

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها با در نظر گرفتن دوره‌های زمانی متعدد

رضا مداحی*، حمیدرضا یزدانی نجف‌آبادی

گروه ریاضی، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران.

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تکنیکی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس است. در این روش، عدد کارایی برای هر واحد، از مقایسه‌ی عملکرد هر واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) با عملکرد بقیه واحدها به‌دست می‌آید. عدد کارایی مذکور به‌عنوان معیاری برای رتبه‌بندی واحدها قابل استفاده است. در بسیاری از موارد تعداد قابل توجهی از واحدها کارا شده و لذا، کارایی حاصل از مدل‌های کلاسیک DEA نمی‌تواند معیار مناسبی برای رتبه‌بندی دقیق DMU ها باشد. در این پژوهش، روشی برای رتبه‌بندی DMU ها با استفاده از کارایی آن‌ها در دوره‌های زمانی متعدد ارائه می‌شود، به‌صورتی که سه نوع مجموعه امکان تولید معرفی می‌شود و متناظر با هر مجموعه، یک عدد کارایی برای هر DMU به‌دست می‌آید. سپس، سه مقدار کارایی منتج از سه روش مذکور، با استفاده از روش آنتروپی شانون با یکدیگر ترکیب شده و یک معیار کارایی کلی برای هر واحد تعریف می‌کنند. این معیار در نهایت به عنوان شاخص اصلی برای رتبه‌بندی واحدها در نظر گرفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، ارزیابی عملکرد، کارایی، دوره‌های زمانی.

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۳

اصلاح: ۱۳۹۹/۰۲/۱۵

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۰۷

Ranking of Decision-Making Units Using Data Envelopment Analysis by Considering Multiple Time Periods

Reza Maddahi*, Hamid Reza Yazdani

Department of Mathematics, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najaf abad, Iran.

Abstract

Data Envelopment Analysis (DEA) is a technique for evaluating homogeneous decision-making units. In this method, the efficiency score for each unit is obtained by comparing the performance of each Decision-Making Unit (DMU) with the performance of the other units. This performance score can be used as a criterion for ranking units. In many cases, a significant number of units are efficient, and therefore, the efficiency of the classic DEA models cannot be a good criterion for accurate ranking of DMUs. In this study, a method for ranking DMUs using their efficiency is presented in several time periods, so that three types of production possibility sets are introduced. In the first type, for each time period, an independent production possibility set is defined, in the second type, a combination production possibility set is used for all time periods, and in the third type, a community production possibility set is created, which considers all time periods. Then, corresponding to each type, one efficiency number is obtained for each DMU. Therefore, the three values of efficiency resulting from the three methods are combined using the Shannon entropy method and define a general performance criterion for each unit. This criterion is ultimately considered as the main indicator for ranking units.

Keywords: Data envelopment analysis, Ranking, Performance evaluation, Efficiency, Time period.

Receive: 07/05/2019

Revise: 04/05/2020

Accept: 11/06/2020



تحلیل پوششی داده‌ها^۱ (DEA) یک روش برنامه‌ریزی ریاضی به منظور ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده^۲ (DMU) متجانس است که در گروه روش‌های ارزیابی عملکرد ناپارامتریک قرار می‌گیرد. این تکنیک، مبتنی بر رویکرد برنامه‌ریزی خطی است که هدف اصلی آن، مقایسه و سنجش کارایی تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیرنده مشابه است که تعداد ورودی‌های مصرفی و خروجی‌های تولیدی متفاوتی دارند. این واحدها می‌توانند شعب یک بانک، مدارس، بیمارستان‌ها، پالایشگاه‌ها، نیروگاه‌های برق، ادارات تحت پوشش یک وزارت‌خانه و یا کارخانه‌هایی که محصول مشابهی را تولید می‌کنند، باشند. (برای مطالعه‌ی بیش‌تر مراجعه کنید به امانی و باقرزاده ولمی^۳ (۲۰۱۸) و خانمحمدی و حیدری^۴ (۲۰۱۸)) منظور از مقایسه و سنجش کارایی این است که یک واحد تصمیم‌گیرنده در مقایسه با سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده، چقدر خوب از منابع خود در راستای تولید استفاده کرده است از این‌رو تحلیل پوششی داده‌ها مهم‌ترین و متداولترین سازوکارها جهت ارزیابی و اندازه‌گیری عملکرد یک سیستم به‌شمار می‌رود. لذا در چند دهه‌ی گذشته، تحلیل کارایی سیستم‌ها همواره مورد توجه محققان بوده است تا به‌وسیله‌ی آن بتوانند نقاط قوت و ضعف و یا کارایی و عدم کارایی خود را مورد ارزیابی قرار دهند و به رفع نواقص و تقویت نقاط قوت بپردازند. هم‌چنین استفاده‌ی بهینه‌ای از منابع موجود به‌عمل آوردن (عباس جهان‌گیری^۵، ۲۰۱۹). ابتدایی‌ترین مدل‌های این روش اولین بار توسط چارلز و همکاران^۶ (۱۹۷۸) پیشنهاد شد. در مدل‌های DEA، راهکار بهبود واحدهای ناکارا، رسیدن به مرز کارایی است. مرز کارایی، متشکل از واحدهایی با اندازه‌ی کارایی ۱ است. به‌طور کلی، دئوئوع راهکار برای بهبود واحدهای غیرکارا و رسیدن آن‌ها به مرز کارایی وجود دارد:

