Decisions and Operations Research

Decisions & Operations Research

Volume 6, Issue 1, Spring 2021

www.journal-dmor.ir

Decisions & Operations Research, Volume 6, Issue 1, Spring 2021, Page: 75-96

Proposing a New Approach for Solving Intuitionistic Fuzzy Linear Programming Problem with Non-Symmetric Parameters

Morteza Goli[1,*], Hadi Nasseri[1], Mehrdad Ghaznavi[2]

[1]Faculty of Mathematical Sciences, Mazandaran University, Babolsar, Iran.
[2]Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood. Iran.

Abstract

In this paper, we deal with a linear programming problem with non-symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. In recent years, many authors have studied the symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. After defining a ranking function and arithmetic operations on these numbers, they solved the intuitionistic fuzzy linear programming problem. But the main problem with their method was that only available for symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. Now in order to overcome this limitation, in this paper, we present a new arithmetic and a new ordering for non-symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. Then, we present the general model of an intuitionistic fuzzy linear programming problems and prove a number of important theorems for solving it. Then we present the intuitionistic fuzzy simplex algorithm and finally, by presenting two examples, we will show the application of this new approach and show its superiority over the fuzzy mode.

Keywords: Fuzzy linear programming, Intuitionistic fuzzy arithmetic, Trapezoidal intuitionistic Fuzzy number, Intuitionistic fuzzy linear programming.

Paper Type: Original

Receive: 01/11/2020 Review: 19/12/2020 Revise: 27/04/2021 Accept: 11/05/2021

Citation:

Goli, M., Nasseri, H., & Ghaznavi, M. (2021). Proposing a new approach for solving intuitionistic fuzzy linear programming problem with non-symmetric parameters. *Decisions & operations research*, *6*(1), 75-96.

*** Corresponding Author**

Email Address: mrtz.golii@gmail.com

DOI: 10.22105/dmor.2021.255385.1247

Decisions and Operations Research

نشریه علمی
تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۶، شماره (۱)، بهار ۱۴۰۰

www.journal-dmor.ir

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحه: ۹۶-۷۵

ارائه یک رویکرد جدید برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی با پارامترهای نامتقارن

مرتضی گلی[۱,*]، هادی ناصری[۱]، مهرداد غزنوی[۲]
[۱]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.
[۲]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران، شاهرود.

چکیده

ما در این مقاله با یک مساله برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن سرو کار داریم. در سال‌های اخیر، نویسندگان زیادی به مطالعه بر روی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای متقارن پرداختند. آن‌ها بعد از تعریف یک تابع رتبه‌بندی و عملیات حساب بر روی این اعداد، به حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی پرداختند. اما مشکل اصلی روش آن‌ها این بود که تنها برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای متقارن برقرار بود. حال به منظور رفع این مشکل، ما در این مقاله به ارائه یک حساب جدید و همچنین یک ترتیب جدید برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن می‌پردازیم. در ادامه ما مدل کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن را ارائه کرده و به اثبات تعدادی از قضایای مهم برای حل آن می‌پردازیم. سپس به ارائه الگوریتم سیمپلکس فازی شهودی پرداخته و در انتها با ارائه دو مثال، کاربرد این رویکرد جدید را نشان داده و برتری آن را نسبت به حالت فازی نشان خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی فازی، حساب فازی شهودی، عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن، برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی.

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱ داوری: ۱۳۹۹/۰۹/۲۹ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۱

۱- مقدمه

معرفی منطق فازی توسط زاده[۱] (۱۹۶۵) و کاربرد موفق آن در سیستم‌های کنترلی، باعث رشد و نفوذ این منطق در سایر زمینه‌ها گردید که یکی از این زمینه‌ها، برنامه‌ریزی خطی است. در بسیاری از مسائل صنعتی و مدیریتی که منجر به حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌شود، تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند بطور دقیق مقادیر پارامترهای مساله را تعیین کند و این ابهام ممکن است از نوع احتمالی نباشد. در واقع در برنامه‌ریزی خطی پارامترهای مساله توسط افراد با تجربه با مقادیر دقیق تعیین می‌شوند، ولی در محیط‌های فازی، فرض وجود اطلاعات دقیق توسط افراد با تجربه، دور از واقعیت به نظر می‌رسد. لذا استفاده از مدلسازی فازی در مسایل تصمیم‌گیری واقعی با داده‌های نادقیق می‌تواند مناسب باشد. کاربرد سیستم‌های فازی در برنامه‌ریزی ریاضی، تاریخچه‌ای طولانی دارد. مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی اولین

[۱]Zadeh

* نویسنده مسئول
آدرس رایانامه: mrtz.golii@gmail.com
شناسه دیجیتال: DOI: 10.22105/dmor.2021.255385.1247

بار توسط تاناکا و همکاران[1] (۱۹۸٤) در چارچوب تصمیم‌گیری فازی که توسط بلمن و زاده[2] (۱۹۷۰) ارائه شده بود، پیشنهاد شد. فرمول‌بندی مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی (*FLP*) توسط زیمرمن[3] (۱۹۷۸) پیشنهاد شد. مهدوی امیری و ناصری[4] (۲۰۰۷) به حل مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی ذوزنقه‌ای پرداختند. آن‌ها یک تابع رتبه‌بندی خطی را به منظور مرتب کردن اعداد فازی ذوزنقه‌ای بکار گرفتند. سپس بعد از اثبات قضایای دوگانی و با ارائه الگوریتم سیمپلکس دوگان، به حل مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای پرداختند. غزنوی و همکاران[5] (۲۰۱٦) به تحلیل پارامتری مسائل برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی پرداختند. آن‌ها تغییرات مساله را با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی خطی در نظر گرفتند. آن‌ها به منظور پیدا کردن حل پایه‌ای بهینه جدید، روش سیمپلکس اولیه، روش سیمپلکس دوگان و روش سیمپلکس اولیه-دوگان را بکار گرفتند. نجفی و عدالت‌پناه[6] (۲۰۱۳) به بیان برخی اصلاحات بر روی یک مدل در حالت کلی، برای یک مساله برنامه‌ریزی خطی تماما فازی پرداختند. نوری‌اسکندری و غزنوی[7] (۲۰۱۸) به ارائه یک الگوریتم کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی پرداختند. آن‌ها تعدادی از رویکردهای مشهور را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی در نظر گرفتند. سپس بعد از بیان محدودیت‌ها و نواقص تعدادی از روش‌های موجود، به حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی پرداختند. داس و همکاران[8] (۲۰۱۷) به معرفی یک روش کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی پرداختند. سپس با بیان چند مثال، به تحلیل نظری روش پیشنهادی پرداختند. در ادامه نشان دادند روش آن‌ها در مقایسه با روش‌های دیگر، به محاسبات کمتری نیاز دارد. نجفی و همکاران[9] (۲۰۱٦) یک روش کارآمد جدید را به منظور پیدا کردن حل بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی با متغیرها و پارامترهای نامحدود را ارائه دادند. آن‌ها در ادامه به منظور نشان دادن کارایی این روش به بیان چند مثال عددی پرداختند. حسین زاده و عدالت‌پناه[10] (۲۰۱٦) با در نظر گرفتن اعداد فازی ، یک مدل جدید را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی ارائه دادند. آن‌ها با مقایسه این مدل جدید با دو مدل دیگر، برتری این مدل را نسبت به دو مدل دیگر به تصویر کشیدند. شموشکی و همکاران[11] (۲۰۱۵) با در نظر گرفتن اعداد فازی، یک مدل جدید را به منظور پیدا کردن حل بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی پیشنهاد کردند. آن‌ها در ادامه نشان دادند پیاده‌سازی این روش در مقایسه با روش‌های موجود، فرآیند ساده‌تری دارد. بعد از آن، به منظور حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی مدل‌های مختلفی معرفی گردید و روش‌های زیادی برای حل آن ارایه شد (گانسن و ورامانی[12]، ۲۰۰٦؛ مهدوی امیری و همکاران[13]، ۲۰۰۹؛ ناصری و باوندی[14]، ۲۰۱۸؛ ناصری و ابراهیم نژاد[15]، ۲۰۱۰).

با گذشت زمان، مسایلی در نظریه مجموعه فازی (*FS*) مطرح گردید که علم فازی دیگر قادر به حل آن‌ها نبود. برای حل این مسایل یک توسعه از نظریه مجموعه فازی (*FS*) بنام نظریه مجموعه فازی شهودی (*IFS*) توسط آتاناسوف[16] (۱۹۹۹) ارایه گردید. نظریه مجموعه فازی شهودی (*IFS*) توسط دو مفهوم مختلف درجه عضویت (μ) و درجه عدم عضویت (v) نشان داده می‌شود. تفاوت این دو نظریه اینست که در نظریه مجموعه فازی (*FS*)، درجه عضویت اعداد یک رقم بین صفر و یک می‌باشد ($0 \le \mu \le 1$) و درجه عدم عضویت $1-\mu$ می‌باشد. در واقع در نظریه مجموعه فازی (*FS*)، درجه عدم عضویت، یک منهای درجه عضویت است و داریم: $v = 1-\mu$. اما در نظریه مجموعه فازی شهودی (*IFS*) ما نمی‌توانیم درجه عدم عضویت را یک منهای درجه عضویت در نظر بگیریم و در اینجا ما یک درجه شک و تردید (h) نیز داریم. به بیان دیگر، در نظریه مجموعه فازی شهودی (*IFS*)، درجه عدم عضویت یک منهای درجه عضویت منهای درجه شک و تردید است و داریم: $v = 1-\mu-h$. چون در نظریه مجموعه فازی شهودی (*IFS*) هم درجه

---

[1] Tanaka et al.
[2] Bellman & Zadeh
[3] Zimmermann
[4] Mahdavi-Amiri and Naseri
[5] Ghaznavi et al.
[6] Najafi and Edalatpanah
[7] Noori Skandari and Ghaznavi
[8] Das et al.
[9] Najafi et al.
[10] Hosseinzadeh and Edalatpanah
[11] Shamooshaki et al.
[12] Ganesan and Veeramani
[13] Mahdavi-Amiri et al.
[14] Nasseri and Bavandi
[15] Nasseri and Ebrahimnejad
[16] Atanassov

عضویت و هم درجه عدم عضویت داریم؛ لذا در مقابله با ابهام و عدم قطعیت، این نظریه ابزار قدرتمندتری را در اختیار ما قرار می‌دهد. رویکردی از کاربرد نظریه مجموعه فازی شهودی (*IFS*) برای بهینه‌سازی و حل این مسایل توسط آنگلو[١] (١٩٩٧) ارایه گردید. جایالاکشمی و همکاران[٢] (٢٠١٩) یک رویکرد ساده برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی ارائه دادند. مزیت اصلی روش آن‌ها نسبت به روش‌های دیگر اینست که بدون تبدیل کردن مساله به فرم قطعی، به حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی می‌پردازند. سیدهو و کومار[٣] (٢٠١٩) به ارایه یک روش جدید برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای پرداختند. آن‌ها به بیان محدودیت‌ها و نواقص روش‌های موجود پرداخته و سپس با ارائه یک الگوریتم جدید توانستند بر محدودیت‌های موجود غلبه کرده و حل بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای را بدست آورند. بهاراتی و ساین[٤] (٢٠١٥) به مطالعه یک روش جدید به منظور پیدا کردن حل بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی شهودی پرداختند. آن‌ها با استفاده از علامت فاصله بین اعداد فازی شهودی، به مقایسه آن‌ها پرداختند. این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی شهودی با محدودیت‌های تساوی بکار می‌رود. کار[٥] و شاو (٢٠١٩) به حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی شهودی با اعداد فازی شهودی پرداختند. آن‌ها به تحلیل روش ساین و یاداو[٦] (٢٠١٧) و معرفی آن به منظور پیدا کردن مقدار فازی شهودی بهینه منحصر بفرد مسائل برنامه‌ریزی خطی تماما فازی شهودی با محدودیت‌های مساوی و نامساوی پرداختند. آن‌ها در ادامه بعد از مقایسه روش خود و روش ساین و یاداو (٢٠١٧)، مزیت روش خود را نسبت به روش آن‌ها نشان داده و محدودیت‌ها و نواقص روش ساین و یاداو (٢٠١٧) برطرف نمودند.

