E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 6, No. 2 (2021) 256–270.

Paper Type: Original-Application Paper

Introducing a New Model for Evaluating and Ranking Employees, Organizations and Solving MADM Problems in a Hesitant Fuzzy Environment

Abazar Keikha[1],*, Hassan Mishmast Nehi[2]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of siences, Velayat University, Iranshahr, Iran; abazar_keikha@yahoo.com;*
[2] *Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran; mnehi@hamoon.usb.ac.ir.*

Citation:

Keikha, A., & Mishmast Nehi, H. (2021). Introducing a new model for evaluating and ranking employees, organizations and solving MADM problems in a hesitant fuzzy environment. *Journal of decisions and operations research*, 6 (2), 256-270.

Received: 10/07/2020 Reviewed: 02/09/2020 Revised: 06/03/2021 Accept: 19/04/2021

Abstract

Purpose: Using hesitant fuzzy numbers as a combination of two common types of evaluation: self-evaluation and evaluation by judges, in order to make real and fair evaluations. Updating the Choquet integral method to apply with hesitant fuzzy numbers in the evaluation process, and use it to solve decision problems such as evaluating employees and organizations.

Methodology: The method of conducting these studies is based on the pattern of library studies.

Findings: Deficiencies such as showcasing the evaluators during the evaluation period on the one hand, and the lack of mastery of external judges on some organizational complexities and the apparent and hidden motivations of the evaluators for unrealistic evaluation in the self-evaluation process, on the other hand, are some of factors that challenge the evaluation results, and these defects in the hybrid evaluation model are eliminated using hesitant fuzzy numbers. In addition, evaluation indicators in many cases interact with each other and have so-called positive and negative effects on each other. Choquet Integral is able to take this into account and take the assessment one step closer to becoming more realistic. Therefore, its computational development with hesitant fuzzy numbers, which has been considered in this article, can helps the evaluation system and performance of employees and organizations.

Originality/Value: Computational development of hesitant fuzzy numbers with the help of Choquet integral, using the Choquet integral of hesitant fuzzy numbers in solving multi-criteria decision making problems such as employee and organizational evaluation.

Keywords: Choquet integral, Hesitant fuzzy numbers, Ranking of alternatives, Multi attribute decision making problems.

Corresponding Author: abazar_keikha@yahoo.com
10.22105/dmor.2021.238906.1177

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۶، شماره ۲، (۱۴۰۰)، ۲۷۰-۲۵۶

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی-کاربردی

ارائه مدل نوین ارزیابی و رتبه‌بندی کارکنان، سازمان‌ها و حل مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه در محیط فازی مردد

اباذر کیخا[۱،*]، حسن میش مست نهی[۲]

[۱]گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران.

[۲]گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

چکیده

هدف: استفاده از اعداد فازی مردد به عنوان عامل ترکیب کننده دو نوع متداول ارزیابی: خودارزیابی و ارزیابی داوران، به منظور انجام ارزیابی‌های واقعی و عادلانه. به‌روزرسانی روش انتگرال چوکوئت برای استفاده از اعداد فازی مردد در فرآیند ارزیابی و استفاده از آن در حل مسائل تصمیم‌گیری مانند ارزیابی کارکنان و سازمان‌ها.

روش‌شناسی پژوهش: روش انجام این مطالعات بر الگوی مطالعات کتابخانه‌ای استوار است.

یافته‌ها: نواقصی مانند نمایش ویترینی در دوره ارزیابی توسط ارزیاب‌شوندگان از یک سو، و عدم تسلط کافی داوران خارجی به برخی پیچیدگی‌های سازمانی و انگیزه‌های پیدا و پنهان ارزیاب‌شوندگان برای ارزیابی غیرواقعی در فرآیند خودارزیابی از سویی دیگر، در مواردی نتایج ارزیابی را به چالش می‌کشند، که این نقایص در مدل ارزیابی ترکیبی با استفاده از اعداد فازی مردد برطرف می‌شوند. علاوه براین، شاخص‌های ارزیابی در موارد بسیاری در تعامل با هم هستند و اصطلاحا بر همدیگر اثرات مثبت و منفی می‌گذارند. انتگرال چوکوئت قادر است این مهم را در نظر گرفته، ارزیابی را گامی دیگر به واقعی‌تر شدن نزدیک نماید. لذا توسعه محاسباتی آن با اعداد فازی مردد که در این مقاله مورد توجه بوده است، می‌تواند به نظام ارزیابی و عملکرد کارکنان و سازمان‌ها کمک شایانی نماید.

اصالت/ارزش افزوده علمی: توسعه محاسباتی اعداد فازی مردد به کمک انتگرال چوکوئت، استفاده از انتگرال چوکوئت اعداد فازی مردد در حل مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه مانند ارزیابی کارکنان و سازمان‌ها.

کلیدواژه‌ها: انتگرال چوکوئت، اعداد فازی مردد، رتبه‌بندی گزینه‌ها، مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه.

۱- مقدمه

هر یک از ما روزانه موقعیت‌هایی را تجربه می‌کنیم که در آن باید با بررسی جوانب مختلف از بین چند گزینه موجود یکی را انتخاب یا گزینه‌ها را اولویت‌بندی (فرم کلی مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه[۱]) نماییم. تصمیم درست مستلزم جمع‌آوری اطلاعات حداکثری که

---

[۱] Multi-attribute Decision Making (MADM) Problems

* نویسنده مسئول

abazar_keikha@yahoo.com

10.22105/dmor.2021.238906.1177

لزوماً قابل‌اعتماد و اتکا نیستند و دارای درجاتی از عدم قطعیت می‌باشند، مدل‌سازی عددی و پردازش مناسب و درست آن‌ها است. عدم قطعیت در باور بسیاری از دانشمندان مانند کلوین[1] معلول نقصان دانش است (پولاک[2]، ۲۰۰۵) و به کمک نظریه خطا (سالیکون[3]، ۲۰۰۷)، با بالا بردن دقت ابزارهای اندازه‌گیری و افزایش سطح آگاهی و دانش قابل‌حذف شدن است. به گفته‌ی کلیر[4] (۲۰۰۶)، زمانی ۵۰ ساله لازم بود تا دانشمندان از موضع حذف عدم قطعیت کنار آمده، آن را به‌عنوان شاخه علمی قبول کنند. چون این رویکرد محصول مطالعات گروهی از فیزیک‌دانان روی حرکات مولکول‌های گاز به کمک روش‌های تازه ابداع‌شده‌ی آماری بود، به نظر می‌رسید که نظریه احتمالات تنها ابزار توجیه‌کننده وضعیت‌های نادقیق باشد؛ بنابراین دو رویکرد علمی مختلف در برخورد با مسائل وجود داشت: روش‌های تحلیلی مبتنی بر حسابان که مناسب سیستم‌هایی با تعداد بسیار اندکی از اجزاء و متغیرهای به طریق قابل پیش‌بینی مرتبط باهم بودند؛ و روش‌های آماری مبتنی بر احتمالات که مناسب سیستم‌هایی با تعداد بسیار زیاد متغیرهای با درجات بالای ارتباطات تصادفی بودند.

این دودسته از مسائل را ویور[5] (۱۹۴۸) به ترتیب تحت عنوان مسائل با سادگی سازمان‌یافته[6] و مسائل با پیچیدگی غیر سازمان‌یافته[7] نام‌گذاری می‌کند و معتقد است که گروه سومی که نه مانند گروه اول شامل دو متغیر و نه مانند گروه دوم شامل بیشمار متغیر بلکه شامل تعداد متناهی متغیر است، نیز وجود دارد. او دسته سوم مسائل را که نسبت به دودسته قبل از فراوانی و قابلیت بیشتری در پوشش حجم عظیمی از مسائل دنیای واقعی نیز برخوردارند، مسائل با پیچیدگی سازمان‌یافته[8] می‌نامد. علم در شکل جدیدش که به گفته‌ی ویور ۵۰ سال زمان نیاز داشت تا مسائل با پیچیدگی سازمان‌یافته را بیاموزد، خیلی زود با موقعیت‌هایی از عدم قطعیت (سیستم‌های غیرمتمرکز در مقابل سیستم‌های متمرکز) در حوزه‌هایی مانند پزشکی، تصمیم‌گیری، کنترل و ... مواجه گردید که دیگر به کمک نظریه احتمالات قابل توصیف و مدل‌سازی نبودند. درواقع در نیمه دوم قرن بیستم بود که محققین توانستند با تعمیم نظریه اندازه و نیز نظریه مجموعه‌ها، عدم قطعیت را از بند احتمالات برهانند. حاصل این آزادی استفاده از نظریاتی مانند نظریه امکان، نظریه فازی، نظریه باور و ... در برخورد با مسائل دنیای واقعی است. اسمیتسون[9] (۱۹۸۸) در کتاب جهل و عدم قطعیت، ضمن تشریح و طبقه‌بندی عملکرد دانشمندان در مواجهه با موقعیت‌هایی که اطلاعات یا دانش آن‌ها قادر به توصیف دقیق وضعیت نیستند، معتقد است نظریات مختلف مطرح‌شده در خصوص عدم قطعیت نافی یکدیگر نیستند و از درجاتی از تعامل نیز برخوردارند. نحوه‌ی تعامل نظریات مختلف عدم قطعیت را دنوکس[10] (۲۰۱٤) در کنفرانسی که سپتامبر ۲۰۱٤ در شانگهای چین برگزارشده بود، بیان کرده است.

