

Paper Type: Original Article



# Numerical Modelling of Macroscopic Traffic Flow Based on Driver Physiological Response Using a Modified Wave Propagation Algorithm

Morteza Araghi<sup>1,\*</sup> , Hossein Mahdizadeh<sup>1</sup>, Sadegh Moodi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran; m.araghi@birjand.ac.ir; hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir;

<sup>2</sup> Department of Civil Engineering, Shahid Nikbakht Faculty of Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran; sadegh.moodi@gmail.com.

Citation:



Araghi, M., Mahdizade, H., & Moodi, S. (2021). Numerical modelling of macroscopic traffic flow based on driver physiological response using a modified wave propagation algorithm. *Journal of decisions & operations research*, 6 (3), 350-364.

Received: 31/01/2021

Reviewed: 10/03/2021

Revised: 19/07/2021

Accept: 07/08/2021

## Abstract

**Purpose:** In this paper, a novel numerical method, using the Godunov-type finite volume technique, the flux wave version of Modified Wave Propagation Algorithm (MWPA) with high-resolution is presented to solve one-dimensional second-order macroscopic model of traffic flow.

**Methodology:** To demonstrate the effectiveness of the proposed approach, the commonly employed Payne–Whitham model and PW based on driver physiological response have been used. The hyperbolic nonlinear Partial Derivatives Equations (PDEs) of traffic flow which do not have analytical solution are solved considering a new Riemann wave speeds, based on an augmented Riemann solver. In this method, nonlinear equations are first transformed into a diagonal quasi-linear problem with linear characteristic curves, the corresponding source terms are involved in the flux difference of finite volume computational cells. The second-order wave solutions and their initial jump conditions are considered and the obtained numerical results are compared with Roe Decomposition Technique (RDT) as a common method in macroscopic traffic flow models discretization for the PW model before and after considering driver physiological response.

**Findings:** The problem of queue propagation in uniform traffic flow condition with two discontinuities including shock waves and subsequent rarefaction waves with periodic boundary conditions was selected as a numerical example. Velocity and density profiles at different times, the spatio-temporal changes of the two mentioned variables and traffic flow rates were presented.

**Originality/Value:** The numerical results indicate that the proposed method provides a more realistic behavior for the two mentioned models regarding the basic variables of traffic flow.

**Keywords:** Numerical modelling, Macroscopic traffic flow, Wave propagation algorithm, Flux wave method, Riemann solver.

Corresponding Author: m.araghi@birjand.ac.ir

doi 10.22105/dmor.2021.271141.1313



Licensee. **Decisions & Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## مدل‌سازی عددی جریان ترافیک کلان‌نگر براساس پاسخ فیزیولوژیکی راننده با استفاده از یک الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده

مرتضی عراقی<sup>۱\*</sup>، حسین مهدیزاده<sup>۱</sup>، صادق مودی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

<sup>۲</sup>گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

### چکیده

**هدف:** در این مقاله یک روش عددی جدید، با استفاده از تکنیک حجم محدود نوع گودونو، نسخه موج شار الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده با دقت بالا برای حل یک‌بعدی مدل کلان‌نگر مرتبه‌دوم جریان ترافیک ارائه شده است.

**روش‌شناسی پژوهش:** از مدل متداول پین-ویتهام و مدل پین-ویتهام مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده به منظور صحت‌سنجی حل عددی استفاده شده است. معادلات مشتق‌های پاره‌ای غیرخطی هذلولوی جریان ترافیک که پاسخ تحلیلی ندارند، با در نظر گرفتن یک سرعت نوین برای امواج ریمن، براساس حل‌کننده ریمن تقویت شده، حل شده‌اند. در این روش ابتدا معادلات غیرخطی به یک مسئله شبه‌خطی قطری با منحنی‌های مشخصه خطی تبدیل شده و مولفه‌های منبع مربوطه در تفاضل شار سلول‌های محاسباتی حجم محدود شرکت داده می‌شوند. راه‌حل‌های موج مرتبه‌دوم و شرایط پرش اولیه آن‌ها در نظر گرفته شده و نتایج عددی به دست آمده برای دو مدل پین-ویتهام قبل و بعد از لحاظ کردن پاسخ فیزیولوژیکی راننده، با تکنیک تجزیه رو به‌عنوان روش متداول در گسسته‌سازی مدل‌های کلان‌نگر مرتبه‌دوم جریان ترافیک مقایسه می‌شوند.

**یافته‌ها:** مسئله انتشار صف در حالت جریان یکنواخت با دو ناپیوستگی شامل امواج شوک و متعاقبا امواج انبساطی، با شرایط مرزی تناوبی به‌عنوان مثال عددی انتخاب شده است. پروفیل‌های سرعت و چگالی در زمان‌های مختلف به همراه تغییرات مکانی-زمانی آن‌ها و نرخ تردد جریان ترافیک کلان‌نگر ارایه‌گردیده است.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** نتایج عددی حاصل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی رفتار واقع‌بینانه‌تری را برای دو مدل ذکر شده در خصوص متغیرهای اساسی جریان ترافیک فراهم می‌کند.

کلیدواژه‌ها: مدل‌سازی عددی، جریان ترافیک کلان‌نگر، الگوریتم پخش موج، روش موج شار، حل‌کننده ریمن.

### ۱- مقدمه

علم و فهم نحوه انتشار جریان ترافیک برای پیش‌بینی موثر جریان ترافیک و بهره‌برداری از تسهیلات حمل و نقلی به‌منظور حل چالش تراکم ترافیک بسیار ضروری است (خان و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۲۰). علاوه بر این، مدل‌سازی ریاضی و حل مدل‌های جریان ترافیک به‌عنوان یکی از روش‌های موثر کنترل و مدیریت ترافیک در فرآیند تصمیم‌گیری و انتخاب راهبردها به‌طور روزافزون در حال افزایش است (داوودی<sup>۲</sup>،

<sup>۱</sup> Khan et al.

<sup>۲</sup> Davoodi





۲۰۱۴). رویکردهای متفاوتی طی سالیان گذشته برای مدل‌سازی دینامیک جریان ترافیک اتخاذ شده است که موفق‌ترین آن‌ها مدل‌های پیوسته یا کلان‌نگر<sup>۱</sup>، مدل‌های خردنگر<sup>۲</sup>، و مدل‌های متوسط‌نگر<sup>۳</sup> می‌باشند. مدل‌های جریان ترافیکی کلان‌نگر به جریان ترافیک به عنوان مفهومی تجمعی نگاه می‌کنند، در حالی که در مدل‌های خردنگر هر وسیله نقلیه به طور جداگانه و هم‌چنین در تعامل و ارتباط با سایر وسایل نقلیه در نظر گرفته می‌شود. مدل‌های متوسط‌نگر ترکیبی از دو مدل فوق است که جریان ترافیک در آن توسط توزیع‌های احتمالی و نظریه صف مدل می‌شوند. مدل‌های کلان‌نگر به دلیل پیچیدگی کم و عملکرد رضایت‌بخش آن‌ها، متداول‌ترین رویکرد به حساب می‌آیند (خان و گالیور<sup>۴</sup>، ۲۰۲۰).

در مدل‌های کلان‌نگر، جریان ترافیک به عنوان یک سیال غیرایزوتروپیک<sup>۵</sup> تراکم‌پذیر در نظر گرفته می‌شود. غیرایزوتروپیک در نظر گرفتن ترافیک بدین دلیل است که در جریان ترافیک رانندگان تنها به وسایل نقلیه مقابل خود واکنش نشان می‌دهند و قطع کردن جریان ترافیک از پشت سر (مانند قمرز شدن چراغ) در مشخصه‌های ترافیک عبورکرده تأثیری نمی‌گذارد. در این روش، متغیرهای کلانی مانند چگالی (تعداد وسایل نقلیه موجود در طول مشخصی از راه) و سرعت متوسط وسایل نقلیه و نرخ تردد (تعداد وسایل نقلیه عبوری مشخص در واحد زمان از یک نقطه مشخص از راه) به عنوان توابعی از زمان و مکان مورد مطالعه قرار می‌گیرند (محمدیان<sup>۶</sup>، ۲۰۱۷).

مدل‌های کلان‌نگر از تاریخچه‌ای غنی برخوردارند. نخستین و اساسی‌ترین مطالعه در این زمینه توسط لایتیل و ویتهم<sup>۷</sup> (۱۹۵۵) و ریچاردز<sup>۸</sup> (۱۹۵۶) صورت گرفت. آن‌ها با استفاده از نوشتن قانون بقا برای تعداد خودروها در طول مسیر، نخستین مدل کلان‌نگر را ارائه دادند. فرض اساسی در این مدل این است که سرعت همیشه با چگالی ترافیک در تعادل است. هم‌چنین، آن‌ها رابطه سرعت و چگالی را به صورت خطی و مانند مدل گرینشیلدز<sup>۹</sup> در نظر گرفتند که به معنی حداکثر سرعت در چگالی صفر و نیز سرعت صفر در چگالی حداکثر است. از آنجایی که در این مدل تنها چگالی مجهول مساله است و برای سرعت معادله مستقلی در نظر گرفته نمی‌شود، به آن مدل مرتبه اول گفته می‌شود (استریکومار و همکاران<sup>۱۰</sup>، ۲۰۱۹). مدل‌های مرتبه اول دیگری نیز در طول زمان ارائه شده‌اند. این مدل‌ها به دلیل سادگی و نیز شبیه‌سازی موفق جریان ترافیک، محبوبیت زیادی بین مهندسان ترافیک داشتند. با این وجود، مطالعات بعدی نشان داد که سرعت همواره در تعادل با چگالی نبوده و صرف‌نظر کردن از شتاب‌گیری خودروها باعث نتایج غیرواقعی می‌شود (محمدیان، ۲۰۱۷).