ناصری و همکاران[٧] (٢٠١٨) یک رویکرد جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی بر اساس مقایسه اعداد فازی شهودی و با استفاده از تابع رتبه‌بندی خطی ارائه دادند. آن‌ها با تعریف یک مساله کمکی که در آن فقط ضرائب هدف بصورت اعداد فازی شهودی بود، به مطالعه بین مساله اصلی و مساله کمکی پرداختند. سپس به توسعه الگوریتم سیمپلکس اولیه فازی شهودی برای حل این مسائل پرداختند. ناگورگانی و پونالاگ[٨] (٢٠١٢) یک تکنیک رتبه‌بندی برای اعداد فازی شهودی مثلثی با استفاده از (α,β)-برش، تابع نمره و تابع دقت معرفی کردند. این روش برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی شهودی بکار گرفته شد. کابیراج و همکاران[٩] (٢٠١٩) به حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی بدون استفاده از توابع رتبه‌بندی رایج پرداختند. آن‌ها با ارائه یک مثال کاربردی و حل آن به وسیله روش پیشنهادی و سپس مقایسه آن با چند روش دیگر، برتری روش خود را نسبت به روش‌های دیگر نشان دادند. رمیک و ولاچ[١٠] (٢٠١٦) مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی را معرفی کرده و به بیان مفاهیم دوگانی و قضایای مربوط به آن پرداختند. ناگورگانی و پونالاگ (٢٠١٢) با استفاده از روش سیمپلکس دوگان فازی شهودی، به مطالعه مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی پرداختند که در آن‌ها تابع هدف می‌تواند ماکزیمم‌سازی یا مینیمم‌سازی و همچنین محدودیت‌ها نیز می‌توانند بصورت مساوی یا نامساوی باشند. اجگوا و همکاران[١١] (٢٠١٤) مقاله مروری شامل برخی تعاریف، عملگرهای پایه‌ای، برخی جبرها و... بر روی مجموعه‌های فازی شهودی ارائه دادند. آتالیک و سنتورک[١٢] (٢٠١٩) یک روش جدید بر اساس نقطه میانی برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی معرفی کردند. پراباکاران و گانسن[١٣] (٢٠١٧) به ارائه نظریه دوگانی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی پرداختند. آن‌ها به بحث در مورد پروسه حل مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان با اعداد فازی شهودی، بدون تبدیل کردن این مسائل به مساله برنامه‌ریزی خطی کلاسیک پرداخته و سپس با استفاده از یک عملیات حساب جدید، به اثبات قضایای دوگانی پرداختند. همانند مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی (*FLP*)، برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی (*IFLP*)، مدل‌های مختلفی معرفی گردید و روش‌های زیادی برای حل آن ارائه شد (دوبی و مهرا[١٤]، ٢٠١١؛ ناگورگانی و پونالاگ، ٢٠١٢؛ ناصری و همکاران، ٢٠١٨؛ پراباکاران و گانسن،

---

١ Angelov
٢ Jayalakshmi et al.
٣ Sidhu and Kumar
٤ Bharati and Singh
٥ Kar and Shaw
٦ Singh and Yadav
٧ Nasseri et al.
٨ Nagoorgani and Ponnalagu
٩ Kabiraj et al.
١٠ Ramík and Vlach
١١ Ejegwa et al.
١٢ Atalik and Senturk
١٣ Prabakaran and Ganesan
١٤ Dubey and Mehra

۲۰۱۷؛ سورش و همکاران[۱]، ۲۰۱٤). پرواسی و مالاسی[۲] (۲۰۱۵)، هپزیبا و ویدهیا[۳] (۲۰۱۵) و سیدهو[٤] (۲۰۱۵) به مطالعه بر روی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ($TrIFNs$) پرداختند. آن‌ها به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی ($IFLP$)، یک عملیات حساب بر روی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ($TrIFNs$) متقارن بکار گرفتند. بعد از آن، این مسائل توسط عملیات حسابی که برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای متقارن تعریف شده بود و همچنین ارائه یک تابع رتبه‌بندی ویژه، حل گردید. اما مشکل اصلی روش آن‌ها این بود که تنها برای اعداد فازی شهودی متقارن برقرار بود. لذا به منظور رفع این مشکل، ما در این مقاله با ارایه یک حساب جدید، به حل مساله برنامه ریزی خطی فازی شهودی با پارامترهای نامتقارن و بدون تبدیل کردن مساله به فرم قطعی می‌پردازیم.

روش ارائه شده در این اینجا نسبت به روش‌های دیگر دارای ۲ مزیت است:

- *این رویکرد نه تنها برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای متقارن، بلکه برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن نیز برقرار است.*
- *ما در این روش، به حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی بدون تبدیل کردن مساله به فرم قطعی، می‌پردازیم.*

این مقاله در شش فصل تهیه شده است. در فصل دوم به مرور برخی از مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌های فازی شهودی می‌پردازیم. در فصل سوم ما به ارائه یک حساب جدید و یک رتبه‌بندی جدید پرداخته، سپس به اثبات تعدادی لم و قضیه مرتبط با این حساب جدید می‌پردازیم. در فصل چهارم ما مدل کلی مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی را ارائه کرده و بعد از بیان برخی مفاهیم پایه‌ای، به اثبات تعدادی از قضایای مهم به منظور حل آن می‌پردازیم. در فصل پنجم ما به ارائه الگوریتم سیمپلکس فازی شهودی پرداخته، سپس مساله را بدون تبدیل کردن به فرم قطعی حل می‌کنیم. در ادامه با ارائه دو مثال، کاربرد این رویکرد جدید را نشان داده و برتری آن را نسبت به حالت فازی نشان می‌دهیم. یک مثال تصویری برای توصیف این روش آورده شده است و در انتها، نتایج این مطالعه در فصل شش بیان می‌شود.

۲- مقدمات و برخی مفاهیم پایه‌ای

در این بخش، برخی تعاریف و مفاهیم مورد نیاز از نظریه مجموعه‌های فازی شهودی ارایه می‌شود (آنگلو، ۱۹۹۷؛ پرواسی و مالاسی[۵]، ۲۰۱۲؛ سیدهو، ۲۰۱۵؛ سیدهو و کومار، ۲۰۱۹).

تعریف ۱. فرض کنید X مجموعه مرجع باشد. در اینصورت مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ در X به‌صورت $\tilde{A}^I = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)\right); x \in X\right\}$ تعریف می‌شود که در آن $\mu_{\tilde{A}^I}(x): X \to [0,1]$ و $\nu_{\tilde{A}^I}(x): X \to [0,1]$ به ترتیب نشان دهنده درجات عضویت و عدم عضویت x در $\tilde{A}^I$ می‌باشد بطوریکه به ازای هر عنصر $x \in X$ داریم: $0 \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le 1$. همچنین مقدار $h_{\tilde{A}^I} = 1 - \mu_{\tilde{A}^I}(x) - \nu_{\tilde{A}^I}(x)$ درجه شک x در $\tilde{A}^I$ می‌باشد.

تعریف ۲. یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن $\tilde{A}^I$ که به صورت $\tilde{A}^I = \left(a_1 - h, a_1, a_2, a_2 + h; a_1', a_2', a_2' + h\right)$ نمایش داده می‌شود را با توابع عضویت و عدم عضویت زیر نمایش می‌دهیم:

---

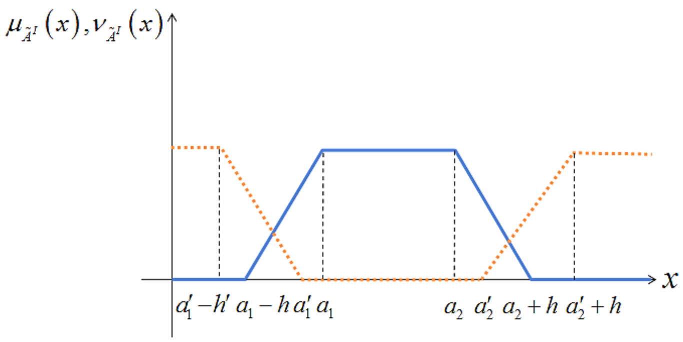
[۱] Suresh et al.
[۲] Parvathi and Malathi
[۳] Hepzibah and Vidhya
[٤] Sidhu
[۵] Parvathi and Malathi

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1+h}{h}, & a_1-h\le x<a_1,\\ 1, & a_1\le x<a_2,\\ \dfrac{a_2+h-x}{h}, & a_2<x\le a_2+h,\\ 0, & Otherwise\end{cases}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1'-x}{h'}, & a_1'-h'\le x<a_1',\\ 0, & a_1'\le x<a_2',\\ \dfrac{x-a_2'}{h'}, & a_2'<x\le a_2'+h',\\ 1, & Otherwise\end{cases}$$

که در آن $a_1'-h'\le a_1-h\le a_1'\le a_1\le a_2\le a_2'\le a_2+h\le a_2'+h'$ و $h,h'>0$ (**شکل ۱**).



شکل ۱- عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای.
Figure 1- Trapezoidal intuitionistic fuzzy number.

گزاره ۱. در این مقاله مجموعه تمام اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن را با $F^I(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

۳- یک رویکرد جدید

در این بخش ما در ابتدا یک حساب جدید و همچنین یک مرتب سازی جدید را برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن ارایه داده، سپس به اثبات تعدادی لم و قضیه مرتبط با آن میپردازیم (گانسن و ورامانی، ۲۰۰۶؛ مهدوی امیری و ناصری، ۲۰۰۷؛ ناصری و همکاران[۱]، ۲۰۱۹).

تعریف ۳. فرض کنید $\tilde{A}^I=(a_1-h,a_1,a_2,a_2+h;a_1'-h',a_1',a_2',a_2'+h')$ و $\tilde{B}^I=(b_1-k,b_1,b_2,b_2+k;b_1'-k',b_1',b_2',b_2'+k')$ دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن باشند. در اینصورت رابطه (‘ ’) را به صورت $\tilde{A}^I$ $\tilde{B}^I$ تعریف می‌کنیم اگر و فقط اگر:

[۱] Nasseri et al.

– $\frac{(a_1-h)+(a_2+h)+(a_1'-h')+(a_2'+h')}{4} < \frac{(b_1-k)+(b_2+k)+(b_1'-k')+(b_2'+k')}{4}$ که در آن $\frac{a_1+a_2+a_1'+a_2'}{4} < \frac{b_1+b_2+b_1'+b_2'}{4}$

(در این مورد ما همچنین می‌توانیم بنویسیم $\tilde{A}^I \prec \tilde{B}^I$)

– $\frac{a_1+a_2+a_1'+a_2'}{4} = \frac{b_1+b_2+b_1'+b_2'}{4}$ که در آن $a_1+a_1' > b_1+b_1'$ و $a_2+a_2' < b_2+b_2'$.

– $\frac{a_1+a_2+a_1'+a_2'}{4} = \frac{b_1+b_2+b_1'+b_2'}{4}$ که در آن $a_1+a_1' = b_1+b_1'$، $a_2+a_2' = b_2+b_2'$ و $h+h' \le k+k'$.

برای موارد ۲ و ۳ ما همچنین می‌توانیم بنویسیم $\tilde{A}^I \approx \tilde{B}^I$ و این یعنی اینکه $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ با هم معادلند.