- کاهش ورودی‌ها بدون کاهش خروجی‌ها تا زمان رسیدن به واحدی بر روی مرز کارایی (این روش را سنجش کارایی با ماهیت ورودی - محور می‌نامند).
- افزایش خروجی‌ها تا زمان رسیدن به واحدی بر روی مرز کارایی بدون افزایش ورودی‌ها (این روش را سنجش کارایی با ماهیت خروجی - محور می‌نامند).

ارزیابی DEA به شدت وابسته به ورودی تصمیم‌گیرندگان است، که باید روش رتبه‌بندی ارجح خود را با دقت انتخاب کنند. بحث و یافته‌ها به‌عنوان راهنمایی برای تحلیلگران مورد استفاده قرار گیرد تا بهترین روش رتبه‌بندی مناسب را هنگام ارزیابی DEA برای هر مجموعه داده تعیین کند (آلدماک و ذوالفقاری^۷، ۲۰۱۷).

از یک منظر دیگر مدل‌های DEA به مدل‌های پوششی و مدل‌های مضربی تقسیم‌بندی می‌شوند. در مدل‌های پوششی مقدار کارایی هر واحد با مقایسه‌ی آن با مرز مجموعه امکان تولید به‌دست می‌آید و در حالت دوم مقدار کارایی هر واحد با استفاده از وزن‌های اختصاص یافته به ورودی‌ها و خروجی‌های آن در مقایسه با سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده محاسبه می‌شود. توجه کنید که مدل‌های پوششی دوگان^۸ مدل‌های مضربی هستند و لذا با توجه به روابطی که بین یک مدل برنامه‌ریزی خطی و دوگان آن وجود دارد مقدار تابع هدف هر دو مدل در ارزیابی یک DMU در جواب بهینه برابر است. در این مقاله تمرکز بر روی مدل‌های پوششی خواهد بود. مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها، به‌دلیل نبود رتبه‌بندی کامل بین واحدهای کارا، امکان مقایسه‌ی واحدهای کارا با یکدیگر را فراهم نمی‌آورند. به‌عبارت دیگر، این مدل‌ها واحدهای تحت بررسی را به دو گروه واحدهای کارا و واحدهای ناکارا تقسیم می‌کنند. واحدهای ناکارا با کسب امتیاز کارایی، قابل رتبه‌بندی هستند، اما واحدهای کارا به‌دلیل این‌که دارای امتیاز کارایی برابر (کارایی واحد) هستند، قابل رتبه‌بندی نیستند. لذا برخی از محققین، روش‌هایی را برای رتبه‌بندی این واحدهای کارا پیشنهاد کرده‌اند که از معروف‌ترین آن‌ها می‌توان به مدل AP (آندرسون و پترسون^۹، ۱۹۹۳) و روش کارایی متقاطع اشاره کرد. در تحلیل پوششی داده‌ها برای محاسبه‌ی کارایی هر واحد بر مبنای تعدادی فرض، که اصول موضوعه نامیده می‌شود یک مجموعه امکان تولید (pps) ساخته می‌شود و سپس با استفاده از مرز آن کارایی

^۱Date Envelopment Analysis

^۲Decision Making Units

^۳Amani & Bagherzadeh

^۴Khanmohamadi & Heydari

^۵Ahangiri

^۶Charnes et al.

^۷Aldamak & Zolfaghari

^۸Dual

^۹Andersen & Petersen

هر فاصله براساس فاصله تا مرز سنجیده می‌شود. اصول فوق عبارتند از: (۱) اصل شمول مشاهدات، (۲) اصل بی‌کرانی اشعه، (۳) اصل تحدب، (۴) اصل امکان پذیری و (۵) اصل کمینه‌ی درونیابی.