پین مدلی کلان‌نگر را ارائه کرد که در آن یک معادله دینامیک مستقل برای سرعت وسایل نقلیه در نظر گرفته شده بود (پین<sup>۱۱</sup>، ۱۹۷۱). مدل او نخستین مدل مرتبه دوم می‌باشد. ویتهم به طور مستقل مدلی مشابه را توسعه داد که به مدل پین-ویتهم معروف است (ویتهم، ۲۰۱۱). این مدل به دلیل توانایی شبیه‌سازی نسبتاً مناسب جریان ترافیک با استفاده از کمترین متغیرها، امروزه نیز یکی از پرکاربردترین مدل‌های مرتبه دوم به شمار می‌آید. این مدل از دو معادله تشکیل شده است. معادله اول که به معادله پیوستگی معروف است، بر اساس بقای تعداد خودروها در مسیر مورد مطالعه به دست می‌آید. در معادله دوم (معادله حرکت<sup>۱۲</sup>) شتاب‌گیری وسایل نقلیه در نظر گرفته شده که بیانگر تغییرات سرعت کلان‌نگر جریان ترافیک است. در نظر گرفتن هم‌زمان این دو معادله منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌شود. با داشتن وضعیت اولیه ترافیک و حل هم‌زمان این دستگاه معادلات دیفرانسیلی، مقادیر چگالی و سرعت کلان‌نگر جریان ترافیک در هر قسمت از راه و در هر گام زمانی به دست می‌آید (داوودی، ۲۰۱۴).

<sup>1</sup>Macroscopic Models

<sup>2</sup>Microscopic Models

<sup>3</sup>Mesosopic Models

<sup>4</sup>Khan and Gulliver

<sup>5</sup>Anisotropic Fluid

<sup>6</sup>Mohammadian

<sup>7</sup>Lighthill and Whitham

<sup>8</sup>Richards

<sup>9</sup>Greenshields

<sup>10</sup>Sreekumar et al.

<sup>11</sup>Payne

<sup>12</sup>Equation of Motion



مدل بین-ویتهام تحت شرایط خاصی، خاصیت غیرایزوتروپیک بودن جریان ترافیک را حفظ نمی‌کند و نتایج در این حالت‌ها شامل رانندگی رو به عقب هستند (دلپس و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۱۴). این مدل می‌تواند رفتار غیرواقعی (اغلب نوسانی) در ناپیوستگی‌های ترافیک تولید کند که ناشی از توصیف ناکافی تغییرات فضایی (مکانی) در چگالی ترافیک حین انتقالات است. فرض بر این است که تنظیم ترافیک با یک سرعت ثابت اتفاق می‌افتد، که می‌تواند منجر به تجاوز سرعت از مقدار حداکثر یا کمتر از صفر شدن آن شود، که غیرممکن است (خان و همکاران، ۲۰۱۹). تحقیقات بسیاری جهت رفع معایب مدل بین-ویتهام صورت گرفته است. دل کاستیلو و همکاران<sup>۲</sup> (۱۹۹۴) با دخالت دادن پارامترهای زمان، درک و پاسخ راننده برای تغییرات کوچک در چگالی و سرعت، مدل بین-ویتهام را بهبود بخشیدند. ژانگ مشتق توزیع سرعت تعادلی را جایگزین ثابت سرعت کرد و نسخه غیرایزوتروپیک مدل بین-ویتهام را ارائه کرد (ژانگ<sup>۳</sup>، ۱۹۹۸). خان و همکاران با لحاظ کردن پاسخ راننده، حداکثر سرعت و فاصله بین وسایل نقلیه در جمله تابع فشار ترافیکی در معادله حرکت که بیانگر واکنش گروهی از وسایل نقلیه به تغییرات پروفیل چگالی و در بعضی از مدل‌ها، پروفیل سرعت است، مدل را بهبود بخشیدند (خان و همکاران، ۲۰۲۰a). آن‌ها این مدل را در مطالعه‌ای دیگر با در نظر گرفتن سه پارامتر سرعت متوسط ترافیک در انتقال، حداکثر سرعت و فاصله انتقال بهبود دادند (خان و گالیور، ۲۰۲۰).

خان و همکاران در مطالعه‌ای که در این مقاله جهت مقایسه نتایج و بهبود آن مدنظر قرار گرفته است، سطح سرویس و پاسخ فیزیولوژیکی راننده را در معادله حرکت وارد کردند (خان و همکاران، ۲۰۱۹). مقاله بر اساس این مفهوم شکل گرفته است که سطح سرویس بر اساس زمان رسیدن به مقصد تعیین می‌شود. برای سطح سرویس مطلوب، جریان ترافیک باید هموار بوده و با فرآیند شتاب‌گیری و کاهش شتاب اندکی همراه باشد. زمان لازم برای درک و عکس‌العمل راننده، پاسخ فیزیولوژیکی است و چگالی ترافیک با توجه به این عکس‌العمل تکامل می‌یابد. توزیع چگالی با واریانس کم برای رانندگان با زمان عکس‌العمل طولانی و با واریانس زیاد برای رانندگان با زمان عکس‌العمل کوتاه انتظار می‌رود. جریان ترافیکی نمی‌تواند بلافاصله با شرایط ترافیکی پیش رو هماهنگ شود و زمان لازم برای این کار بر اساس پاسخ فیزیولوژیکی راننده می‌باشد. برای بررسی عددی عملکرد مدل بین-ویتهام و مدل پیشنهادی مبتنی بر عکس‌العمل فیزیولوژیکی راننده، در این مقاله یک گلوگاه در یک جاده دایره‌ای در نظر گرفته شده است.

معادلات مربوط به مدل‌های کلان‌نگر جریان ترافیک نوع بین-ویتهام، به فرم دستگاه معادلات مشتق‌های پاره‌ای<sup>۴</sup> نوشته می‌شوند. این معادلات از نوع هذلولوی<sup>۵</sup> و در اغلب موارد غیرخطی هستند و حل تحلیلی ندارند. بنابراین برای حل معادلات این مدل باید از روش‌های عددی استفاده کرد. بدین منظور طول ناحیه ترافیکی و بازه زمانی مورد مطالعه به تعداد مشخصی تقسیم شده و توسط روش‌های عددی، متغیرهای وابسته که در این معادلات سرعت و چگالی هستند، در هر تکرار زمانی محاسبه شده و در مرحله بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با به دست آوردن چگالی و سرعت در هر مرحله، سایر پارامترهای جریان ترافیک از قبیل حجم، سرفاصله‌های زمانی و مکانی نیز توسط روابط موجود به دست آمده و با تفسیر این مقادیر می‌توان تصمیم‌گیری‌های لازم را برای کنترل جریان ترافیک انجام داد (محمدیان، ۲۰۱۷).

روش‌های عددی معمول مورد استفاده در حل معادلات کلان‌نگر حاکم بر جریان ترافیک نوع بین-ویتهام توسط مهندسان ترافیک عمدتاً شامل روش‌های حجم محدود می‌باشند که به منظور تخمین عددی حل دقیق معادلات مشتق‌های پاره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند (خان و همکاران، ۲۰۲۰b). ویژگی اساسی روش‌های حجم محدود این است که قوانین بقا در یک بازه ثابت به نام حجم کنترل اعمال می‌شوند. این روش‌ها بر پایه شکل انتگرالی قوانین فیزیکی هستند و بنابراین می‌توانند مشکلات به وجود آمده در مسایل ناپیوسته مانند قوانین بقای هذلولی را برطرف نمایند. در این روش بردار مجهولات در سلول‌های عددی در هر گام زمانی، فقط به کمک تفاضل شار بین کناره‌های سلول تصحیح می‌شود. روش‌های حجم محدود صریح که به منظور تسخیر شوک<sup>۶</sup> استفاده می‌شوند، از نوع روش‌های گودونو می‌باشند

<sup>1</sup> Delis

<sup>2</sup> Del Castillo et al.

<sup>3</sup> Zhang

<sup>4</sup> Partial Differential Equations

<sup>5</sup> Hyperbolic Systems

<sup>6</sup> Shock Capturing



در مسایل ناپیوسته، نتایج غیرنوسانی می‌دهند. برای رسیدن به جواب در روش گودونو، بایستی مساله ریمن<sup>۱</sup> حل گردد (مودی<sup>۲</sup>، ۲۰۱۷). این مساله به صورت ناپیوستگی در مکان تعریف می‌شود. ایده اصلی حل‌کننده‌های دقیق و تقریبی ریمن، محاسبه سرعت موج‌های شوک و دیگر ناپیوستگی‌ها در مساله ریمن است. روش‌های آغازین گودونو تنها دارای دقت مرتبه یک بودند به عنوان نمونه (برگز و همکاران<sup>۳</sup>، ۲۰۰۸)، اما با گذشت زمان روش‌های با دقت بالا مطرح گردیدند به عنوان مثال (خان و همکاران، ۲۰۲۰؛ دیلیس و همکاران، ۲۰۱۴؛ چن و همکاران<sup>۴</sup>، ۲۰۱۲). از جمله این روش‌ها می‌توان به روش  $MUSCL^5$ ،  $ENO^6$  و  $WENO^7$  اشاره نمود. مشکل این روش‌ها این است که استناد این نوع روش‌ها بر شار<sup>۸</sup> می‌باشد که ممکن است برای دستگاه هذلولی اصلی استفاده نشوند. هم‌چنین از دید محاسباتی، حجم‌تر از الگوریتم پخش موج با دقت بالا می‌باشند (لوک<sup>۹</sup>، ۲۰۰۲). الگوریتم پخش موج برای نخستین بار توسط لوک معرفی شد. تنها تفاوت میان الگوریتم پخش موج لوک و روش اصلی گودونو این است که در روش لوک، موج‌های ظاهر شده در جواب‌های ریمن، دوباره در سلول‌های مجاور میانگین‌گیری می‌شوند درحالی که روش اصلی گودونو از داده‌های شار در سطح مشترک سلول‌ها برای محاسبه گام زمانی بعدی استفاده می‌کند (مودی، ۲۰۱۷).