گزاره ۲. دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن $\tilde{A}^I = (a_1-h, a_1, a_2, a_2+h; a_1'-h', a_1', a_2', a_2'+h')$ و $\tilde{B}^I = (b_1-k, b_1, b_2, b_2+k; b_1'-k', b_1', b_2', b_2+k')$ را معادل گوییم اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{a_1+a_2+a_1'+a_2'}{4} = \frac{b_1+b_2+b_1'+b_2'}{4}$.

$$\tilde{A}^I = (a_1-h, a_1, a_2, a_2+h; a_1'-h', a_1', a_2', a_2'+h').$$
$$\tilde{B}^I = (b_1-k, b_1, b_2, b_2+k; b_1'-k', b_1', b_2', b_2+k').$$
$$\frac{a_1+a_2+a_1'+a_2'}{4} = \frac{b_1+b_2+b_1'+b_2'}{4}.$$

۳-۱- حساب اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن

فرض کنید $\tilde{A}^I = (a_1-h, a_1, a_2, a_2+h; a_1'-h', a_1', a_2', a_2'+h')$ و $\tilde{B}^I = (b_1-k, b_1, b_2, b_2+k; b_1'-k', b_1', b_2', b_2+k')$ دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن و $k \in$ باشد. در این‌صورت:

$$\begin{cases} k\tilde{A}^I = (ka_1-kh, ka_1, ka_2, ka_2+kh; ka_1'-kh', ka_1', ka_2', ka_2'+kh'), & k \ge 0, \\ k\tilde{A}^I = (ka_2+kh, ka_2, ka_1, ka_1-kh; ka_2'+kh', ka_2', ka_1', ka_1'-kh'), & k < 0, \end{cases}$$
$$-\tilde{A}^I = (-a_2-h, -a_2, -a_1, -a_1+h; -a_2'-h', -a_2', -a_1', -a_1'+h'),$$
$$\tilde{A}^I + \tilde{B}^I = (a_1+b_1-h-k, a_1+b_1, a_2+b_2, a_2+b_2+h+k; a_1'+b_1'-h'-k', a_1'+b_1', a_2'+b_2', a_2'+b_2'+h'+k'),$$
$$\tilde{A}^I - \tilde{B}^I = (a_1-b_2-h-k, a_1-b_2, a_2-b_1, a_2-b_1+h+k; a_1'-b_2'-h'-k', a_1'-b_2', a_2'-b_1', a_2'-b_1'+h'+k'),$$
$$\tilde{A}^I \otimes \tilde{B}^I = (a_1-h, a_1, a_2, a_2+h; a_1'-h', a_1', a_2', a_2'+h') \otimes (b_1-k, b_1, b_2, b_2+k; b_1'-k', b_1', b_2', b_2'+k')$$

$$= \left(\begin{array}{l} \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) - w - |a_2k+b_2h|, \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) - w, \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) + w, \\ \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) + w + |a_2k+b_2h|; \left(\frac{a_1'+a_2'}{2}\right)\left(\frac{b_1'+b_2'}{2}\right) - w' - |a_2'k'+b_2'h'|, \\ \left(\frac{a_1'+a_2'}{2}\right)\left(\frac{b_1'+b_2'}{2}\right) - w', \left(\frac{a_1'+a_2'}{2}\right)\left(\frac{b_1'+b_2'}{2}\right) + w', \left(\frac{a_1'+a_2'}{2}\right)\left(\frac{b_1'+b_2'}{2}\right) + w' + |a_2'k'+b_2'h'| \end{array} \right)$$

که در آن

گلی و همکاران/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۶، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحه: ۹۶-۷۵

$$\begin{cases} w=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right), \alpha=\min(a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2), \beta=\max(a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2), \\ w'=\left(\dfrac{\beta'-\alpha'}{2}\right), \alpha'=\min(a_1'b_1',a_1'b_2',a_2'b_1',a_2'b_2'), \beta'=\max(a_1'b_1',a_1'b_2',a_2'b_1',a_2'b_2'). \end{cases}$$

تعریف ٤. برای هر عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن $\tilde{x}^I$ رابطه $\tilde{x}^I \quad \tilde{0}^I$ برقرار است هرگاه وجود داشته باشد $a,a'\geq 0$ و $h,h'\geq 0$ به طوریکه $\tilde{x}^I \quad [-a-h,-a,a,a+h;-a'-h',-a',a',a'+h']$.

ما همچنین $[-a-h,-a,a,a+h;-a'-h',-a',a',a'+h']$ را با $\tilde{0}^I$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است $\tilde{0}^I$ معادل با $0=\left[0,0,0,0;0,0,0,0\right]$ می‌باشد. همچنین واضح است که اگر داشته باشم $\tilde{x}^I \quad \tilde{y}^I$ در اینصورت داریم $\tilde{x}^I-\tilde{y}^I \quad \tilde{0}^I$.

لم ۱. فرض کنید $\tilde{A}^I, \tilde{B}^I$ و $\tilde{C}^I$ سه عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن باشند. در اینصورت داریم:

$$\tilde{C}^I\otimes(\tilde{A}^I+\tilde{B}^I)\approx(\tilde{C}^I\otimes\tilde{A}^I+\tilde{C}^I\otimes\tilde{B}^I),$$
$$\tilde{C}^I\otimes(\tilde{A}^I-\tilde{B}^I)\approx(\tilde{C}^I\otimes\tilde{A}^I-\tilde{C}^I\otimes\tilde{B}^I).$$

اثبات: روابط فوق با توجه به عملیات حسابی تعریف شده برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن به آسانی اثبات می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید $\tilde{A}^I,\tilde{B}^I\in F^I(\quad)$, باشند. در اینصورت

— ۱) *رابطه"   " یک رابطه ترتیبی جزیی می‌باشد.*

— ۲) *رابطه"   " یک رابطه ترتیبی خطی می‌باشد.*

— ۳) *اگر* $\tilde{B}^I \quad \tilde{A}^I$ *باشد در اینصورت داریم:* $\tilde{B}^I \quad (1-\lambda)\tilde{A}^I+\lambda\tilde{B}^I \quad \tilde{A}^I$ *به ازای* $0\leq\lambda\leq 1$.

اثبات قسمت ۱). فرض کنید $\tilde{A}^I=(a_1-h,a_1,a_2,a_2+h;a_1'-h',a_1',a_2',a_2'+h')$ و $\tilde{B}^I=(b_1-k,b_1,b_2,b_2+k;b_1'-k',b_1',b_2',b_2+k')$، و $\tilde{C}^I=(c_1-l,c_1,c_2,c_2+l;c_1'-l',c_1',c_2',c_2'+l')$ سه عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن باشند. در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{C}^I\otimes\left(\tilde{A}^I+\tilde{B}^I\right) &= (c_1-l,c_1,c_2,c_2+l;c_1'-l',c_1',c_2',c_2'+l')\otimes\tilde{A}^I \\ &= (a_1-b_1-h-k,a_1+b_1,a_2+b_2,a_2+b_2+h+k; \\ &\quad a_1'+b_1'-h'-k',a_1'+b_1',a_2'+b_2',a_2'+b_2'+h'+k')\end{aligned}$$

$$=\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right)-w-\left|c_2k+\left(a_2+b_2\right)l\right|,\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right)-w, \\ \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right)+w,\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right)+w+\left|c_2k+\left(a_2+b_2\right)l\right|, \\ \left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right)-w'-\left|c_2'k'+(a_2'+b_2')l'\right|,\left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right)-w', \\ \left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right)+w',\left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right)+w'+\left|c_2'k'+(a_2'+b_2')l'\right|.\end{array}\right) \quad (۱)$$

که در آن،

$$\begin{cases} w=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right), \alpha=\min\left(c_1\left(a_1+b_1\right),c_1\left(a_2+b_2\right),c_2\left(a_1+b_1\right),c_2\left(a_2+b_2\right)\right),\\ \beta=\max\left(c_1\left(a_1+b_1\right),c_1\left(a_2+b_2\right),c_2\left(a_1+b_1\right),c_2\left(a_2+b_2\right)\right),\\ w'=\left(\dfrac{\beta'-\alpha'}{2}\right), \alpha'=\min c'_1\left(a'_1+b'_1\right),c'_1\left(a'_2+b'_2\right),c'_2\left(a'_1+b'_1\right),c'_2\left(a'_2+b'_2\right),\\ \beta'=\max\left(c'_1\left(a'_1+b'_1\right),c'_1\left(a'_2+b'_2\right),c'_2\left(a'_1+b'_1\right),c'_2\left(a'_2+b'_2\right)\right), \end{cases}$$

همچنین داریم

$$\tilde{C}^I\otimes\tilde{A}^I=(c_1-l,c_1,c_2,c_2+l;c'_1-l',c'_1,c'_2,c'_2+l')\otimes(a_1-h,a_1,a_2,a_2+h;a'_1-h',a'_1,a'_2,a'_2+h')$$

$$=\left(\begin{array}{c} \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)-w-\left|c_2h+a_2l\right|,\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)-w,\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)+w,\\ \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)+w+\left|c_2h+a_2l\right|;\left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{a'_1+a'_2}{2}\right)-w'-\left|c'_2h'+a'_2l'\right|,\\ \left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{a'_1+a'_2}{2}\right)-w',\left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{a'_1+a'_2}{2}\right)+w',\left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{a'_1+a'_2}{2}\right)+w'+\left|c'_2h'+a'_2l'\right|. \end{array}\right) \qquad (۲)$$

که در آن

$$\begin{cases} w=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right),\alpha=\min(c_1a_1,c_1a_2,c_2a_1,c_2a_2),\beta=\max\left(c_1a_1,c_1a_2,c_2a_1,c_2a_2\right),\\ w'=\left(\dfrac{\beta'-\alpha'}{2}\right),\alpha'=\min(c'_1a'_1,c'_1a'_2,c'_2a'_1,c'_2a'_2),\beta'=\max\left(c'_1a'_1,c'_1a'_2,c'_2a'_1,c'_2a'\right), \end{cases}$$

و

$$\tilde{C}^I\otimes\tilde{B}^I=(c_1-l,c_1,c_2,c_2+l;c'_1-l',c'_1,c'_2,c'_2+l')\otimes(b_1-k,b_1,b_2,b_2+k;b'_1-k',b'_1,b'_2,b'_2+k')$$

$$=\left(\begin{array}{c} \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{b_1+b_2}{2}\right)-w-\left|c_2k+b_2l\right|,\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{b_1+b_2}{2}\right)-w,\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{b_1+b_2}{2}\right)+w,\\ \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{b_1+b_2}{2}\right)+w+\left|c_2k+b_2l\right|;\left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{b'_1+b'_2}{2}\right)-w'-\left|c'_2k'+b'_2l'\right|,\\ \left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{b'_1+b'_2}{2}\right)-w',\left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{b'_1+b'_2}{2}\right)+w',\left(\dfrac{c'_1+c'_2}{2}\right)\left(\dfrac{b'_1+b'_2}{2}\right)+w'+\left|c'_2k'+b'_2l'\right|. \end{array}\right) \qquad (۳)$$

که در آن،

$$\begin{cases} w=\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right), \alpha = \min\left(c_1b_1, c_1b_2, c_2b_1, c_2b_2\right), \beta = \max\left(c_1b_1, c_1b_2, c_2b_1, c_2b_2\right), \\ w' = \left(\dfrac{\beta' - \alpha'}{2}\right), \alpha' = \min\left(c_1'b_1', c_1'b_2', c_2'b_1', c_2'b_2'\right), \beta' = \max\left(c_1'b_1', c_1'b_2', c_2'b_1', c_2'b'\right). \end{cases}$$

از طرفی با جمع **روابط (۲)** و **(۳)** داریم:

$$\left(\tilde{C}^I \otimes \tilde{A}^I + \tilde{C}^I \otimes \tilde{B}^I\right) = \tag{۴}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right) - w - \left|c_2k+\left(a_2+b_2\right)l\right|, \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right) - w, \\ \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right) + w, \left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right)\left(\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\right) + w + \left|c_2k+\left(a_2+b_2\right)l\right|, \\ \left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right) - w' - \left|c_2'k' + \left(a_2'+b_2'\right)l'\right|, \left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right) - w', \\ \left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right) + w', \left(\dfrac{c_1'+c_2'}{2}\right)\left(\dfrac{a_1'+b_1'+a_2'+b_2'}{2}\right) + w' + \left|c_2'k' + \left(a_2'+b_2'\right)l'\right|. \end{array} \right)$$

که در آن،

$$\begin{cases} w=\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right), \alpha = \min\left(c_1\left(a_1+b_1\right), c_1\left(a_2+b_2\right), c_2\left(a_1+b_1\right), c_2\left(a_2+b_2\right)\right), \\ \beta = \max\left(c_1\left(a_1+b_1\right), c_1\left(a_2+b_2\right), c_2\left(a_1+b_1\right), c_2\left(a_2+b_2\right)\right), \\ w' = \left(\dfrac{\beta' - \alpha'}{2}\right), \alpha' = \min\left(c_1'\left(a_1'+b_1'\right), c_1'\left(a_2'+b_2'\right), c_2'\left(a_1'+b_1'\right), c_2'\left(a_2'+b_2'\right)\right), \\ \beta' = \max\left(c_1'\left(a_1'+b_1'\right), c_1'\left(a_2'+b_2'\right), c_2'\left(a_1'+b_1'\right), c_2'\left(a_2'+b_2'\right)\right). \end{cases}$$

حال از مقایسه روابط **(۱)** و **(۴)** خواهیم داشت:

$$\tilde{C}^I \otimes \left(\tilde{A}^I + \tilde{B}^I\right) = \left(\tilde{C}^I \otimes \tilde{A}^I + \tilde{C}^I \otimes \tilde{B}^I\right)$$

اثبات قسمت ۲). مشابه اثبات قسمت (۱) می‌باشد.