در تحلیل پوششی داده‌ها رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین موضوعات در ارزیابی کارایی است. نتایج محاسبات از تحلیل پوششی داده‌های سنتی، بعضی اوقات شامل چندین DMU کارآمد یا چند DMU با همان کارایی یکسان است، که در این صورت این روش در تمایز میان این DMU ها ضعیف است. در همین راستا، مجموعه‌ای از مقالات وجود دارد که آلداما و ذوالفقاری (۲۰۱۷) یک مقاله‌ی مروری در زمینه‌ی رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه نمودند که در این مقاله به ۱۰ روش رتبه‌بندی که تا سال ۲۰۱۶ ارائه شده است می‌پردازد. در سال ۲۰۱۹ روشی برای رتبه‌بندی بر مبنای تحلیل پوششی معکوس ارائه شد. در روش اتخاذشده، میزان افزایش ورودی مورد نیاز با افزایش خروجی‌های واحد مورد ارزیابی از طریق مدل‌های پیشنهادی به‌دست می‌آید. با به‌دست آوردن این تغییرات، این روش پیشنهادی محقق را قادر می‌سازد DMU های کارآمد را به روشی مناسب رتبه‌بندی کند (سلیمانی چم خرمی و همکاران^۱، ۲۰۲۰). در این زمینه بسیاری از محققان به دنبال بهبود قابلیت‌های افتراقی DEA و رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی کارآ و ناکار هستند. آلدو و ولتا^۲ (۲۰۱۹) تحقیقات دیگری نیز در سال‌های اخیر برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به روش آنتروپی نسبی (سی و ما^۳، ۲۰۱۹) اشاره نمود. برای مطالعه‌ی بیش‌تر در این زمینه به مقالات کائو و لیو^۴ (۲۰۲۰)، بلوری و همکاران^۵ (۲۰۲۰)، آپاریکو و همکاران^۶ (۲۰۲۰) و ایزدی خواه و سائین^۷ (۲۰۱۹) مراجعه نمایید.

در ادامه‌ی این تحقیق ما به سهروش برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌پردازیم و در نهایت این سهروش را با وزن‌دهی توسط آنتروپی شانن باهم ترکیب می‌نماییم. در قسمت اول مجموعه امکان تولید کلاسیک در DEA معرفی شده سپس مجموعه امکان تولیدهای جدید بر مبنای دوره‌های زمانی خاص ارائه می‌شود که به روش‌های متفاوت، کارایی‌هایی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده به دست می‌آید. در ادامه، روش آنتروپی شانن معرفی شده و به‌منظور ترکیب کارایی حاصل از هر واحد مورد استفاده قرار می‌گیرد. انتها، کارایی ترکیبی حاصل به‌منظور رتبه‌بندی واحدها به‌کار برده می‌شود. در پایان به ارائه‌ی مسئله‌ای با توجه به روش‌های ارائه‌شده می‌پردازیم.

۲- مجموعه امکان تولید و کارایی کلاسیک

در این قسمت، ابتدا مجموعه امکان تولید بر مبنای اصول پنج‌گانه فوق معرفی می‌شود. در صورتی که هر ۵ اصل در ساخت PPS به‌کار برده شود، مجموعه‌ی حاصل، مجموعه امکان تولید CCR نامیده می‌شود که توسط چارنز و کوپر^۸ (۱۹۸۴) ارائه شد. در صورتی که اصل بی‌کرانی اشعه را در ساخت PPS حذف کنیم مجموعه امکان تولید BCC تولید می‌شود که توسط بنکر و همکاران^۹ (۱۹۸۴) ارائه شد. وجه تسمیه‌ی این مدل‌ها با استفاده از ابتدای نام پیشنهاد دهندگان آن‌ها CCR و BCC نامیده شده است. در ادامه، این دو مجموعه تعریف و با نمادهای $PPSBCC$ و $PPSCCR$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید که n واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j, (j=1,2,3,...,n)$ ، m ورودی $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj})$ را برای تولید s خروجی $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{sj})$ مصرف می‌نمایند.

$$PPSCCR = \left\{ (x, y) \left| x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0, j=1, 2, ..., n \right. \right\}. \quad (1)$$

$$PPSBCC = \left\{ (x, y) \left| x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j=1, 2, ..., n \right. \right\}. \quad (2)$$

^۱Soleimani-Chamkhorami et al.

^۲Adler & Volta

^۳Si & Ma

^۴Kao & Liu

^۵Bolouri et al.

^۶Aparicio et al.