در این مقاله از یک نسخه از الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده به نام روش موج شار استفاده می‌شود. این روش برای کنترل مؤلفه‌های منبع در عین حفظ مشخصات بقایی بسیار مناسب می‌باشد. این روش بعدها به منظور رفع بعضی محدودیت‌ها، با استفاده از ترکیبی از حل‌کننده‌های ریمن دقیق و تقریبی، گسترش یافت (بیل و همکاران<sup>۱۰</sup>، ۲۰۰۳). تفاوت عمده روش‌های حل معادلات، محاسبه مؤلفه‌های شار و سرعت انتشار امواج شوک و انبساطی<sup>۱۱</sup> برای مسئله ریمن است. به‌طور کلی از دو روش مختلف برای محاسبه سرعت انتشار امواج شکل گرفته در مساله ریمن استفاده می‌شود. در روش نخست محاسبه سرعت انتشار امواج بر مبنای حل‌های تحلیلی صورت می‌پذیرد. این روش در بسیاری از موارد بسیار دقیق است ولی از آنجایی که معادلات مربوط به مدل‌های کلان‌نگر جریان ترافیک حل تحلیلی ندارند، قابل استفاده نیستند. در روش دوم از حل‌های تقریبی ریمن مانند تکنیک تجزیه رو<sup>۱۲</sup>، برای محاسبه سرعت امواج ایستا و انبساطی استفاده می‌شود که در حل معادلات مربوط به مدل‌های کلان‌نگر جریان ترافیک نوع متداول محسوب می‌شود (دیلیس و همکاران، ۲۰۱۴؛ خان و همکاران، ۲۰۱۹؛ خان و گالیور، ۲۰۲۰؛ خان و همکاران، ۲۰۲۰). مزیت اصلی این روش سرعت بسیار بالا و دقت آن است، ولی این روش بر خلاف حل تحلیلی ریمن قادر به تخمین سرعت‌های انتشار امواج نبوده و در اغلب موارد منجر به پاسخ‌های غیرفیزیکی می‌شود (مودی، ۲۰۱۷). از طرف دیگر برای رفع این مشکلات، در سال‌های اخیر توسعه‌های مختلفی از الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده برای مدل‌سازی سیلاب (مهدیزاده و همکاران<sup>۱۳</sup>، ۲۰۱۱؛ مهدیزاده و همکاران، ۲۰۱۲)، معادلات جریان گذار در لوله‌ها (مهدیزاده و همکاران، ۲۰۱۸؛ مودی و مهدیزاده، ۲۰۱۸) و حل معادلات اولر (بیل و همکاران، ۲۰۰۳؛ مودی و مهدیزاده، ۲۰۱۸؛ مهدیزاده، ۲۰۱۸) ارائه گردیده است. الگوریتم پخش موج، از نوعی سرعت انتشار استفاده می‌نماید که ترکیبی از سرعت‌های تقریبی و دقیق ریمن بوده و از لحاظ محاسباتی نسبتاً پیچیده است (مهدیزاده و همکاران، ۲۰۱۸).

براساس اطلاعات نویسندگان تاکنون هیچ توسعه‌ای از معادلات کلان‌نگر حاکم بر جریان ترافیک نوع پین-ویتهم با استفاده از روش موج شار به خصوص در حالت یک بعدی و با دقت مرتبه دوم ارائه نگردیده است. لذا نویسندگان این مقاله پس از اطمینان از عدم استفاده سایرین از الگوریتم پخش موج، روش اصلاح شده خود را (که تاکنون در مقالات گذشته در زمینه مدل‌سازی سیلاب، معادلات جریان گذار در لوله‌ها و حل معادلات اولر آزموده و استفاده کرده‌اند) برای این مدل‌ها تنظیم نموده و مورد استفاده قرار دادند. در این

<sup>1</sup> Riemann Problem

<sup>2</sup> Moodi

<sup>3</sup> Borges et al.

<sup>4</sup> Chen et al.

<sup>5</sup> Monotonic Upstream Scheme for Conservation Law

<sup>6</sup> Essentially Non- Oscillatory

<sup>7</sup> Weighted ENO

<sup>8</sup> Flux

<sup>9</sup> LeVeque

<sup>10</sup> Bale et al.

<sup>11</sup> Rarefaction Wave

<sup>12</sup> Roe Decomposition Technique (RDT)

<sup>13</sup> Mahdizadeh et al.



مقاله به منظور صحت‌سنجی حل عددی روش پیشنهادی، از مدل متداول پین-ویتهام و مدل متاخر پین-ویتهام مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده استفاده شده است.

ساختار مقاله بدین صورت می‌باشد: در ابتدا به معرفی معادلات حاکم مشتق‌های پاره‌ای جریان ترافیک یک‌بعدی با وجود مولفه منبع پرداخته می‌شود. سپس مدل متداول پین-ویتهام و مدل متاخر پین-ویتهام مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده بیان می‌گردند. در ادامه الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده و روش شار تعریف شده و نهایتاً نتایج عددی بیان می‌شوند.

## ۲- فرمول‌بندی دستگاه معادلات مشتق‌های پاره‌ای جریان ترافیک

مدل کلان‌نگر مرتبه دوم جریان ترافیک را می‌توان به صورت سیستم هذلولوی ذیل ارایه کرد (دلپس و همکاران، ۲۰۱۴):

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x f(\mathbf{U}) &= s(\mathbf{U}), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (1)$$

که در  $U = [\rho, \rho u]^T$  آن بردار مجهولات است که شامل چگالی محلی وسایل نقلیه  $(\rho(x, t))$  برحسب وسیله نقلیه در متر و سرعت کلان‌نگر وسایل نقلیه  $(u(x, t))$  برحسب متر بر ثانیه می‌باشد.  $f(U)$  بردار شار  $s(U)$  و مولفه منبع است که معرف جمله‌های تطابق سرعت یا فشار ترافیکی می‌باشد.  $x$  و  $t$  نیز به ترتیب فاصله مکانی و زمانی هستند. سیستم ارایه شده در رابطه (۱) در صورتی که مولفه منبع صفر نباشد، غیرهمگن<sup>۱</sup> نامیده می‌شود.

شکل شبه خطی رابطه (۱) به صورت ذیل است:

$$\partial_t \mathbf{U} + J(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = s(\mathbf{U}), \quad (2)$$

که در آن  $J(\mathbf{U}) = \partial f / \partial \mathbf{U}$  ماتریس ژاکوبین دستگاه معادلات می‌باشد.

سرعت‌های مشخصه<sup>۲</sup> برابر با مقادیر ویژه<sup>۳</sup> سیستم  $(\lambda)$  می‌باشند که با حل دترمینان ذیل به دست می‌آیند:

$$\det [J(\mathbf{U}) - \lambda I] = 0, \quad (3)$$

در صورت وجود مقادیر ویژه واقعی سیستم معادلات هذلولوی به‌شمار می‌آید (محمدیان و کسلز<sup>۴</sup>، ۲۰۱۸).

### ۲-۱- مدل پین-ویتهام

مدل یک‌بعدی پین-ویتهام که شامل معادله پیوستگی و معادله حرکت است را می‌توان با در نظر گرفتن راه همگن بدون دسترسی جانبی و صرف نظر از تعداد خطوط راه و نیز یک کلاس خودرو به صورت ذیل ارایه کرد (پین، ۱۹۷۱؛ ویتهام، ۲۰۱۱):

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0 \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho (u^2 + C_0^2)) &= \rho \left( \frac{V_e(\rho) - u}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

که  $\tau$  زمان آسایش، زمانی است که طی آن سرعت جریان ترافیک به سرعت تعادلی می‌رسد.  $V_e(\rho)$  سرعت تعادلی وسایل نقلیه براساس چگالی و  $C_0$  ثابت سرعت است که معرف عکس‌العمل کلان‌نگر راننده به چگالی ترافیک است.

برای سرعت تعادلی روابط زیادی تاکنون ارایه شده است که در این مقاله از رابطه معروف گرین‌شیلدز<sup>۵</sup> (۱۹۳۵) که به صورت ذیل است، استفاده می‌شود:

$$V_e(\rho) = u_m \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right), \quad (5)$$

<sup>1</sup> Non-Homogeneous

<sup>2</sup> Characteristic speeds

<sup>3</sup> Eigenvalues

<sup>4</sup> Mohammadian and Kessels

<sup>5</sup> Greenshields



که  $u_m$  و  $\rho_m$  به ترتیب چگالی حداکثر و متوسط سرعت مکانی حداکثر هستند. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ژاکوبین مربوطه به ترتیب عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = u \pm C_0, \quad (6)$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - C_0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + C_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

با توجه به اینکه دو مقدار ویژه واقعی و متمایز وجود دارد، سیستم معادلات مدل یک‌بعدی پین-ویتهم هذلولوی است.