گزاره ۳. اگر $\tilde{x}^I \approx \tilde{O}^I$ باشد در این صورت $\tilde{x}^I$ را یک عدد صفر فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن می‌نامیم. لازم به ذکر است که اگر $\tilde{x}^I = \tilde{O}^I$ باشد در اینصورت داریم: $\tilde{x}^I \not\approx \tilde{O}^I$ اما عکس این رابطه لزوما برقرار نیست. اگر باشد در این صورت $\tilde{x}^I$ را یک عدد مخالف صفر فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن می‌نامیم. همچنین اگر داشته باشم: $\tilde{x}^I \quad \tilde{O}^I$ و $\tilde{x}^I \not\approx \tilde{O}^I$ در اینصورت $\tilde{x}^I$ را یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن مثبت نامیده و به صورت $\tilde{x}^I \succ \tilde{O}^I$ نمایش می‌دهیم.

در اینجا ما به ارایه نتایج جدیدی از ضرب بین دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن در قالب **لم ۲** و **لم ۳** می‌پردازیم.

لم ۲. اگر $\tilde{A}^I, \tilde{B}^I \in F^I(\quad)$ در اینصورت داریم:

- $\tilde{A}^I \otimes \tilde{B}^I \quad \tilde{0}^I$ اگر و فقط اگر $\tilde{A}^I \quad \tilde{0}^I$ و $\tilde{B}^I \quad \tilde{0}^I$ یا $\tilde{A}^I \quad \tilde{0}^I$ و $\tilde{B}^I \quad \tilde{0}^I$.
- $\tilde{A}^I \otimes \tilde{B}^I \quad \tilde{0}^I$ اگر و فقط اگر $\tilde{A}^I \quad \tilde{0}^I$ و $\tilde{B}^I \quad \tilde{0}^I$ یا $\tilde{A}^I \quad \tilde{0}^I$ و $\tilde{B}^I \quad \tilde{0}^I$.
- $\tilde{A}^I \quad \tilde{B}^I$ اگر و فقط اگر $\lambda \tilde{A}^I \quad \lambda \tilde{B}^I$ به ازای هر $\lambda \in \;, \lambda < 0$.

اثبات: با توجه به مطالب ذکر شده، روابط به آسانی اثبات می‌شوند.

لم ۳. فرض کنید $\tilde{B}^I, \tilde{A}^I$ و $\tilde{C}^I$ متعلق به $F^I(\quad)$ باشند بطوریکه $\tilde{A}^I \quad \tilde{B}^I$. در اینصورت

- اگر $\tilde{C}^I \quad \tilde{0}^I$ باشد آنگاه $\tilde{C}^I \otimes \tilde{A}^I \quad \tilde{C}^I \otimes \tilde{B}^I$
- اگر $\tilde{C}^I \quad \tilde{0}^I$ باشد آنگاه $\tilde{C}^I \otimes \tilde{A}^I \quad \tilde{C}^I \otimes \tilde{B}^I$.

اثبات: از رابطه $\tilde{A}^I \quad \tilde{B}^I$ داریم: $\tilde{B}^I - \tilde{A}^I \quad \tilde{0}^I$. همچنین با استفاده از لم ۲ خواهیم داشت: $\tilde{C}^I \otimes (\tilde{B}^I - \tilde{A}^I) \quad \tilde{0}^I$ اگر $\tilde{C}^I \quad \tilde{0}^I$ و $\tilde{C}^I \otimes (\tilde{B}^I - \tilde{A}^I) \quad \tilde{0}^I$ اگر $\tilde{C}^I \quad \tilde{0}^I$. حال با استفاده از **لم ۱** نتایج به آسانی بدست می‌آید.

۴- برنامه ریزی خطی فازی شهودی

در اینجا فرم کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی را ارایه داده و به بیان برخی مفاهیم مرتبط با آن می‌پردازیم.

۱-٤- مدل کلی

فرم کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{max}\ \tilde{z}^I \approx \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^I \tilde{x}_j^I, \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j^I \quad \tilde{b}_i^I,\ i = 1,2,3,\ldots,m_0, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j^I \quad \tilde{b}_i^I,\ i = m_0+1, m_0+1, m_0+1,\ldots,m, \\
&\qquad \tilde{x}_j^I \quad \tilde{0}^I,\ j = 1,2,3,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{5}$$

که در آن a_{ij} متعلق به ، $\tilde{x}_j^I$ و $\tilde{c}_j^I$ متعلق به $(F^I(\quad))^n$ ، $\tilde{b}_i^I$ متعلق به $(F^I(\quad))^m$ ، $i = 1,2,3,\ldots,m$ و $j = 1,2,3,\ldots,n$ می‌باشد.

تعریف ۵. نقطه $\tilde{x}^I = (\tilde{x}_1^I, \tilde{x}_2^I, \tilde{x}_3^I, \ldots, \tilde{x}_n^I)$ متعلق به $(F^I(\quad))^n$ را که در قیود **مساله (۵)** صدق می‌کند یک جواب شدنی فازی شهودی برای مساله می‌نامیم.

تعریف ٦. نقطه $\tilde{x}_0^I$ یک جواب بهینه فازی شهودی برای **مساله (۵)** است، اگر برای همه $\tilde{x}^I$ های شدنی داشته باشیم:

$$\tilde{c}^I \tilde{x}_0^I \quad \tilde{c}^I \tilde{x}^I$$

تعریف ۷. فرض کنید $\tilde{x}^I=(\tilde{x}_1^I,\tilde{x}_2^I,\tilde{x}_3^I,\dots,\tilde{x}_n^I)$ باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{x}^I$ دستگاه $A\tilde{x}^I\approx\tilde{b}^I$ را حل می‌کند. اگر $\tilde{x}_j^I\approx[-\alpha_j-h_j,-\alpha_j,\alpha_j,\alpha_j+h_j;-\alpha'_j-h'_j,-\alpha'_j,\alpha'_j,\alpha'_j+h'_j]$ برای برخی $\alpha_j,\alpha'_j\geq 0$ و $h_j,h'_j\geq 0$، در اینصورت $\tilde{x}^I$ را یک جواب پایه‌ای فازی شهودی می‌نامیم. اگر $\tilde{x}_j^I=[-\alpha_j-h_j,-\alpha_j,\alpha_j,\alpha_j+h_j;-\alpha'_j-h'_j,-\alpha'_j,\alpha'_j,\alpha'_j+h'_j]$ برای $\alpha_j,\alpha'_j\geq 0$ و $h_j,h'_j\geq 0$ در اینصورت $\tilde{x}^I$ تعدادی مولفه ناصفر بصورت $\tilde{x}_1^I,\tilde{x}_2^I,\tilde{x}_3^I,\dots,\tilde{x}_k^I$، $1\leq k\leq n$ خواهد داشت. لذا ما می‌توانیم دستگاه $A\tilde{x}^I\approx\tilde{b}^I$ را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
&a_1\tilde{x}_1^I+a_2\tilde{x}_2^I+a_3\tilde{x}_3^I+\dots+a_k\tilde{x}_k^I\\
&+a_{k+1}[-\beta_{k+1}-h_{k+1},-\beta_{k+1},\beta_{k+1},\beta_{k+1}+h_{k+1};-\beta'_{k+1}-h'_{k+1},-\beta'_{k+1},\beta'_{k+1},\beta'_{k+1}+h'_{k+1}]\\
&+a_{k+2}[-\beta_{k+2}-h_{k+2},-\beta_{k+2},\beta_{k+2},\beta_{k+2}+h_{k+2};-\beta'_{k+2}-h'_{k+2},-\beta'_{k+2},\beta'_{k+2},\beta'_{k+2}+h'_{k+2}]\\
&+\dots+a_n[-\beta_n-h_n,-\beta_n,\beta_n,\beta_n+h_n;-\beta'_n-h'_n,-\beta'_n,\beta'_n,\beta'_n+h'_n]\approx\tilde{b}^I.
\end{aligned}$$

اگر ستون‌های $a_1,a_2,a_3,\dots,a_k$ متناظر با مولفه های ناصفر $\tilde{x}_1^I,\tilde{x}_2^I,\dots,\tilde{x}_k^I$ مستقل خطی باشند، در اینصورت $\tilde{x}^I$ را یک جواب پایه ای فازی شهودی می‌نامیم.

۲-٤- جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\max\ \tilde{z}^I\approx\tilde{c}^I\tilde{x}^I,\\
&s.t.\ \ A\tilde{x}^I\approx\tilde{b}^I,\\
&\qquad \tilde{x}^I\quad\tilde{0}^I,
\end{aligned}\tag{۶}$$

که در آن A یک ماتریس $m\times n$ و $\tilde{b}^I$ یک بردار فازی شهودی است. فرض کنید رتبه $(A)=$ رتبه $(A,b)=m$. با افراز ماتریس A بصورت $[B\quad N]$ که در آن رتبه $(B)=m$ بردار $\tilde{x}^{IT}=(\tilde{x}_B^{IT}\quad\tilde{x}_N^{IT})$ با

$$\tilde{x}_B^I\approx B^{-1}\tilde{b}^I,\tilde{x}_N^I\approx\tilde{0}^I.\tag{۷}$$

یک جواب پایه‌ای فازی شهودی برای دستگاه $A\tilde{x}^I\approx\tilde{b}^I$ نامیده می‌شود. اگر $\tilde{x}_B^I\quad\tilde{0}^I$ باشد. در اینصورت بردار $\tilde{x}^{IT}=(\tilde{x}_B^{IT}\quad\tilde{x}_N^{IT})$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی برای دستگاه $A\tilde{x}^I\approx\tilde{b}^I$ نامیده می‌شود ($\tilde{x}_B^I$ را بردار متغیرهای فازی شهودی پایه‌ای و $\tilde{x}_N^I$ را بردار متغیرهای فازی شهودی غیرپایه‌ای می‌نامیم). همچنین مقدار تابع هدف فازی شهودی متناظر با این جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی برابر است با $\tilde{z}^I\approx\tilde{c}_B^I\tilde{x}_B^I$ که در آن $\tilde{c}_B^I=(\tilde{c}_{B_1}^I,\dots,\tilde{c}_{B_m}^I)$. برای هر اندیس $1\leq j\leq n$ نیز داریم:

$$\tilde{z}_j^I\approx\tilde{c}_B^Iy_j\approx\tilde{c}_B^IB^{-1}a_j.\tag{۸}$$

واضح است که برای هر اندیس پایه‌ای $j=B_i,(i=1,\dots,m)$ داریم: $B^{-1}a_j=e_i$ که $e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ i-مین بردار واحد است. چون $Be_i=(a_{B_1},\dots,a_{B_i},\dots,a_{B_m})e_i=a_{B_i}=a_j$ بنابراین داریم:

$$\tilde{z}_j^I-\tilde{c}_j^I\approx\tilde{c}_B^IB^{-1}a_j-\tilde{c}_j^I\approx\tilde{c}_B^Ie_j-\tilde{c}_j^I\approx\tilde{c}_j^I-\tilde{c}_j^I\approx\tilde{0}^I.\tag{۹}$$

قضیه ۲. فرض کنید **مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی (٦)** ناتباهیده باشد. در اینصورت یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی $\tilde{x}_B^I\approx B^{-1}\tilde{b}^I\quad\tilde{0}^I,\tilde{x}_N^I\approx\tilde{0}^I$ برای این مساله بهینه است اگر و فقط اگر به ازای هر اندیس j ، $1\leq j\leq$ ı داشته باشیم: $\tilde{z}_j^I=\tilde{c}_B^IB^{-1}a_j\quad\tilde{c}_j^I$.