^۷Izadikhah & Saen

^۸Charnes & Cooper

^۹Banker et al.



با استفاده از مجموعه امکان تولید PPS_{BCC} ، مدل‌های ورودی محور^۱ و خروجی محور^۲ BCC برای ارزیابی $DMUK$ به صورت مدل های (۳)-(۴) مدل می‌شود. این مدل‌ها، مدل‌های با بازده به مقیاس متغیر نامیده می‌شود که با حذف فرض بی‌کرانی اشعه در PPS_{BCC} مجموعه امکان تولید CCR ، PPS_{CCR} به وجود می‌آید و در مدل‌های CCR ، تنها قید $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ از مدل‌های ذیل حذف می‌شود که آن‌ها مدل‌های بازده به مقیاس ثابت نامیده می‌شود.

Min θ

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \quad \forall i, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk}, \quad \forall r, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (3)$$

Max φ

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \quad \forall i, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{rk} \quad \forall r, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (4)$$

قضیه ۱. واحد تصمیم گیرنده کارایی تکنیکی است هرگاه مقدار بهینه‌ی تابع هدف در مدل (۱) یا در مدل (۲) برابر یک باشد.

در قسمت‌های بعد، مدل‌های بازده به مقیاس متغیر به عنوان مبنای اصلی برای ارائه‌ی روش رتبه‌بندی در نظر گرفته می‌شود و به سادگی قابل تعمیم به مدل‌های بازده به مقیاس ثابت است. در ادامه سه روش برای ارزیابی کارایی DMU ها با استفاده از دوره‌های زمانی متعدد ارائه می‌شود.

۳- رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده

در این قسمت سه نوع کارایی برای هر واحد تصمیم گیرنده ارائه می‌شود. سپس ترکیب آن‌ها با استفاده از ضرائب حاصل از روش آنتروپی شانون به عنوان معیاری برای رتبه‌بندی در نظر گرفته می‌شود.

فرض کنید واحد تصمیم گیرنده j ام، $DMU_j, (j=1,2,3,...,n)$ ، بردار ورودی $x_j^t = (x_{1j}^t, x_{2j}^t, ..., x_{mj}^t)$ ، در زمان t را برای تولید بردار خروجی $y_j^t = (y_{1j}^t, y_{2j}^t, ..., y_{sj}^t)$ در زمان t و $t=1,2,...,T$ مصرف می‌نمایند.

۳-۱- روش اول: محاسبه‌ی کارایی در هر دوره به صورت مستقل

در این روش کارایی هر واحد، با استفاده از مجموعه امکان تولیدی که در هر زمان $t, t=1,2,...,T$ به صورت کلاسیک تعریف می‌شود و با نماد PPS^t نمایش می‌دهیم، محاسبه می‌گردد و این مجموعه به صورت زیر خواهد بود:

^۱Input-Oriented
^۲Output-Oriented

$$PPS^t = \left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^t, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^t, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (5)$$

بنابراین، با استفاده از مجموعه امکان تولیدهای فوق، برای هر $DMU_k, (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ عدد کارایی به صورت (θ_j^t) بر مبنای مدل (۳) در هر دوره‌ی زمانی t ، به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} \theta_k^t &= \text{Min } \theta. \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t &\leq \theta x_{ik}^t \quad \forall i, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t &\geq y_{rk}^t, \quad \forall r, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (6)$$

در این مرحله کارایی که برای هر DMU_k و $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ با توجه به T دوره‌ی زمانی و به صورت کلی تعریف می‌شود برابر است با:

$$\theta_k^1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \theta_k^t. \quad (7)$$

در روش اول، ابتدا کارایی هر واحد در هر دوره‌ی زمانی t ، به صورت عادی محاسبه می‌شود و سپس میانگین کارایی‌ها به عنوان کارایی کل واحد تصمیم‌گیرنده در یک دوره‌ی زمانی با طول T در نظر گرفته می‌شود.

۳-۲- روش دوم: محاسبه‌ی کارایی با معرفی DMU های ترکیبی

در این روش، مجموع شاخص‌های ورودی و خروجی برای هر DMU در دوره‌های زمانی مختلف را به عنوان ورودی و خروجی در نظر می‌گیریم، به این صورت $DMU_j = \left(\sum_{t=1}^T x_j^t, \sum_{t=1}^T y_j^t \right)$ و کارایی کلی را با تعریف یک مجموعه امکان تولید به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$PPS^T = \left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{t=1}^T x_j^t, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{t=1}^T y_j^t, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (8)$$

بنابراین، با استفاده از مجموعه امکان تولید PPS^T ، مدل زیر برای ارزیابی DMU_k ، در ماهیت ورودی محور ارائه می‌شود و کارایی حاصل از آن θ_k^2 نامیده می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta_k^2 &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{t=1}^T x_{ij}^t &\leq \theta \sum_{t=1}^T x_{ik}^t \quad \forall i, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{t=1}^T y_{rj}^t &\geq \sum_{t=1}^T y_{rk}^t, \quad \forall r, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (9)$$

در مدل (۹)، در واقع واحد تصمیم‌گیری در دوره‌های زمانی مختلف مانند یک دوره زمانی واحد در نظر گرفته شده است.