### ۲-۲- مدل اصلاح‌شده پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده

در مدل پین-ویتهم تغییر مکانی در چگالی در ضریب ثابت  $C_0^2$  ضرب شده است. این ضریب تنها برای تغییرات کوچک فراروی چگالی ترافیک کارکرد دارد و در تغییرات بزرگ، منجر به نتایج غیرواقعی می‌شود (خان و همکاران، ۲۰۲۰b). بنابراین خان و همکاران با تغییر ثابت  $C_0^2$  به صورت تابعی از عکس‌العمل فیزیولوژیکی راننده و جایگزینی آن در جمله فشار ترافیکی به فرم ذیل باعث بهبود مدل گردیدند (خان و همکاران، ۲۰۱۹):

$$C_0^2 = (h+1) \cdot \left( \frac{\tau_r}{\tau_m^{h+2}} \right), \quad (8)$$

که در آن  $h$  سطح سرویس ترافیک است که خود تابعی از شرایط آب و هوایی، کیفیت سطح روسازی، قابلیت دید، تعداد تقاطعات و نوع آن‌ها، وضعیت روشنایی مسیر، عرض باندهای عبور و هندسه راه می‌باشد.  $\tau_m$  زمان مورد نیاز راننده برای هماهنگی با شرایط پیش رو در جریان ترافیک آزاد با سرعت حداکثر که همان عکس‌العمل فیزیولوژیکی راننده است. هم‌چنین  $\tau_r$  زمان واقعی مورد نیاز از مبدا سفر تا مقصد آن است به طوری که وسایل نقلیه هیچ توقفی نداشته باشند که برای راننده معمولی برابر با  $\tau_m$  در نظر گرفته می‌شود.

مقادیر و بردارهای ویژه این مدل مشابه مدل پین-ویتهم است. گسسته‌سازی این مدل برای ارزیابی عملکرد آن توسط تکنیک تجزیه رو صورت گرفته است (خان و همکاران، ۲۰۲۰a).

### ۲-۳- الگوریتم پخش موج اصلاح شده برای معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر

برای حل سیستم معادلات رابطه (۴) از یک الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده استفاده می‌شود که اولین بار توسط لوک (۲۰۰۲) ارائه شد:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta U_{i-1/2} + A^- \Delta U_{i+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2}^n - \bar{F}_{i-1/2}^n). \quad (9)$$

در رابطه فوق،  $U_i^n$  تقریب متوسط بردار مجهولات در زمان  $t = n\Delta t$  بوده و  $\Delta x$ ،  $\Delta t$  و  $n$  به ترتیب گام زمانی، گام مکانی و سطح زمانی هستند.  $i$  مربوط به ابتدای سلول،  $i-1/2$  به معنای وسط سلول قبل و  $i+1/2$  وسط سلول بعد می‌باشند.  $\bar{F}_{i\pm 1/2}^n$  شارهای اصلاحی مرتبه دوم موردنیاز برای رسیدن به حل با مرتبه بالا می‌باشند که اگر صفر باشند، روش گودونو مرتبه اول بدست می‌آید و برای محاسبه آن‌ها بایستی محدودکننده با مرتبه بالای مناسب انتخاب شود. هم‌چنین  $A^+ \Delta U_{i-1/2}$  و  $A^- \Delta U_{i+1/2}$  به ترتیب نوسانات راست و چپ‌رونده می‌باشند که از حل دو رابطه ذیل برای هر سطح بین سلولی بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A^- \Delta U_{i-1/2} &= \sum_{k:s_j < 0} \xi_{k,i-1/2}, \\ A^+ \Delta U_{i-1/2} &= \sum_{k:s_j > 0} \xi_{k,i-1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

که  $\xi_{k,i-1/2}$  عبارت است از  $k$  امین موج شار منتشرشده از سطح سلولی  $i-1/2$  که با ضرب ضریب ویژه  $\theta_{i-1/2}$  در بردار ویژه یعنی  $\theta_{i-1/2}^T r_{i-1/2}$  قابل محاسبه است.



برای محاسبه نوسانات راست و چپ رونده بایستی مساله ریمن حل شود. این مساله در جواب سیستم‌های هذلولی که ممکن است در پاره‌ای از موارد یک ناپیوستگی پرشی ساده در طول خط مشخصه گسترش یابد، تعریف می‌شوند. مقدار اولیه برای رابطه (۱۱) برای یک سیستم یک‌بعدی، به‌عنوان مساله ریمن شناخته می‌شود (مودی و مهدیزاده، ۲۰۱۸):

$$U(x,0) = \begin{cases} U_l & x < 0 \\ U_r & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

برای حل آن می‌توان از روش موج شار ارایه شده توسط بیل و همکاران (۲۰۰۳) و با انتخاب سرعت‌های ریمن مهدیزاده و همکاران (۲۰۱۱) استفاده کرد.

#### ۲-۴- روش موج شار برای معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر

روش موج شار اولین بار توسط بیل و همکاران (۲۰۰۳) برای حل مساله دینامیک گازها ارایه شد. این روش برای معادلات آب‌های کم‌عمق یک‌بعدی و دوبعدی توسط مهدیزاده و همکاران (۲۰۱۱) و مهدیزاده و همکاران (۲۰۱۲) و برای معادلات اولر توسط مهدیزاده (۲۰۱۸) اصلاح گردید که در این مقاله از این نسخه متأخر که برای معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر توسعه یافته است، استفاده می‌شود. فرمول‌بندی کلی موج شار به صورت ذیل است:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) - S_{i-1/2} \Delta x = \sum_{k=1}^{M_w} \xi_{k,i-1/2} \quad (12)$$

که  $M_w$  تعداد موج‌ها می‌باشد. برای توسعه روش موج شار معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر پین-ویتهم تنها کافی است که اختلاف شار بین دو سلول مجاور منهای مولفه منبع با مجموع شارهای مربوطه برابر قرار داده شوند. به عبارت دیگر:

$$\begin{bmatrix} \rho_i \tilde{u}_i \\ \rho_i (\tilde{u}_i^2 + C_0^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_{i-1} \tilde{u}_{i-1} \\ \rho_{i-1} (\tilde{u}_{i-1}^2 + C_0^2) \end{bmatrix} - \Delta x \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}_{i-1/2} \left( \frac{V_c(\tilde{\rho}_{i-1/2}) - \tilde{u}_{i-1/2}}{\tau} \right) \end{bmatrix} = \theta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u}_i - C_0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u}_i + C_0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

که در آن  $\tilde{\rho}_{i-1/2}$  و  $\tilde{u}_{i-1/2}$  چگالی و سرعت سطح سلولی  $i-1/2$  می‌باشند که از ترکیب سرعت‌های دقیق و تقریبی موج ریمن که در پژوهش مهدیزاده و همکاران (۲۰۱۱) به‌طور کامل تشریح شده است، قابل محاسبه‌اند. حل‌کننده تقریبی ریمن مورد استفاده در این مقاله، حل‌کننده رو<sup>۱</sup> می‌باشد (رو<sup>۲</sup>، ۱۹۸۱). برای مدل پین-ویتهم یک‌بعدی، چگالی و سرعت تقریبی سطح سلولی  $i-1/2$  از رابطه ذیل به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\rho}_{i-1/2} = \sqrt{\rho_{i-1} \rho_i}, \quad \tilde{u}_{i-1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{i-1} \tilde{u}_{i-1}} + \sqrt{\rho_i \tilde{u}_i}}{\sqrt{\rho_{i-1}} + \sqrt{\rho_i}}. \quad (14)$$

رابطه (۱۳) را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u}_i - C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u}_i + C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

که در آن  $\delta_1$  و  $\delta_2$  عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i \tilde{u}_i - \rho_{i-1} \tilde{u}_{i-1} \\ \rho_i (\tilde{u}_i^2 + C_0^2) - \rho_{i-1} (\tilde{u}_{i-1}^2 + C_0^2) - \Delta x \tilde{\rho}_{i-1/2} \left( \frac{V_c(\tilde{\rho}_{i-1/2}) - \tilde{u}_{i-1/2}}{\tau} \right) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

با حل سیستم خطی رابطه (۱۵)، ضرایب  $\theta_1$  و  $\theta_2$  بدست می‌آیند که به نوبه خود در محاسبه موج شار  $\xi_{k,i-1/2}$  که برای به‌دست آوردن نوسانات راست و چپ رونده الگوریتم پخش موج نوع گودونو مرتبه اول مورد نیاز است، به کار می‌روند.

<sup>1</sup> Roe solver

<sup>2</sup> Roe



شرایط هندسی، به معنای شرایط مسیری است که جریان ترافیک در آن‌ها بررسی می‌شود. در این مقاله، مطالعات بر روی حالت راه دایره‌ای انجام می‌شود. راه دایره‌ای یکی از بهترین هندسه‌ها برای ارزیابی عددی مدل‌های ترافیکی است. این راه به دلیل ایجاد شرایط مرزی تناوبی<sup>۱</sup>، وضعیت ترافیک را برای شرایط اولیه آن به صورت طولانی مدت و بدون نیاز به تنظیم دبی ورودی و خروجی شبیه‌سازی می‌کند. هم‌چنین بر روی راه دایره‌ای، چگونگی توزیع و پخش یک وضعیت ترافیکی را به خوبی می‌توان رصد کرد و بعضی حالت‌های خاص مانند وضعیت ایست و حرکت را می‌توان به خوبی در آن ایجاد نمود. هم‌چنین آن‌جا که در راه دایره‌ای، امواج ترافیکی پایین‌دست به سمت بالادست منتقل می‌شوند، این نوع از راه هندسه مناسبی را برای تحلیل برخورد امواج ترافیکی فراهم می‌کند (محمدیان، ۲۰۱۷).

