

محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر در شبکه‌ی دومرحله‌ای با حضور محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل

سمیرا ملکی^۱، منور کربلایی علیلو^۲

^۱گروه ریاضی، واحد کاشمر، موسسه‌ی آموزش عالی کاشمر، کاشمر، ایران.

^۲گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

چکیده

در ادبیات اخیر، *DEA* مطالعات زیادی روی ارزیابی عملکرد سیستم‌هایی با ساختار شبکه‌ی دومرحله‌ای انجام شده است. یکی از مباحث موردعلاقه محققان، بررسی پسرفت یا پیشرفت تولید در دوره‌های مجزای زمانی در ساختار شبکه‌ی دومرحله‌ای است. شاخص بهره‌وری لئونبرگر یکی از تکنیک‌های معرفی شده در این زمینه است. اما محاسبه‌ی پسرفت یا پیشرفت تولید در شبکه‌ی دومرحله‌ای در حضور محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است. هدف اصلی این مقاله بررسی تاثیر حضور محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل در ارزیابی عملکرد سیستم‌های شبکه‌ی دومرحله‌ای با ساختار سری است، زمانی که بحث پسرفت یا پیشرفت سیستم‌های تولیدی در خلال دوره‌های مختلف فعالیت مطرح است. بدین منظور، در این مقاله، تابع فاصله‌ی جهت‌دار جدیدی را معرفی می‌کنیم و روشی برای رفع مشکل نشدنی بودن این مدل در دوره‌های زمانی مجاور پیشنهاد می‌دهیم. سپس الگوریتمی سه‌مرحله‌ای برای محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر در شبکه‌ی دومرحله‌ای با حضور این داده‌ها ارائه می‌دهیم. نهایتاً با مثالی ساختگی کاربردی بودن الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، شبکه‌ی دومرحله‌ای، محصولات میانی نامطلوب، ورودی غیرقابل کنترل، شاخص بهره‌وری لئونبرگر.

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۱/۳۰

اصلاح: ۱۳۹۸/۱۲/۲۸

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۰

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یکی از روش‌های محبوب در ارزیابی عملکرد واحدهای تولیدی است که توسط چارنز و همکاران^۱ (۱۹۷۸)، معرفی شد و سپس توسط محققان زیادی در زمینه‌های کاربردی مختلفی تعمیم داده شد. با دقت در اکثر فرآیندهای تولیدی مشخص می‌شود که در اکثر فرآیندهای تولیدی علاوه بر خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوبی از قبیل انواع آلودگی‌ها نیز تولید می‌شود. در این مواقع، چهارچوب اصلی فرمول‌بندی تحلیل پوششی داده‌ها براساس به‌کارگیری دسترسی پذیری ضعیف در محصولات، نامطلوب است. کاسمانن^۲ (۲۰۰۵)، نمونه‌ای از مجموعه امکان تولید در حضور محصولات نامطلوب را معرفی کرده است.

^۱Charnes et al.

^۲Kuosmanen



از طرفی، مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (جعبه‌ی سیاه) تنها با به‌کارگیری ورودی‌ها و خروجی‌های برونی به ارزیابی کارایی می‌پردازند. با گذشت زمان، اهمیت پردازش ساختارهای درونی سیستم در تعیین علل ناکارایی مشخص شد. ساختارهای درونی را می‌توان از سیستمی با ۲ مرحله تا سیستمی با بخش‌های متعدد دسته‌بندی کرد. در این میان سیستم‌های دومرحله‌ای به علت قابلیت تعمیم به سیستم‌های کلی‌تر مورد توجه ویژه هستند. مطالعات زیادی در زمینه‌ی سیستم‌های شبکه‌ای باحضور محصولات نامطلوب نیز انجام شده است. هم‌چنین در برخی از موارد، ارزیابی عملکرد سیستم‌های شبکه‌ای ناچار به وارد کردن فاکتورهای غیرقابل کنترل در ارزیابی‌ها هستیم (کلهر و کاظمی متین^۱، ۲۰۱۸)، مانند این که داده‌هایی از قبیل محدوده‌ی کل باند، ظرفیت صحن و تعداد گیت‌های سوارشدن به هواپیما و ... در ارزیابی عملکرد فرودگاه‌ها وارد شوند. بنکر و موری^۲ (۱۹۸۶) اولین محققانی بودند که در این زمینه به تحقیق پرداختند. سپس محققان زیادی با در نظر گرفتن برخی از داده‌ها (ورودی-خروجی) به عنوان فاکتورهای غیرقابل کنترل به تعمیم مدل آن‌ها در مدل‌های جعبه‌ی سیاه و یا مدل‌های شبکه‌ای پرداختند (لوزانو و همکاران^۳، ۲۰۱۳). اکثر مدل‌های شبکه‌ی دومرحله‌ای سری خروجی‌های نامطلوب و یا فاکتورهای غیرقابل کنترل را به صورت جداگانه در نتایج ارزیابی عملکرد سیستم وارد می‌کنند. اما در بیش‌تر مطالعات واقعی از قبیل ارزیابی عملکرد شرکت‌های هواپیمایی، هر دوی این‌ها به صورت هم‌زمان در سیستم وجود دارند.