یکی از اولین مفاهیم ریاضی برای توصیف عدم قطعیت، نظریه مجموعه‌های فازی[11] به‌عنوان تعمیمی از نظریه مجموعه‌ها بود که توسط زاده[12] (۱۹٦۵) دانشمند ایرانی‌الاصل ارائه گردید. بعدها آقای زاده[13] (۱۹۷۵)، نظریه مجموعه‌های فازی نوع-۲[14] را که در آن درجات عضویت هر عضو، خود مجموعه‌های فازی بودند ارائه نمود. تعمیم دیگری از نظریه مجموعه‌های فازی را آتاناسف[15] (۱۹۸۳) تحت عنوان نظریه مجموعه‌های فازی شهودی[16] با انتساب توأم درجات عضویت و عدم عضویت به هر عضو مجموعه، در سال ۱۹۸۳ ارائه داد. ازآنجایی‌که تعیین مقدار دقیق درجه عضویت در مجموعه‌های فازی میسر نبود، تورا و ناروکاوا[17] (۲۰۰۹) و تورا[18] (۲۰۱۰) تعمیمی از این مجموعه‌ها به نام مجموعه فازی مردد[19] را معرفی و ارتباط آن با سه نوع پیشین مجموعه‌های فازی را نیز موردبحث قراردادند. از

---

[1] Kelvin
[2] Pollack
[3] Salicone
[4] Klir
[5] Weaver
[6] Organized Simplicity
[7] Disorganized Complexity
[8] Organized Complexity
[9] Smithson
[10] Denoeux
[11] Fuzzy Sets Theory
[12] Zadeh
[13] Zadeh
[14] Type-2 Fuzzy Sets Theory
[15] Atanassov
[16] Intitionistic Fuzzy Sets (IFSs)
[17] Torra and Narukawa
[18] Torra
[19] Hesitant Fuzzy Sets (HFS)

طرفی با توجه به طبقه‌بندی سه‌گانه‌ی مطرح‌شده در خصوص مسائل دنیای واقعی، این نوع از مجموعه‌های فازی به سبب استفاده از تعداد متناهی درجه عضویت، قابلیت بالایی در تناسب با ماهیت مسائل با پیچیدگی سازمان‌یافته برخوردارند و درنتیجه استفاده از آن‌ها به‌سرعت گسترش یافت. به‌منظور درک راحت این مجموعه‌ها، خیا وخوو[۱] (a۲۰۱۱) نماد ریاضی این مجموعه‌ها و سپس عناصر فازی مردد[۲] را به‌عنوان مجموعه درجات عضویت هر عضو معرفی نموده و بر مبنای ارتباط بین *HFEs* و *IFSs* مفاهیم اندازه تشابه، اندازه هم‌بستگی، قوانین عملگری مانند اعمال جمع و ضرب روی *HFE*ها را تعریف نمودند (خیا و خوو[۳]، b۲۰۱۱). در ادامه، محققین عملاً از *HFE* ها استفاده و به‌منظور تسهیل انجام اعمال ریاضی از قبیل مقایسه، اقدام به معرفی برخی شاخص‌ها در این زمینه نمودند (خیا و خوو، b۲۰۱۱؛ لیائو و همکاران[٤]، a۲۰۱٤؛ لیائو و همکاران[٥]، b۲۰۱٤). تعیین فاصله بین مجموعه‌های فازی مردد از دیگر مفاهیم مهم موردتوجه محققین است که در کاربردهای عملی مورداستفاده قرار می‌گیرد (خوو و خیا[٦]، a۲۰۱۱؛ خیا و خوو، b۲۰۱۱؛ تانگ و یوو[۷]، ۲۰۱٦).

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، *HFE* ها می‌توانند به تعداد دلخواه اما متناهی عضو داشته باشند. گروهی از محققین پیشنهاد دادند تا قبل از تعریف اعمال حسابی، *HFE* ها به لحاظ تعداد اعضاء یکسان باشند. ازاین‌رو *HFE* هایی که تعداد عضو کمتری نسبت به بزرگ‌ترین مقدار از این حیث دارند، باید گسترش یابند و اصطلاحاً به *HFE* های تنظیم‌شده[۸] تبدیل شوند، این عمل به چندین روش مقدور است: اضافه کردن بزرگ‌ترین مقدار هر *HFE* به آن و به‌دفعات (حالت خوش‌بینانه)؛ اضافه کردن کمترین مقدار هر *HFE* به آن و به‌دفعات (حالت بدبینانه)؛ اضافه کردن مقدار ۰/۵ به *HFE* و به‌دفعات (حالت بی‌تفاوت)؛ اضافه نمودن میانگین توانی اعضاء هر *HFE* با تعداد اعضاء کمتر به آن و به‌دفعات. در مقابل گروهی دیگر، بدون توجه به این مسئله، مستقیماً اقدام نموده‌اند (خیا و خوو، b۲۰۱۱؛ خیا و خوو، ۲۰۱۱آ؛لیائو و خوو[۹]، b۲۰۱٤؛ لیائو و خوو[۱۰]، a۲۰۱٤؛ لیائو و خوو[۱۱]، ۲۰۱۷؛لیائو و همکاران[۱۲]، ۲۰۱۸؛ وی[۱۳]، ۲۰۱۲).

در مسائل *MADM* عموماً به دنبال اولویت‌بندی یا تعیین گزینه برتر از طریق رتبه‌بندی تعداد متناهی گزینه بر اساس تعداد متناهی معیار هستیم. روش‌های متعددی برای حل این نوع مسائل در محیط‌های فازی و غیر فازی ارائه‌شده است (دلی[۱٤]، ۲۰۲۰؛ گارگ و آرورا[۱٥]، ۲۰۲۰؛ رنجبر و همکاران[۱٦]، a۲۰۲۰؛ تزنگ و هووانگ[۱۷]، ۲۰۱۱). در این روش‌ها، معمولاً هر گزینه نسبت به‌تمامی معیارها مورد ارزیابی قرارگرفته، نتایج ارزیابی در ماتریسی به نام ماتریس تصمیم مرتب می‌شوند که در آن سطرهای ماتریس متناظر گزینه‌ها و ستون‌ها متناظر معیارها هستند. امتیاز نهایی هر گزینه، برآیند امتیازهای جزئی است که محاسبه آن به شیوه‌های گوناگونی توسط توابع همسو ساز به دست می‌آید. در عمل توابع همسو ساز، توابع چندمتغیره‌ی حقیقی–مقدار هستند و ازجمله مشهورترین این توابع می‌توان به میانگین ساده، میانگین وزن‌دار، میانگین وزن‌دار ترتیبی، میانگین هندسی، توابع *max/min*، انتگرال چوکوئت، میانگین توانی و ... اشاره کرد (کیخا[۱۸]، ۲۰۱٦). انتگرال چوکوئت، به‌عنوان یک همسو ساز قوی در مدیریت معیارهای متعامل، به محیط‌های فازی مردد گسترش‌یافته و از آن در حل مسائل تصمیم‌گیری استفاده‌شده است (جوشی و کومار[۱۹]، ۲۰۱٦؛ منگ و همکاران[۲۰]، ۲۰۱٦؛ یوو و همکاران[۲۱]، ۲۰۱۱؛ وی، ۲۰۱۲). فرآیند ارزیابی گزینه‌ها، یا مستقیماً توسط ارزیابان خارج از محیط و یا توسط خود ذینفعان تحت عنوان خودارزیابی صورت می‌پذیرد. هر یک از این دو روش صرف‌نظر از مزایایی که دارند به‌شدت موردانتقاد نیز هستند. پیچیدگی سازمان‌ها و تخصص‌محور بودن فعالیت‌ها، نظرات

---

[۱] Xia and Xu
[۲] Hesitant Fuzzy Elements (HFEs)
[۳] Xia and Xu
[٤] Liao et al.
[٥] Liao et al.
[٦] Xu and Xia
[۷] Tong and Yu
[۸] Adjusted HFEs (AHFEs)
[۹] Liao and Xu
[۱۰] Liao and Xu
[۱۱] Liao and Xu
[۱۲] Liao et al.
[۱۳] Wei
[۱٤] Deli
[۱٥] Garg and Arora
[۱٦] Ranjbar et al.
[۱۷] Tzeng and Huang
[۱۸] Keikha
[۱۹] Joshi and Kumar
[۲۰] Meng et al.
[۲۱] Yu et al.

ارزیابان خارجی را زیر سؤال می‌برد و انگیزه‌های پنهان ذینفعان برای کسب امتیاز بیشتر، شیوه خودارزیابی را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد. این مقاله از طریق استفاده از مفهومی جدید به نام عدد فازی مردد (گارگ و همکاران[۱]، ۲۰۲۰؛ کیخا[۲]، ۲۰۲۱) که دارای دو بخش حقیقی-مقدار و HFE -مقدار است، هم‌زمان از قضاوت‌های بی‌طرفانه ارزیابان خارجی و نیز نگاه کارشناسی خودارزیابی بهره برده، اثرات سوء هرکدام را نیز به حداقل رسانده است. بخش حقیقی-مقدار آن شامل نتایج خودارزیابی‌ها و HFE-مقدار نیز شامل نظرات داوران خارجی خواهد بود. با توجه به اینکه در دنیای واقعی معیارها لزوماً از هم مستقل نیستند و اثرات مثبت و منفی زیادی از هم می‌پذیرند، روش پیشنهادی ما در این مقاله معرفی انتگرال چوکوئت اعداد فازی مردد و استفاده از آن در فرآیند همسوسازی داده‌های هر سطر ماتریس تصمیم است.