در این مقاله دسترسی جانبی راه محدود شده است و لذا حجم ترافیک تبدالی از طریق رمپ‌ها به این هندسه وجود ندارد. مقادیر شرایط مرزی برای سلول‌های نخست و انتهایی در راه دایره‌ای به صورت روابط ذیل محاسبه می‌شود:

$$U_{1+1/2}^R = U_2 U_{1+1/2}^L = U_1, \quad U_{N+1/2}^R = U_1 U_{N+1/2}^L = U_N. \quad (17)$$

### ۶-۲- شرایط پایداری

برای الگوریتم پخش موج یک‌بعدی، عدد کورانت<sup>۲</sup> به منظور بررسی پایداری و به صورت ذیل تعریف می‌گردد. به عنوان یک شرط لازم، این عدد باید کوچکتر مساوی یک باشد (مودی و مهدیزاده، ۲۰۱۸):

$$Cr = \frac{\max(s_{k,i-1/2}) \cdot dt}{dx}, \quad (18)$$

که برای مدل پین-ویتهم عبارت است از (خان و گالیور، ۲۰۲۰):

$$s_{k,i-1/2} = u_m + C_0, \quad (19)$$

و برای مدل اصلاح شده پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده به صورت زیر می‌باشد (خان و همکاران، ۲۰۱۹):

$$s_{k,i-1/2} = u_m + \sqrt{(h+1) \cdot \left(\frac{\tau_r}{\tau_m^{n+2}}\right)}. \quad (20)$$

### ۳- نتایج عددی

در این بخش به ارزیابی کارایی روش شار اصلاح شده در حل عددی معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر برای دو مدل پین-ویتهم و مدل اصلاح شده مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده با استفاده از متغیرهایی که در جدول ۱ ارایه شده است، پرداخته می‌شود. شرایط مرزی تناوبی برای یک مسیر دایره‌ای به طول ۴۰۰ متر که به ۲۶ سلول محاسباتی حجم محدود با گام مکانی ۱۵ متر تقسیم شده‌اند، با مجموع زمان شبیه‌سازی ۳۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. برای برآوردن شرط عدد کورانت، گام زمانی برای هر دو مدل ۰/۱ ثانیه لحاظ شده که در نتیجه تعداد بازه‌های زمانی ۳۰۰ می‌باشد. توزیع سرعت تعادلی، از نوع گرین شیلدز است (رابطه (۵)) که در آن سرعت حداکثر و چگالی نرمال شده به ترتیب ۲۵ متر بر ثانیه و یک در نظر گرفته شده‌اند. پاسخ فیزیولوژیکی راننده  $\tau_r = 0.5\tau$  که در آن زمان آسایش  $\tau = 0.5s$  لحاظ شده که در مسافت‌های کوتاه مناسب است. وضعیت اولیه چگالی جریان ترافیک مطابق ذیل در نظر گرفته شده است:

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0.01 & \text{for } x \leq 150, \\ 0.3 & \text{for } 150 < x \leq 250, \\ 0.1 & \text{for } x > 250. \end{cases} \quad (21)$$

<sup>1</sup> Periodic boundary conditions

<sup>2</sup> Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition





از رابطه (۲۱) استنتاج می‌شود که در ابتدا و انتهای مسیر، وضعیت جریان آزاد حاکم است. در مقابل در وسط، حالت ازدحام وجود دارد. دو ناپیوستگی در پروفیل اولیه چگالی دیده می‌شود و در نتیجه دو مساله ریمن به صورت هم‌زمان در مدل وجود دارد. ناپیوستگی نخست در موقعیت ۱۵۰ متری قرار دارد. در این نقطه، در بالادست جریان آزاد برقرار است و در پایین دست آن، حالت ازدحام وجود دارد. این حالت موجب انتشار امواج شوک به سمت بالادست می‌شود. هم‌چنین، در ۲۵۰ متری ناپیوستگی دیگری موجود است. در بالادست این نقطه، حالت ازدحام وجود دارد و در مقابل، در پایین دست آن، وضعیت جریان آزاد حاکم است. در نتیجه، انتظار می‌رود که با گذشت زمان، امواج انبساطی به سمت بالادست و پایین دست انتشار یابند. در ادامه، چگونگی این انتشار را بر اساس مدل پین-ویتهام و مدل اصلاح‌شده مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده بررسی کرده و پاسخ‌های به دست آمده از روش عددی پیشنهادی ارزیابی می‌شود.

جدول ۱ - متغیرهای شبیه‌سازی برای هر دو مدل.  
Table 1- Simulation variables for both models.

متغیر	توصیف متغیر	مقدار متغیر
$V_c(\rho)$	سرعت تعادلی	توزیع گرین شیلدر
$u_m$	متوسط سرعت مکانی حداکثر	25 m/s
$\tau$	زمان آسایش	0.5 s
$C_0$	ثابت سرعت	25 m/s
$L$	طول مسیر دایره‌ای	400 m
$dx$	اندازه گام مکانی	15 m
$dt$	اندازه گام زمانی	0.1 s
$\tau_f$	پاسخ فیزیولوژیکی راننده	0.5 $\tau$
$h$	سطح سرویس ترافیک	1
$\rho_m$	چگالی حداکثر نرمال شده	1
$T_f$	مجموع زمان شبیه‌سازی	30 s
$N$	تعداد گام‌های زمانی	300

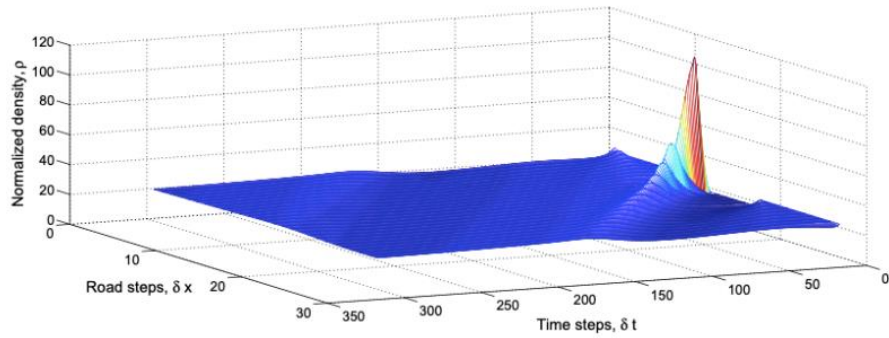
قابل به ذکر است که در الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده، از محدودکننده  $MC$  استفاده شده است. شکل ۱ رفتار سرعت ترافیک را برای مدل پین-ویتهام روی مسیر دایره‌ای نشان می‌دهد که برای گسسته‌سازی این مدل از تکنیک تجزیه رو استفاده شده است (خان و همکاران، ۲۰۱۹). در حالی که در شکل ۲ رفتار این متغیر براساس الگوریتم پیشنهادی این مقاله ارایه شده است.

همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، مدل پین-ویتهام پاسخ واقعی به تغییرات صورت گرفته در چگالی نشان نمی‌دهد. به طور مشخص، رفتار نوسانی با سرعت‌هایی بیشتر از ۱۰۴ متر بر ثانیه مشاهده شده که غیرممکن است. در حالی که الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده (شکل ۲) باعث شده است که این رفتار نوسانی<sup>۲</sup> کنترل شده و به سرعت حداکثر ۳۸ متر بر ثانیه محدود شود که البته هنوز هم از  $u_m=25m/s$  بیشتر است. در مقایسه دو شکل به راحتی قابل ملاحظه است که الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده در مقایسه با تکنیک تجزیه رو، در کنترل خطای پخش عددی<sup>۳</sup> بسیار موفق‌تر عمل کرده است.

<sup>1</sup> Monotonized Centered

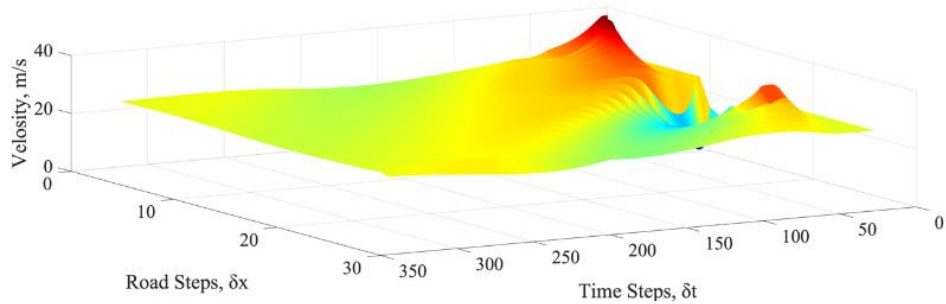
<sup>2</sup> Oscillatory Behavior

<sup>3</sup> Numerical Diffusion



شکل ۱- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل بین-ویتهم برای مسیر دایره‌ای براساس تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹).

Figure 1- Traffic flow velocity behaviour of Payne-Withtham model for a circular road based on Roe Decomposition Technique (RDT) (Khan et al., 2019).



شکل ۲- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل بین-ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده برای مسیر دایره‌ای به طول ۴۰۰ متر.

