌باشد. پس

$$L(\theta | c) = \left(\prod_{i=1}^k n_i! \right) \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} x_{ij}! c_{ij}! \right)^{-1} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}^{x_{ij}} P_{c_{ij}}^{c_{ij}}. \quad (6)$$

که در رابطه (۶)، داریم:

$$p_{ij} = F(t_{ij}) - F(t_{ij-1}) = \left(1 + \frac{t_{ij-1}}{\theta_i} \right)^{-\lambda_i} - \left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i} \right)^{-\lambda_i}. \quad (7)$$

$$P_{c_{ij}} = 1 - F(t_{ij}) = \left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i} \right)^{-\lambda_i}. \quad (8)$$

با جایگذاری روابط (۷) و (۸) در رابطه (۶) و نهایتاً با جایگذاری روابط (۵) و (۶) در رابطه (۴)، تابع درست‌نمایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} \left(\left(1 + \frac{t_{ij-1}}{\theta_i} \right)^{-\lambda_i} - \left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i} \right)^{-\lambda_i} \right)^{x_{ij}} \left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i} \right)^{-c_{ij}\lambda_i}. \quad (9)$$

¹ Maximum Likelihood Estimation



اکنون با استفاده از روابط لگ-خطی که بین پارامترهای توزیع لومکس و سطح تنش به فرم روابط (۲) و (۳) در نظر گرفته شده بود، می توان لگاریتم تابع درستنمایی ارائه شده در رابطه (۹) را نسبت به پارامترهای $\gamma = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ به صورت زیر نوشت:

$$P(\mathbf{c}_i) = P(c_{i1})P(c_{i2}/c_{i1})P(c_{i3}/c_{i1} \cap c_{i2}) \dots P(c_{im_i-1}/c_{i1} \cap c_{i2} \cap \dots \cap c_{im_i-2})$$

$$= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i-1} \left(\begin{matrix} n_i - \sum_{l=1}^j x_{il} - \sum_{l=1}^{j-1} c_{il} \\ c_{ij} \end{matrix} \right) \pi^{c_{il}} (1-\pi)^{n_i - \sum_{l=1}^j x_{il} - \sum_{l=1}^j c_{il}}. \quad (10)$$

واضح است که با به دست آوردن پارامترهای γ با توجه به روابط (۲) و (۳) می توان برآورد پارامترهای θ را نیز محاسبه کرد. برای به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، باید از رابطه (۱۰) نسبت به پارامترهای $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ و β_1 مشتق بگیریم و آن ها را برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{\partial \ell(\gamma, \mathbf{x})}{\partial \alpha_0} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij})$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} (\beta_0 + \beta_1 S_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}). \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ell(\gamma, \mathbf{x})}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij})$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} (\beta_0 + \beta_1 S_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}). \quad (12)$$

$$\frac{\partial \ell(\gamma, \mathbf{x})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}}$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}}. \quad (13)$$

$$\frac{\partial \ell(\gamma, \mathbf{x})}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}}$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}}. \quad (14)$$

همان طور که در روابط (۱۱)-(۱۴) مشخص است، به دست آوردن ماکسیمم درستنمایی پارامترهای $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ و β_1 به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست؛ ازاین رو باید از روش های عددی استفاده کنیم. به عنوان مثال می توان به مقالات خواجه زاده و همکاران^۱ (۲۰۲۰)، پرنیانی فر و همکاران^۲ (۲۰۱۸) و خوش فطرت و حسین زاده لطفی^۳ (۲۰۱۴) اشاره کرد. در اغلب مقالات، روش نیوتن-رافسون^۴ برای به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی در چنین شرایطی مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال می توان به مقاله پرچی و همکاران^۵ (۲۰۱۹) اشاره

¹ Khaje Zadeh et al.

² Parnianifard et al.

³ Khoshfetrat and Hosseinzadeh Lotfi

⁴ Newton-Raphson

⁵ Parchami et al.



کرد. برای به کاربردن روش نیوتن-رافسون، مشتقات مرتبه دوم تابع لگاریتم درستیابی در هر تکرار موردنیاز است که این امر ممکن است گاهی اوقات پیچیده باشد؛ بنابراین برای جلوگیری از این مشکل، از الگوریتم EM در این مقاله استفاده می‌کنیم. همچنین لیتل و روبین^۱ (۲۰۰۷) اشاره کردند که گرچه الگوریتم EM سرعت همگرایی کمی دارد اما در مقایسه با روش نیوتن-رافسون قابل اعتمادتر است خصوصاً زمانی که تعداد زیادی از داده‌ها ناقص باشند. به الگوریتم EM در بخش بعدی اشاره می‌شود.

۱-۳- الگوریتم EM

الگوریتم EM یک روش معمول برای ماکسیم کردن توابع درستیابی پیچیده در برخورد با داده‌های ناقص است. برای آشنایی بیشتر با این الگوریتم می‌توانید به رشیدی نژاد و نواب پور^۲ (۲۰۱۰) مراجعه کنید. برای استفاده از الگوریتم EM ما دودسته داده داریم: دسته اول، مجموعه داده‌های مشاهده شده (داده‌های ناقص) و دسته دوم، مجموعه داده‌های غیرقابل مشاهده (داده‌های کامل). در واقع مجموعه داده‌های ناقص مستقیماً مشاهده می‌شوند و مجموعه داده‌های کامل، همراه با تعدادی داده گم‌شده می‌باشد. ما در این مقاله، زمان شکست دقیق مؤلفه‌ها را به‌عنوان داده‌های گم‌شده، در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر در نظر می‌گیریم که مؤلفه‌ها تحت بازرسی مداوم و بدون اعمال سانسور، مورد آزمون قرار گرفته باشند. مجموعه داده‌های کامل را با $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ که $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت دنباله مشاهدات $\{x_{ij}\}$ که قبلاً معرفی کرده بودیم، تابعی قابل مشاهده از داده‌های کامل است. لفظ داده‌های ناقص در مورد داده‌های گم‌شده به کار می‌رود اما به هر داده‌ای که هرگز قابل مشاهده نباشد نیز اطلاق می‌شود.

در الگوریتم EM روش به این صورت است که ابتدا باید برای داده‌های کامل که ترکیبی از داده‌های مشاهده‌شده و داده‌های گم‌شده می‌باشند، لگاریتم تابع درستیابی را محاسبه کنیم که آن را با نماد $\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma})$ نمایش می‌دهیم. الگوریتم EM با استفاده از لگاریتم تابع درستیابی داده‌های کامل، طی فرایندی تکراری به‌طور غیرمستقیم، معادله درستیابی $\frac{\partial \ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = 0$ را حل می‌کند. فرض کنید $\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$ مقداری آغازین برای $\boldsymbol{\gamma}$ باشد؛ در تکرار اول گام E عبارت است از محاسبه $E(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}) | \mathbf{x})$ و گام M شامل محاسبه $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ از طریق ماکسیم کردن $E(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}) | \mathbf{x})$ و E و M مجدداً تکرار می‌شوند، البته این بار به جای $\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$ از $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ استفاده می‌شود. در تکرار $(h+1)$ ام، گام‌های E و M به‌صورت زیر انجام می‌شوند:

$$\begin{aligned} & - E(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}) | \boldsymbol{\gamma}^{(h)}, \mathbf{x}) \text{ باید محاسبه شود.} \\ & - \text{انتخاب مقدر } \boldsymbol{\gamma}^{(h+1)} \text{ به‌طوری‌که تابع } E(\ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}) | \boldsymbol{\gamma}^{(h)}, \mathbf{x}) \text{ را ماکسیم کند.} \end{aligned}$$

گام‌های E و M تا زمانی تکرار می‌شوند که تفاضل مقدار کوچک دلخواهی را که نشان‌دهنده همگرایی دنباله است، اختیار کند.