دیگر بخش‌های این مقاله به ترتیب عبارت‌اند از: بخش ۲، به مروری بر مجموعه‌های فازی و تعمیم‌های آن خواهد پرداخت. بخش ۳، مفاهیم توابع همسو ساز، انتگرال چوکوئت و ساختار کلی یک مسئله $MADM$ را ارائه می‌کند. در بخش ٤، اعداد فازی مردد و انتگرال چوکوئت آن‌ها معرفی خواهد شد. در بخش ٥، ساختار و روش حل یک مسئله $MADM$ در محیط فازی مردد موردبحث قرار خواهد گرفت. بخش ٦، شامل یک مثال عددی، تحلیل نتایج و اعتبارسنجی شیوه پیشنهادی مقاله است.

۲- مجموعه‌های فازی و تعمیم‌های آن

در این بخش ضمن معرفی مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی شهودی و مجموعه‌های فازی مردد؛ نوع اخیر یعنی مجموعه‌های فازی مردد را با تفصیل بیشتری بحث خواهیم کرد.

۲-۱- مجموعه‌های فازی نوع-۱

زاده (۱۹٦٥) با تعمیم نظریه مجموعه‌ها، باب جدیدی از علم پیش‌روی محققان گشود. ایشان در تعریف مجموعه به‌جای تابع مشخصه که صرفاً یکی از دو مقدار صفر یا یک را می‌توانست اختیار کند از تابع عضویت که برد آن به‌جای $\{0,1\}$ بازه‌ی $[0,1]$ بود استفاده نمود. به‌عبارت‌دیگر برای مجموعه مرجع X، $A=\{(x,\chi_A(x))\,|\,x\in X\}$ که در آن $\chi_A:X\to\{0,1\}$ تابع مشخصه نامیده می‌شود، یک مجموعه معمولی است و $\tilde{A}=\{(x,\mu_A(x))\,|\,x\in X\}$ که در آن $\mu_{\tilde{A}}:X\to[0,1]$ تابع عضویت نامیده می‌شود، یک مجموعه فازی نوع-۱ است. $\tilde{A}$ را محدب گویند اگر برای هر $x_1,x_2\in X$ داشته باشیم: $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x_1),\mu_{\tilde{A}}(x_2)\right\}$. عدد فازی نوع-۱، درواقع مجموعه فازی نوع-۱ محدبی است که در آن مجموعه مرجع X، اعداد حقیقی و تابع عضویت هم‌پیوسته یا به‌طور قطعه‌ای پیوسته است. انواع مختلفی از اعداد فازی نوع-۱ تاکنون معرفی‌شده‌اند و محققین بسیاری همت گماشته به کمک اصل گسترش مفاهیمی چون اعمال ریاضی روی اعداد فازی، فاصله بین اعداد فازی، رتبه‌بندی و مقایسه اعداد فازی را تعریف نموده‌اند (کیخا، ۲۰۱٦).

۲-۲- مجموعه‌های فازی نوع-۲

چنان‌که در بخش قبل دیدیم، زاده برای بیان عدم دقت و ابهام از مفهومی به نام «مجموعه‌های فازی» بهره برد. در این نظریه درجه عضویت هر عضو از مجموعه مرجع به زیرمجموعه دلخواه از آن با مقداری قطعی از بازه‌ی $[0,1]$ نشان داده می‌شود. ایشان در اوایل دهه‌ی هفتاد میلادی نظریه‌ی فوق را تعمیم داده، آن را «مجموعه‌های فازی نوع-۲» نامید. درواقع برای مجموعه مرجع X، زیرمجموعه $\tilde{\tilde{A}}=\left\{(x,\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x))\,|\,x\in X\right\}$ از آن را مجموعه‌های فازی نوع-۲ نامیده اگر $\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x)=\int_{u\in J_x}\frac{f_x(u)}{u}$ که در آن $f_x:[0,1]\to[0,1]$ تابع عضویت ثانویه، $f_x(u)$ عضویت ثانویه، u آرگومان تابع عضویت ثانویه و بازه‌ی $J_x\subset[0,1]$ را که دامنه تابع عضویت ثانویه است، عضویت اولیه عنصر x می‌گویند.

---

[۱] Garg et al.
[۲] Keikha

۳-۲- مجموعه‌های فازی شهودی

مجموعه‌های فازی شهودی در سال ۱۹۸۳ توسط آتاناسف به‌عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی معمولی ارائه گردید. وی برای مجموعه مرجع X، زیرمجموعه‌ی $\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x),\nu_{\tilde{A}}(x))\,|\,x\in X\right\}$ از آن را که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\nu_{\tilde{A}}(x)$ به ترتیب بیانگر درجه عضویت و درجه عدم عضویت X به $\tilde{A}$ می‌باشند را یک IFS نامید. علاوه بر درجات فوق، درجه دیگری به نام درجه تردید یک IFS به‌صورت $\Pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ که $0\le \Pi_A(x)\le 1$ تعریف‌شده است.

۴-۲- مجموعه‌های فازی مردد

مجموعه‌های فازی مردد به‌عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی معمولی، مجموعه‌ای متناهی از مقادیر از بازه‌ی $[0,1]$ را به‌عنوان درجات عضویت اعضاء خویش اختیار می‌کنند.

تعریف ۱- فرض کنید X مجموعه‌ای ثابت باشد. یک HFS تعریف‌شده روی X تابعی است که وقتی روی X اعمال می‌شود زیرمجموعه‌ای از $[0,1]$ را برمی‌گرداند.

تعریف ۲- فرض کنید $h=\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\}$ که در آن $\gamma_i\in[0,1]$ درجات ممکن عضویت $x\in X$ به مجموعه داده‌شده هستند، یک HFE دلخواه باشد. آنگاه

الف) $\bar{h}(x)=S(h)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$ میانگین یا تابع امتیاز h است.

ب) $\phi(x)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i-\bar{h}(x))^2}$ را درجه تردید h می‌گویند.

پ) $Var(h)=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\gamma_i,\gamma_j}(\gamma_i-\gamma_j)^2}$ را واریانس h می‌نامند.

تعریف ۳- دو HFE دلخواه h_1 و h_2 را در نظر بگیرید. فاصله‌های مردد نرمال شده‌ی همینگ (d_{hnh}) و اقلیدسی (d_{hne}) بین آن‌ها به ترتیب عبارت‌اند از:

$$d_{hnh}(h_1,h_2)=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left|h_{1(i)}-h_{2(i)}\right|,\qquad (1)$$
$$d_{hne}(h_1,h_2)=\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left|h_{1(i)}-h_{2(i)}\right|^2}.$$

که در آن l بیشینه طول HFEهای داده‌شده و $h_{j(i)}$، i امین مقدار کوچک آن‌ها است.

تعریف ۴- فرض کنید $h_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ دسته‌ای دلخواه از HFE ها هر یک شامل l عنصر و λ نیز مقداری حقیقی و مثبت باشند. اگر برای هر مقدار j، $h_j^{\sigma(t)}$ را t امین مقدار کوچک h_j بنامیم. آنگاه

$$\begin{aligned}
&1)\,h^{\lambda}=\left\{\left(h^{\sigma(t)}\right)^{\lambda}\,|t=1,2,...,l\right\};\\
&2)\,\lambda h=\left\{1-\left(1-h^{\sigma(t)}\right)^{\lambda}\,|t=1,2,...,l\right\};\\
&3)\,h_1\oplus h_2=\left\{h_1^{\sigma(t)}+h_2^{\sigma(t)}-h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)}\,|t=1,2,...,l\right\};\\
&4)\,h_1\otimes h_2=\left\{h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)}\,|t=1,2,...,l\right\};\\
&5)\,\oplus_{j=1}^{n}h_j=\left\{1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-h_j^{\sigma(t)}\right)|t=1,2,...,l\right\};\\
&6)\,\otimes_{j=1}^{n}h_j=\left\{\prod_{j=1}^{n}h_j^{\sigma(t)}\,|t=1,2,...,l\right\};
\end{aligned} \tag{۲}$$

تعریف ۵- فرض کنید $h_j\,(j=1,2,...,n)$ دسته‌ای دلخواه از HFEها هر یک شامل l عنصر $(AHFEs)$ باشند و بردار $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ مشروط به $\sum_{i=1}^{n}w_i=1, w_i\in[0,1]$ بردار وزن آن‌ها تعریف شود. آنگاه عملگر میانگین وزن‌دار فازی مردد تنظیم‌شده[1] و عملگر میانگین وزن‌دار فازی مردد تنظیم‌شده[2] به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
&AHFWA(h_1,h_2,...,h_n)=\oplus_{j=1}^{n}w_jh_j=\left\{1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-h_j^{\sigma(t)}\right)^{w_j}\,|t=1,2,...,l\right\}.\\
&AHFWG(h_1,h_2,...,h_n)=\otimes_{j=1}^{n}\left(h_j\right)^{w_j}=\left\{\prod_{j=1}^{n}\left(h_j^{\sigma(t)}\right)^{w_j}\,|t=1,2,...,l\right\}.
\end{aligned} \tag{۳}$$

۳- مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه

در این مقاله ابتدا به برخی توابع همسو ساز و سپس روش‌های حل مسائل $MADM$ در محیط فازی مردد اشاره خواهد شد.