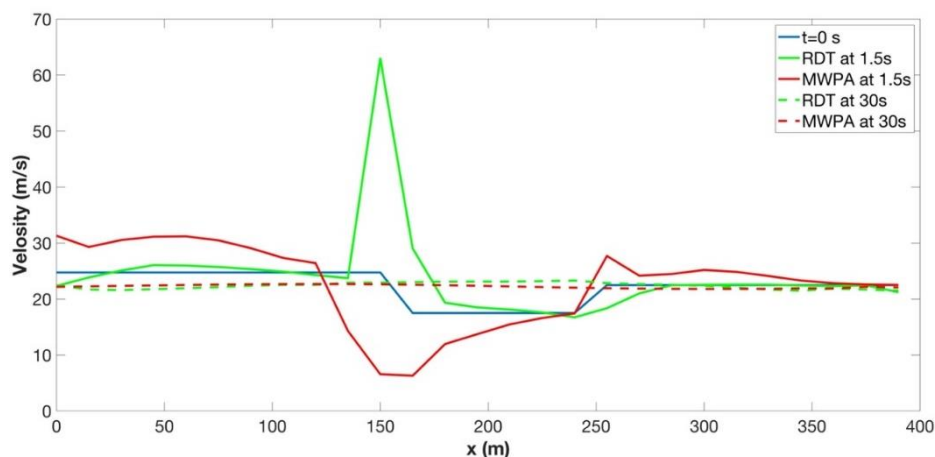
Figure 2- Traffic flow velocity behaviour of Payne-Withtham model based on modified wave propagation algorithm (MWPA) for a 400m length circular road.

هر دو روش دارای خاصیت حفظ مقدار مثبت<sup>۱</sup> بوده و در نتیجه پاسخ منفی را برای متغیر سرعت محاسبه نکرده‌اند. شرط سازگاری<sup>۲</sup> ایجاب می‌کند که مقدار کمیت‌ها از مقدار حداکثر آن‌ها بیشتر نشود، که نتایج مبین آن است که مدل بین-ویتهم قادر به برآورده کردن این شرط نمی‌باشد.

در شکل ۳ مقایسه پروفیل‌های سرعت برای مدل بین-ویتهم بر اساس دو روش تکنیک تجزیه رو و الگوریتم پیشنهادی برحسب گام‌های مکانی در زمان‌های صفر، ۱/۵ و ۳۰ ثانیه ارایه شده است. همانطور که در شکل ۳ قابل مشاهده است، سرعت در مدل بین-ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی در ۱/۵ ثانیه از ۳۰ متر بر ثانیه (بالاتر از سرعت حداکثر مجاز) در نقطه شروع، آغاز شده و در ۱۲۰ متر به سرعت ۲۱ متر بر ثانیه می‌رسد. بعد از آن در یک بازه مکانی کوتاه در ۱۵۰ متر به ۷ متر بر ثانیه کاهش پیدا می‌کند و دوباره شروع به افزایش کرده و در ۲۵۵ متر به ۲۷ متر بر ثانیه می‌رسد. در این روش حداکثر تخطی از سرعت حداکثر مجاز ۵ متر بر ثانیه است که می‌تواند به علت معایب مدل بین-ویتهم در پیش بینی پارامتر سرعت باشد، در حالی که بر اساس روش تکنیک تجزیه رو در ۱/۵ ثانیه سرعت از ۲۴/۹ متر بر ثانیه در ۱۴۰ متری به ۶۶ متر بر ثانیه در ۱۵۰ متری تغییر پیدا کرده و سپس در ۱۸۰ متری به ۱۹ متر بر ثانیه می‌رسد. بنابراین در فاصله مکانی ۱۴۰ تا ۱۸۰ متری سرعت مقادیر بسیار بالاتری از سرعت حداکثر را تجربه می‌کند که نشان‌دهنده عملکرد نامناسب روش تکنیک تجزیه رو در گسسته‌سازی مدل بین-ویتهم علاوه بر معایب خود مدل است. در ۳۰ ثانیه منحنی سرعت در هر دو روش هموار بوده، نوسانات عددی مشاهده نمی‌شود و سرعت بین حدود حداقل و حداکثر قرار دارد.

<sup>1</sup> Positivity Conserving

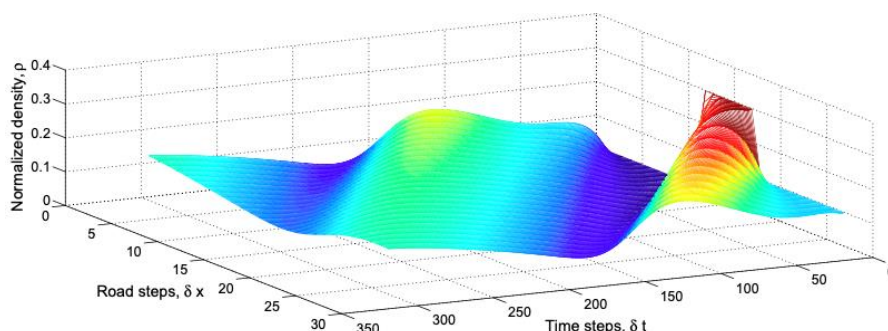
<sup>2</sup> Plausibility Conditions



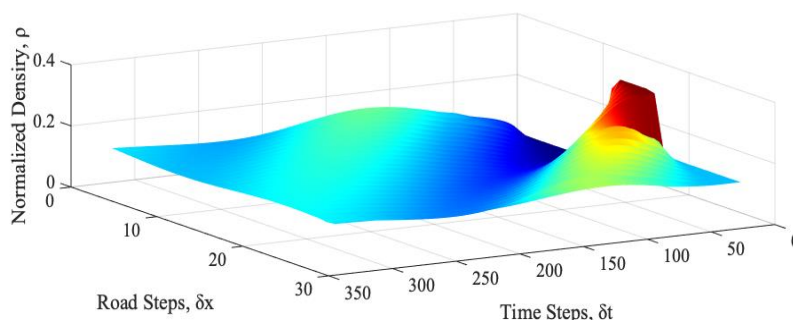
شکل ۳- مقایسه پروفیل‌های سرعت برای مدل پین-ویتهم بر اساس تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹) و الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده.

Figure 3- Comparison of velocity profiles for Payne-Withtham model based on RDT (Khan et al., 2019) and MWPA.

در شکل‌های ۴ و ۵ رفتار چگالی ترافیک مدل پین-ویتهم برای دو رویکرد مشاهده می‌شود و در شکل ۶ رفتار مقیسه ای پروفیل‌های چگالی برای این مدل بر اساس دو روش تکنیک تجزیه رو و الگوریتم پیشنهادی برحسب گام‌های مکانی در زمان‌های صفر، ۱/۵ و ۳۰ ثانیه ارایه شده است. در هر دو روش منحنی چگالی با گذشت زمان هموارتر شده است. طبق خروجی الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده در ۱/۵ ثانیه چگالی نرمال شده از ۰/۰۱ در ۱۲۰ متر شروع به افزایش کرده و در ۲۴۰ متری به حداکثر خود یعنی ۰/۲۹ رسیده و در ادامه روند کاهش خود را تا انتها برای رسیدن به چگالی ۰/۱ طی کرده است. این روند برای روش تکنیک تجزیه رو تقریباً مشابه است و تغییر ناگهانی مربوطه از ۰/۰۱ در ۱۵۰ متری تا حداکثر ۰/۳ در ۲۴۰ متری است. در هر دو روش در ۳۰ ثانیه منحنی سرعت به طور مناسبی هموار شده است.

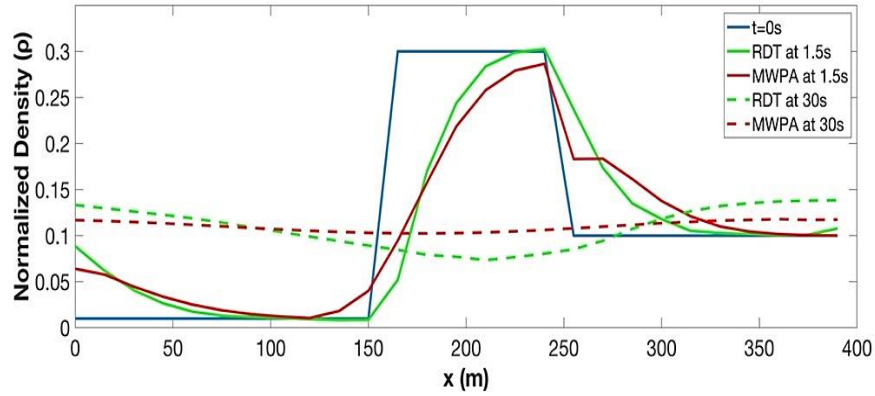


شکل ۴- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم برای مسیر دایره‌ای بر اساس تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹).  
Figure 4- Traffic flow density behaviour of Payne-Withtham model for a circular road based on RDT (Khan et al., 2019).



شکل ۵- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده برای مسیر دایره‌ای به طول ۴۰۰ متر.

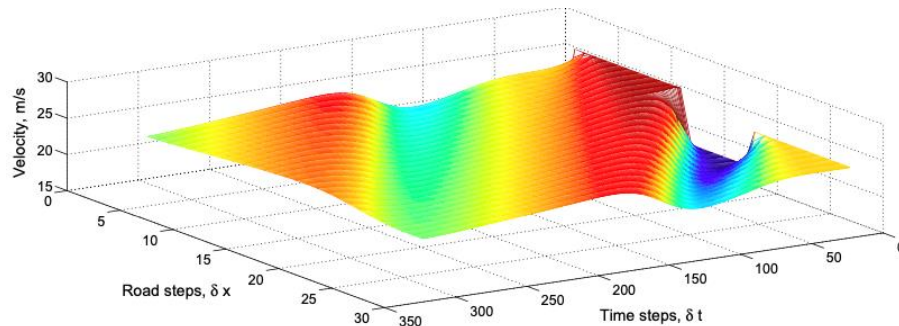
Figure 5- Traffic flow density behaviour of Payne-Withtham model based on the proposed wave propagation algorithm for a 400m length circular road.