اکنون روش الگوریتم EM را برای مدل تحت بررسی در این مقاله اجرا می‌کنیم. در اینجا در نظر می‌گیریم که نمونه کامل به حجم ترکیبی از مشاهدات ثبت‌شده و مشاهدات سانسور شده می‌باشد؛ بنابراین ما این‌گونه در نظر می‌گیریم که بیان‌گر طول عمر واحدهایی هستند که در بازه زمانی با شکست مواجه شده‌اند و بیانگر طول عمر واحدهایی است که در زمان بازرسی t_{ij} به تصادف از آزمون کنار گذاشته می‌شوند؛ بنابراین تحت سانسور فزاینده نوع اول نمونه داده‌های کامل را می‌توان به‌صورت نوشت که.

در نتیجه با توجه به نکات ذکر شده و روابط (۲) و (۳) لگاریتم تابع درستیابی داده‌های کامل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \ell_{com}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{y}) \propto & \sum_{i=1}^k n_i (\alpha_0 + \alpha_1 S_i) - \sum_{i=1}^k n_i (\beta_0 + \beta_1 S_i) \\ & - \sum_{i=1}^k \left(e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} + 1 \right) \sum_{j=1}^{m_j} \left[\sum_{l=1}^{x_{ij}} \log \left(\tau_{il} e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1 \right) + \sum_{l=1}^{c_{ij}} \log \left(1 + \tau_{il}^* e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

¹ Little and Rubin

² Rashidinejad and Navvabpour



$$E\left(\ell_{com}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(h+1)}, \mathbf{y}\right) \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}^{(h)}\right) = -\sum_{i=1}^k n_i \left(\alpha_0^{(h+1)} + \alpha_1^{(h+1)} S_i\right) - \sum_{i=1}^k n_i \left(\beta_0^{(h+1)} + \beta_1^{(h+1)} S_i\right) - \sum_{i=1}^k \left(e^{\alpha_0^{(h+1)} + \alpha_1^{(h+1)} S_i} + 1 \right) \sum_{j=1}^{m_i} \left[E\left(\sum_{l=1}^{x_{ij}} \log\left(\tau_{il} e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1\right)\right) + E\left(\sum_{l=1}^{c_{ij}} \log\left(1 + \tau_{il}^* e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i}\right)\right) \right]. \quad (16)$$

اکنون برای اجرای مرحله M به مشتقات جزئی رابطه (۱۶) نیاز داریم:

$$\frac{\partial E\left(\ell_{com}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(h+1)}, \mathbf{y}\right) \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}^{(h)}\right)}{\partial \alpha_0} = \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k e^{\alpha_0^{(h+1)} + \alpha_1^{(h+1)} S_i} \sum_{j=1}^{m_i} \left[E\left(x_{ij}\right) E_1\left(\alpha_0^{(h)}, \alpha_1^{(h)}, \beta_0^{(h)}, \beta_1^{(h)}\right) + E\left(c_{ij}\right) E_2\left(\alpha_0^{(h)}, \alpha_1^{(h)}, \beta_0^{(h)}, \beta_1^{(h)}\right) \right]. \quad (17)$$

$$\frac{\partial E\left(\ell_{com}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(h+1)}, \mathbf{y}\right) \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}^{(h)}\right)}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^k n_i S_i - \sum_{i=1}^k S_i e^{\alpha_0^{(h+1)} + \alpha_1^{(h+1)} S_i} \sum_{j=1}^{m_i} \left[E\left(x_{ij}\right) E_1\left(\alpha_0^{(h+1)}, \alpha_1^{(h)}, \beta_0^{(h)}, \beta_1^{(h)}\right) + E\left(c_{ij}\right) E_2\left(\alpha_0^{(h+1)}, \alpha_1^{(h)}, \beta_0^{(h)}, \beta_1^{(h)}\right) \right]. \quad (18)$$

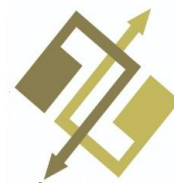
$$\frac{\partial E\left(\ell_{com}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(h+1)}, \mathbf{y}\right) \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}^{(h)}\right)}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k \left(1 + e^{\alpha_0^{(h+1)} + \alpha_1^{(h+1)} S_i}\right) \sum_{j=1}^{m_i} \left[E\left(x_{ij}\right) E_3\left(\alpha_0^{(h+1)}, \alpha_1^{(h+1)}, \beta_0^{(h)}, \beta_1^{(h)}\right) + E\left(c_{ij}\right) E_4\left(\alpha_0^{(h+1)}, \alpha_1^{(h+1)}, \beta_0^{(h)}, \beta_1^{(h)}\right) \right]. \quad (19)$$

که در روابط (۱۷)-(۲۰) داریم:

$$\frac{\partial E\left(\ell_{com}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(h+1)}, \mathbf{y}\right) \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}^{(h)}\right)}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^k n_i S_i - \sum_{i=1}^k \left(1 + e^{\alpha_0^{(h+1)} + \alpha_1^{(h+1)} S_i}\right) \sum_{j=1}^{m_i} \left[E\left(x_{ij}\right) E_3\left(\alpha_0^{(h+1)}, \alpha_1^{(h+1)}, \beta_0^{(h+1)}, \beta_1^{(h)}\right) + E\left(c_{ij}\right) E_4\left(\alpha_0^{(h+1)}, \alpha_1^{(h+1)}, \beta_0^{(h+1)}, \beta_1^{(h)}\right) \right]. \quad (20)$$

$$E_1\left(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\right) = E\left(\log\left(\tau_{il} e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1\right) \mid \tau_{il} \in \left(t_{ij-1}, t_{ij}\right)\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t_{ij-1}}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i} - \left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i}} \int_{t_{ij-1}}^{t_{ij}} \log\left(\tau_{il} e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1\right) f(\tau) d\tau. \quad (21)$$

$$E_2\left(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\right) = E\left(\log\left(\tau_{il}^* e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1\right) \mid \tau_{il}^* > t_{ij}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i}} \int_{t_{ij}}^{\infty} \log\left(\tau_{il}^* e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1\right) f\left(\tau^*\right) d\tau^*. \quad (22)$$



$$E_3(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) = E\left(\frac{\tau_{il}}{\tau_{il} e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1} \mid \tau_{il} \in (t_{ij-1}, t_{ij}]\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{t_{ij-1}}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i} - \left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i}} \int_{t_{ij-1}}^{t_{ij}} \frac{\tau_{il}}{\tau_{il} e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1} f(\tau) d\tau. \quad (23)$$

$$E_4(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) = E\left(\frac{\tau_{il}^*}{\tau_{il}^* e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1} \mid \tau_{il}^* > t_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{t_{ij}}{\theta_i}\right)^{-\lambda_i}} \int_{t_{ij}}^{\infty} \frac{\tau_{il}^*}{\tau_{il}^* e^{-\beta_0 - \beta_1 S_i} + 1} f(\tau^*) d\tau^*. \quad (24)$$

که $f(\tau)$ تابع احتمال توزیع لومکس می باشد؛ به عبارت دیگر مشتق رابطه (۱) است.

۴- بهینه کردن طرح آزمون

همان طور که قبلاً اشاره شد، یکی از اهداف این مقاله بهینه کردن طرح آزمون تنش ثابت است. منظور از بهینه سازی طرح آزمون تنش ثابت، تعیین مدت زمان بهینه اعمال هر سطح تنش است. معیارهای مختلفی برای بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرند که همه آنها مبتنی بر ماتریس اطلاع فیشر می باشند. در این مقاله از دو معیار برای بهینه سازی طرح آزمون استفاده می شود. معیار اول عبارت است از به حداقل رساندن واریانس مجانبی برآوردگر میانگین طول عمر محصول و معیار دوم نیز شامل به حداقل رساندن واریانس مجانبی برآوردگر چندک مرتبه p ام می باشد.

۴-۱- معیار بهینه سازی اول

این معیار از متداول ترین معیارهای بهینه سازی در مطالعات طول عمر است و زمانی مورد استفاده قرار می گیرد که میانگین طول عمر محصولات اهمیت داشته باشد. در این بخش قصد داریم واریانس مجانبی برآوردگر میانگین طول عمر محصولات در شرایط استفاده معمول را به حداقل برسانیم.