۳-۱- توابع همسو ساز

همسوسازی درواقع فرآیند تبدیل چندین مقدار عددی به یک مقدار است، به‌طوری‌که مقدار حاصل‌شده متأثر از همه‌ی مقادیر ورودی باشد.

تعریف ٦- اگر I بازه‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد، هر تابع غیر نزولی و کران‌دار $A^{(n)}:I^{(n)}\to I$ را یک تابع همسو ساز با کران‌های $\sup_{x\in I^{(n)}}A^{(n)}(x)=\sup I$، $\inf_{x\in I^{(n)}}A^{(n)}(x)=\inf I$ نامیده، به‌طوری‌که

الف) همواره $A^{(1)}(x)=x$،

ب) $A^{(n)}(x,x,...,x)=x$،

ج) اگر رابطه‌ی $x_i\le y_i$ برای $1\le i\le n$ برقرار باشد، آنگاه $A^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n)\le A^{(n)}(y_1,y_2,...,y_n)$.

---

[1] Adjusted Hesitant Fuzzy Weighted Average (AHFWA) Operator
[2] Adjusted Hesitant Fuzzy Weighted Geometric (AHFEG) Operator

ازجمله مشهورترین این توابع می‌توان به میانگین ساده، میانگین وزن‌دار، میانگین وزن‌دار ترتیبی، میانگین هندسی، توابع *max/min*، انتگرال چوکوئت، میانگین توانی و ... اشاره کرد (کیخا، ۲۰۱۶).

۲-۳- انتگرال چوکوئت

گوستاو چوکوئت[۱]، ریاضی‌دان فرانسوی در سال ۱۹۵۰، شیوه نوینی از انتگرال‌گیری به نام انتگرال چوکوئت[۲] را، با استفاده از یک اندازه‌ی نه لزوماً جمعی به نام اندازه فازی، ارائه کرد (کیخا، ۲۰۱۶). این روش مدت‌ها بعد یعنی در اواخر دهه ۸۰ میلادی و به‌عنوان یک تابع همسو ساز، راه خود را در نظریه‌ی تصمیم‌گیری برای یافتن مطلوبیت مورد انتظار پیشامدهای نامطمئن پیدا کرد. همسو ساز تعریف‌شده بر اساس انتگرال چوکوئت، هم مشابه همسو ساز میانگین وزن‌دار[۳] اهمیت ورودی‌ها و هم شدت آن‌ها را مشابه میانگین وزن‌دار ترتیبی[۴] مدنظر قرار می‌دهد. از طرفی خاصیت یکنوایی اندازه فازی سبب می‌شود تا شاخصی که شاید به‌تنهایی از اهمیت چندانی برخوردار نباشد با قرار گرفتن در یک ائتلاف از اهمیت ویژه‌ای برخوردار گردد. درصورتی‌که اندازه فازی خاصیت جمعی داشته باشد، انتگرال چوکوئت به همسو ساز *WA* و اگر خاصیت متقارن داشته باشد به همسو ساز *OWA* تبدیل خواهد شد (کیخا و نهی[۵]، ۲۰۱۵).

تعریف ۷- فرض کنید $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعه‌ای متناهی با مجموعه توانی $P(X)$ باشد، آنگاه تابع مجموعه‌ای یکنوای $\mu:P(X)\to[0,1]$ مشروط به $\mu(X)=1,\mu(\phi)=0$ را اندازه فازی گسسته می‌نامند.

ثابت‌شده است که برای $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ اگر $\mu(X)=1$ و $\mu(x_i)=a_i, i=1,2,...,n$ به‌عنوان اندازه‌ها یا اوزان انفرادی اعضاء، معلوم باشند، از حل معادله $1+\lambda=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda\mu(x_i))$ مقدار λ و درنتیجه اندازه (وزن) هر زیرمجموعه X به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\forall E,F\in P(X):\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)+\lambda\mu(E)\mu(F). \qquad (۴)$$

تعریف ۸- فرض کنید $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعه‌ای متناهی با بردار وزن $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ باشد، یعنی $\mu(x_i)=w_i$. آنگاه انتگرال چوکوئت تابع نامنفی اندازه‌پذیر f تعریف‌شده روی X با مقادیر $f_i=f(x_i)$ و اندازه فازی μ روی $P(X)$ با نماد $(C)\int fd\mu$ عبارت است از:

$$(C)\int fd\mu=\sum_{i=1}^{n}\left[f_{(i)}-f_{(i-1)}\right]\mu\left\{x_{(i)},x_{(i+1)},...,x_{(n)}\right\}. \qquad (۵)$$

که در آن، $\left\{x_{(1)},x_{(2)},...,x_{(n)}\right\}$ جایگشتی از $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ است به‌طوری‌که $f_{(1)}\le f_{(2)}\le...\le f_{(n)}$.

مثال ۱- فرض کنید در یک کارخانه عروسک‌سازی، تابع f تعداد روزهای کاری سه کارگر x_2,x_1 و x_3 را نشان دهد و تابع اندازه‌ی μ نیز تعداد عروسک ساخته‌شده در یک روز توسط هر کارگر باشد و داشته باشیم:

$$f(x_1)=6,f(x_2)=3,f(x_3)=4;\ \mu(x_1)=5,\mu(x_2)=6,\mu(x_3)=7.$$

آنگاه $\int fd\mu=\sum_{i=1}^{3}f(x_i)\mu(x_i)=76$. حال اگر اندازه توأم $\mu(x_i,x_j)$ را تعداد عروسک ساخته‌شده در اثر همکاری دو کارگر x_i و x_j تعبیر کنیم و داشته باشیم $\mu(x_1,x_2)=14,\mu(x_1,x_3)=13,\mu(x_2,x_3)=9,\mu(X)=17$. لذا در سه روز اول $3\times17=51$، در روز چهارم 1×13 و نهایتاً در دو روز آخر فقط کارگر x_1 به‌تنهایی ۱۰ عروسک می‌سازد. به‌عبارت‌دیگر در حالت همکاری کارگران باهم در ۶ روز تعداد ۷۴ عروسک ساخته خواهد شد. این همان انتگرال چوکوئت است.

---

۱ Gostav Choquet
۲ Choquet Integral (CI)
۳ Weighted Averaging (WA)
۴ Ordered Weighted Averaging (OWA)
۵ Keikha and Nehi

این همسو ساز به دلیل توانایی مدیریت کردن معیارهای متعامل در مسائل *MADM*، به محیط‌های غیرقطعی نیز گسترش‌یافته و انواع مدل‌های فازی آن معرفی‌شده است.

۳-۳- انتگرال چوکوئت فازی مردد

انتگرال چوکوئت، به‌عنوان یک همسو ساز قوی در مدیریت معیارهای متعامل، به محیط‌های فازی مردد گسترش‌یافته و از آن در حل مسائل تصمیم‌گیری استفاده‌شده است (جوشی و کومار، ۲۰۱۶؛ منگ و همکاران، ۲۰۱٦؛ وی و همکاران[۱]، ۲۰۱۲؛ یوو و همکاران، ۲۰۱۱).

تعریف ۹- فرض کنید $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعه‌ای متناهی با بردار وزن $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ باشد، یعنی $\mu(x_i)=w_i$. آنگاه انتگرال چوکوئت *HFE*های h_i ($i=1,2,...,n$) تعریف‌شده روی X با مقادیر $h_i=h(x_i)$ و اندازه فازی μ روی $P(X)$ با نماد $(C)\int hd\mu$ عبارت است از:

$$(C)\int fd\mu = HFCI\big(h(x_1),h(x_2),...,h(x_n)\big) = \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} h_{(i)}^{\left(\mu(X_{(i)})-\mu(X_{(i-1)})\right)}. \qquad (۶)$$

که در آن، $X_{(i)}=\{x_{(1)},x_{(2)},...,x_{(i)}\}$ به‌طوری‌که $h_{(1)}\le h_{(2)}\le ...\le h_{(n)}$.