از طرف دیگر، یکی از مباحث مهم در تحلیل پوششی داده‌ها بررسی بهره‌وری و تعیین پسرفت و پیشرفت سیستم‌های تولیدی در خلال دوره‌های زمانی متفاوت است، لذا محققان بسیاری برای محاسبه‌ی فاکتورهای کلی رشد از قبیل شاخص بهره‌وری لئونبرگر تلاش کرده‌اند. در بعضی از این مطالعات از قبیل عربی و همکاران^۴ (۲۰۱۵) و اوه^۵ (۲۰۱۰) تمرکز اصلی پژوهش معطوف به گنجاندن خروجی‌های نامطلوب در تعیین این شاخص و رفع مشکل بدتعریفی آن است.

رویکرد اصلی این مقاله محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر در حضور محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل در شبکه‌ی دومرحله‌ای با ساختار سری است. بدین منظور مدلی جدید برای محاسبه‌ی تابع فاصله‌ی جهت‌دار در شبکه‌ی دومرحله‌ای با محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل و اصلاح مسئله‌ی نشدنی در آن ارائه می‌گردد و با به‌کارگیری الگوریتمی سه مرحله‌ای روش جدیدی برای محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر در شبکه‌ی دومرحله‌ای در حضور این داده‌ها نمایش داده می‌شود.

این مطالعه به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲، مدلی برای محاسبه‌ی تابع فاصله‌ی جهت‌دار در حضور محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل و هم‌چنین مدلی برای رفع مشکل نشدنی بودن این تابع فاصله‌ی جهت‌دار مطرح می‌شود. سپس الگوریتمی کاربردی برای محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر با به‌کارگیری این مدل‌ها پیشنهاد می‌شود. در بخش ۳، با به‌کارگیری یک مثال ساختگی کاربردی بودن مدل‌ها و الگوریتم پیشنهادی بررسی می‌شود و نهایتاً در بخش ۴ نتایج و جمع‌بندی آورده می‌شود.

۲- تابع فاصله جهت‌دار در شبکه‌ی دومرحله‌ای باحضور محصولات میانی نامطلوب و داده‌های ورودی غیرقابل کنترل

به منظور درک بهتر مفاهیم، شکل ۱ را در نظر بگیرید که یک ساختار شبکه‌ی دومرحله‌ای شامل DMU, N را نمایش می‌دهد، به طوری که برای هر DMU_j در مرحله‌ی اول، بردار ورودی برونی $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ برای تولید محصولات میانی مطلوب $z_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{qj})$ و محصولات میانی نامطلوب $b_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{kj})$ به کارگرفته می‌شود و سپس در مرحله‌ی دوم، بردار خروجی مطلوب مرحله‌ی اول یعنی $z_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{qj})$ و بردار ورودی برونی $I_j = (I_{1j}, I_{2j}, \dots, I_{lj})$ به منظور تولید خروجی نهایی (برونی) $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$ به کارگرفته می‌شوند. فرض بر این است که تمامی مولفه‌های بردارها مقادیر مثبت داشته باشند.

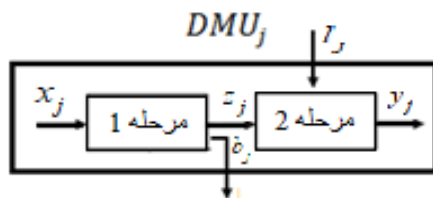
^۱Kalhor and Kazemi Matin

^۲Banker and Morey

^۳Lozano et al.

^۴Arabi et al.

^۵Oh



شکل ۱- شبکه‌ی دو مرحله‌ای.