اثبات: فرض کنید $\tilde{x}_*^I \approx (\tilde{x}_B^{IT}, \tilde{x}_N^{IT})^T$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی برای **مساله (٦)** باشد بطوریکه $\tilde{x}_B^I \approx B^{-1}\tilde{b}^I \quad \tilde{0}^I, \tilde{x}_N^I \approx \tilde{0}^I$. در اینصورت مقدار تابع هدف فازی شهودی متناظر با آن برابر است با

$$\tilde{z}_*^I \approx \tilde{c}^I \tilde{x}_*^I \approx \tilde{c}_B^I \tilde{x}_B^I \approx \tilde{c}_B^I B^{-1} \tilde{b}^I. \tag{۱۰}$$

از طرف دیگر به ازای هر جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی برای **مساله (٦)** داریم:

$$\tilde{b}^I \approx A\tilde{x}^I \approx B\tilde{x}_B^I + N\tilde{x}_N^I. \tag{۱۱}$$

حال ما می‌توانیم **رابطه (۱۱)** را بصورت بنویسیم:

$$\tilde{x}_B^I \approx B^{-1}\tilde{b}^I - B^{-1}N\tilde{x}_N^I. \tag{۱۲}$$

در اینصورت به ازای هر جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی برای **مساله (٦)** خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{z}^I &\approx \tilde{c}^I \tilde{x}^I \approx \tilde{c}_B^I \tilde{x}_B^I + \tilde{c}_N^I \tilde{x}_N^I \approx \tilde{c}_B^I B^{-1}\tilde{b}^I - (\tilde{c}_B^I B^{-1}N - \tilde{c}_N^I)\tilde{x}_N^I, \\ &\approx \tilde{c}_B^I B^{-1}\tilde{b}^I - \sum_{j=1}^{n} (\tilde{c}_B^I B^{-1} a_j - \tilde{c}_j^I)\tilde{x}_j^I \approx \tilde{c}_B^I B^{-1}\tilde{b}^I - \sum_{j=1}^{n} (\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I)\tilde{x}_j^I. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

حال با استفاده از **روابط (۱۰)** و **(۱۳)** داریم:

$$\tilde{z}^I \approx \tilde{z}_*^I - \sum_{j \neq B_i} (\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I)\tilde{x}_j^I. \tag{۱۴}$$

همچنین اگر به ازای هر اندیس j ، $1 \le j \le n$ داشته باشیم: $\tilde{z}_j^I \quad \tilde{c}_j^I$ در اینصورت از شدنی بودن $\tilde{x}^I$ داریم: $(\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I)\tilde{x}_j^I \quad \tilde{0}^I$ و لذا خواهیم داشت: $\sum_{j \neq B_i} (\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I)\tilde{x}_j^I \quad \tilde{0}^I$ حال با استفاده از **رابطه (١٤)** داریم $\tilde{z}_*^I \quad \tilde{z}^I$ و این یعنی $\tilde{x}_*^I$ بهینه است.

برای اثبات طرف دیگر، فرض کنید $\tilde{x}_*^I$ یک جواب بهینه پایه‌ای فازی شهودی شدنی برای **مساله (٦)** باشد. برای $j = B_i, 1 \le i \le m$ با استفاده از **رابطه (۹)** داریم: $\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I \approx \tilde{0}^I$. همچنین با استفاده از **رابطه (١٤)** واضح است اگر برای هر متغیر غیر پایه‌ای $\tilde{x}_j^I$ داشته باشیم: $\tilde{z}_j^I \quad \tilde{c}_j^I$ در اینصورت ما می‌توانیم متغیر $\tilde{x}_j^I$ را وارد پایه کرده و داشته باشیم: $\tilde{z}_*^I \prec \tilde{z}^I$ که این مساله در تضاد با بهینگی $\tilde{z}_*^I$ می‌باشد (چون مساله ناتباهیده است و $\tilde{x}_j^I \succ \tilde{0}^I$ در پایه جدید است). لذا به ازای هر اندیس j ، $1 \le j \le n$ باید داشته باشیم: $\tilde{z}_j^I \quad \tilde{c}_j^I$.

قضیه ۳. فرض کنید $\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی برای **مساله (٦)** باشد. اگر به ازای هر ستون a_j از A که در پایه B وجود ندارد، شرط $\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I \prec \tilde{0}^I$ برقرار باشد و داشته باشیم $y_{ij} > 0$ به ازای برخی i ، $1 \le i \le m$ ، در اینصورت می‌توانیم یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی جدید، با جایگزینی یکی از ستون‌ها در B با استفاده از a_j بدست آوریم.

اثبات: فرض کنید $\tilde{x}_B^I = (\tilde{x}_{B_1}^I, \tilde{x}_{B_2}^I, \tilde{x}_{B_3}^I, ..., \tilde{x}_{B_m}^I)$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی با k مولفه مثبت باشد بطوریکه $B\tilde{x}_B^I \approx \tilde{b}^I$ یا $\tilde{x}_B^I \approx B^{-1}\tilde{b}^I$ که در آن $\tilde{x}_B^I = [\alpha_i - h_i, \alpha_i, \beta_i, \beta_i + h_i; \alpha_i' - h_i', \alpha_i', \beta_i', \beta_i' + h_i']$ ، $\alpha_i \le \beta_i, \alpha_i' \le \beta_i', h_i, h_i' \ge 0$ به ازای هر i ، $1 \le i \le m$ ، $\frac{\alpha_i + \beta_i + \alpha_i' + \beta_i'}{4} > 0$ به ازای هر i ، $1 \le i \le k$ و $\frac{\alpha_i + \beta_i + \alpha_i' + \beta_i'}{4} = 0$ به ازای هر i ، $k+1 \le i \le m$. یعنی $\tilde{x}_{B_i}^I > \tilde{0}^I$ به ازای هر i ، $1 \le i \le k$ و

$$\tilde{x}_{B_i}^I = [-\beta_i - h_i, -\beta_i, \beta_i, \beta_i + h_i; -\beta_i' - h_i', -\beta_i', \beta_i', \beta_i' + h_i'].$$

به ازای هر i، $k+1 \le i \le m$. حال می‌توانیم معادله $B\tilde{x}_B^I \approx \tilde{b}^I$ را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\Big[& \tilde{x}_{B_i}^I b_i + [-\beta_{k+1} - h_{k+1}, -\beta_{k+1}, \beta_{k+1}, \beta_{k+1} + h_{k+1}, \\ & -\beta'_{k+1} - h'_{k+1}, -\beta'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \beta'_{k+1} + h'_{k+1}]\Big], \\ & + [-\beta_{k+2} - h_{k+2}, -\beta_{k+2}, \beta_{k+2}, \beta_{k+2} + h_{k+2}, \\ & -\beta'_{k+2} - h'_{k+2}, -\beta'_{k+2}, \beta'_{k+2}, \beta'_{k+2} + h'_{k+2}] b_{k+2} + \ldots \\ & + [-\beta_m - h_m, -\beta_m, \beta_m, \beta_m + h_m; -\beta'_m - h'_m, -\beta'_m, \beta'_m, \beta'_m + h'_m] b_m \approx \tilde{b}^I .\end{aligned}$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_{B_i}^I b_i + \sum_{i=k+1}^{m}[-\beta_i - h_i, -\beta_i, \beta_i, \beta_i + h_i; -\beta'_i - h'_i, -\beta'_i, \beta'_i, \beta'_i + h'_i]\, b_i \approx \tilde{b}^I . \qquad (۱۵)$$

سپس برای هر ستون a_j از A که در B وجود ندارد، می‌نویسیم:

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} b_i = y_{1j} b_1 + y_{2j} b_2 + \ldots + y_{rj} b_r + \ldots + y_{mj} b_m = y_j B.$$

می‌دانیم اگر بردار پایه‌ای b_r که در آن $y_{rj} \neq 0$ است، با بردار a_j از A جایگزین شود، در اینصورت مجموعه $(b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, a_j, b_{r+1}, \ldots, b_m)$ باز هم تشکیل پایه می‌دهد. در اینصورت برای $y_{rj} \neq 0$ و $r \le k$ می‌توانیم بنویسیم:

$$b_r = \frac{a_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} b_i = \frac{a_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{k} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} b_i - \sum_{i=k+1}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} b_i .$$

حال می‌توانیم **معادله (۱۵)** را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{k}\tilde{x}_{B_i}^I b_i + \tilde{x}_{B_r}^I b_r + \sum_{i=k+1}^{m}[-\beta_i - h_i, -\beta_i, \beta_i, \beta_i + h_i; -\beta'_i - h'_i, -\beta'_i, \beta'_i, \beta'_i + h'_i]\, b_i \approx \tilde{b}^I . \\ & \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{k}\tilde{x}_{B_i}^I b_i + \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} a_j - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{k} y_{ij} b_i - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \sum_{i=k+1}^{m} y_{ij} b_i, \\ & + \sum_{i=k+1}^{m}[-\beta_i - h_i, -\beta_i, \beta_i, \beta_i + h_i; -\beta'_i - h'_i, -\beta'_i, \beta'_i, \beta'_i + h'_i]\, b_i \approx \tilde{b}^I . \\ & \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{k}\left(\tilde{x}_{B_i}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{ij} \right) b_i + \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} a_j, \\ & + \sum_{i=k+1}^{m}\left([-\beta_i - h_i, -\beta_i, \beta_i, \beta_i + h_i; -\beta'_i - h'_i, -\beta'_i, \beta'_i, \beta'_i + h'_i] - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{ij} \right) b_i \approx \tilde{b}^I . \end{aligned}$$

چون $\tilde{x}_{B_i}^I = [-\beta_i - h_i, -\beta_i, \beta_i, \beta_i + h_i; -\beta'_i - h'_i, -\beta'_i, \beta'_i, \beta'_i + h'_i]$ به ازای هر i، $k+1 \le i \le m$ لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{k}\left(\tilde{x}^I_{B_i}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}y_{ij}\right)b_i+\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}a_j+\sum_{i=k+1}^{m}\left(\tilde{x}^I_{B_i}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}y_{ij}\right)b_i\approx\tilde{b}^I,$$

$$\Rightarrow\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\left(\tilde{x}^I_{B_i}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}y_{ij}\right)b_i+\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}a_j\approx\tilde{b}^I\Rightarrow\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\bar{\tilde{x}}^I_{B_i}b_i+\bar{\tilde{x}}^I_{B_r}a_j\approx\tilde{b}^I.$$

که در آن $\bar{\tilde{x}}^I_{B_i}=\left(\tilde{x}^I_{B_i}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}y_{ij}\right)$، $i\neq r$ و $\bar{\tilde{x}}^I_{B_r}=\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}$ که این یک جواب پایه‌ای فازی شهودی جدید به ما می‌دهد. حال برای اینکه نشان دهیم این جواب پایه‌ای فازی شهودی جدید، شدنی نیز هست باید ثابت کنیم: $\tilde{0}^I, i\neq r$ $\left(\tilde{x}^I_{B_i}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}y_{ij}\right)$ و $\tilde{0}^I$ $\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}$.