وی و همکاران (۲۰۱۲) ثابت کردند که مقدار به‌دست‌آمده از انتگرال چوکوئت مقادیر فازی مردد، هنوز هم فازی مردد است و داریم:

$$HFCI\big(h(x_1),h(x_2),...,h(x_n)\big) = \bigcup_{\gamma_{(1)}\in h_{(1)},...,\gamma_{(n)}\in h_{(n)}} \left\{\prod_{i=1}^{n}\left(\gamma_{(i)}\right)^{\left(\mu(X_{(i)})-\mu(X_{(i-1)})\right)}\right\}. \qquad (۷)$$

۳-۴- حل مسائل MADM در محیط فازی مردد

یک مسئله *MADM* با m گزینه‌ی $\{A_1,A_2,...,A_m\}$ و n معیار $\{C_1,C_2,...,C_n\}$ را در نظر بگیرید. برای حل این نوع مسائل در هر دو محیط دقیق و نادقیق روش‌های زیادی از ساده تا پیچیده ارائه‌شده است (تزنگ و هووانگ، ۲۰۱۱). برخی از این روش‌ها همچون *TOPSIS*، *CI*، *SWA* و ...، بر تشکیل ماتریس تصمیم $D=[d_{ij}]_{m\times n}$ که در آن d_{ij} میزان ارزیابی (توسط تصمیم‌گیرنده یا ارزیاب‌شونده) از گزینه i ام نسبت به معیار j ام را نشان می‌دهد، استوار هستند. ازآنجایی‌که درایه‌های ماتریس تصمیم عموماً ناشی از قضاوت‌های انسانی هستند یا با عبارات زبانی بیان می‌شوند یا با درجاتی از عدم قطعیت همراه هستند و لذا گسترش روش‌های حل این نوع مسائل به محیط‌های نادقیق اجتناب‌ناپذیر است. ابتدا فرض کنید ارزیابی توسط تصمیم‌گیرنده صورت گرفته و او مقدار ارزیابی خویش از گزینه‌ی A_i نسبت به معیار C_j را با *HFE* به‌صورت h_j بیان می‌کند. برای انتخاب بهترین گزینه یا حل مسئله از این طریق، وی و همکاران (۲۰۱۲) گام‌های زیر را پیشنهاد دادند:

گام ۱ - ارزیابی تمامی گزینه‌ها نسبت به همه معیارها و بیان آن با *HFE* به‌صورت $h_{ij}, i=1,...,m;\ j=1,...,n$.

گام ۲ - تعیین اندازه‌های فازی هر زیرمجموعه از مجموعه معیارها.

گام ۳- همسوسازی h_{ij} ($j=1,...,n$) به یک مقدار *HFE* کلی h_i برای گزینه‌ی A_i.

گام ٤ - رتبه‌بندی گزینه‌ها بر مبنای رتبه‌بندی مقادیر *HFE* حاصل از گام ۳.

چنانکه دیدیم در این نوع ارزیابی گزینه‌ها (سازمان‌ها، کارکنان و ...)، نظرات مستقیم تصمیم‌گیرندگان صائب است. در دنیای کنونی با توجه به پیچیدگی‌های مسائل و تخصصی شدن آن‌ها، این نوع ارزیابی و میزان شناخت تصمیم‌گیرندگان از حوزه عمل گزینه‌ها، توسط

[۱] Wei et al.

ارزیاب شوندگان مورد تخطئه قرار می‌گیرد. نوع دیگری از ارزیابی نیز مطرح است که در آن تصمیم‌گیرندگان صرفاً در نقش طراح فرم ارزیابی بر مبنای معیارها و زیرمعیارهای مدنظرشان ظاهرشده و ارزیاب شوندگان فرم ارائه‌شده را کامل نموده، مستندات امتیازات مکتسبه را نیز پیوست فرم کرده به تصمیم‌گیرندگان بازمی‌گردانند. در این نوع از ارزیابی که به آن خود-ارزیابی گفته می‌شود، پس از تشکیل ماتریس تصمیم، به یکی از شیوه‌های قبلی می‌توان رتبه‌بندی گزینه‌ها را انجام داد.

گرچه این نوع ارزیابی، می‌تواند به دلیل آشنایی ارزیاب‌شونده به زوایای نهان و آشکار موضوع، به واقعیت نزدیک باشد، اما در بسیاری موارد امتیازات منتسب شده، توسط دیگر رقبا یا تصمیم‌گیرندگان، مورد تشکیک قرار می‌گیرد زیرا افراد از انگیزه‌های لازم برای نمایش ویترینی واقعیت در راستای کسب امتیاز حداکثری برخوردار هستند. در این مقاله قصد داریم تا با ترکیب هر دو نوع ارزیابی مذکور، ارزیابی نزدیک‌تری از واقعیت موجود گزینه‌ها به دست آوریم. آنچه ما را در این راه یاری می‌کند، توسیع مجموعه‌های فازی مردد به اعداد فازی مردد است (گارگ و همکاران، ۲۰۲۰؛ کیخا، ۲۰۲۱) که در بخش بعدی به آن خواهیم پرداخت.

۴- اعداد فازی مردد

عدد فازی مردد را می‌توان تعمیم‌یافته‌ی *HFE* یا حالت خاصی از عدد فازی معمولی نامید.

تعریف ۱۰- فرض کنید X مجموعه مرجع، $a \in$ و $h(a)=\{\gamma \mid \gamma \in [0,1]\}$ مجموعه‌ای با تعداد متناهی عضو باشد. آنگاه $\tilde{a}=\langle a;h(a)\rangle$ را یک عدد فازی مردد می‌نامیم.

تعریف ۱۱- فرض کنید $\tilde{a}=\langle a;h(a)\rangle$ و $\tilde{b}=\langle b;h(b)\rangle$ اعداد فازی مردد و $\lambda \in$ باشند، آنگاه اعمال حسابی روی اعداد فازی مردد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \tilde{a}+\tilde{b}=\langle a+b;h(a)\bigcup h(b)\rangle,\\
&(2)\ \lambda\tilde{a}=\langle \lambda a;h(a)\rangle,\\
&(3)\ \tilde{a}^{\lambda}=\langle a^{\lambda};h(a)\rangle,\\
&(4)\ \tilde{a}\tilde{b}=\begin{cases}\langle ab;h(a)\bigcap h(b)\rangle & if \quad h(a)\bigcap h(b)\neq\phi\\ \left\langle ab;\min\limits_{\gamma_i\in h(a),\gamma_j\in h(b)}\{\gamma_i,\gamma_j\}\right\rangle & if \quad h(a)\bigcap h(b)\neq\phi\end{cases}
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

تعریف ۱۲- فرض کنید $\tilde{a}=\langle a;\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}\rangle$ یک عدد فازی مردد باشد، آنگاه $S(\tilde{a})=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$ را تابع امتیاز و $Var(\tilde{a})=a\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i-\gamma_j)^2}$ را واریانس آن عدد می‌نامیم.

فرض کنید $\tilde{a}=\langle a;h(a)\rangle$ و $\tilde{b}=\langle b;h(b)\rangle$ دو عدد فازی مردد باشند. اگر $S(\tilde{a})>S(\tilde{b})$ آنگاه $\tilde{a}\succ\tilde{b}$؛ اگر $S(\tilde{a})=S(\tilde{b})$ آنگاه $\tilde{a}\succ\tilde{b}$ در صورتی برقرار است که $Var(\tilde{a})<Var(\tilde{b})$. توجه داشته باشیم که $S(\tilde{a})=S(\tilde{b})$ و $Var(\tilde{a})=Var(\tilde{b})$ به معنای $\tilde{a}=\tilde{b}$ نیست و مقایسه را برمبنای زیر ادامه می‌دهیم:

الف- اگر $a>b$ آنگاه $\tilde{a}\succ\tilde{b}$.

ب- اگر $a=b$؛ فرض کنید $\gamma_a=\max h(a)$ و $\gamma_b=\max h(b)$ تعریف شوند، آنگاه $\tilde{a}\succ\tilde{b}$ اگر $\gamma_a\succ\gamma_b$. در غیر این صورت به سراغ بزرگ‌ترین درجات در مراتب بعدی می‌رویم.

۵- انتگرال چوکوئت اعداد فازی مردد و حل مسئله MADM در محیط فازی مردد

در این بخش ابتدا به معرفی روش جدید انتگرال چوکوئت اعداد فازی مردد خواهیم پرداخت و سپس به کمک آن یک مسئله تصمیم‌گیری چند شاخصه را حل می‌کنیم.

۵-۱- انتگرال چوکوئت اعداد فازی مردد[۱]

تعریف ۱۳- فرض کنید $\tilde{a}_i=\langle a_i;\{\gamma_{i1},\gamma_{i2},...,\gamma_{ik}\}\rangle (i=1,2,...,n)$ دسته‌ای از اعداد فازی مردد با بردار وزن $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ باشند، آنگاه

$$(C)\int \tilde{a}\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{a}_{(i)}-\tilde{a}_{(i-1)}\right]\mu\left(\{\tilde{a}_{(i)},\tilde{a}_{(i+1)},...,\tilde{a}_{(n)}\}\right). \qquad (۹)$$

که در آن $\{(1),(2),...,(n)\}$ جایگشتی است از $\{1,2,...,n\}$ به‌طوری‌که $\tilde{a}_{(i)}\prec\tilde{a}_{(i+1)}\prec...\prec\tilde{a}_{(n)}$ و $\mu\left(\{\tilde{a}_{(i)},\tilde{a}_{(i+1)},...,\tilde{a}_{(n)}\}\right)$ را وزن توأم $\{\tilde{a}_{(i)},\tilde{a}_{(i+1)},...,\tilde{a}_{(n)}\}$ نامیده و با استفاده از مفهوم اندازه فازی از بردار وزن انفرادی اعداد به دست می‌آید.

مقدار حاصل از این انتگرال، از جنس مقادیر ورودی، یعنی یک عدد فازی مردد است. لذا در صورت نیاز به اعمال اضافی روی مقادیر حاصل از انتگرال، مانند مقایسه و رتبه‌بندی، به‌راحتی می‌توان از مفاهیم موجود درزمینهٔ اعداد فازی مردد استفاده نمود.