شکل ۶- مقایسه پروفیل‌های چگالی برای مدل پین-ویتهم بر اساس تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹) و الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده.

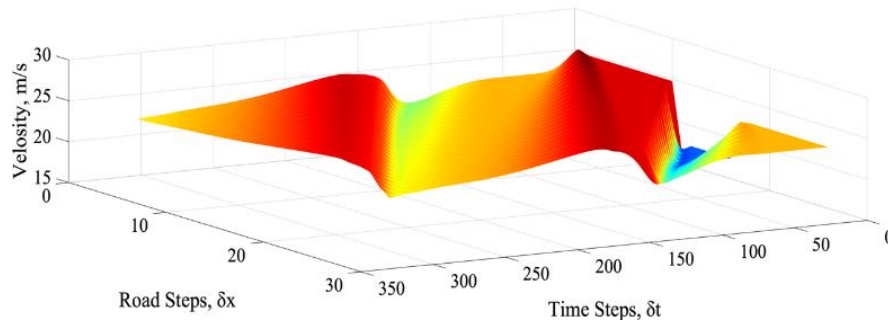
Figure 6- Comparison of normalized density profiles for Payne-Withham model based on RDT (Khan et al., 2019) and MWPA.

رفتار مکانی-زمانی سرعت جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده با دو رویکرد در شکل‌های ۷ و ۸ و پروفیل‌های مقایسه‌ای سرعت مربوطه در زمان‌های صفر، ۱/۵ و ۳۰ ثانیه براساس روش تکنیک تجزیه رو و الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده در شکل ۹ ارایه شده است. قابل مشاهده است که در هر دو روش تغییرات اعمال‌شده در فاصله بین ۱۵۰ متری تا ۲۵۰ متری در سرعت اولیه به مرور زمان هموارتر شده است. به‌طور خاص در الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده، ناپیوستگی در سرعت در ۱/۵ ثانیه از ۲۴/۹ متر بر ثانیه در ۱۸۰ متری به ۱۷ متر بر ثانیه در ۲۳۰ متری رسیده است در حالی که طبق روش تکنیک تجزیه رو در همین ثانیه ناپیوستگی در سرعت از ۲۴/۹ متر بر ثانیه در ۱۵۰ متری به ۱۷/۵ متر بر ثانیه در ۲۲۵ متری رسیده است. میزان تغییرات در ۳۰ ثانیه برای هر دو روش به کمتر از ۳ متر بر ثانیه کاهش پیدا کرده است.



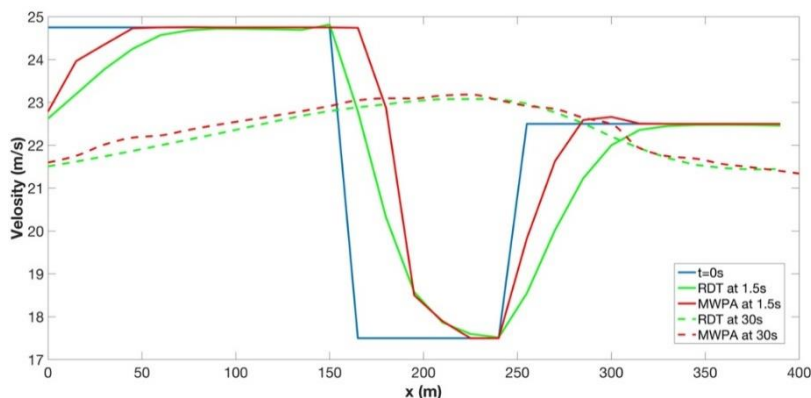
شکل ۷- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده براساس تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹).

Figure 7- Traffic flow velocity behaviour of Payne-Withham model based on driver physiological response using RDT (Khan et al., 2019).



شکل ۸- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده.

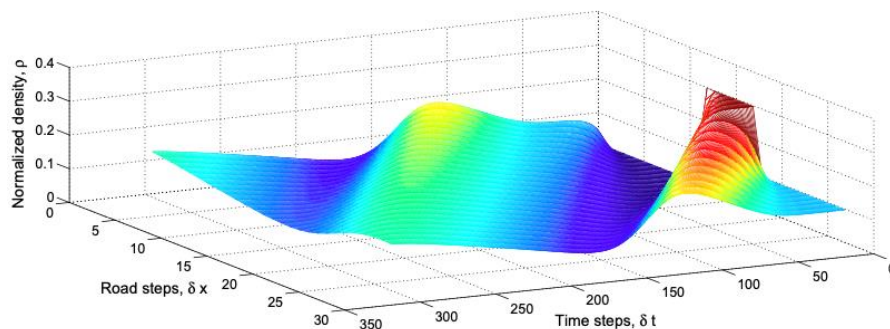
Figure 8- Traffic flow velocity behaviour of Payne-Withham model based on driver physiological response using the proposed wave propagation algorithm.



شکل ۹- مقایسه پروفیل‌های سرعت برای مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده برای تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹) و الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده.

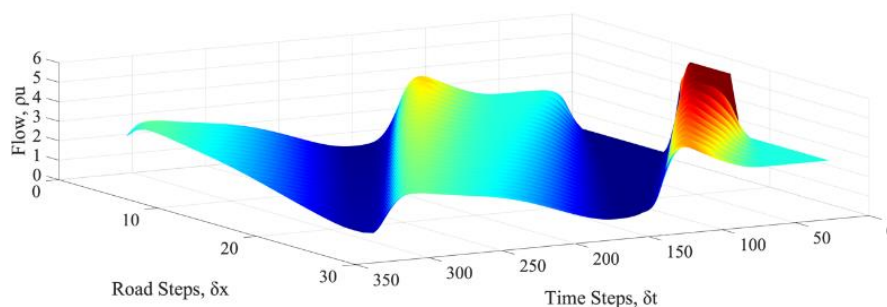
Figure 9- Comparison of velocity profiles for Payne-Withham model based on driver physiological response for RDT (Khan et al., 2019) and MWPA.

رفتار مکانی- زمانی و پروفیل‌های مقایسه‌ای چگالی مربوطه در زمان‌های صفر،  $1/5$  و  $30$  ثانیه براساس روش تکنیک تجزیه رو و الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده در مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده در شکل‌های  $10-12$  ارائه شده‌اند. مجدداً قابل مشاهده است که در هر دو روش منحنی چگالی با گذشت زمان هموارتر شده است. طبق الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده در  $1/5$  ثانیه چگالی نرمال‌شده، حداکثر نوسان خود را از  $0/01$  در  $165$  متری تا  $0/3$  در  $225$  متری تجربه می‌کند و بعد در  $300$  متر به  $0/1$  می‌رسد و بعد ثابت می‌ماند. همین روند با اختلاف اندکی در روش تکنیک تجزیه رو تکرار می‌شود. در  $30$  ثانیه منحنی چگالی در هر دو روش به طور مناسبی هموار شده است.



شکل ۱۰- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده براساس تکنیک تجزیه رو (خان و همکاران، ۲۰۱۹).

Figure 10- Traffic flow density behaviour of Payne-Withham model based on driver physiological response using RDT (Khan et al., 2019).



شکل ۱۳- تغییرات نرخ تردد جریان ترافیک در مدل پین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده.

Figure 13- Traffic flow rate variations of Payne-Withham model based on driver physiological response using the proposed wave propagation algorithm.

در شکل ۱۳ نیز تغییرات مکانی-زمانی نرخ تردد جریان ترافیک در مدل بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده ارائه شده است که روند تغییرات آن مشابه روند تغییرات مکانی-زمانی پارامتر چگالی می باشد.

به منظور بررسی نزدیکی نتایج دو روش الگوریتم پخش موج اصلاح شده با تکنیک تجزیه رو، نرم خطای اقلیدسی<sup>۱</sup> برای دو مدل بین-ویتهم و مدل بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده در جدول ۲ ارائه شده است. برای هر دو متغیر چگالی و سرعت و در هر دو زمان ۱/۵ و ۳۰ ثانیه، در مدل بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده خطای نسبی کمتری مشاهده می شود که نشان دهنده برتری این مدل بر مدل متداول است. هرچه زمان شبیه سازی بیشتر می شود، در هر دو متغیر و برای هر دو مدل، میزان خطا کمتر شده است که مبین این مطلب است که نوسانات منحنی چگالی و سرعت با گذشت زمان کمتر شده اند و لذا هر دو مدل پایدارند.

جدول ۲- نتایج نرم خطای اقلیدسی محاسبه شده الگوریتم پخش موج اصلاح شده با تکنیک تجزیه رو برای دو مدل.

Table 2- Comparison of euclidian error norm between RDT (Khan et al, 2019) and MWPA for two models.