در این روش، هر واحد تصمیم‌گیرنده در هر زمان را به‌عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده مستقل در نظر می‌گیریم. بنابراین در این حالت تعداد کل DMU ها برابر $N=nT$ خواهد شد و مجموعه امکان تولید به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$PPS^N = \left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^t, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^t, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T \right\} \quad (10)$$

در این حالت کارایی حاصل برای ارزیابی $DMUK$ ، با نماد θ_k^3 نمایش داده می‌شود و با حل مدل به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \theta_k^3 &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t &\leq \theta x_{ik}^t, \forall i, \forall t, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t &\geq y_{rk}^t, \forall r, \forall t, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \lambda_j &\geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (11)$$

۴- محاسبه‌ی کارایی کل با استفاده از روش آنتروپی شانون و رتبه بندی DMU ها

در این قسمت، از روش آنتروپی شانون^۱، برای ترکیب سه نوع کارایی حاصل از بخش‌های قبل استفاده می‌شود (توکلی و شیرویه زاد^۲، ۲۰۱۶). برای این منظور با توجه به مراحل این روش، باید به‌صورت زیر عمل کرد.

مرحله‌ی اول: تشکیل ماتریس آنتروپی شانون. ابتدا ماتریس آنتروپی شانون (این ماتریس درواقع همان ماتریس تصمیم در روش تصمیم‌گیری چندمعیاره است) را تشکیل داده که در سطرهای آن DMU ها و در ستون‌های آن کارایی‌های به‌دست آمده از سه روش قبل یعنی مدل‌های (۶)-(۹)-(۱۱) قرار دارد. بنابراین، ماتریس فوق به صورت $A = [e_{kl}]$ خواهد شد. که در آن $e_{kl} = \theta_k^l$. توجه کنید که در این حالت ماتریس A یک ماتریس $n \times 3$ می‌گردد.

مرحله‌ی دوم: نرمال کردن ماتریس. سپس ماتریس بالا را نرمال نموده به این صورت که درایه هرستون را بر مجموع درایه‌های موجود در آن ستون تقسیم کرده و هر درایه‌ی نرمال‌شده با P_{kl} نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر

$$P_{kl} = \frac{e_{kl}}{\sum_{k=1}^n e_{kl}}, \forall k, l. \quad (12)$$

مرحله‌ی سوم: محاسبه مقدار آنتروپی. در این مرحله با استفاده از فرمول زیر آنتروپی E_l را به‌وسیله‌ی مقادیر P_{kl} محاسبه می‌کنیم که با توجه به تعریف آن مقداری بین صفر تا یک دارد.

$$E_l = -\frac{1}{\ln 3} \sum_k P_{kl} \ln(P_{kl}) \quad l = 1, 2, 3. \quad (13)$$

مرحله‌ی چهارم: محاسبه d_l (مقدار انحراف). مقادیر d_l را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌نمائیم که بیان می‌کند هر شاخص به چه میزان اطلاعات مفید برای تصمیم‌گیری را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد. لذا نقش آن شاخص در تصمیم‌گیری باید به همان اندازه کاهش یابد.

^۱ برای مطالعه در مورد این روش به (Soleimani-Damaneh & Zarepisheh, 2009) مراجعه شود

^۲ Tavakoli & Shirooye zad



$$d_l = 1 - E_l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (14)$$

مرحله‌ی پنجم: محاسبه وزن w_l . در این مرحله مقدار وزن w_l ها از طریق فرمول مقابل محاسبه می‌شود:

$$w_l = \frac{d_l}{\sum_{l=1}^3 d_l}, \quad l = 1, 2, 3 \quad (15)$$

مرحله‌ی ششم: به دست آوردن کارایی ترکیبی (τ_k). در این مرحله با استفاده از وزن‌های حاصل برای روش‌های اول، دوم و سوم در مرحله‌ی قبل "کارایی ترکیبی" برای هر DMU_k به صورت زیر به دست می‌آید، که با استفاده از آن می‌توان به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری بر مبنای عملکرد آن‌ها در دوره‌های زمانی متعدد پرداخت.