میانگین طول عمر محصولات که از توزیع لومکس تبعیت می کنند، در شرایط استفاده معمول به صورت زیر می باشد:

$$\mu_0 = \frac{\theta_0}{\lambda_0 - 1} = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_0}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_0} - 1}. \quad (25)$$

برای سادگی محاسبات از لگاریتم برآوردگر میانگین طول عمر محصول استفاده می کنیم:

$$\log(\hat{\mu}_0) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 S_0 - \log(e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 S_0} - 1). \quad (26)$$

واریانس مجانبی $\log \hat{\mu}_0$ را با نماد $AVar(\log \hat{\mu}_0)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن از روش دلتا استفاده می کنیم:

$$\phi_M = AVar(\log \hat{\mu}_0) = H_1 \hat{F}^{-1} H_1'. \quad (27)$$

که \hat{F} عبارت است از برآورد ماتریس اطلاع فیشر و H_1 بردار مشتقات مرتبه اول از $\log \hat{\mu}_0$ نسبت به پارامترهای $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$

می‌باشد. در عمل مقادیر $\hat{\gamma} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ بر مبنای یک تجربه قبلی و یا بر اساس نتیجه آزمون مقدماتی به دست می‌آیند. طبق توضیحات ارائه شده H_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H_1 = \left[-\frac{e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 S_0}}{e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 S_0} - 1}, -\frac{e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 S_0}}{e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 S_0} - 1}, 1, S_0 \right]. \quad (28)$$

اکنون به محاسبه ماتریس اطلاع فیشر¹ می‌پردازیم. همان طور که می‌دانیم، از کاربردهای ماتریس اطلاع فیشر تعیین واریانس برآوردگر و رفتار مجانبی برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی است. ماتریس اطلاع فیشر، دارای نقش کلیدی در برآورد پارامترهای مدل می‌باشد و توصیف‌کننده میزان اطلاع داده‌ها درباره پارامترهای مجهول است. به علاوه، معکوس این ماتریس برآوردی برای ماتریس واریانس-کواریانس مجانبی برآوردگرهای پارامترها می‌باشد. برای به دست آوردن ماتریس اطلاع فیشر، باید از منفی مشتقات جزئی مرتبه دوم لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به پارامترها، امید ریاضی گرفت. در اینجا ما ماتریس اطلاع فیشر را با نماد F نمایش می‌دهیم. با این توضیحات، درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_{11} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} (\beta_0 + \beta_1 S_i). \quad (29)$$

$$F_{12} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} (\beta_0 + \beta_1 S_i). \quad (30)$$

$$F_{13} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i}. \quad (31)$$

$$F_{14} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i}. \quad (32)$$

$$F_{22} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \log(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} (\beta_0 + \beta_1 S_i). \quad (33)$$

¹ Fisher Information Matrix





$$F_{23} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i}. \quad (34)$$

$$F_{24} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(c_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i}. \quad (35)$$

$$F_{33} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} - \frac{e^{2\beta_0 + 2\beta_1 S_i}}{(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij})^2} \right] + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \frac{e^{2\beta_0 + 2\beta_1 S_i}}{(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1})^2} \right]. \quad (36)$$

$$F_{34} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} - \frac{e^{2\beta_0 + 2\beta_1 S_i}}{(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij})^2} \right] + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \frac{e^{2\beta_0 + 2\beta_1 S_i}}{(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1})^2} \right]. \quad (37)$$

$$F_{44} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij} - c_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij}} - \frac{e^{2\beta_0 + 2\beta_1 S_i}}{(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij})^2} \right] + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} E(x_{ij}) S_i^2 e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_i} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1}} - \frac{e^{2\beta_0 + 2\beta_1 S_i}}{(e^{\beta_0 + \beta_1 S_i} + t_{ij-1})^2} \right]. \quad (38)$$

که در روابط (۲۹)-(۳۸)، $E(x_{ij})$ و $E(c_{ij})$ به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, k$ و $j = 1, 2, \dots, m_i$ طبق مقاله بودهیراجا و پرادهان^۱ (۲۰۲۰) از روابط (۳۹) و (۴۰) به دست می‌آیند.

$$E(x_{ij}) = n_i p_{ij} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \pi_{il}). \quad (39)$$

$$E(c_{ij}) = n_i p_{c_{ij}} \pi_{ij} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \pi_{il}). \quad (40)$$

که $p_{c_{ij}}$ و p_{ij} در روابط (۷) و (۸) ارائه شده‌اند.

^۱ Budhiraja and Pradhan

معیار دیگری که در اینجا برای به دست آوردن طرح آزمون بهینه از آن استفاده شده، مینیمم کردن واریانس مجانبی برآوردگر ماکسیمم درستتمایی طول عمر صدکی تحت شرایط استفاده معمول است. به این منظور ابتدا چندک مرتبه q ام طول عمر محصول، تحت شرایط عملیاتی معمول، S_0 ، ارائه می‌گردد که آن را با نماد t_q نمایش می‌دهیم:

$$t_q = e^{\beta_0 + \beta_1 S_0} \left[(1-q)^{-e^{-\alpha_0 - \alpha_1 S_0}} - 1 \right]. \quad (41)$$

برای سادگی محاسبات از لگاریتم چندک مرتبه q ام طول عمر، استفاده می‌کنیم و با استفاده از روش دلتا واریانس مجانبی برآوردگر ماکسیمم درستتمایی $\log t_q$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\phi_Q = \text{AVar}(\log \hat{t}_q) = H_2 \hat{F}^{-1} H_2'. \quad (42)$$

که \hat{F} برآورد ماتریس اطلاع فیشر و H_2 بردار مشتقات مرتبه اول از $\log \hat{t}_q$ نسبت به پارامترهای $\hat{\alpha}_0$ ، $\hat{\alpha}_1$ ، $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ می‌باشد؛ بنابراین ماتریس H_2 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{e^{-\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 S_0} (1-q)^{-e^{-\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 S_0}} \log(1-q)}{(1-q)^{-e^{-\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 S_0}} - 1}, \\ \frac{S_0 e^{-\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 S_0} (1-q)^{-e^{-\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 S_0}} \log(1-q)}{(1-q)^{-e^{-\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 S_0}} - 1}, I, S_0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

۵- مطالعات شبیه‌سازی شده

هدف اصلی از این مطالعه، بررسی عددی برای نشان دادن نتایج نظری بحث شده، هست؛ که این بررسی هم شامل مسئله برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش الگوریتم EM و هم شامل طراحی آزمون بهینه می‌شود.

برای این که بهتر بتوانیم روند طرح آزمون بهینه را به نمایش بگذاریم از مدل استاندارد استفاده می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، به جای استفاده از سطوح تنش اصلی، می‌توان از سطوح تنش استاندارد شده که به صورت زیر محاسبه می‌شوند، استفاده کرد:

$$S'_i = \frac{S_i - S_0}{S_i - S_k}, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (44)$$

که در این صورت $S'_0 = 0$ و $S'_k = 1$.

برای سادگی محاسبات می‌توان تعداد بازرسی در سطوح تنش مختلف را با یکدیگر یکسان در نظر گرفت؛ در این صورت داریم: $m_1 = m_2 = \dots = m_k$. به علاوه می‌توان در نظر گرفت زمان‌های بازرسی در تمامی سطوح تنش با یکدیگر برابر هستند؛ به عبارت دیگر $t_{1j} = t_{2j} = \dots = t_{kj}$ به ازای $j = 1, 2, \dots, m$. در این صورت زمان خاتمه تمامی سطح تنش با یکدیگر برابر می‌باشند، یعنی $t_{1m} = t_{2m} = \dots = t_{km} = T$. به عبارت دیگر T زمان خاتمه آزمون است.