متغیر	زمان شبیه سازی	مدل بین-ویتهم	مدل بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده
چگالی	1.5	3.5189e-04	5.01e-04
	30	3.2720e-04	8.9834e-05
سرعت	1.5	0.2332	0.0154
	30	0.0116	0.0029

در نتیجه گیری کلی می توان ذکر کرد که مدل بین-ویتهم پاسخ واقعی به تغییرات صورت گرفته در چگالی نشان نمی دهد. علیرغم دارا بودن خاصیت حفظ مقدار مثبت، شرط سازگاری که ایجاب می کند مقدار کمیت ها از مقدار حداکثر آن ها بیشتر نشود، در این مدل برای پارامتر سرعت برآورده نشده است. هم چنین قابل به ذکر است که الگوریتم پخش موج اصلاح شده باعث شده است که رفتار نوسانی به مراتب بیشتر کنترل شود، هر چند که شرط سازگاری را به طور کامل برآورده نکرده است.

در مدل بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده، شرط سازگاری و خاصیت حفظ مقدار مثبت برای هر دو رویکرد برآورده شده است.

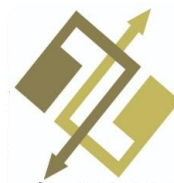
در مقایسه دو رویکرد به راحتی قابل ملاحظه است که الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده در مقایسه با تکنیک تجزیه رو در هر دو مدل بین-ویتهم و بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده، در کنترل خطای پخش عددی بسیار موفق تر عمل کرده است، این در حالی است که هزینه محاسباتی هر دو روش با توجه به عدم تغییر تعداد تقسیمات مکانی و زمانی یکسان است.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله یک الگوریتم پخش موج اصلاح شده با استفاده از روش موج شار برای حل عددی معادلات جریان ترافیک دو مدل کلان نگر بین-ویتهم و بین-ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده ارائه شده است. به منظور بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی، برای یک مسیر دایره ای با شرایط مرزی تناوبی، مساله انتشار صف در حالت جریان یکنواخت با دو ناپیوستگی انتخاب شد. تغییرات مکانی-زمانی، سرعت، چگالی و نرخ تردد جریان ترافیک کلان نگر و پروفیل های سرعت و چگالی در زمان های مختلف ارائه گردید. نتایج مبین این مطلب است که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با تکنیک تجزیه رو، پاسخ های قابل قبولی را ارائه می دهد و به خوبی می تواند این ناپیوستگی ها را تحلیل کند. در پاسخ های به دست آمده مشاهده می شود که جهت انتشار امواج با جهت مورد انتظار هماهنگ است، هم چنین شکل گیری و انتشار امواج انبساطی و شوک با استفاده از این روش به درستی انجام می شود. نوسانات عددی که عمدتاً در مرز ناپیوستگی ها به وجود می آیند، در پاسخ های به دست آمده از این الگوریتم دیده نمی شود. الگوریتم پیشنهادی که از روش دقت بالا با محدودکننده  $MC$  استفاده می کند، در کنترل پخش عددی بسیار خوب عمل کرده است. در نهایت به دلیل دقت قابل قبول و نیز هزینه های محاسباتی پایین الگوریتم پیشنهادی، در کنار دقت بالای پاسخ های آن، استفاده از این روش برای سایر مدل های کلان نگر جریان ترافیک و توسعه برای معادلات دوبعدی پیشنهاد می شود.

<sup>1</sup> Euclidian Error Norm





بدین‌وسیله نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد و همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال شده را مشاهده و تأیید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آنها بوده، قبلاً چاپ نشده، و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

## منابع

- Bale, D. S., LeVeque, R. J., Mitran, S., & Rossmannith, J. A. (2003). A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions. *SIAM journal on scientific computing*, 24(3), 955–978.
- Borges, R., Carmona, M., Costa, B., & Don, W. S. (2008). An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 227(6), 3191–3211.
- Chen, J., Shi, Z., & Hu, Y. (2012). Numerical solutions of a multi-class traffic flow model on an inhomogeneous highway using a high-resolution relaxed scheme. *Journal of zhejiang university SCIENCE C*, 13(1), 29–36.
- Davoodi, N. (2014). *Adaptive numerical methods for macroscopic traffic flow problems* (PhD thesis, Ferdowsi university of mashhad). (In Persian). Retrieved from <https://ganj.irandoc.ac.ir/#/articles/2e6dec8a5984967fac6fbc0b3c2c2e85>
- Del Castillo, J. M., Pintado, P., & Benitez, F. G. (1994). The reaction time of drivers and the stability of traffic flow. *Transportation research part B: methodological*, 28(1), 35–60.
- Delis, A. I., Nikolos, I. K., & Papageorgiou, M. (2014). High-resolution numerical relaxation approximations to second-order macroscopic traffic flow models. *Transportation research part C: emerging technologies*, 44, 318–349.
- Greenshields, B. D. (1935). *A study in highway capacity*. Highway research board.
- Mahdizadeh, H. (2018). A modified flux-wave formula for the solution of one-dimensional Euler equations with gravitational source term. *Iranian journal of numerical analysis and optimization*, 8(2), 25–37. (In Persian). DOI: 10.22067/IJNAO.V8I2.59531
- Khan, Z. H., Gulliver, T. A., Nasir, H., Rehman, A., & Shahzada, K. (2019). A macroscopic traffic model based on driver physiological response. *Journal of engineering mathematics*, 115(1), 21–41.
- Khan, Z. H., & Gulliver, T. A. (2020). A macroscopic traffic model based on transition velocities. *Journal of computational science*, 43, 101131.
- Khan, Z. H., Gulliver, T. A., Khattak, K. S., & Qazi, A. (2020a). A macroscopic traffic model based on reaction velocity. *Iranian journal of science and technology, transactions of civil engineering*, 44(1), 139–150.
- Khan, Z. H., Imran, W., Gulliver, T. A., Khattak, K. S., Wadud, Z., & Khan, A. N. (2020b). An anisotropic traffic model based on driver interaction. *IEEE access*, 8, 66799–66812.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems (Vol. 31)*. Cambridge university press.
- Lighthill, M. J., & Whitham, G. B. (1955). On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the royal society of London. series A. mathematical and physical sciences*, 229(1178), 317–345.
- Mahdizadeh, H., Sharifi, S., & Omidvar, P. (2018). On the approximation of two-dimensional transient pipe flow using a modified wave propagation algorithm. *Journal of fluids engineering*, 140(7). <https://doi.org/10.1115/1.4039248>
- Mahdizadeh, H., Stansby, P. K., & Rogers, B. D. (2011). On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm. *International journal for numerical methods in fluids*, 66(10), 1295–1314.
- Mahdizadeh, H., Stansby, P. K., & Rogers, B. D. (2012). Flood wave modeling based on a two-dimensional modified wave propagation algorithm coupled to a full-pipe network solver. *Journal of hydraulic engineering*, 138(3), 247–259.
- Mohammadian, S. (2017). *Numerical study on traffic flow prediction using different second-order continuum traffic flow models* (Master Thesis, Ferdowsi University of Mashhad). (In Persian). Retrieved from <https://ganj.irandoc.ac.ir/#/articles/478c9ea9bca65e2dcec30db90ae277dc>
- Mohammadian, S., & van Wageningen-Kessels, F. (2018). Improved numerical method for Aw-Rascle type continuum traffic flow models. *Transportation research record: journal of the transportation research board*, 2672(20), 262–276.
- Moodi, S. (2017). *Numerical modelling of flood flow in sewer networks considering the effects of the manhole* (Master Thesis, University of Sistan and Baluchestan). (In Persian). Retrieved from <https://ganj.irandoc.ac.ir/#/articles/1c341d46960c0b712dec3237302d1df5>
- Moodi, S., & Mahdizadeh, H. (2018). Numerical modelling of water influx falling into an empty tank using a modified wave propagation algorithm. *Modares mechanical engineering*, 18(6), 182–190. (In Persian). <https://mme.modares.ac.ir/article-15-16901-fa.html>
- Payne, H. (1971). Models of freeway traffic and control, simulation councils. *INC.: San Diego, CA, USA*, 51–61.
- Richards, P. I. (1956). Shock waves on the highway. *Operations research*, 4(1), 42–51.
- Roe, P. (1981). Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2), 357–372.
- Sreekumar, M., Joshi, S. M., Chatterjee, A., & Mathew, T. V. (2019). Analyses and implications of higher order finite volume methods on first-order macroscopic traffic flow models. *Transportation letters*, 11(10), 542–557.
- Zhang, H. M. (1998). A theory of nonequilibrium traffic flow. *Transportation research part B: methodological*, 32(7), 485–498.



تقریب متوسط بردار مجهولات	$U$	نوسانات راست و چپ رونده	$A^{\pm}\Delta$
سرعت تعادلی	$V_e(\rho)$	ثابت سرعت	$C_0$
	علائم یونانی	عدد کورانت	$Cr$
ضریب ویژه	$\beta$	بردار شار	$f$
گام زمانی (s)	$\Delta t$	عبارت اصلاحی مرتبه دوم	$\bar{F}$
اندازه گره‌ها (m)	$\Delta x$	سطح سرویس ترافیک	$h$
موج شار	$\xi$	ماتریس ژاکوبین	$J$
p امین مقدار ویژه	$\lambda_p$	طول مسیر دایره‌ای	$L$
زمان آسایش	$\tau$	تعداد موج‌های شوک یا انبساطی	$M_w$
پاسخ فیزیولوژیکی راننده	$\tau_r$	تعداد گام‌های زمانی	$N$
	بالانویس‌ها	p امین بردار ویژه	$r_p$
سطح زمانی	$n$	بردار مولفه‌های منبع	$s$
	زیرنویس‌ها	k امین سرعت رو	$s_k$
شماره سلول محاسباتی	$i$	مجموع زمان شبیه‌سازی	$T_f$
متوسط	$m$	سرعت کلان‌نگر وسایل نقلیه	$u$