$$\tau_k = \sum_{l=1}^3 w_l \theta_k^l, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

۵- مثال

یکی از کاربردهای مهم تحلیل پوششی داده‌ها، اندازه‌گیری کارایی شعب بانک هاست. مطالعات گسترده‌ای در این زمینه انجام شده است که می‌توان به مواردی هم‌چون ری^۱ (۲۰۰۷)، آوکیران و موریتا^۲ (۲۰۱۰)، تنوار و همکاران^۳ (۲۰۲۰)، اسماعیلیان و همکاران^۴ (۲۰۲۰)، مالهورتا و همکاران^۵ (۲۰۲۰)، ماریانا و هرون^۶ (۲۰۲۰) و غیاثی و زو^۷ (۲۰۲۰) اشاره کرد. هم‌چنین، برای نشان دادن مزایای مدل پیشنهادی در این تحقیق، مطالعه‌ی موردی مربوط به تحقیق مرتضی شفیع^۸ (۲۰۱۶) مورد استفاده قرار گرفته و داده‌های مربوطه استخراج شده است. داده‌ها برحسب سال، به طور کامل در جدول ۱ (مرتضی شفیع، ۱۳۹۶) آورده شده است. T_1 ، بیانگر سال اول، T_2 ، بیانگر سال دوم و T_3 ، بیانگر سال سوم می‌باشد.

جدول ۱- داده‌های مربوط به عملکرد شعب بانک.

Table 1- Data related to the performance of bank branches.

DMUS	T1		T2		T3	
	ورودی	خروجی	ورودی	خروجی	ورودی	خروجی
DMU 1	24	54	25	50	24	40
DMU 2	49	323	50	298	44	283
DMU 3	56	188	55	191	49	185
DMU 4	36	202	36	201	35	196
DMU 5	19	330	20	103	18	106

در روش اول ابتدا کارایی در سه دوره‌ی زمانی را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم و سپس برای هر واحد تصمیم‌گیرنده میانگین این کارایی‌ها را به دست می‌آوریم. با توجه به اطلاعات جدول ۱ کارایی هر DMU در جدول ۲ آورده شده که می‌توان با توجه به اعداد به دست آمده رتبه‌بندی کرد.

^۱Ray

^۲Avkiran & Morita

^۳Tanwar et al.

^۴Esmailianb et al.

^۵Malhotra et al.

^۶Mariana & Harun

^۷Ghiyasi & Zhu

^۸Shafiee

جدول ۲- روش اول رتبه‌بندی.

Table 2- The first method of ranking.

	T1	T2	T3	$\theta_k^1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \theta_k^t$
DMU 1	۰/75	۰/8	۰/79167	۰/780556
DMU 2	1	1	۰/38776	۰/79592
DMU 3	۰/60417	۰/60979	۰/33929	۰/51775
DMU 4	۰/89201	۰/97436	۰/52778	۰/79805
DMU 5	1	1	1	1

در روش دوم داده‌های هر سه دوره با هم جمع می‌شوند و DMU ها بر این اساس با هم مقایسه می‌شوند که در جدول ۳ محاسبه شده است.

جدول ۳- روش دوم رتبه‌بندی.

Table 3- The second method of ranking.

	$\sum_{t=1}^T x_j^t$	$\sum_{t=1}^T y_j^t$	$\theta_k^2 = \text{Min } \theta$
DMU 1	73	144	۰/78082
DMU 2	143	904	1
DMU 3	160	564	۰/39307
DMU 4	107	599	۰/66483
DMU 5	57	539	1

در روش سوم هر دوره‌ی زمانی به‌عنوان یک سری DMU در نظر گرفته می‌شود. در این مسئله ما ۳ دوره‌ی زمانی و ۵ DMU داریم که در مجموع ۳×۵ DMU در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۴ این اطلاعات را می‌توان مشاهده نمود.

جدول ۴- روش سوم رتبه‌بندی.

Table 4- The third method of ranking.

	x_j^t	y_j^t	θ_k^3
DMU 1	24	54	
DMU 2	49	323	
DMU 3	56	188	
DMU 4	36	202	
DMU 5	19	330	
DMU 6	25	50	
DMU 7	50	298	
DMU 8	55	191	
DMU 9	36	201	
DMU 10	20	103	
DMU 11	24	40	۰/75
DMU 12	44	283	۰/42705
DMU 13	49	185	۰/37454
DMU 14	35	196	۰/52577
DMU 15	18	106	1



۵-۱- محاسبه‌ی کارایی کل با استفاده از روش آنتروپی شانون و رتبه‌بندی DMU ها

مرحله‌ی اول: تشکیل ماتریس آنتروپی شانون $A = [e_{kl}]$.