۵-۲- حل مسئله MADM در محیط فازی مردد

شکل کلی مسئله $MADM$ که در بخش ۳ ارائه شد را در نظر بگیرید. فرض کنید، معیارهای مسئله با بردار وزن $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ متعامل بوده، درایه‌های ماتریس تصمیم با اعداد فازی مردد مدل‌سازی شده باشند و داشته باشیم $\tilde{D}=\left[\left\langle d_{ij},\{\gamma_{ij1},\gamma_{ij2},...,\gamma_{ijk_i}\}\right\rangle\right]$. سطر iام این ماتریس که امتیازات گزینه‌ی iام نسبت به تک‌تک معیارها هستند، یعنی $\left\langle d_{i1},\{\gamma_{i11},\gamma_{i12},...,\gamma_{i1k_i}\}\right\rangle,...,\left\langle d_{in},\{\gamma_{in1},\gamma_{in2},...,\gamma_{ink_i}\}\right\rangle$ را در نظر بگیرید. در این مقاله برای محاسبه‌ی امتیاز نهایی این گزینه از روش همسوسازی به کمک انتگرال چوکوئت استفاده‌شده است. برای این کار گام‌های زیر پیشنهاد می‌شوند:

گام ۱ – اندازه توأم همه‌ی اعضاء مجموعه توانی مجموعه معیارها را محاسبه کنید.

گام ۲ – مقادیر امتیاز و واریانس متناظر با هر یک از درایه‌های سطری را محاسبه کنید.

گام ۳ – اعداد فازی مردد سطر را با استفاده از مقادیر حاصل از گام ۲ را به‌صورت صعودی مرتب کنید.

گام ٤ – با استفاده از نتایج سه گام پیشین، انتگرال چوکوئت درایه‌های سطری را حساب کنید.

گام ۵ – گام‌های ۱ تا ٤ را برای تمامی سطرهای ماتریس تکرار کنید.

گام ٦ – با محاسبه مقادیر امتیاز و واریانس اعداد فازی مردد حاصل از گام ۵، آن‌ها را به‌صورت صعودی مرتب کنید.

گام ۷ – گزینه‌ها را مشابه رتبه‌ی امتیاز نهایی آن‌ها مرتب کنید.

---

۱ Choquet Integral of Hesitant Fuzzy Numbers (CIHFNs)

۶- مثال عددی

در این بخش، روش پیشنهادی را برای رتبه‌بندی ۷ سازمان بر اساس ٦ معیار به کارخواهیم برد. یکی از این سازمان‌ها (گزینه‌ها) گزینه‌ای فرضی است که در فرآیند خود-ارزیابی، امتیازات غیرواقعی به آن تخصیص داده‌ایم.

۶-۱- مثال عددی

فرض کنید $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ و A_7 سازمان‌هایی هستند که بر اساس شش محور (معیار) کلی: اصلاح ساختار سازمان (c_1)، توسعه دولت الکترونیک (c_2)، مدیریت سرمایه انسانی (c_3)، بهبود فضای کسب‌وکار و ارتقاء بهره‌وری (c_4)، ارتقاء سلامت اداری، مسئولیت‌پذیری و پاسخ‌گویی (c_5) و استقرار نظام مدیریت عملکرد (c_6)؛ باید مورد ارزیابی و رتبه‌بندی قرار گیرند. سقف امتیاز هر یک از شش محور فوق به ترتیب ۱۲۵، ۳۳۰، ۱۷۵، ۹۰، ۱۵۰ و ۱۳۰ امتیاز می‌باشد. گزینه‌ی A_5 را گزینه‌ای فرضی با امتیازات خود-ارزیابی غیرواقعی در نظر بگیرید. به‌منظور انجام فرآیند خودارزیابی، فرم‌هایی از پیش طراحی‌شده در اختیار سازمان‌ها قرارگرفته، مدیران سازمان‌ها ضمن ارزیابی سازمان متبوع خویش مطابق هر یک از بندهای موجود در فرم، موظف به پیوست مستندات امتیاز نیز هستند. فرض کنید نتایج این مرحله به‌صورت ماتریس D باشند:

$$
D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
124 & 321 & 175 & 82 & 144 & 127 \\
123 & 324 & 160 & 88 & 147 & 125 \\
123 & 327 & 170 & 85 & 148 & 127 \\
121 & 329 & 173 & 85 & 147 & 129 \\
125 & 327 & 171 & 90 & 149 & 130 \\
125 & 325 & 172 & 90 & 145 & 129 \\
122 & 325 & 172 & 89 & 147 & 129
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

توجه داشته باشید که درایه‌های ماتریس D صرفاً مقادیر ارزیابی و لذا بی مقیاس هستند. فرض کنید وزن محورهای ارزیابی را با $W = (0.125; 0.33; 0.175; 0.09; 0.15; 0.13)$ نشان دهیم. واضح است که هر یک از سازمان‌ها انگیزه کافی برای بیان واقعیت به‌گونه‌ای که امتیاز بالاتری کسب کنند، دارند. در این مقاله از پنج کارشناس خبره و آگاه به مسئله دعوت تا با توجه به معیارهای مدنظر، گزینه‌ها را مورد ارزیابی قرار دهند و امتیازات را نیز در قالب اعدادی در بازه‌ی $[0,1]$ بیان نمایند. واضح است که قالب کلی این مرحله از امتیازات به‌صورت HFE خواهد بود که در ماتریس زیر مرتب‌شده‌اند:

$$
HFED = \left(\begin{array}{ccc}
\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\} & \{0.1,0.4,0.7,0.8,0.9\} & \{0.2,0.6,0.6,0.4,0.5\} \\
\{0.3,0.5,0.8,0.6,0.9\} & \{0.3,0.5,0.6,0.5,0.9\} & \{0.9,0.9,0.9,0.9,0.9\} \\
\{0.3,0.5,0.6,0.7,0.9\} & \{0.1,0.5,0.6,0.9,0.9\} & \{0.3,0.5,0.7,0.6,0.9\} \\
\{0.9,0.7,0.8,0.9,0.9\} & \{0.1,0.7,0.3,0.8,0.9\} & \{0.2,0.6,0.7,0.4,0.5\} \\
\{0.1,0.1,0.1,0.1,0.1\} & \{0.1,0.2,0.1,0.2,0.1\} & \{0.2,0.2,0.3,0.1,0.1\} \\
\{0.8,0.8,0.9,0.8,0.9\} & \{0.9,0.8,0.7,0.8,0.9\} & \{0.2,0.2,0.3,0.4,0.5\} \\
\{0.4,0.4,0.5,0.6,0.9\} & \{0.8,0.5,0.6,0.9,0.6\} & \{0.3,0.5,0.6,0.6,0.6\}
\end{array} \right.
$$

$$
\left. \begin{array}{ccc}
\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.9\} & \{0.3,0.2,0.6,0.3,0.3\} & \{0.3,0.4,0.6,0.7,0.7\} \\
\{0.7,0.8,0.5,0.5,0.9\} & \{0.3,0.4,0.4,0.6,0.8\} & \{0.8,0.8,0.8,0.9,0.9\} \\
\{0.7,0.6,0.5,0.6,0.9\} & \{0.3,0.3,0.5,0.6,0.6\} & \{0.6,0.7,0.8,0.6,0.9\} \\
\{0.8,0.7,0.5,0.5,0.6\} & \{0.1,0.5,0.4,0.5,0.9\} & \{0.7,0.3,0.3,0.4,0.5\} \\
\{0.1,0.2,0.2,0.2,0.2\} & \{0.1,0.2,0.1,0.3,0.3\} & \{0.3,0.1,0.2,0.2,0.1\} \\
\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\} & \{0.1,0.7,0.6,0.8,0.9\} & \{0.5,0.3,0.7,0.4,0.5\} \\
\{0.3,0.5,0.5,0.6,0.9\} & \{0.7,0.7,0.5,0.6,0.8\} & \{0.3,0.5,0.6,0.4,0.4\}
\end{array} \right)
$$