بدین منظور بردار $y_{rj}>0$ را بگونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}\approx \boldsymbol{min}\left\{\frac{\tilde{x}^I_{B_i}}{y_{ij}}:y_{ij}>0\right\}$. لذا داریم: . $\frac{\tilde{x}^I_{B_i}}{y_{ij}}$ $\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\left[\frac{\alpha_r-h_r}{y_{rj}},\frac{\alpha_r}{y_{rj}},\frac{\beta_r}{y_{rj}},\frac{\beta_r+h_r}{y_{rj}};\frac{\alpha'_r-h'_r}{y_{rj}},\frac{\alpha'_r}{y_{rj}},\frac{\beta'_r}{y_{rj}},\frac{\beta'_r+h'_r}{y_{rj}}\right],$$

$$\left[\frac{\alpha_i-h_i}{y_{ij}},\frac{\alpha_i}{y_{ij}},\frac{\beta_i}{y_{ij}},\frac{\beta_i+h_i}{y_{ij}};\frac{\alpha'_i-h'_i}{y_{ij}},\frac{\alpha'_i}{y_{ij}},\frac{\beta'_i}{y_{ij}},\frac{\beta'_i+h'_i}{y_{ij}}\right].$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\alpha_i-h_i}{y_{ij}}-\frac{\beta_r+h_r}{y_{rj}},\frac{\alpha_i}{y_{ij}}-\frac{\beta_r}{y_{rj}},\frac{\beta_i}{y_{ij}}-\frac{\alpha_r}{y_{rj}},\frac{\beta_i+h_i}{y_{ij}}-\frac{\alpha_r-h_r}{y_{rj}},\right.$$

$$\left.\frac{\alpha'_i-h'_i}{y_{ij}}-\frac{\beta'_r+h'_r}{y_{rj}},\frac{\alpha'_i}{y_{ij}}-\frac{\beta'_r}{y_{rj}},\frac{\beta'_i}{y_{ij}}-\frac{\alpha'_r}{y_{rj}},\frac{\beta'_i+h'_i}{y_{ij}}-\frac{\alpha'_r-h'_r}{y_{rj}}\right]\quad\tilde{0}^I.$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\left(\frac{\alpha_i}{y_{ij}}-\frac{\beta_r}{y_{rj}}\right)+\left(\frac{\beta_i}{y_{ij}}-\frac{\alpha_r}{y_{rj}}\right)+\left(\frac{\alpha'_i}{y_{ij}}-\frac{\beta'_r}{y_{rj}}\right)+\left(\frac{\beta'_i}{y_{ij}}-\frac{\alpha'_r}{y_{rj}}\right)}{4}\right\}\geq 0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\alpha_i+\beta_i+\alpha'_i+\beta'_i}{y_{ij}}\right)-\left(\frac{\alpha_r+\beta_r+\alpha'_r+\beta'_r}{y_{ij}}\right)\geq 0.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\tilde{x}^I_{B_i}}{y_{ij}}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}\right)\quad\tilde{0}^I.$$

در نتیجه جواب پایه‌ای فازی شهودی جدید، شدنی نیز می‌باشد.

لازم به ذکر است که بعد از جایگذاری بردارهای پایه‌ای، ماتریس پایه‌ای جدید بصورت $\bar{B}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\ldots,\bar{b}_m)$ است که در آن $\bar{b}_i=b_i$ برای $i\neq r$ و $\bar{b}_r=a_j$. همچنین جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی جدید نیز بصورت $\bar{\tilde{x}}^I_B$ است که در آن $\bar{\tilde{x}}^I_{B_i}=(\tilde{x}^I_{B_i}-\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}y_{ij})$، $i\neq r$ و $\bar{\tilde{x}}^I_{B_r}=\frac{\tilde{x}^I_{B_r}}{y_{rj}}$ متغیرهای پایه‌ای می‌باشند.

گزاره ۴. فرض کنید $\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی **مساله (۶)** با مقدار تابع هدف $\tilde{z}_0^I \approx \tilde{c}_B^I\tilde{x}_B^I$ باشد. همچنین فرض کنید $\bar{\tilde{x}}_B^I$ نیز یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی دیگر با مقدار تابع هدف $\bar{\tilde{z}}^I \approx \bar{\tilde{c}}_B^I\bar{\tilde{x}}_B^I$ باشد که از جایگزینی بردار ستونی غیر پایه‌ای a_j به پایه $\tilde{0}^I \prec \tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I$ و $y_{ij} > 0$ به ازای برخی i، $1 \le i \le m$ بدست آمده باشد. در اینصورت خواهیم داشت: $\bar{\tilde{z}}^I \quad \tilde{z}_0^I$.

اثبات: فرض کنید $\tilde{x}_B^I$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی با مقدار تابع هدف $\tilde{z}_0^I \approx \tilde{c}_B^I\tilde{x}_B^I$ باشد. همچنین فرض کنید a_j بردار ستونی معرفی شده در پایه $\tilde{0}^I \prec \tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I$ باشد. فرض کنید b_r بردار ستونی خارج شده از پایه و $\bar{\tilde{x}}_B^I$ جواب پایه‌ای فازی شهودی جدید باشد، در اینصورت خواهیم داشت: $\bar{\tilde{x}}_{B_i}^I = (\tilde{x}_{B_i}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{ij})$ ، $i \ne r$ و $\bar{\tilde{x}}_{B_r}^I = \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}}$. چون $\bar{\tilde{c}}_{B_i}^I = \tilde{c}_{B_i}^I$ ، $i \ne r$ و $\bar{\tilde{c}}_{B_r}^I = \tilde{c}_j^I$ در اینصورت مقدار تابع هدف فازی شهودی جدید بصورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
\bar{\tilde{z}}^I &\approx \bar{\tilde{c}}_B^I \bar{\tilde{x}}_B^I \\
&\approx \sum_{i=1}^{m} \bar{\tilde{c}}_{B_i}^I \bar{\tilde{x}}_{B_i}^I \approx \sum_{\substack{i=1\\ i\ne r}}^{m} \bar{\tilde{c}}_{B_i}^I \bar{\tilde{x}}_{B_i}^I + \bar{\tilde{c}}_{B_r}^I \bar{\tilde{x}}_{Br}^I \approx \sum_{\substack{i=1\\ i\ne r}}^{m} \tilde{c}_{B_i}^I \left(\tilde{x}_{B_i}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{ij} \right) + \tilde{c}_j^I \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}}, \\
&\approx \sum_{\substack{i=1\\ i\ne r}}^{m} \tilde{c}_{B_i}^I \left(\tilde{x}_{B_i}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{ij} \right) + \tilde{c}_{B_r}^I \left(\tilde{x}_{B_r}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{rj} \right) + \tilde{c}_j^I \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \approx \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{B_i}^I \left(\tilde{x}_{B_i}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} y_{ij} \right) + \tilde{c}_j^I \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}}, \\
&\approx \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{B_i}^I \tilde{x}_{B_i}^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{B_i}^I y_{ij} + \tilde{c}_j^I \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \approx \tilde{z}_0^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \tilde{z}_j^I + \tilde{c}_j^I \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \approx \tilde{z}_0^I - \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} (\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I).
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

از آنجایی که $y_{rj} > 0$ ، $\tilde{0}^I \prec (\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I)$ و $\tilde{0}^I \quad \frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}}$ ، فرض می‌کنیم:

$$
\frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} = \left[\frac{\alpha_r - h_r}{y_{rj}}, \frac{\alpha_r}{y_{rj}}, \frac{\beta_r}{y_{rj}}, \frac{\beta_r + h_r}{y_{rj}}; \frac{\alpha_r' - h_r'}{y_{rj}}, \frac{\alpha_r'}{y_{rj}}, \frac{\beta_r'}{y_{rj}}, \frac{\beta_r' + h_r'}{y_{rj}} \right] \quad \tilde{0}^I,
$$

$\alpha_r \le \beta_r$ ، $\alpha_r' \le \beta_r'$ و $\left(\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I\right) = \left[\alpha_j - h_j, \alpha_j, \beta_j, \beta_j + h_j; \alpha_j' - h_j', \alpha_j', \beta_j', \beta_j' + h_j' \right] \prec \tilde{0}^I$ ، $\alpha_j \le \beta_j$ ، $\alpha_j' \le \beta_j'$. در اینصورت خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{x}_{B_r}^I}{y_{rj}} \otimes \left(\tilde{z}_j^I - \tilde{c}_j^I\right) &\approx \left(\frac{\alpha_r - h_r}{y_{rj}}, \frac{\alpha_r}{y_{rj}}, \frac{\beta_r}{y_{rj}}, \frac{\beta_r + h_r}{y_{rj}}; \frac{\alpha_r' - h_r'}{y_{rj}}, \frac{\alpha_r'}{y_{rj}}, \frac{\beta_r'}{y_{rj}}, \frac{\beta_r' + h_r'}{y_{rj}} \right), \\
&\quad \otimes \left(\alpha_j - h_j, \alpha_j, \beta_j, \beta_j + h_j; \alpha_j' - h_j', \alpha_j', \beta_j', \beta_j' + h_j' \right), \\
&\approx \left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\alpha_r + \beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right) - w - \left|a_2 k + b_2 h\right|, \left(\frac{\alpha_r + \beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right) - w, \left(\frac{\alpha_r + \beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right) + w, \\[2ex]
\left(\frac{\alpha_r + \beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right) + w + \left|a_2 k + b_2 h\right|; \left(\frac{\alpha_r' + \beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j' + \beta_j'}{2}\right) - w' - \left|a_2' k' + b_2' h'\right|, \\[2ex]
\left(\frac{\alpha_r' + \beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j' + \beta_j'}{2}\right) - w', \left(\frac{\alpha_r' + \beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j' + \beta_j'}{2}\right) + w', \left(\frac{\alpha_r' + \beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j' + \beta_j'}{2}\right) + w' + \left|a_2' k' + b_2' h'\right|
\end{array} \right).
\end{aligned}
$$

همچنین چون $0 \geq \left(\frac{\alpha_r+\beta_r}{2y_{rj}}\right)$، $0 \geq \left(\frac{\alpha_r'+\beta_r'}{2y_{rj}}\right)$ ، $0 < \left(\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}\right)$ و $0 < \left(\frac{\alpha_j'+\beta_j'}{2}\right)$ می‌باشند، خواهیم داشت:

$$\left(\begin{array}{c}\left(\dfrac{\left(\frac{\alpha_r+\beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}\right)-w+\left(\frac{\alpha_r+\beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}\right)+w+\left(\frac{\alpha_r'+\beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j'+\beta_j'}{2}\right)-w'+\left(\frac{\alpha_r'+\beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j'+\beta_j'}{2}\right)+w'}{4}\right)= \\ \left(\dfrac{\left(\frac{\alpha_r+\beta_r}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}\right)+\left(\frac{\alpha_r'+\beta_r'}{2y_{rj}}\right)\left(\frac{\alpha_j'+\beta_j'}{2}\right)}{2}\right)\leq 0.\end{array}\right.$$

با بکار بردن روابط فوق و با استفاده از **رابطه (۱۶)** خواهیم داشت: $\tilde{z}_0^I \quad \bar{\tilde{z}}^I$ و این بدین معنی است که جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی جدید مقدار تابع هدف را بهبود می‌بخشد.

قضیه ۴. فرض کنید $\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I$ یک جواب پایه ای فازی شهودی شدنی برای **مساله (۶)** باشد. حال اگر یک a_k از A که در B وجود ندارد، موجود باشد بطوریکه $\tilde{z}_k^I - \tilde{c}_k^I \prec \tilde{0}^I$ و $y_{ik} \leq 0$ به ازای هر i، $1 \leq i \leq m$ در اینصورت **مساله (۶)** یک جواب نامتناهی دارد.

اثبات: فرض کنید $\tilde{x}_B^I$ یک جواب پایه‌ای فازی شهودی برای **مساله (۶)** باشد. در اینصورت داریم: $\tilde{x}_{B_i}^I + \sum_{j\neq B_i} y_{ij}\tilde{x}_j^I \approx \tilde{y}_{i0}^I \,, i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ یا $\tilde{x}_{B_i}^I \approx \tilde{y}_{i0}^I - \sum_{j\neq B_i} y_{ij}\tilde{x}_j^I \,, i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$. حال اگر $\tilde{x}_k^I$ متغیر وارد شونده به پایه باشد، در اینصورت به ازای هر $j \neq B_i \bigcup k$ خواهیم داشت: $\tilde{x}_k^I \succ \tilde{0}^I$ و $\tilde{x}_j^I \approx \tilde{0}^I$. از طرفی طبق فرض مساله چون به ازای هر i، $1 \leq i \leq m$، $y_{ik} \leq 0$ است، داریم: $\tilde{y}_{i0}^I - y_{ik}\tilde{x}_k^I \quad \tilde{0}^I$. در نتیجه جواب پایه‌ای فعلی شدنی باقی می‌ماند. همچنین مقدار $\bar{\tilde{z}}^I$ برای این جواب شدنی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{z}}^I &\approx \tilde{c}_B^I\tilde{x}_B^I + \tilde{c}_N^I\tilde{x}_N^I \approx \sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_{B_i}^I(\tilde{y}_{i0}^I - y_{ik}\tilde{x}_k^I) + \tilde{c}_k^I\tilde{x}_k^I,\\ &\approx \sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_{B_i}^I\tilde{y}_{i0}^I - (\sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_{B_i}^I y_{ik} - \tilde{c}_k^I)\tilde{x}_k^I \approx \tilde{c}_B^I\tilde{y}_0^I - (\tilde{c}_B^I y_k - \tilde{c}_k^I)\tilde{x}_k^I \approx \tilde{z}^I - (\tilde{z}_k^I - \tilde{c}_k^I)\tilde{x}_k^I.\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\bar{\tilde{z}}^I \quad \tilde{z}^I \quad (\tilde{z}_k^I \quad \tilde{c}_k^I)\tilde{x}_k^I. \qquad (۱۷)$$

لذا ما می‌توانیم $\tilde{x}_k^I$ را با هر مقدار بزرگ دلخواه وارد پایه کرده و در نتیجه با توجه به رابطه (۱۷)، ما یک جواب نامتناهی خواهیم داشت.