برای ارزیابی برآوردگر ماکسیمم درستتمایی که توسط الگوریتم EM به دست آمد و در بخش ۳ مورد بحث قرار گرفت، از سه ترکیب داده مختلف استفاده می‌شود. مثال ۱ که آزمون عمر شتابیده تنش ثابت در دو سطح مختلف اجرا می‌شود و مقادیر اولیه‌ای آن عبارت‌اند از:





جدول ۲- برآوردگر ML پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE برای داده‌های مثال ۲.
Table 2- MLE of the parameters along with their MSE and RE for data of example 2.

RE	MSE	Bias	MLE	π
0.0035	7.0129×10^{-7}	-0.0002	0.0997	$\hat{\alpha}_0$ 0%
0.0070	1.9600×10^{-6}	-0.0014	0.1986	$\hat{\alpha}_1$
0.0600	1.4401×10^{-4}	0.0121	0.2120	$\hat{\beta}_0$
0.0047	1.9600×10^{-6}	0.0014	0.3014	$\hat{\beta}_1$
0.0520	2.7040×10^{-5}	-0.0052	0.0948	$\hat{\alpha}_0$ 10%
0.1225	6.0025×10^{-4}	-0.0245	0.1755	$\hat{\alpha}_1$
0.0705	1.9881×10^{-4}	0.0141	0.2141	$\hat{\beta}_0$
0.0173	2.7040×10^{-5}	0.0052	0.3052	$\hat{\beta}_1$
0.1200	1.4400×10^{-4}	-0.0120	0.0880	$\hat{\alpha}_0$ 20%
0.1405	7.8961×10^{-4}	-0.0281	0.1719	$\hat{\alpha}_1$
0.1405	3.2152×10^{-4}	0.0221	0.2281	$\hat{\beta}_0$
0.0677	4.1209×10^{-4}	0.0203	0.3203	$\hat{\beta}_1$

جدول ۳- برآوردگر ML پارامترها به همراه اریبی، MSE و RE برای داده‌های مثال ۳.
Table 3- MLE of the parameters along with their MSE and RE for data of example 3.

RE	MSE	Bias	MLE	π
0.0023	7.8400×10^{-6}	-0.0028	1.1972	$\hat{\alpha}_0$ 0%
0.0058	8.4640×10^{-5}	-0.0092	1.5908	$\hat{\alpha}_1$
0.0039	1.8490×10^{-5}	0.0043	1.1043	$\hat{\beta}_0$
0.0028	2.0250×10^{-5}	0.0045	1.6045	$\hat{\beta}_1$
0.0010	0.0009×10^{-4}	-0.0003	0.2997	$\hat{\alpha}_0$ 10%
0.0079	1.6129×10^{-4}	-0.0127	1.5873	$\hat{\alpha}_1$
0.0096	1.1236×10^{-4}	0.0106	1.1106	$\hat{\beta}_0$
0.0032	2.7040×10^{-5}	0.0052	1.6052	$\hat{\beta}_1$
0.0106	1.6129×10^{-4}	-0.0127	1.1873	$\hat{\alpha}_0$ 20%
0.0176	5.1994×10^{-4}	-0.0281	1.5719	$\hat{\alpha}_1$
0.0255	3.3604×10^{-4}	0.0281	81.121	$\hat{\beta}_0$
0.0077	1.5129×10^{-4}	0.0123	1.6123	$\hat{\beta}_1$

جدول ۴، مقادیر بهینه زمان خاتمه آزمون را برای داده‌های مثال‌های ۱، ۲ و ۳ تحت هر دو معیار بهینه‌سازی و به ازای $\pi = 20\%$ ارائه می‌دهد. در این جدول زمان بهینه خاتمه آزمون تحت معیار اول را با نماد T_M^* و زمان بهینه خاتمه آزمون تحت معیار دوم را با نماد T_D^* نمایش می‌دهیم. با توجه به زمان‌های بازرسی از پیش تعیین شده برای هر یک از مثال‌ها، نتیجه می‌شود زمان بهینه خاتمه آزمون در تمامی مثال‌ها، بلافاصله بعد از آخرین بازرسی قبل از خاتمه آزمون است. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت زمان آخرین بازرسی قبل از خاتمه آزمون، مؤثرترین فاکتور در تعیین زمان بهینه خاتمه آزمون است. به علاوه از جدول ۴، نتیجه می‌شود که زمان‌های بهینه‌شده تحت هر دو معیار یکسان هستند البته همان‌طور که مشاهده می‌نمایید، تابع هدف تحت معیار دوم در هر سه مجموعه داده مورد بررسی کمتر از مقدار تابع هدف تحت معیار اول می‌باشد، این امر نشان‌دهنده این است که آزمون بهینه طراحی شده تحت معیار دوم کاراتر از معیار اول است.



جدول ۴- زمان بهینه خاتمه آزمون و تابع هدف متناظر با آن تحت دو معیار بهینه‌سازی.

Table 4- Optimal termination times and corresponding objective functions under two optimality criteria.

معیار بهینه‌سازی اول	معیار بهینه‌سازی دوم		
$T_M^* = 0.5001$	$T_Q^* = 0.5001$	زمان بهینه خاتمه آزمون	داده‌های مثال ۱
$\phi_M = 536.1438$	$\phi_Q = 74.5911$	مقدار تابع هدف	
$T_M^* = 0.3001$	$T_M^* = 0.3001$	زمان بهینه خاتمه آزمون	داده‌های مثال ۲
$\phi_M = 2.2206 \times 10^3$	$\phi_Q = 86.1361$	مقدار تابع هدف	
$T_M^* = 0.5001$	$T_Q^* = 0.5001$	زمان بهینه خاتمه آزمون	داده‌های مثال ۳
$\phi_M = 210.6707$	$\phi_Q = 157.6718$	مقدار تابع هدف	

در ادامه به بررسی عوامل دیگر مؤثر بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت این دو معیار می‌پردازیم. جدول ۵، تأثیر احتمال سانسور میانی را بر زمان بهینه خاتمه آزمون نشان می‌دهد؛ که واضح است، میزان سانسور میانی تأثیری بر زمان بهینه‌شده ندارد.

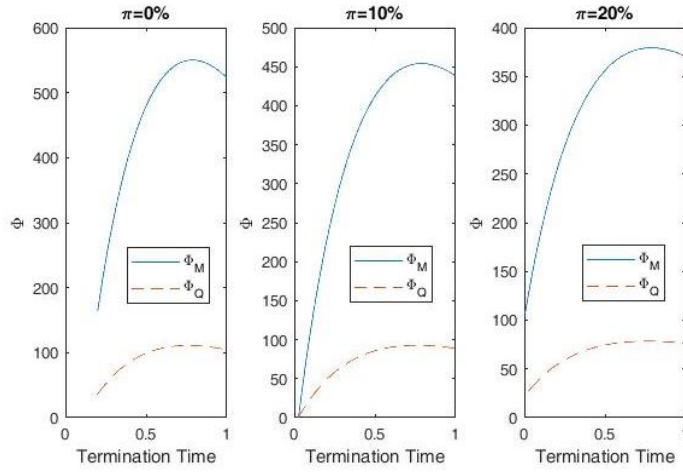
جدول ۵- تأثیر احتمال سانسور میانی بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار بهینه‌سازی.

Table 5- The effect of intermediate censoring on the optimal termination times under two optimality criteria.