از ترکیب مقادیر ارزیابی دو شیوه مذکور، ماتریس تصمیم جدید $HFND$ مشتمل بر اعداد فازی مردد به شرح ذیل حاصل خواهد شد:

$$HFND=\begin{pmatrix}
\langle 124;\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\}\rangle & \langle 321;\{0.1,0.4,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 175;\{0.2,0.6,0.6,0.4,0.5\}\rangle & \langle 82;\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 144;\{0.3,0.2,0.6,0.3,0.3\}\rangle & \langle 127;\{0.3,0.4,0.6,0.7,0.7\}\rangle \\
\langle 123;\{0.3,0.5,0.8,0.6,0.9\}\rangle & \langle 324;\{0.3,0.5,0.6,0.5,0.9\}\rangle & \langle 160;\{0.9,0.9,0.9,0.9,0.9\}\rangle & \langle 88;\{0.7,0.8,0.5,0.5,0.9\}\rangle & \langle 147;\{0.3,0.4,0.4,0.6,0.8\}\rangle & \langle 125;\{0.8,0.8,0.8,0.9,0.9\}\rangle \\
\langle 123;\{0.3,0.5,0.6,0.7,0.9\}\rangle & \langle 327;\{0.1,0.5,0.6,0.9,0.9\}\rangle & \langle 170;\{0.3,0.5,0.7,0.6,0.9\}\rangle & \langle 85;\{0.7,0.6,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 148;\{0.3,0.3,0.5,0.6,0.6\}\rangle & \langle 127;\{0.6,0.7,0.8,0.6,0.9\}\rangle \\
\langle 121;\{0.9,0.7,0.8,0.9,0.9\}\rangle & \langle 329;\{0.1,0.7,0.3,0.8,0.9\}\rangle & \langle 173;\{0.2,0.6,0.7,0.4,0.5\}\rangle & \langle 85;\{0.8,0.7,0.5,0.5,0.6\}\rangle & \langle 147;\{0.1,0.5,0.4,0.5,0.9\}\rangle & \langle 129;\{0.7,0.3,0.3,0.4,0.5\}\rangle \\
\langle 125;\{0.1,0.1,0.1,0.1,0.1\}\rangle & \langle 327;\{0.1,0.2,0.1,0.2,0.1\}\rangle & \langle 171;\{0.2,0.2,0.3,0.1,0.1\}\rangle & \langle 90;\{0.1,0.2,0.2,0.2,0.2\}\rangle & \langle 149;\{0.1,0.2,0.1,0.3,0.3\}\rangle & \langle 130;\{0.3,0.1,0.2,0.2,0.1\}\rangle \\
\langle 125;\{0.8,0.8,0.9,0.8,0.9\}\rangle & \langle 325;\{0.9,0.8,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 172;\{0.2,0.2,0.3,0.4,0.5\}\rangle & \langle 90;\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\}\rangle & \langle 145;\{0.1,0.7,0.6,0.8,0.9\}\rangle & \langle 129;\{0.5,0.3,0.7,0.4,0.5\}\rangle \\
\langle 122;\{0.4,0.4,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 325;\{0.8,0.5,0.6,0.9,0.6\}\rangle & \langle 172;\{0.3,0.5,0.6,0.6,0.6\}\rangle & \langle 89;\{0.3,0.5,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 147;\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.8\}\rangle & \langle 129;\{0.3,0.5,0.6,0.4,0.4\}\rangle
\end{pmatrix}$$

هر سطر ماتریس $HFND$ را به کمک انتگرال چوکوئت به یک مقدار واحد به‌عنوان امتیاز نهایی گزینه نظیر آن سطر همسوسازی می‌نماییم. نتایج این محاسبات و رتبه‌بندی گزینه‌ها در **جدول ۱** آمده است.

بنابراین، رتبه‌بندی گزینه‌ها به شرح زیر خواهد بود:

$$A_5 \prec A_1 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_3 \prec A_2 \prec A_7.$$

جدول ۱- همسوسازی سطرهای ماتریس تصمیم فازی مردد و رتبه‌بندی گزینه‌ها.

Table 1- Align hesitant fuzzy decision matrix rows and rank options.

گزینه	حاصل انتگرال	امتیاز	رتبه
A_1	$\langle 197.93;\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\rangle$	98.965	6
A_2	$\langle 197.25;\{0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\rangle$	118.35	2
A_3	$\langle 199.39;\{0.1,0.3,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\}\rangle$	111.089	3
A_4	$\langle 200.44;\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\}\rangle$	100.22	4
A_5	$\langle 200.81;\{0.1,0.2,0.3\}\rangle$	40.162	7
A_6	$\langle 199.59;\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\rangle$	99.795	5
A_7	$\langle 199.43;\{0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\}\rangle$	119.658	1

۲-۶- تحلیل عددی

به‌منظور تحلیل و بررسی رتبه‌بندی حاصل از اِعمال روش CI در محیط فازی مردد، اجازه دهید مسئله را با برخی روش‌های متداول مانند روش میانگین، روش میانگین وزن‌دار ساده، حل نماییم.

اگر فقط امتیازات خود-ارزیابی و درنتیجه ماتریس تصمیم قطعی D را در نظر بگیریم و امتیاز نهایی هر گزینه را حاصل جمع مستقیم گزینه‌ها، بدون در نظر گرفتن بردار وزن داده‌شده، بدانیم؛ خواهیم داشت:

$$A_2 \prec A_1 \prec A_3 \prec A_4 = A_7 \prec A_6 \prec A_5.$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود، در این روش گزینه‌ی فرضی A_5 با امتیازات غیرواقعی رتبه برتر را کسب کرده است و درعین‌حال گزینه A_2 به پایین‌ترین رده تنزل پیداکرده است.

با اِعمال روش میانگین وزن‌دار ساده‌روی سطرهای ماتریس D، نیز داریم:

$$A_2 \prec A_1 \prec A_3 \prec A_7 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_5 .$$

اگر صرفاً ارزیابی‌های تصمیم‌گیرندگان یعنی ماتریس تصمیم $HFED$ را در نظر گرفته و امتیاز هر گزینه را از طریق همسوسازی هر سطر آن به روش انتگرال چوکوئت به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$A_5 \prec A_1 \prec A_4 \prec A_7 \prec A_3 \prec A_6 \prec A_2 .$$

ملاحظه می‌شود که گزینه‌ی فرضی A_5 پایین‌ترین رده ارزیابی را دارد، زیرا امتیازات غیرواقعی خود-ارزیابی در محاسبات نقشی ندارند.

مقایسه این رتبه‌بندی‌ها با آنچه روش پیشنهادی این مقاله در استفاده هم‌زمان از نظرات تصمیم‌گیرندگان و امتیازات خود-ارزیابی، نشان می‌دهد که این روش ضمن استفاده از امتیازات روش خود-ارزیابی، با توجه به واقعیت زمینی نسبت به ارزیابی‌های احتمالاً غیرواقعی واکنش مناسب را نشان می‌دهد. ازاین‌رو باعث می‌شود تا هم تصمیم‌سازان و هم ارزیاب‌شوندگان نسبت به روش اتخاذشده موضع منصفانه‌تر و در قضاوت نیز عادلانه‌تر رفتار نمایند. علاوه براین در زیر بخش بعدی به اعتبار سنجی روش نیز خواهیم پرداخت.

۳-۶- اعتبارسنجی روش

وانگ و تریان‌تافیلو[۱] (۲۰۰۸) سه آزمون معیار برای اعتبارسنجی یک روش ارائه کردند:

آزمون معیار ۱. اگر بردار وزن بدون تغییر و یک گزینه غیر بهین را با یک گزینه‌ی بدتر جایگزین کنیم، جایگاه گزینه برتر نباید تغییر کند.

آزمون معیار ۲. در یک روش مؤثر تصمیم‌گیری چند معیاره[۲]، ویژگی ترایایی باید برقرار باشد.

آزمون معیار ۳. جواب یک مسئله $MCDM$ در هر دو حالت زیر باید یکسان باشد: الف–حل مسئله در حالت کلی و بدون تجزیه‌ی آن به چندین زیر مسئله $MCDM$؛ ب– تجزیه مسئله $MCDM$ به دو یا چند زیر مسئله $MCDM$ و حل آن‌ها و جمع‌بندی رتبه‌های به‌دست‌آمده با استفاده از ویژگی ترایایی.

در این زیر بخش سه آزمون فوق را در مورد روش معرفی‌شده موردبررسی قرار خواهیم داد.

فرض کنید گزینه‌ی غیر بهین A جایگزین گزینه‌ی A_3 با امتیازات ارزیابی زیر گردد:

$$\{\langle 122;\{0.4,0.7,0.2,0.5,0.5\}\rangle,\langle 324,\{0.5,0.2,0.3,0.6,0.3\}\rangle,\langle 169;\{0.3,0.8,0.6,0.6,0.5\}\rangle$$
$$\langle 87;\{0.4,0.9,0.1,0.2,0.2\}\rangle,\langle 145;\{0.6,0.6,0.5,0.3,0.3\}\rangle,\langle 126;\{0.4,0.7,0.6,0.7,0.7\}\rangle\}.$$

امتیاز این گزینه پس از همسوسازی با روش CI به‌صورت $\langle 197.7;\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\}\rangle$ و درنتیجه تابع امتیاز آن مقدار ۹۸٫۸۵ خواهد بود. با این امتیاز رتبه‌بندی $A_5 \prec A \prec A_1 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_2 \prec A_7$ را داریم که تغییری در رتبه‌ی گزینه‌ی برتر ایجاد نشده است.

اگر مسئله را به چهار مسئله $MCDM$ با گزینه‌های $\{A_1,A_2,A_5,A_6,A_7\}$، $\{A_3,A_4,A_5,A_7\}$، $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_7\}$ و $\{A_2,A_3,A_4,A_5,A_7\}$ تجزیه کنیم، به ترتیب رتبه‌بندی آن‌ها به ترتیب به‌صورت $A_5 \prec A_1 \prec A_2 \prec A_7 \prec A_6$ ،

---

[۱] Wang and Triantaphyllou
[۲] Multi Criteria Decision Making (MCDM)

$A_5 \prec A_3 \prec A_4 \prec A_4 \prec A_7$ ، $A_5 \prec A_1 \prec A_2 \prec A_7 \prec A_3 \prec A_4$ و $A_5 \prec A_2 \prec A_3 \prec A_4 \prec A_7$ خواهد بود. از ترکیب این جواب-ها، رتبه‌ی ۷ گزینه عبارت است از:

$$A_5 \prec A_1 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_3 \prec A_2 \prec A_7.$$

این یعنی روش ارائه‌شده در سه معیار معرفی‌شده صدق می‌کند.