۵- الگوریتم سیمپلکس برای مساله برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن

۱. یک جواب پایه‌ای فازی شهودی شدنی $\tilde{x}_N^I \approx \tilde{0}^I$، $\tilde{y}_0^I \approx \tilde{x}_B^I \approx B^{-1}\tilde{b}^I$ با مقدار تابع هدف $\tilde{z}^I \approx \tilde{y}_{00}^I \approx \tilde{c}_B^I\tilde{y}_0^I$ داده شده است و جدول سیمپلکس مربوط به آن نیز در دست است.

۲. مقادیر $\tilde{y}^I_{0j} \approx c_B B^{-1} a_j - \tilde{c}^I_j \approx z_j - \tilde{c}^I_j$ را برای $1 \le j \le n$ ، $j \neq B_i$ و $1 \le i \le m$ تعیین کنید. اگر $\tilde{0}^I$ $\tilde{y}^I_{0j}$ در اینصورت توقف کنید، جواب فازی شهودی فعلی بهینه است.

۳. $\tilde{y}^I_{0k} \prec \tilde{0}^I$ را اختیار کنید. اگر $y_k \le 0$ آنگاه توقف کنید (مساله دارای جواب نامتناهی است)، در غیر اینصورت یک اندیس r مربوط به متغیر فازی شهودی خارج شونده $\tilde{x}^I_{B_r}$ از پایه را بصورت زیر تعیین کنید:

$$\frac{\tilde{y}^I_{r0}}{y_{rk}} \approx \min_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{\tilde{y}^I_{i0}}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0 \right\}, 1 \le i \le m. \qquad (۱۷)$$

۴. عنصر y_{rk} را به عنوان عنصر محوری در نظر گرفته و جدول سیمپلکس فازی شهودی را با عملیات حذفی گاوس به روز رسانی کنید و سپس به گام ۲ بروید.

۶- مثال کاربردی

در اینجا ما یک مساله برنامه‌ریزی خطی که داده‌های آن بر اساس یک مساله واقعی می‌باشد را مدل کرده سپس با استفاده از روش ارایه شده، به حل آن می‌پردازیم.

مثال ۱. یک کارخانه خوراک دام برای گاو، گوسفند و طیور خوراک تهیه می‌کند. این خوراک با ترکیب مواد اصلی زیر تهیه می‌شود: ذرت، دانه سویا و پودر ماهی. میزان این ترکیبات در هر کیلو گرم از مواد اصلی در جدول زیر خلاصه می‌شود:

	مواد اصلی		
محصول	ذرت	دانه سویا	پودر ماهی
خوراک گاو	9	5	3
خوراک گوسفند	3	4	-
خوراک طیور	5	-	2

به دلیل کمبود در منابع، مقدار محدودی از مواد اصلی یعنی حدود ۰/۵ تن ذرت، حدود ۰/۳۵ تن دانه سویا و حدود ۰/۱۵ تن پودر ماهی موجود است. همچنین با توجه به تغییرات قیمت، سود هر واحد خوراک متفاوت است. در عین حال این کارخانه می‌خواهد سود خود را حدود ۱۲ دلار برای خوراک گوسفند، حدود ۱۰ دلار برای خوراک گاو و حدود ۱۵ دلار برای خوراک طیور نگه دارد. حال از ما خواسته شده مساله را بگونه‌ای فرمول‌بندی کنیم که سود کارخانه ماکزیمم شود.

حل) به دلیل عدم قطعیت سود هر خوراک دام و مواد تشکیل دهنده آن، میزان واحدهای تولید شده به ازای هر محصول نیز نامشخص خواهد بود. لذا ما مساله را بصورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن به ازای هر میزان نامعلوم، فرموله می‌کنیم. بدین منظور و بر اساس داده‌های گرفته شده از کارخانه، سود خوراک گاو که در حدود ۱۰ دلار است بصورت [۷،۹،۱۱،۱۳؛۵،۸،۱۲،۱۵] خواهد بود. پارامترهای دیگر نیز به همین ترتیب و بصورت اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن مدل می شوند. لذا مدل مساله بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\max\ \tilde{z}^I &\approx (7,9,11,13;5,8,12,15)\tilde{x}_1^I + (7,10,14,17;6,8,16,18)\tilde{x}_2^I + (12,14,16,18;10,13,17,20)\tilde{x}_3^I,\\
s.t.\quad & 9\tilde{x}_1^I + 3\tilde{x}_2^I + 5\tilde{x}_3^I \ \ (460,480,520,540;430,470,530,570),\\
& 5\tilde{x}_1^I + 4\tilde{x}_2^I \qquad (320,340,360,380;300,330,370,400),\\
& 3\tilde{x}_1^I \qquad + 2\tilde{x}_3^I \ \ (120,130,170,180;105,125,175,195),\\
& \tilde{x}_1^I, \tilde{x}_2^I, \tilde{x}_3^I \ \ \tilde{0}^I.
\end{aligned}$$

جدول اولیه سیمپلکس فازی شهودی بصورت زیر است:

جدول ۱- جدول اولیه سیمپلکس فازی شهودی.

Table 1- The initial simplex table of intuitionistic fuzzy.

Basis	$\tilde{w}_*^I$	$\tilde{x}_2^I$	$\tilde{x}_3^I$	$\tilde{x}_4^I$	$\tilde{x}_5^I$	$\tilde{x}_6^I$	R.H. S
$\tilde{z}^I$	$\tilde{c}_1^I$	$\tilde{c}_2^I$	$\tilde{c}_3^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$
$\tilde{x}_4^I$	9	3	5	1	0	0	$\tilde{b}_1^I$
$\tilde{x}_5^I$	5	4	0	0	1	0	$\tilde{b}_2^I$
$\tilde{x}_6^I$	3	0	2	0	0	1	$\tilde{b}_3^I$

که در آن

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1^I &= \left(-13,-11,-9,-7;-15,-12,-8,-5\right) & \tilde{b}_1^I &= \left(460,480,520,540;430,470,530,570\right)\\
\tilde{c}_2^I &= \left(-17,-14,-10,-7;-18,-16,-8,-6\right) & \tilde{b}_2^I &= \left(320,340,360,380;300,330370,400\right)\\
\tilde{c}_3^I &= \left(-18,-16,-14,-12;-20,-17,-13,-10\right) & \tilde{b}_3^I &= \left(120,130,170,180;105,125,175,195\right)
\end{aligned}$$

چون $\left(\tilde{y}_{01}^I, \tilde{y}_{02}^I, \tilde{y}_{03}^I\right) \approx \left(-10,-12,-15\right)$ در اینصورت متغیر $\tilde{x}_3^I$ وارد پایه شده و متغیر $\tilde{x}_6^I$ از پایه خارج می‌شود زیرا داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{r0}}{y_{rk}} &\approx \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}}\middle| y_{ik} > 0\right\}\\
&\approx \min\left\{\left(\frac{460}{5},\frac{480}{5},\frac{520}{5},\frac{540}{5};\frac{430}{5},\frac{470}{5},\frac{530}{5},\frac{570}{5}\right),\left(\frac{120}{2},\frac{130}{2},\frac{170}{2},\frac{180}{2};\frac{105}{2},\frac{125}{2},\frac{175}{2},\frac{195}{2}\right),\right\}\\
&\approx \min\left\{100,75\right\}\\
&\approx 75.
\end{aligned}$$

با بکارگیری الگوریتم حل و بعد از ۲ تکرار جدول بهینه بصورت **جدول ۲** خواهد بود:

جدول ۲- جدول بهینه سیمپلکس فازی شهودی.
Table 2- The optimal simplex table of intuitionistic fuzzy.

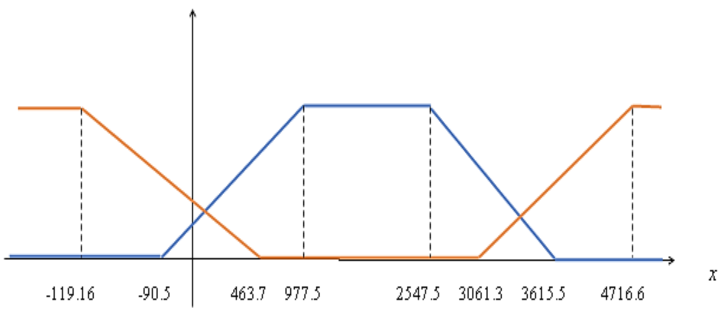
Basis	$\tilde{x}_1^I$	$\tilde{x}_2^I$	$\tilde{x}_3^I$	$\tilde{x}_4^I$	$\tilde{x}_5^I$	$\tilde{x}_6^I$	**R.H. S**
$\tilde{z}^I$	$\tilde{y}_{01}^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{y}_{04}^I$	$\tilde{y}_{05}^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{y}_{00}^I$
$\tilde{x}_2^I$	$\frac{5}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\tilde{y}_{20}^I$
$\tilde{x}_6^I$	$\frac{9}{10}$	0	0	$-\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1	$\tilde{y}_{60}^I$
$\tilde{x}_3^I$	$\frac{21}{20}$	0	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{20}$	0	$\tilde{y}_{30}^I$

که در آن:

$$\tilde{y}_{01}^I=(\frac{339}{60},\frac{918}{60},\frac{1572}{60},\frac{2151}{60};-\frac{15}{10},\frac{591}{60},\frac{1899}{60},\frac{430}{10}),\ \tilde{y}_{20}^I=(\frac{10}{3},\frac{115}{3},\frac{410}{3},\frac{515}{3};-\frac{280}{6},\frac{125}{6},\frac{925}{6},\frac{1330}{6}),$$
$$\tilde{y}_{04}^I=(-\frac{56}{60},-\frac{92}{60},\frac{272}{60},\frac{416}{60};-2,-\frac{4}{60},\frac{364}{60},10),\ \tilde{y}_{60}^I=(0,24,86,110;-33,12,98,143),$$
$$\tilde{y}_{05}^I=(-\frac{57}{60},\frac{6}{60},\frac{84}{60},\frac{147}{60};-\frac{15}{10},-\frac{33}{60},\frac{123}{60},3),\ \tilde{y}_{30}^I=(5,22,73,90;-19,\frac{27}{2},\frac{163}{2},114),$$
$$\tilde{y}_{00}^I=(-\frac{1086}{12},\frac{11730}{12},\frac{30570}{12},\frac{43386}{12};-\frac{14300}{12},\frac{5564}{12},\frac{36736}{12},\frac{56600}{12}).$$

در نتیجه جواب بهینه، مقدار تابع هدف بهینه و همچنین نمودار سود بهینه فازی شهودی بدست آمده با روش ارایه شده بصورت زیر است:

$$\tilde{x}_1^I=\left(0,0,0,0;0,0,0,0\right),$$
$$\tilde{x}_2^I=\left(3.3,38.3,136.7,171.7;-46.7,20.8,154.2,221.7\right),$$
$$\tilde{x}_3^I=\left(5,22,73,90;-19,13.5,81.5,114\right),$$
$$\tilde{z}^I=(-90.5,977.5,2547.5,3615.5;-1191.6,463.7,3061.3,4716.6).$$



شکل ۲- نمودار سود بهینه فازی شهودی.
Figure 2- Graphical of intuitionistic fuzzy optimal profit.

به بیان دیگر داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 87.5, \\ x_3 = 47.5, \\ z = 1762.5 \end{cases}$$

و این یعنی برای اینکه میزان سود کارخانه تولید خوراک دام برابر با ماکزیمم مقدار خود یعنی ۱۷۶۲/۵ شود باید میزان تولید خوراک گاو برابر با ۰، میزان تولید خوراک گوسفند برابر۸۷/۵ با و میزان تولید خوراک طیور برابر با ۴۷/۵ باشد.