ایده‌ی ابتدایی شاخص بهره‌وری لئونبرگر توسط جمبیز و همکاران^۱ (۱۹۹۶) مطرح شد. در واقع این شاخص تغییرات بهره‌وری یک واحد تولیدی را بین ۲ دوره‌ی زمانی نمایش می‌دهد و بنابه مثبت یا منفی بودن مقدار محاسبه‌شده توسط این شاخص به ترتیب پیشرفت یا پسرفت تولید مشخص می‌شود. جمبیز^۲ (۲۰۰۲) شاخص بهره‌وری لئونبرگر را با در نظر گرفتن دو دوره‌ی زمانی مجاور t و $t+1$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$L(x^t, z^t, u^t, b^t, l^t, y^t, x^{t+1}, z^{t+1}, b^{t+1}, l^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = \frac{1}{2} [D_t(x^t, z^t, b^t, l^t, y^t; g^t) - D_t(x^{t+1}, z^{t+1}, b^{t+1}, l^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) + D_{t+1}(x^t, z^t, b^t, l^t, y^t; g^t) - D_{t+1}(x^{t+1}, z^{t+1}, b^{t+1}, l^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1})]. \quad (۱)$$

به طوری که $t = 1, 2, \dots, T$ دوره‌های زمانی مورد مطالعه توسط تابع فاصله‌ی جهت‌دار را نمایش می‌دهد. از این به بعد برای اختصار به توابع فاصله‌ی جهت‌داری که در آن‌ها مرز کارایی و واحد، مورد ارزیابی هم‌زمان نیستند، مدل‌های ترکیب زمانی می‌گوییم. به عنوان مثال $D_t(x^{t+1}, z^{t+1}, b^{t+1}, l^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1})$ نمایش دهنده‌ی تابع فاصله‌ی جهت‌دار برای واحد مورد ارزیابی در زمان $t+1$ نسبت به مرز دوره t است. هم‌چنین g نمایش دهنده‌ی بردار جهت درونی دلخواه است. می‌توان دید که برای محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر نیازمند محاسبه‌ی چهار تابع فاصله‌ی جهت‌دار در دو دوره‌ی زمانی مجاور هستیم. رویکرد اصلی این مطالعه به کارگیری ایده‌ی بنکر و موری^۳ (۱۹۸۶) و تکنولوژی پیشنهادی کاسمانن (۲۰۰۵) به منظور مدل‌بندی شبکه‌ی دو مرحله‌ای در حضور محصولات میانی نامطلوب و ورودی‌های غیرقابل کنترل در چهارچوب DEA است. لذا به منظور محاسبه‌ی تابع فاصله‌ی جهت‌دار برای DMU_o در شبکه‌ی دو مرحله‌ای، مدل زیر را تحت فرض بازده به مقیاس ثابت پیشنهاد می‌دهیم:

$$D_o^a(x^b, z^b, b^b, l^b, y^b; g^b) = \max \frac{1}{S + K + m_l + L_l} \left[\sum_{r=1}^S \phi_r + \sum_{k=1}^K \beta_k + \sum_{n=1}^{m_l} \theta_n + \sum_{i=1}^{L_l} \delta_i \right]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{nj}^a \leq x_{no}^b - \theta_n x_{no}^b, \quad \forall n \in m_l,$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{nj}^a \leq x_{no}^b, \quad \forall n \in m_2,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j y_{rj}^a \geq y_{ro}^b + \phi_r y_{ro}^b, \quad r = 1, 2, \dots, S,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j b_{kj}^a = b_{ko}^b - \beta_k b_{ko}^b, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j l_{ij}^a \leq l_{io}^b - \delta_i l_{io}^b, \quad \forall i \in L_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j l_{ij}^a \leq l_{io}^b, \quad \forall i \in L_2,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj}^a - \sum_{j=1}^n \eta_j z_{dj}^a \geq 0, \quad d = 1, 2, \dots, D,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \eta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$(۲)$$

^۱Chambers et al.