۷- نتیجه‌گیری و مطالعات آینده

امروزه، به دلیل منافع و مضراتی که نتایج ارزیابی، چه در بُعد فردی (کارمند، کارگر، مدیر و ...) و چه در بُعد سازمانی (ادارات دولتی، شرکت‌های خصوصی، محصولات تولیدی و ...)، متوجه ارزیاب‌شونده خواهند کرد، نظام ارزیابی عملکرد و کیفیت انجام فرآیند آن موردتوجه و تحلیل بیشتر طرفین ماجرا (ارزیاب‌کننده و ارزیاب‌شونده) قرارگرفته است. ارزیاب شوندگان تمایل دارند تا متناسب با سطح تخصص، پیچیدگی، تنگناها و حتی مشکلات کاری خارج از اراده‌شان ارزیابی شوند و از این حیث قضاوت ارزیاب کنندگان خارجی را که اتفاقاً می‌توانند بی‌طرفانه داوری کنند به دلیل عدم آشنایی تخصصی به حوزه مدنظر، عدم حضور مستمر در مجموعه و ...، به چالش می‌کشند. از طرف دیگر، ارزیاب‌کنندگان نیز فرآیند خود-ارزیابی را از بیم ارزیابی ویترینی یا نمایش واقعیت در راستای کسب امتیاز و حتی اعتراض دیگر ارزیاب‌شوندگان به نتایج، مورد وثوق قرار نمی‌دهند. در این مقاله با ترکیب هر دو روش مذکور، روش ارزیابی ترکیبی معرفی و نتایج نیز در قالب اعداد فازی مردد مدل‌سازی شدند. با توجه به این‌که در دنیای واقعی معیارها لزوماً از هم مستقل نیستند و اثرات مثبت و منفی بر یکدیگر دارند، در این مقاله انتگرال چوکوئت فازی مردد پیشنهاد و در همسوسازی هر سطر ماتریس تصمیم از آن استفاده شد. در پایان نیز با حل یک مثال عدد و تحلیل نتایج به‌دست‌آمده، اعتبارسنجی روش بررسی گردید. در مطالعات آینده نیز تلاش خواهد شد تا روش‌های تاپسیس فازی مردد، ویکور فازی مردد معرفی و در حل مسائل *MADM* از آن‌ها استفاده شود.

"از نویسندگان محترم تقاضا می‌گردد موارد زیر را در متن مقاله ذکر نمایند."

توافقنامه نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که نسخه نهایی را قبل از ارسال مشاهده و تأیید کرده‌اند. همچنین تضمین می‌نماییم که این مقاله اثر اصلی نویسندگان است و قبلاً چاپ‌نشده یا در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

سپاسگزاری

نویسندگان تمایل دارند تا مراتب تقدیر و تشکر خویش را از داوران محترم که با نظرات سازنده خویش موجب افزایش کیفیت مقاله شدند، ابراز نمایند.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد.

منابع

Atanassov, K. (2016). Intuitionistic fuzzy sets. *International journal bioautomation*, *20*(S1), S1-S6. https://www.proquest.com/openview/488e821e83b74821060562dc9b20f49e/1?pq-origsite=gscholar&cbl=4720765

Deli, I. (2020). A TOPSIS method by using generalized trapezoidal hesitant fuzzy numbers and application to a robot selection problem. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *38*(1), 779-793. DOI: 10.3233/JIFS-179448

Denoeux, T. (2014). *Dempster-Shafer theory, Introduction, connections with rough sets and application to clustering*. RSKT, Shanghai, China. https://www.hds.utc.fr/~tdenoeux/dokuwiki/_media/en/rskt2014.pdf

Garg, H., & Arora, R. (2020). TOPSIS method based on correlation coefficient for solving decision-making problems with intuitionistic fuzzy soft set information. *AIMS mathematics*, *5*(4), 2944-2966. DOI: 10.3934/math.2020190

Garg, H., Keikha, A., & Mishmast Nehi, H. (2020). Multiple-attribute decision-making problem using TOPSIS and choquet integral with hesitant fuzzy number information. *Mathematical problems in engineering*. https://doi.org/10.1155/2020/9874951

Joshi, D., & Kumar, S. (2016). Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Choquet integral based TOPSIS method for multi-criteria group decision making. *European journal of operational research*, *248*(1), 183-191. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.047

Keikha, A. (2016). *Fuzzy Choquet integral and its application in multi-attribute decision making* (Doctoral dissertation, University of Sistan and Baluchestan). (**In Persian**). https://scholar.google.com/citations?view_op=list_works&hl=en&hl=en&user=_3QbY6sAAAAJ

Keikha, A. (2021). Introducing a new type of HFSs and its application in solving MAGDM problems. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *40*(5), 9333-9344.

Keikha, A., & Nehi, H. M. (2015). Fuzzified Choquet integral and its applications in MADM: a review and a new method. *International journal of fuzzy systems*, *17*(2), 337-352. https://doi.org/10.1007/s40815-015-0037-0

Klir, G. J. (2006). Uncertainty and information: foundations of generalized information theory. *Kybernetes*, *35*(7/8), 1297-1299. https://doi.org/10.1108/03684920610675283

Lalotra, S., & Singh, S. (2020). Knowledge measure of hesitant fuzzy set and its application in multi-attribute decision-making. *Computational and applied mathematics*, *39*(2), 1-31.

Liao, H., & Xu, Z. (2017). *Hesitant fuzzy decision making methodologies and applications*. Springer Singapore.

Liao, H., & Xu, Z. (2014a). Subtraction and division operations over hesitant fuzzy sets. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *27*(1), 65-72.

Liao, H., & Xu, Z. (2014b). Some new hybrid weighted aggregation operators under hesitant fuzzy multi-criteria decision-making environment. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *26*(4), 1601-1617.

Liao, H., & Xu, Z. (2015). Extended hesitant fuzzy hybrid weighted aggregation operators and their application in decision making. Soft computing, 19(9), 2551-2564.

Liao, H., Wu, X., Keikha, A., & Hafezalkotob, A. (2018). Power average-based score function and extension rule of hesitant fuzzy set and the hesitant power average operators. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *35*(3), 3873-3882.

Liao, H., Xu, Z., & Xia, M. (2014a). Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making. *International journal of information technology & decision making*, *13*(01), 47-76. https://doi.org/10.1142/S0219622014500035

Liao, H., Xu, Z., & Zeng, X. J. (2014b). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making. *Information sciences*, *271*, 125-142. https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.02.125

Meng, F., Wang, C., & Chen, X. (2016). Linguistic interval hesitant fuzzy sets and their application in decision making. *Cognitive computation*, *8*(1), 52-68.

Pollack, H. N. (2005). *Uncertain science... uncertain world*. Cambridge university press.

Ranjbar, M., Miri, S. M., & Effati, S. (2020). Hesitant fuzzy numbers with (α, k)-cuts in compact intervals and applications. *Expert systems with applications*, *151*, 113363. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113363

Salicone, S. (2007). *Measurement Uncertainty: an approach via the mathematical theory of evidence. Springer science & business media.*

Smithson, M. (1988). *Ignorance and uncertainty*. New York: Springer.

Tong, X., & Yu, L. (2016). MADM based on distance and correlation coefficient measures with decision-maker preferences under a hesitant fuzzy environment. *Soft computing*, *20*(11), 4449-4461. https://doi.org/10.1007/s00500-015-1754-x

Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, *25*(6), 529-539. https://doi.org/10.1002/int.20418

Torra, V., & Narukawa, Y. (2009, August). On hesitant fuzzy sets and decision. *2009 IEEE international conference on fuzzy systems* (pp. 1378-1382). IEEE. DOI: 10.1109/FUZZY.2009.5276884

Tzeng, G. H., & Huang, J. J. (2011). *Multiple attribute decision making: methods and applications*. CRC press.

Xia, M., & Xu, Z. (2011a). Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International journal of approximate reasoning*, *52*(3), 395-407. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2010.09.002

Xia, M., & Xu, Z. (2011b). Methods for fuzzy complementary preference relations based on multiplicative consistency. *Computers & industrial engineering*, *61*(4), 930-935. https://doi.org/10.1016/j.cie.2011.06.005

Xu, Z., & Xia, M. (2011). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. *Information sciences*, *181*(11), 2128-2138. https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.01.028

Wang, X., & Triantaphyllou, E. (2008). Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods. *Omega*, *36*(1), 45-63. https://doi.org/10.1016/j.omega.2005.12.003

Weaver, W. (1948). Complexity and science. *American scientist*, *36*, 536-544.

Wei, G. (2012). Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making. *Knowledge-based systems*, *31*, 176-182. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.03.011

Wei, G., Zhao, X., Wang, H., & Lin, R. (2012). Hesitant fuzzy choquet integral aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making. International information institute (Tokyo). *Information*, *15*(2), 441-448.

Yu, D., Wu, Y., & Zhou, W. (2011). Multi-criteria decision making based on Choquet integral under hesitant fuzzy environment. *Journal of computational information systems*, *7*(12), 4506-4513.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linear variable and its application to approximate reasoning-1. *Information science*, *8*(3), 199-249.