مثال ۲. یک کارخانه تولید رنگ سه محصول p_1 ، p_2 و p_3 را با استفاده از چهار نوع ماده خام M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 تولید می کند. میزان ماده خام مورد نیاز برای تولید هر محصول و همچنین مقدار ماده خام در دسترس در **جدول ۳** خلاصه می‌شود:

جدول ۳- داده‌های مساله.
Table 3- Problem data.

مواد خام	$y_{rj} < 0$	$j = 1,\dots,n$	$y_{rj} \ge 0$	دسترسی روزانه
M_1	4	2	1	11
M_2	1	5	3	9.25
M_3	6	1	2	9
M_4	4	2	6	9

ماکزیمم سود روزانه برای تولید هر تن محصول p_1 حدود ۵ دلار ، برای تولید هر تن محصول p_2 حدود ۶/۵ دلار و برای تولید هر تن محصول p_3 حدود ۸ دلار می‌باشد. شایان ذکر است که ماکزیمم دسترسی روزانه به مواد خام با توجه به خرابی ماشین آلات، تاخیر در عرضه و... می‌تواند بسیار متغیر باشد. هدف کارخانه تولید محصول نهایی بگونه‌ای است که سود روزانه به ماکزیمم مقدار خود برسد.

حل). چون ماکزیمم سود روزانه برای تولید هر تن محصول و همچنین ماکزیمم دسترسی روزانه به مواد خام قطعی نیستند، لذا ما مساله را بصورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی مدل می‌کنیم. بنابراین ماکزیمم دسترسی روزانه به ماده خام که حدود ۱۱ تن است را می‌توانیم بصورت [۸،۱۰،۱۲،۱۴؛۶،۹،۱۳،۱۶] مدل کنیم. با روشی مشابه می‌توانیم سایر پارامترهای دیگر که دارای عدم قطعیت می‌باشند را با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن نشان دهیم. لذا خواهیم داشت:

$$\max\ \tilde{z} \approx (2,4,6,8;0,3,7,10)\tilde{x}_1^I + (2,5,8,11;1,3,10,12)\tilde{x}_2^I + (2,6,10,14;1,3,13,15)\tilde{x}_3^I,$$
$$s.t.\begin{cases} \tilde{x}_1^I + 2\tilde{x}_2^I + 4\tilde{x}_3^I \preceq (8,10,12,14;6,9,13,16), \\ 3\tilde{x}_1^I + 5\tilde{x}_2^I + \tilde{x}_3^I \preceq (4,7,11,14;3,5,14,16), \\ 2\tilde{x}_1^I + \tilde{x}_2^I + 6\tilde{x}_3^I \preceq (2,6,12,16;0,3,15,18), \\ 6\tilde{x}_1^I + 2\tilde{x}_2^I + 4\tilde{x}_3^I \preceq (3,5,13,15;1,4,14,17), \\ \tilde{x}_1^I, \tilde{x}_2^I, \tilde{x}_3^I \succeq \tilde{0}^I. \end{cases}$$

با بکارگیری حساب جدید و حل مساله با استفاده از الگوریتم پیشنهادی داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1.603448, \\ x_3 = 1.232759, \\ z = 20.28448, \end{cases}$$

حال اگر در مثال ۲، فقط قسمت فازی اعداد را در نظر گرفته و آن را با استفاده از تابع رتبه‌بندی بکار رفته در گانسن و ورامانی (۲۰۰۶) حل کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1.551724, \\ x_3 = 1.241379, \\ z = 20.01724. \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود زمانی که ما اعداد را بصورت فازی شهودی در نظر می‌گیریم، در مقایسه با زمانی که اعداد را بصورت فازی در نظر می‌گیریم، جواب بهتری بدست می‌آوریم.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ما به معرفی مسایل برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامتقارن پرداختیم. در ادامه یک حساب جدید و همچنین یک مرتب‌سازی جدید را برای این مسایل تعریف کردیم. سپس شرایط بهینگی را برای این مسایل بدست آورده و الگوریتم سیمپلکس فازی شهودی را برای حل این مسایل ارایه دادیم. در انتها با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و بدون تبدیل کردن مساله به فرم قطعی، جدول بهینه را بدست آوردیم. مساله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی که در این مقاله به آن پرداخته شده است، یک مساله تک هدفه می‌باشد. حال یکی از مواردی که برای توسعه و بهبود نتایج حاصل از این مقاله در مطالعات آتی می‌توان در نظر گرفت این است که ما مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی را بصورت چند هدفه در نظر بگیریم. همچنین ما می‌توانیم مسائل برنامه‌ریزی فازی شهودی را در محیط غیرخطی نیز بررسی کنیم. یکی دیگر از پیشنهادات ما برای مطالعات آتی این مسائل، کاربردی کردن این مسائل با در نظر گرفتن رویکردهای مدیریتی و استفاده از روش‌های *AHP*، *TOPSIS*، تصمیم‌گیری چند معیاره و... در محیط فازی شهودی می‌باشد. همچنین از دیگر پیشنهادات ما برای مطالعات آتی، بکار بردن و پیاده سازی مبحث فازی شهودی بر روی مسائل خاکستری، تحلیل پوششی داده‌ها، مکانیابی و... می‌باشد.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد.

منابع

Angelov, P. P. (1997). Optimization in an intuitionistic fuzzy environment. *Fuzzy sets and systems, 86*(3), 299-306. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00009-7

Atalik, G., & Senturk, S. (2019). A new lexicographic ranking method for triangular intuitionistic fuzzy number based on Gergonne point. *Journal of quantitative sciences, 1*, 59-73.

Atanassov, K. A. (1999). *Intuitionistic fuzzy sets: theory and applications*. Physica-Verlag.

Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science, 17*(4), B-141. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141

Bharati, S. K., & Singh, S. R. (2015). A note on solving a fully intuitionistic fuzzy linear programming problem based on sign distance. *International journal of computer applications, 119*(23), 30-35.

Suresh, M., Vengataasalam, S., & Arun Prakash, K. (2014). Solving intuitionistic fuzzy linear programming problems by ranking function. *Journal of intelligent & fuzzy systems, 27*(6), 3081-3087.

Das, S. K., Mandal, T., & Edalatpanah, S. A. (2017). A mathematical model for solving fully fuzzy linear programming problem with trapezoidal fuzzy numbers. *Applied intelligence, 46*(3), 509-519. https://doi.org/10.1007/s10489-016-0779-x

Dubey, D., & Mehra, A. (2011). Linear programming with triangular intuitionistic fuzzy number. *Proceedings of the 7th conference of the european society for fuzzy logic and technology* (pp. 563-569). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/eusflat.2011.78

Ejegwa, P. A., Akowe, S. O., Otene, P. M., & Ikyule, J. M. (2014). An overview on intuitionistic fuzzy sets. *International journal of scientific and technology research, 3*(3), 142-145.

Ganesan, K., & Veeramani, P. (2006). Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. *Annals of operations research, 143*(1), 305-315. https://doi.org/10.1007/s10479-006-7390-1

Ghaznavi, M., Soleimani, F., & Hoseinpoor, N. (2016). Parametric analysis in fuzzy number linear programming problems. *International journal of fuzzy systems, 18*(3), 463-477. https://doi.org/10.1007/s40815-015-0123-3

Hepzibah, R. I., & Vidhya, R. (2015). Modified new operations for symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers: an application of diet problem. *Int j fuzzy math arch*, *9*(1), 35-43.

Hosseinzadeh, A., & Edalatpanah, S. A. (2016). A new approach for solving fully fuzzy linear programming by using the lexicography method. *Advances in fuzzy systems*, *16*, 42-61. https://doi.org/10.1155/2016/1538496

Jayalakshmi, M., Anuradha, D., Sujatha, V., & Deepa, G. (2019, December). A simple mathematical approach to solve intuitionistic fuzzy linear programming problems. *AIP conference proceedings* (Vol. 2177, No. 1, p. 020025). AIP Publishing LLC. https://doi.org/10.1063/1.5135200

Kabiraj, A., Nayak, P. K., & Raha, S. (2019). Solving intuitionistic fuzzy linear programming problem. *International journal of intelligence science*, *9*(1), 44-58. DOI: 10.4236/ijis.2019.91003

Kar, R., & Shaw, A. K. (2019). Some arithmetic operations on triangular intuitionistic fuzzy number and its application in solving linear programming problem by simplex algorithm. *International journal of bioinformatics and biological sciences*, *7*(1/2), 21-28. DOI: 10.30954/2319-5169.01.2019.4

Mahdavi-Amiri, N., & Nasseri, S. H. (2007). Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, *158*(17), 1961-1978. https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.05.005

Mahdavi, A. N., Naseri, S., & Yazdani, A. (2009). Fuzzy primal simplex algorithms for solving fuzzy linear programming problems. *Iranian journal of operational research*, *1*(2), 68–84.

Nagoorgani, A., & Ponnalagu, K. (2012). A new approach on solving intuitionistic fuzzy linear programming problem. *Applied mathematical sciences*, *6*(70), 3467-3474.

Najafi, H. S., & Edalatpanah, S. A. (2013). A note on “a new method for solving fully fuzzy linear programming problems”. *Applied mathematical modelling*, *37*(14-15), 7865-7867. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.02.039

Najafi, H. S., Edalatpanah, S. A., & Dutta, H. (2016). A nonlinear model for fully fuzzy linear programming with fully unrestricted variables and parameters. *Alexandria engineering journal*, *55*(3), 2589-2595. https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.04.039

Nasseri, S. H., & Bavandi, S. (2018). Amelioration of Verdegayˈs approach for fuzzy linear programs with stochastic parameters. *Iranian journal of management studies*, *11*(1), 71-89.

Nasseri, S. H., & Ebrahimnejad, A. (2010). A fuzzy primal simplex algorithm and its application for solving flexible linear programming problems. *European journal of industrial engineering*, *4*(3), 372-389. https://doi.org/10.1504/EJIE.2010.033336

Nasseri, S. H., Ebrahimnejad, A., & Cao, B. Y. (2019). Fuzzy linear programming. In *fuzzy linear programming: solution techniques and applications* (pp. 39-61). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17421-7_2

Nasseri, S. H., Goli, M., & Bavandi, S. (2018). An approach for solving linear programming problem with intuitionistic fuzzy objective coefficient. *Fuzzy systems and applications*. **(In Persian)**. http://jfsa.fuzzy.ir/article_86076.html

Noori Skandari, M. N., & Ghaznavi, M. (2018). An efficient algorithm for solving fuzzy linear programming problems. *Neural process lett*, 1563-1582. https://doi.org/10.1007/s11063-018-9785-9

Parvathi, R., & Malathi, C. (2012). Arithmetic operations on symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. *International journal of soft computing and engineering*, *2*(2), 268-273.

Parvathi, R., & Malathi, C. (2012). Intuitionistic fuzzy simplex method. *International journal of computer applications*, *48*(6), 39-48.

Prabakaran, K., & Ganesan, K. (2017). Duality theory for intuitionistic fuzzy linear programming problems. *International journal of civil engineering and technology (IJCIET)*, *8*(11), 546-560.

Ramík, J., & Vlach, M. (2016). Intuitionistic fuzzy linear programming and duality: a level sets approach. *Fuzzy optimization and decision making*, *15*(4), 457-489. https://doi.org/10.1007/s10700-016-9233-0

Shamooshaki, M. M., Hosseinzadeh, A., & Edalatpanah, S. A. (2015). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems by using the lexicography method. *Applied and computational mathematics*, *1*, 53-55.

Sidhu. S. K. (2015). A new approach to solve intuitionistic fuzzy linear programming problem with symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. *Mathematical theory and modeling*, *5*(5), 66-74.

Sidhu, S. K., & Kumar, A. (2019). Mehar methods to solve intuitionistic fuzzy linear programming problems with trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. In *Performance prediction and analytics of fuzzy, reliability and queuing models* (pp. 265-282). Singapore: Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-0857-4_20

Singh, V., & Yadav, S. P. (2017). Development and optimization of unrestricted LR-type intuitionistic fuzzy mathematical programming problems. *Expert systems with applications*, *80*, 147-161. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.03.015

Tanaka, H., & Asai, K. (1984). Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, *13*(1), 1-10. https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90022-8

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*, 338-353.

Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy sets and systems*, *1*, 45-55. https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90031-3