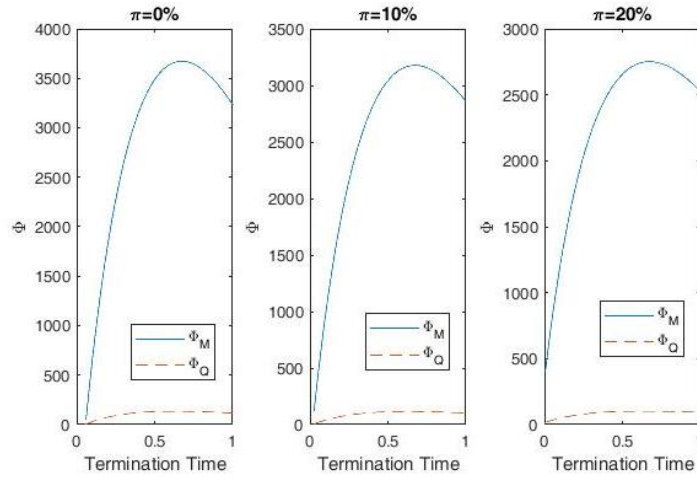
		π											
		90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	0%		
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_M^*	مثال ۱
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_Q^*	
0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	T_M^*	مثال ۲
0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	T_Q^*	
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_M^*	مثال ۳
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_Q^*	

شکل‌های ۱، ۲ و ۳، نمودار تأثیر احتمال سانسور میانی را بر مقدار تابع هدف بهینه تحت دو معیار مورد بررسی به ترتیب برای مجموعه مقادیر اولیه مثال‌های ۱، ۲ و ۳ نشان می‌دهند. همان‌طور که از نمودارها نتیجه می‌شود، با افزایش مدت‌زمان آزمون، مقدار تابع هدف بهینه تحت دو معیار بهینه‌سازی دارای روند افزایشی مشابهی می‌باشد. به‌علاوه مشاهده می‌شود با افزایش احتمال سانسور میانی، توابع هدف در هر دو معیار بهینه‌سازی مقادیر کمتری را اختیار می‌کنند، از طرفی هر قدر زمان خاتمه آزمون، کمتر باشد و به سمت صفر میل کند، نیز نتیجه می‌شود مقدار تابع هدف کمترین مقدار را به خود می‌گیرد. در واقع می‌توان گفت برای دست‌یابی به آزمون کارا یک راه‌کار بالابردن احتمال سانسور میانی واحدها در هر بازرسی است و راه‌کار دیگر کم کردن زمان خاتمه آزمون است. همچنین مشاهده می‌شود که مقدار تابع هدف تحت معیار بهینه‌سازی اول به‌طورکلی بیشتر از مقدار متناظر آن تحت معیار بهینه‌سازی دوم است و این بدان معنی است که به‌طورکلی آزمون بهینه تحت معیار بهینه‌سازی دوم کاراتر از معیار اول است.

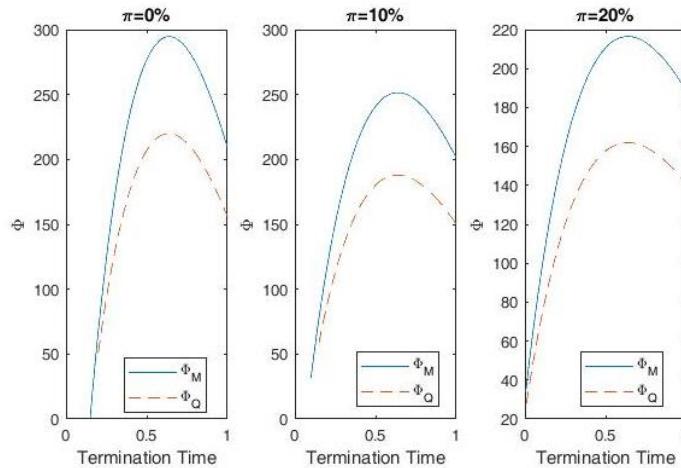
جدول ۶، تأثیر افزایش حجم نمونه را بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار، به ترتیب برای داده‌های مثال‌های ۱، ۲ و ۳ با احتمال سانسور میانی ۱۰٪ نشان می‌دهند. در جدول ۶ طی چهار حالت، حجم نمونه‌های مختلفی برای مثال‌های ۱، ۲ و ۳ در نظر گرفته شده است. برای مثال ۱: حالت اول $n_1 = n_2 = 20$ ، حالت دوم $n_1 = n_2 = 30$ ، حالت سوم $n_1 = n_2 = 40$ و حالت چهارم $n_1 = n_2 = 50$. برای مثال ۲: حالت اول $n_1 = n_2 = n_3 = 20$ ، حالت دوم $n_1 = n_2 = n_3 = 30$ ، حالت سوم $n_1 = n_2 = n_3 = 40$ و حالت چهارم $n_1 = n_2 = n_3 = 50$. برای مثال ۳: حالت اول $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 20$ ، حالت دوم $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 30$ ، حالت سوم $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 40$ و حالت چهارم $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 50$. با توجه به داده‌های جدول ۶ نتیجه می‌شود که با تغییر حجم نمونه، در زمان بهینه خاتمه آزمون تغییری به وجود نمی‌آید.



شکل ۱- تابع هدف بهینه نسبت به زمان خاتمه آزمون به ازای احتمال سانسورهای میانی مختلف، برای داده‌های مثال ۱.
Figure 1- Optimal objective function with respect to termination times for different intermediate censoring, for data of example 1.



شکل ۲- تابع هدف بهینه نسبت به زمان خاتمه آزمون به ازای احتمال سانسورهای میانی مختلف، برای داده‌های مثال ۲.
Figure 2- Optimal objective function with respect to termination times for different intermediate censoring, for data of example 2.



شکل ۳- تابع هدف بهینه نسبت به زمان خاتمه آزمون به ازای احتمال سانسورهای میانی مختلف، برای داده‌های مثال ۳.
Figure 3- Optimal objective function with respect to termination times for different intermediate censoring, for data of example 3.

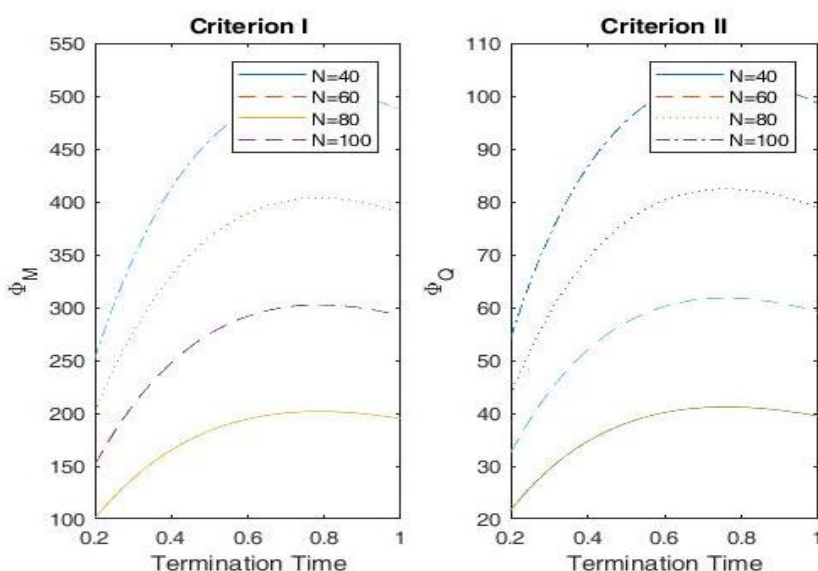


جدول ۶- تأثیر حجم نمونه بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار بهینه‌سازی.

Table 6- The effect of sample size on the termination times under two optimality criteria.

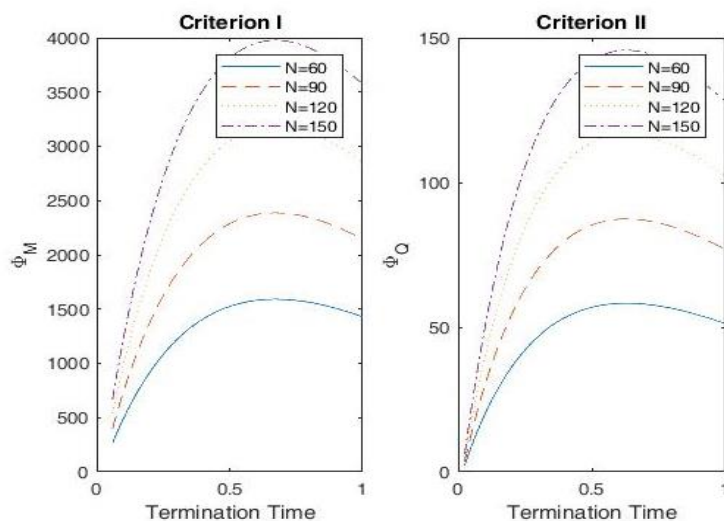
$N = 40$	$N = 60$	$N = 80$	$N = 100$	T_M^* T_Q^*	مثال ۱
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001		
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_M^* T_Q^*	مثال ۲
$N = 60$	$N = 90$	$N = 120$	$N = 150$		
0.3001	0.3001	0.3001	0.3001	T_M^* T_Q^*	مثال ۳
0.3001	0.3001	0.3001	0.3001		
$N = 80$	$N = 120$	$N = 150$	$N = 200$	T_M^* T_Q^*	
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001		
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001		

در شکل‌های ۴ تا ۶، نمودارهای تأثیر افزایش حجم نمونه بر تابع هدف بهینه متناظر با جدول ۶ برای سه مثال مورد بررسی ترسیم شده است. همان‌طور که از این نمودارها نتیجه می‌شود، با افزایش حجم نمونه مقدار تابع هدف در هر دو معیار افزایش می‌یابد پس برای دستیابی به آزمون بهینه کارا بهتر است از حجم نمونه کمتر استفاده شود.