^۲Chambers

^۳Banker and Morey



به‌طوری که θ_n و φ_r و β_k و δ_i نمایش‌دهنده‌ی متغیرهای مدل هستند و a ، b نمایش‌دهنده‌ی دوره‌های زمانی مورد مطالعه در تابع فاصله‌ی جهت‌دار هستند، که می‌توانند به هریک از دو دوره‌ی زمانی t و $t+1$ تعلق داشته باشند. در مدل (۲) مرز، به زمان a و واحد مورد بررسی به زمان b تعلق دارد و ورودی‌های برونی مرحله‌ی اول و دوم به ۲ دسته‌ی قابل کنترل و غیرقابل کنترل تقسیم شده است. همچنین در این مدل جهت g همان بردار جهت استاندارد $g = (x_o, b_o, l_o, y_o)$ لحاظ شده است. ملاحظه می‌شود که این مدل خروجی‌های نهایی را با ضریب انبساط نامتناسب افزایش می‌دهد و محصولات میانی نامطلوب و ورودی‌های برونی قابل کنترل مرحله‌ی اول و دوم را با ضرایب کاهش نااهم‌هنگ در راستای جهت g کاهش می‌دهد. درضمن، ورودی‌های برونی غیرقابل کنترل را بدون مقیاس‌بندی در ارزیابی شامل می‌کند. بدیهی است هنگامی که واحد مورد بررسی روی مرز کارایی مورد بررسی قرار دارد، مقدار بهینه‌ی مدل (۲) برابر با صفر خواهد بود و این یعنی DMU_o مورد بررسی کاراست. در غیر این‌صورت مقدار کارایی از رابطه‌ی $(x^b, z^b, b^b, l^b, y^b; g^b)$ محاسبه می‌شود. مزیت مدل پیشنهادی در انتخاب آزادانه جهت درونی g و قابلیت تعمیم آن در سایر الگوهای بازده به‌مقیاس در شبکه‌ی دومرحله‌ای با حضور محصولات میانی نامطلوب و ورودی‌های غیرقابل کنترل است. با این حال امکان روبروشدن با مسئله‌ی نشدنی در مدل‌های ترکیب زمانی منتفی نیست. پیشنهاد ما به‌کارگیری ایده‌ی بریس و کرستنس^۱ (۲۰۰۹) و عربی و همکاران (۲۰۱۵) است، لذا برای رفع این مشکل تعمیمی از مدل (۲) به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$D_o(x, z, b, l, y; g) = \min \frac{1}{S + K + m_1 + L_1} \left[\sum_{r=1}^S \varphi_r + \sum_{k=1}^K \beta_k + \sum_{n=1}^{m_1} \theta_n + \sum_{i=1}^{L_1} \delta_i \right]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{nj} \leq x_{no} - \theta_n x_{no}, \quad \forall n \in m_1,$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{nj} \leq x_{no}, \quad \forall n \in m_2,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j y_{rj} \geq y_{ro} - \varphi_r y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, S,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j b_{kj} = b_{ko} - \beta_k b_{ko}, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j l_{ij} \leq l_{io} - \delta_i l_{io}, \quad \forall i \in L_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_j l_{ij} \leq l_{io}, \quad \forall i \in L_2,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} - \sum_{j=1}^n \eta_j z_{dj} \geq 0, \quad d = 1, 2, \dots, D,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \eta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(۳)

در مدل (۳) تابع هدف مدل جدید از نوع کمینه‌سازی (min) در نظر گرفته شده است. درضمن، محدودیت مربوط به خروجی‌های مطلوب به‌صورتی اصلاح شده است که با کم‌ترین کاهش در آن‌ها دسترسی به مرز کارایی مورد بررسی حاصل شود و بقیه‌ی محدودیت‌ها بدون تغییر در مدل اعمال شده است. بدیهی است که مدل (۳) همواره شدنی است. حال می‌توان مراحل محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر در شبکه‌ی دومرحله‌ای در حضور محصولات نامطلوب برای DMU_o را به‌صورت زیر مرتب کرد.

– گام اول: با به‌کارگیری مدل (۲)، تابع فاصله‌ی جهت‌دار را برای DMU_o در دو حالت، تکنولوژی و واحد، مورد ارزیابی هم‌زمان $[D_t(x^t, z^t, u^t, y^t; g^t)]$ و $[D_{t+1}(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1})]$ و دو حالت تکنولوژی و واحد، مورد ارزیابی در زمان‌های متفاوت $[D_t(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1})]$ و $[D_{t+1}(x^t, z^t, u^t, y^t; g^t)]$ محاسبه کنید. در صورت برخورد با مسئله‌ی نشدنی به گام دوم بروید.

– گام دوم: تابع فاصله‌ی جهت‌دار نشدنی را با به‌کاربردن مدل (۳) محاسبه کنید.