جدول ۵- ماتریس کارایی.

Table 5- Performance matrix.

	روش سوم	روش دوم	روش اول
DMU 1	0/750	0/781	0/781
DMU 2	0/427	1/000	0/796
DMU 3	0/375	0/393	0/518
DMU 4	0/526	0/665	0/798
DMU 5	1/000	1/000	1/000



مرحله‌ی دوم: نرمال کردن ماتریس $P_{kl} = \frac{e_{kl}}{\sum_{k=1}^n e_{kl}}, \forall k, l$.

جدول ۶- نرمال جدول ۵.

Table 6- Normal of Table 5.

	روش سوم	روش دوم	روش اول
DMU 1	0/244	0/203	0/201
DMU 2	0/139	0/261	0/204
DMU 3	0/122	0/102	0/133
DMU 4	0/171	0/173	0/205
DMU 5	0/325	0/261	0/257

مرحله‌ی سوم: محاسبه‌ی مقدار آنتروپی $E_l = -\frac{1}{\ln 3} \sum_k P_{kl} \ln (P_{kl}) \quad l = 1, 2, 3$.

جدول ۷- مقدار آنتروپی.

Table 7- Entropy value.

	E_l
L=1	1/447
L=2	1/422
L=3	1/403

مرحله‌ی چهارم: محاسبه‌ی d_l (مقدار انحراف) $d_l = 1 - E_l, \quad l = 1, 2, 3$.

جدول ۸- مقدار انحراف.

Table 8- The amount of deflection.

	d_l
L=1	0/447
L=2	0/422
L=3	0/403

مرحله‌ی پنجم: محاسبه‌ی وزن $w_l = \frac{d_l}{\sum_{l=1}^3 d_l}, \quad l = 1, 2, 3$.

جدول ۹- وزن.

Table 9- Weight.

	w_l
L=1	0/351
L=2	0/332
L=3	0/317

$$\tau_k = \sum_{l=1}^3 w_l \theta_k^l, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\tau_k) \text{ ترکیبی } \text{مرحله ی ششم: به دست آوردن کارایی ترکیبی}$$

جدول ۱۰- کارایی ترکیبی.

Table 10- Combined performance.

	τ_k
DMU 1	0/771
DMU 2	0/747
DMU 3	0/431
DMU 4	0/668
DMU 5	1/000

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش، روشی به منظور رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده با در نظر گرفتن عملکرد آن ها در دوره های متعدد پرداخته شد. در DEA واحدهای تصمیم گیرنده در یک دوره ی زمانی با یکدیگر مقایسه و رتبه بندی می شود ولی در این پژوهش سعی شده است واحد های تصمیم گیرنده ای که در دوره های زمانی مختلفی وجود دارد با یکدیگر مقایسه شود و کارایی هر واحد با توجه به دوره های زمانی ارزیابی شود و در نهایت برای هر DMU یک کارایی به دست آید. در این پژوهش سه روش مختلف برای ارزیابی DMU در دوره های زمانی متعدد در نظر گرفته شده است: (۱) ارزیابی کارایی در هر دوره به صورت مستقل و سپس در نظر گرفتن میانگین کارایی ها، (۲) ترکیب ورودی و خروجی های ادوار مختلف با یکدیگر و (۳) کل واحدهای تصمیم گیرنده در دوره های مختلف با هر ترکیبی از ورودی و خروجی را به عنوان مجموعه ی کامل مشاهدات در نظر گرفته، مجموعه امکان تولید را تشکیل داده و سپس با استفاده از مرز آن کارایی محاسبه شد. بنابراین، برای هر DMU سه نوع کارایی برگرفته از سه روش به دست آمد. در نهایت با استفاده از روش آنتروپی شانون کارایی های به دست آمده را ترکیب کرده و واحدها رتبه بندی می شود. مزیت استفاده از این روش آن است که ارزیابی یک DMU معطوف به یک زمان خاص نیست و می توان ادوار مختلف را در ارزیابی و نهایتاً رتبه بندی آن دخیل کرد.