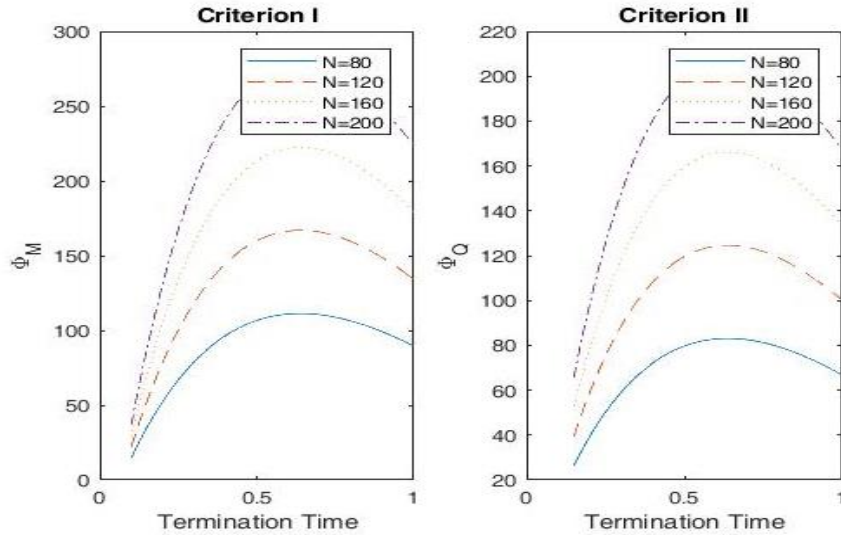
شکل ۴- تأثیر حجم نمونه بر تابع هدف بهینه تحت هر دو معیار، برای داده‌های مثال ۱.

Figure 4- The effect of sample size on the optimal objective function under both criteria, for data of example 1.



شکل ۵- تأثیر حجم نمونه بر بر تابع هدف بهینه تحت هر دو معیار، برای داده‌های مثال ۲.

Figure 5- The effect of sample size on the optimal objective function under both criteria, for data of example 2.



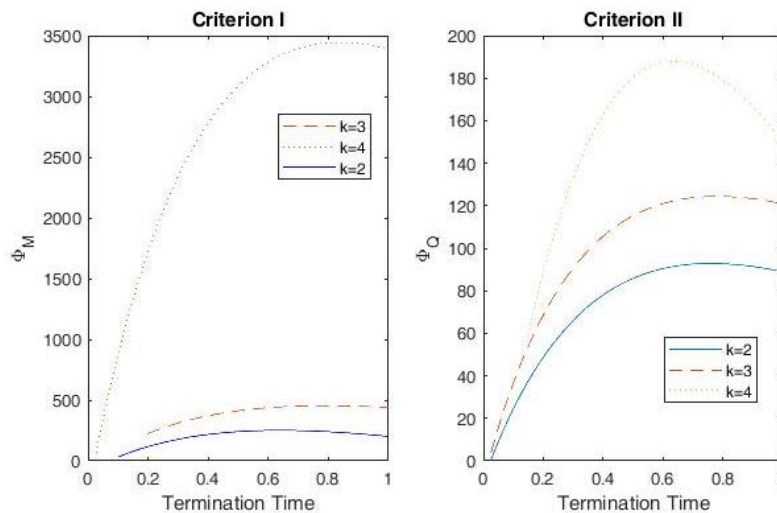
شکل ۶- تأثیر حجم نمونه بر تابع هدف بهینه تحت هر دو معیار، برای داده‌های مثال ۳.
Figure 6- The effect of sample size on the optimal objective function under both criteria, for data of example 3.

جدول ۷، تأثیر افزایش تعداد سطوح تنش را بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار مورد بررسی برای داده‌های مثال‌های ۱، ۲ و ۳ نمایش می‌دهد. در تمامی این مثال‌ها، تعداد بازرسی ۶ و زمان‌های بازرسی ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳، ۰/۴، ۰/۵ و ۰/۶ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمان بهینه خاتمه آزمون متأثر از تعداد سطوح تنش نیست.

جدول ۷- تأثیر تعداد سطوح تنش بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار بهینه‌سازی.
Table 7- The effect of the number of stress levels on the termination times under two optimality criteria.

	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$		
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_M^*	مثال ۱
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_Q^*	
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_M^*	مثال ۲
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_Q^*	
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_M^*	مثال ۳
0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	T_Q^*	

شکل ۷، نمودار تأثیر افزایش تعداد سطوح تنش را بر تابع هدف بهینه با توجه به هر دو معیار مورد بررسی برای داده‌های مثال ۱، نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد سطوح تنش، تابع هدف در هر دو معیار افزایش می‌یابد. پس برای دستیابی به آزمون بهینه کارا بهتر است از تعداد سطوح تنش کمتری استفاده نماییم.



شکل ۷- تأثیر تعداد سطوح تنش بر تابع هدف بهینه تحت هر دو معیار.
Figure 7- The effect of number of stress levels on the optimal objective function under both criteria.



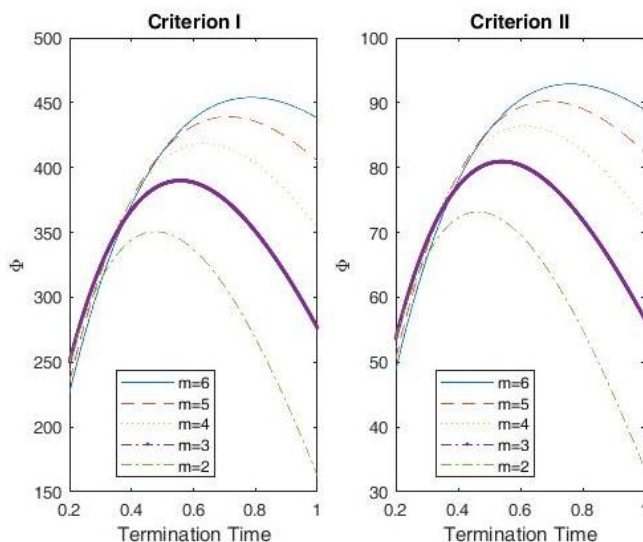
جدول ۸، تأثیر افزایش تعداد بازبینی را بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار مورد بررسی برای داده‌های مثال‌های ۱، ۲ و ۳ نشان می‌دهد. در این جدول برای $m=2$ زمان‌های بازرسی را ۰٫۱، ۰٫۲، برای $m=3$ زمان‌های بازرسی را ۰٫۱، ۰٫۲، ۰٫۳، برای $m=4$ زمان‌های بازرسی را ۰٫۱، ۰٫۲، ۰٫۳، ۰٫۴، برای $m=5$ زمان‌های بازرسی را ۰٫۱، ۰٫۲، ۰٫۳، ۰٫۴، ۰٫۵، و برای $m=6$ زمان‌های بازرسی را ۰٫۱، ۰٫۲، ۰٫۳، ۰٫۴، ۰٫۵، ۰٫۶ در نظر گرفته شده است. با توجه به نتایج جدول ۸ متوجه می‌شویم که زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار، بلافاصله بعد از زمان بازرسی قبل از خاتمه آزمون است.

جدول ۸- تأثیر تعداد بازبینی بر زمان بهینه خاتمه آزمون تحت هر دو معیار بهینه‌سازی.

Table 8- The effect of the number of inspections on the termination times under two optimality criteria.

m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	
0.1001	0.2001	0.3001	0.4001	0.5001	مثال ۱ T_M^*
0.1001	0.2001	0.3001	0.4001	0.5001	T_Q^*
0.1001	0.2001	0.3001	0.4001	0.5001	مثال ۲ T_M^*
0.1001	0.2001	0.3001	0.4001	0.5001	T_Q^*
0.1001	0.2001	0.3001	0.4001	0.5001	مثال ۳ T_M^*
0.1001	0.2001	0.3001	0.4001	0.5001	T_Q^*

شکل ۸، نمودار تأثیر افزایش تعداد بازبینی را بر تابع هدف بهینه تحت هر دو معیار بهینه‌سازی برای داده‌های مثال ۱ نشان می‌دهد. از آنجا که در بررسی مثال‌های ۱، ۲ و ۳، همواره نتایج مشابهی حاصل شده و طبق بررسی‌های انجام شده تعداد سطوح تنش تأثیری در روند تعیین زمان بهینه خاتمه آزمون و تابع هدف بهینه ندارد و از طرف دیگر به دلیل محدودیت صفحات مقاله، برای این بررسی فقط از داده‌های مثال ۱ استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش تعداد بازبینی منجر به افزایش میزان تابع هدف تحت هر دو معیار بهینه‌سازی می‌شود. در نتیجه برای دستیابی به آزمون بهینه کارا بهتر است تعداد بازبینی‌ها در حین آزمون کم انتخاب شود. همچنین مشابه نتایجی که از شکل ۱ تا شکل ۷ حاصل شد، در شکل ۸ نیز واضح است که معیار بهینه‌سازی دوم نسبت به معیار اول، کارا تر است.



شکل ۸- تأثیر تعداد بازرسی‌ها بر تابع هدف بهینه تحت هر دو معیار، برای داده‌های مثال ۱.

Figure 8- The effect of number of inspection times on the optimal objective function under both criteria, for data of example 1.

۶- مثال کاربردی

در این بخش، موضوعات بررسی شده در قسمت‌های قبل را برای یک مجموعه داده واقعی، به کار می‌بریم. داده‌ها برگرفته از کتاب نلسون (۱۹۹۰) است. در فصل سوم این کتاب نتایج حاصل از آزمون عمر شتابیده تنش ثابت برای دستیابی به زمان خرابی عایق ترانسفورماتور ارائه شده است. این آزمایش شامل اعمال ولتاژ در سه سطح ثابت و بیش از حد طبیعی می‌باشد که به ترتیب عبارت‌اند از ۳۵/۴ کیلووات، ۴۲/۴ کیلووات و ۴۶/۷ کیلووات. در هر سطح تنش ۱۰ واحد آزمونی تحت آزمایش قرار می‌گیرند. لازم به ذکر است، سطح ولتاژ در حالت استفاده معمول در این آزمون ۱۴/۴ کیلووات است. داده‌های این مثال در جدول ۹ ارائه شده است. برای این داده‌ها توزیع لومکس



را با پارامترهای $\theta = 2.1683 \times 10^3$ و $\lambda = 4.909$ برازش می‌دهیم. با توجه به اینکه در آزمون کلموگروف-اسمیرنوف^۱ مقدار آماره اکنون ما بر روی داده‌های این مثال، روش بازرسی دوره‌ای و سانسور فزاینده نوع اول را اعمال می‌کنیم. برای بازرسی دوره‌ای، دو زمان از پیش تعیین شده ۲۰٪ و ۴۰٪ را به عنوان زمان‌های بازرسی در نظر می‌گیریم که سانسور فزاینده در همین زمان‌ها با احتمال سانسورهای میانی معادل ۰٪، ۱۰٪ و ۲۰٪ به واحدهای تحت آزمون اعمال می‌شود. با استفاده از الگوریتم EM برآورد ماکسیمم درستمایی پارامترهای مجهول مدل، تحت هر یک از سانسورهای میانی ذکر شده به همراه خطای استاندارد^۲ (SE) متناظر آن‌ها در جدول ۱۰ ارائه شده است. در جدول ۱۰ مشاهده می‌شود که خطای استاندارد حاصل از برآورد ML با استفاده از الگوریتم EM مقدار کمی است که این نشان از مناسب بودن روش برآورد بررسی شده در این مقاله دارد. به علاوه مشاهده می‌شود که با افزایش سانسور میانی، مقدار خطای استاندارد به میزان کمی افزایش می‌یابد و این با نتیجه حاصل از مطالعات شبیه‌سازی که در بخش قبل ارائه شد منطبق است.

جدول ۹- زمان خرابی عایق ترانسفورماتور.

Table 9- Failure times of transformers insulation.

زمان‌های خرابی										ولتاژ
1002.3	1002.3	537.9	308.3	229.7	204.7	166.5	71.2	59.4	0.1	۳۵/۴ کیلووات
56.2	50.2	44.4	32.8	30.2	25.0	19.9	15.2	13.4	0.6	۴۲/۴ کیلووات
48.1	21.3	16.9	16.1	14.9	13.6	9.0	8.9	8.3	3.1	۴۶/۷ کیلووات

جدول ۱۰- برآوردگر ML پارامترها به همراه SE برای داده‌های واقعی.

Table 10- MLE of the parameters along with their SE for real data.

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_0$	π	
2.3024	1.3074	0.2107	0.0043	MLE	0%
0.0193	0.0068	0.1959	0.0293	SE	
2.2045	1.1206	0.2073	0.0037	MLE	10%
0.0225	0.0069	0.1977	0.0373	SE	
1.9875	1.3892	0.1973	0.0038	$\hat{\alpha}_0$	20%
0.0235	0.0083	0.2185	0.0629	SE	

در جدول ۱۱ مقدار بهینه زمان خاتمه آزمون تحت سانسور میانی ۲۰٪ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌نمایید، مشابه نتایجی که از مطالعات شبیه‌سازی گرفته شد، زمان بهینه خاتمه آزمون در هر دو معیار باهم برابر و بلافاصله بعد از زمان بازرسی اول می‌باشد. همچنین مقدار تابع هدف متناظر با معیار بهینه‌سازی دوم کمتر از مقدار تابع هدف متناظر با معیار بهینه‌سازی اول است.

جدول ۱۱- زمان بهینه خاتمه آزمون و تابع هدف متناظر با آن تحت دو معیار بهینه‌سازی برای داده‌های واقعی.

Table 11- Optimal termination times and corresponding objective functions under two optimality criteria for real data.