منابع

- Amani, N., & Bagherzadeh, V. H. (2018). Efficiency evaluation of regional electronic companies in Iran by network DEA: a based on the conversion of the Structures into a uniform structure [ارزیابی کارایی شرکت های برق منطقه ای ایران با]. *Journal of decisions and operations research*, 3(3), 249-280.
- Jahangiri, A. (2019). Application of data envelopment analysis technique in Iran banking system [کاربرد تکنیک تحلیل]. *Journal of decisions and operations research*, 3(4), 368-401.
- Khanmohamadi, M., & Heydari, H. (2018). Evaluation of efficiency and ranking cement companies active in the market with improved method of integrating DEA and AHP [بررسی کارایی و رتبه بندی شرکت های سیمانی فعال در بورس با]. *Journal of decisions and operations research*, 3(2), 138-150.
- Shafiee, M. (2017). Bank branches efficiency assessment using dynamic data envelopment analysis approach to SBM [ارزیابی کارایی شعب بانک با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده های پویا با رویکرد]. *Journal of new researches in mathematics*, 3(10), 5-18.
- Tavakoli, M. M., & Shirooye zad, H. (2016). Proposing a method for combine of DEA ranking techniques by decision making approach - with a case study [ارائه روشی جهت ترکیب روش های رتبه بندی تحلیل پوششی داده ها با استفاده از رویکرد تصمیم]. *Journal of decisions and operations research*, 1(1), 52-65.
- Adler, N., & Volta, N. (2019). Ranking methods within data envelopment analysis. In *The Palgrave handbook of economic performance analysis* (pp. 189-224). Palgrave Macmillan, Cham.
- Aldamak, A., & Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 106, 161-172.
- Andersen, P., & Petersen, N. C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management science*, 39(10), 1261-1264.
- Aparicio, J., Ortiz, L., Pastor, J. T., & Zabala-Iturriagoitia, J. M. (2020). Introducing cross-productivity: a new approach for ranking productive units over time in Data Envelopment Analysis. *Computers & industrial engineering*. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106456>



- Avkiran, N. K., & Morita, H. (2010). Predicting Japanese bank stock performance with a composite relative efficiency metric: A new investment tool. *Pacific-basin finance journal*, 18(3), 254-271.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078-1092.
- Bolouri, M. E., Ziari, S., & Ebrahimnejad, A. (2020). New approach for ranking efficient DMUs based on Euclidean norm in data envelopment analysis. *International journal of operational research*, 37(1), 85-104.
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Preface to topics in data envelopment analysis. *Annals of operations research*, 2(1), 59-94.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- Esmailian, G., Jafari, M. R., Jafari Eskandari, M., & Tavakkoli-Moghaddam, R. (2020). Measuring the efficiency of banks' performance based on economic policies using data envelopment analysis. *International journal of nonlinear analysis and applications*, 11(2), 39-61.
- Ghiyasi, M., & Zhu, N. (2020). An inverse semi-oriented radial data envelopment analysis measure for dealing with negative data. *IMA journal of management mathematics*. <https://doi.org/10.1093/imaman/dpaa007>
- Izadikhah, M., & Saen, R. F. (2019). Ranking sustainable suppliers by context-dependent data envelopment analysis. *Annals of operations research*, 1-31.
- Kao, C., & Liu, S. T. (2020). A slacks-based measure model for calculating cross efficiency in data envelopment analysis. *Omega*. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2020.102192>
- Malhotra, D. K., Malhotra, R., & Nydick, R. (2020). Evaluating Cost Efficiencies in Asset Management and Custody Banks Using Data Envelopment Analysis. *The journal of financial data science*, 2(2), 110-127.
- Mariana, L., & Harun, H. (2020). Analysis of the efficiency level of Sharia Rural Financing Bank (SRFB) using Data Envelopment Analysis (DEA). *Journal of Islamic economic laws*, 3(1), 68-85.
- Ray, S. C. (2007). Are some Indian banks too large? An examination of size efficiency in Indian banking. *Journal of productivity analysis*, 27(1), 41-56.
- Si, Q., & Ma, Z. (2019). DEA cross-efficiency ranking method based on grey correlation degree and relative entropy. *Entropy*, 21(10), 966.
- Soleimani-Chamkhorami, K., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2020). A ranking system based on inverse data envelopment analysis. *IMA journal of management mathematics*, 31(3), 367-385.
- Soleimani-Damaneh, M., & Zarepisheh, M. (2009). Shannon's entropy for combining the efficiency results of different DEA models: Method and application. *Expert systems with applications*, 36(3), 5146-5150.
- Tanwar, J., Seth, H., Vaish, A. K., & Rao, N. V. M. (2020). Revisiting the efficiency of Indian banking sector: an analysis of comparative models through data envelopment analysis. *Indian journal of finance and banking*, 4(1), 92-108.