معیار بهینه‌سازی اول	معیار بهینه‌سازی دوم	
$T_M^* = 20.0001$	$T_Q^* = 20.0001$	زمان بهینه خاتمه آزمون
$\phi_M = 143.8067$	$\phi_Q = 4.0243$	مقدار تابع هدف

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله آزمون عمر شتابیده تنش ثابت k مرحله‌ای را برای محصولات که طول عمر آن‌ها از توزیع لومکس تبعیت می‌کنند به کاربریم. همچنین برای کاهش هزینه‌های آزمون، از سانسور فزاینده نوع اول و روش بازمینی دوره‌ای برای جمع‌آوری داده‌ها استفاده

¹ Kolmogorov Smirnov

² Standard Error



کردیم. برای تطابق بیشتر آزمون با آنچه در عمل اتفاق می‌افتد، در نظر گرفتیم که تنش اعمال شده بر هر دو پارامتر توزیع لومکس تأثیرگذار است و برای بررسی تأثیر افزایش سطح تنش بر طول عمر محصولات، فرض شد که هر دو پارامتر مقیاس و شکل دارای رابطه لگ خطی هستند. در این مقاله برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مجهول از الگوریتم EM بهره گرفتیم. اصل اطلاعات از دست رفته به الگوریتم EM کمک می‌کند تا اطلاعات موجود در داده‌های مفقود شده را به کار گیرد. عملکرد این روش بر آورد، از طریق معیارهای اریبی، MSE و RE مورد ارزیابی قرار گرفت. در ادامه مقاله، به منظور بهینه‌سازی طرح این آزمون از دو معیار بهینه‌سازی مبتنی بر ماتریس اطلاع فیشر استفاده کردیم و مدت زمان بهینه اعمال هر سطح تنش را با توجه به هر دو معیار محاسبه کردیم. سپس تأثیر فاکتورهای از قبیل حجم نمونه، نسبت سانسور میانی، تعداد سطوح تنش و تعداد بازبینی بر مدت زمان بهینه‌شده و کارایی نسبی آزمون توسط مطالعات شبیه‌سازی شده و یک مجموعه داده واقعی مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به بررسی‌های صورت گرفته مشاهده می‌شود، زمان بهینه‌شده در تمامی مثال‌ها تحت هر دو معیار یکسان است و این زمان بهینه بلافاصله بعد از آخرین بازرسی قبل از خاتمه آزمون می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت زمان آخرین بازرسی قبل از خاتمه آزمون، مؤثرترین فاکتور در تعیین زمان بهینه خاتمه آزمون است. به علاوه تحت معیار بهینه‌سازی دوم، آزمون کارتری نسبت به معیار اول حاصل خواهد شد. همچنین برای دست‌یابی به آزمون کارتر، بهتر است از حجم نمونه کمتر، تعداد سطوح تنش کمتر، تعداد بازبینی کمتر و احتمال سانسور میانی بیشتر استفاده کرد. به این ترتیب می‌توان ادعا کرد که به آزمون کارا دست یافته‌ایم.

منابع

- Balakrishnan, N., & Han, D. (2008). Exact inference for a simple step-stress model with competing risks for failure from exponential distribution under Type-II censoring. *Journal of statistical planning and inference*, 138(12), 4172-4186. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2008.03.036>
- Balakrishnan, N., Kundu, D., Ng, K. T., & Kannan, N. (2007). Point and interval estimation for a simple step-stress model with Type-II censoring. *Journal of quality technology*, 39(1), 35-47. <https://doi.org/10.1080/00224065.2007.11917671>
- Boyko, K. C., & Gerlach, D. L. (1989, April). Time dependent dielectric breakdown at 210 Å oxides. *27th annual proceedings. International reliability physics symposium* (pp. 1-8). IEEE. DOI: 10.1109/RELPHY.1989.36309
- Budhiraja, S., & Pradhan, B. (2020). Point and interval estimation under progressive type-I interval censoring with random removal. *Statistical papers*, 61(1), 445-477. <https://doi.org/10.1007/s00362-017-0948-y>
- Chandra, N., & Khan, M. A. (2018). Analysis and optimum plan for 3-step step-stress accelerated life tests with Lomax model under progressive type-I censoring. *Communications in mathematics and statistics*, 6(1), 73-90. <https://doi.org/10.1007/s40304-017-0123-8>
- Fan, T. H., & Hsu, T. M. (2014). Constant stress accelerated life test on a multiple-component series system under Weibull lifetime distributions. *Communications in statistics-theory and methods*, 43(10-12), 2370-2383. <https://doi.org/10.1080/03610926.2013.809115>
- Guan, Q., Tang, Y., Fu, J., & Xu, A. (2014). Optimal multiple constant-stress accelerated life tests for generalized exponential distribution. *Communications in statistics-simulation and computation*, 43(8), 1852-1865. <https://doi.org/10.1080/03610918.2013.810257>
- Hassan, A. S., Assar, S. M., & Shelbaia, A. (2016). Optimum step-stress accelerated life test plan for Lomax distribution with an adaptive type-II progressive hybrid censoring. *Journal of advances in mathematics and computer science*, 13(2), 1-19. DOI: 10.9734/10.9734/BJMCS/2016/21964
- Hiergeist, P., Spitzer, A., & Rohl, S. (1989). Lifetime of oxide and oxide-nitro-oxide dielectrics within trench capacitors for DRAM's. *IEEE transactions on electron devices*, 36, 913-919. DOI: 10.1109/16.299673
- Kateri, M., & Kamps, U. (2015). Inference in step-stress models based on failure rates. *Statistical papers*, 56(3), 639-660. <https://doi.org/10.1007/s00362-014-0601-y>
- Khaje Zadeh, S., Shahverdiani, S., Daneshvar, A., & Madanchi Zaj, M. (2020). Predicting the optimal stock portfolio approach of meta-heuristic algorithm and Markov decision process. *Journal of decisions and operations research*, 5(4), 426-445. (In Persian). DOI: 10.22105/dmor.2020.239616.1183
- Khoshfetrat, S., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2014). Introducing a nonlinear programming model and using genetic algorithm to rank the alternatives in analytic hierarchy process. *Journal of applied research on industrial engineering*, 1(1), 12-18.
- Li, P. C., Ting, W., & Kwong, D. L. (1989). Time-dependent dielectric breakdown of chemical-vapour-deposited SiO/sub 2/gate dielectrics. *Electronics letters*, 25(10), 665-666. DOI:10.1049/EL:19890450
- Little, R., & Rubin, D. (2007). Incomplete data. In S. Kotz & N.L. Johnson (Eds.), *Encyclopedia of statistical sciences* (pp 46-53). Wiley, New York.
- Lomax, K. S. (1954). Business failures: another example of the analysis of failure data. *Journal of the American statistical association*, 49(268), 847-852.
- Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (1998). *Statistical methods for reliability data*. John Wiley and Sons. Inc., New York.
- Mitra, S., Ganguly, A., Samanta, D., & Kundu, D. (2013). On the simple step-stress model for two-parameter exponential distribution. *Statistical methodology*, 15, 95-114. <https://doi.org/10.1016/j.stamet.2013.04.003>
- Nelson, W. (1990). *Accelerated testing - statistical models, test plans, and data analyses*. John Wiley and Sons, New York. DOI:10.2307/2347642
- Nelson, W. (1984). Fitting of fatigue curves with nonconstant standard deviation to data with runouts. *Journal of testing and evaluation*, 12(2), 69-77. <https://doi.org/10.1520/JTE10700J>



- Parchami, A., DoostMohammadi, M., & Mashinchi, M. (2019). Application of newton raphson algorithm as a numerical method in maximum likelihood estimation. *Decisions and operations research*, 3(4), 402-412. **(In Persian)**. DOI: [10.22105/dmor.2019.77084](https://doi.org/10.22105/dmor.2019.77084)
- Parnianifard, A., Ahmad, S. A., Ariffin, M. K. A., & Ismail, M. I. S. (2018). Design and analysis of computer experiments using polynomial regression and Latin hypercube sampling in optimal design of PID controller. *Journal of applied research on industrial engineering*, 5(2), 156-168. DOI: [10.22105/jarie.2018.141898.1051](https://doi.org/10.22105/jarie.2018.141898.1051)
- Pascual, F. (2008). Accelerated life test planning with independent Weibull competing risks. *IEEE transactions on reliability*, 57(3), 435-444. DOI: [10.1109/TR.2008.928205](https://doi.org/10.1109/TR.2008.928205)
- Rashidinejad, A. (2010). Comparison of EM algorithm imputation with two methods of mean imputation and new samples imputation in panel surveys. *Ijoss Iranian journal of official statistics studies*, 21(1), 89-108. **(In Persian)**. <http://ijoss.srtc.ac.ir/article-1-74-en.html>
- Wang, L. (2017). Inference of constant-stress accelerated life test for a truncated distribution under progressive censoring. *Applied mathematical modelling*, 44, 743-757. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.02.011>
- Wang, L. (2018). Estimation of constant-stress accelerated life test for Weibull distribution with nonconstant shape parameter. *Journal of computational and applied mathematics*, 343, 539-555. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.05.012>