۳- مثال توضیحی



به منظور بررسی چگونگی عملکرد مدل‌های معرفی شده در این مقاله، سیستمی دو مرحله‌ای فرضی شامل سه DMU را در نظر بگیرید. هریک از این واحدها دارای دو ورودی برونی در مرحله اول و دو ورودی برونی در مرحله دوم هستند، به طریقی که در هر دو مرحله، یکی از ورودی‌ها قابل کنترل (x_v, l_v) و دیگری غیرقابل کنترل (x_f, l_f) فرض شده است. هم‌چنین این واحدها شامل یک محصول میانی مطلوب (z) ، یک محصول میانی نامطلوب (b) و دو خروجی نهایی (y_1, y_2) می‌باشند. مقادیر مربوط به این داده‌ها در ۲ دوره زمانی t و $t+1$ در جدول ۱ و جدول ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۱- داده‌های فرضی در دوره زمانی t .

DMU	x_f	x_v	Z	y_1	y_2	l_f	l_v	b
A	۱۳	۸	۵	۱۰	۸	۵	۱	۸
B	۵	۱۱	۴	۹	۱۵	۷	۶	۵
C	۴	۷	۱۰	۵	۱۲	۳	۳	۴

جدول ۲- داده‌های فرضی در دوره زمانی $t+1$.

DMU	x_f	x_v	Z	y_1	y_2	l_f	l_v	b
A	۶	۸	۶	۱۲	۵	۲	۴	۶
B	۱۰	۱۵	۷	۸	۹	۶	۷	۷
C	۸	۷	۹	۷	۱۰	۱	۲	۵

در جدول ۳ نتایج حاصل از محاسبه‌ی تابع فاصله‌ی جهت‌دار تحت مدل (۲) برای واحدهای مورد بررسی گزارش شده است. به منظور ساده‌نویسی داده‌های مربوط به هر واحد در زمان مورد بررسی را به صورت $w_t = (x_f^t, x_v^t, z^t, y_1^t, y_2^t, l_f^t, l_v^t, b^t; g^t)$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین در مواردی که این مدل موفق به یافتن جواب شدنی نمی‌شود، نتایج حاصل از مدل (۳) محاسبه شده و در جدول ۳ گزارش شده است. می‌توان دید مدل پیشنهادی به خوبی مشکل نشدنی بودن را اصلاح می‌کند.

جدول ۳- نتایج حاصل از مدل‌های (۲) و (۳).

DMU	نتایج حاصل از مدل (۲)				نتایج حاصل از مدل (۳)	
	$D_t(w_t)$	$D_{t+1}(w_{t+1})$	$D_t(w_{t+1})$	$D_{t+1}(w_t)$	$D_t(w_{t+1})$	$D_{t+1}(w_t)$
A	۰/۱۷۵	۰/۱۸۴۷	نشدنی	نشدنی	۰/۱۶۵۷	۰/۲۵۵
B	۰/۲۰۸۷	۰/۴۴۸۲	۰/۵۵۴۵	نشدنی	-	۰/۱۳۷۴
C	.	.	نشدنی	نشدنی	۰/۲۷۲۴	۰/۱۲۳۶

حال با به کارگیری فرمول (۱) و الگوریتم مطرح شده در بخش قبل، شاخص بهره‌وری لئونبرگر را محاسبه می‌کنیم. نتایج حاصل در DMU_A پیشرفت را گزارش می‌کند، در حالی که این نتایج برای DMU_B و DMU_C پسرقت در دوره‌های زمانی را نمایش می‌دهد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن تکنولوژی کاسمانن (۲۰۰۵) و ایده بنکر و موری (۱۹۸۶)، مدلی برای محاسبه تابع فاصله‌ی جهت‌دار در شبکه‌ی دو مرحله‌ای با حضور ورودی‌های غیرقابل کنترل و محصولات میانی نامطلوب ارائه دادیم و سپس با به کارگیری ایده‌ی بریس و کرسستس (۲۰۰۹) و عربی و همکاران (۲۰۱۵) مدلی کاربردی برای رفع مشکل نشدنی بودن مدل جدید از ارزیابی‌های ترکیب زمانی (تکنولوژی و واحد مورد بررسی در زمان‌های متفاوت) پیشنهاد دادیم. نهایتاً الگوریتمی سه مرحله‌ای برای محاسبه‌ی

شاخص بهره‌وری لئونبرگر معرفی کردیم. از مزیت‌های مدل‌های پیشنهادی، امکان تغییر در انتخاب جهت درونی g و قابلیت به‌کارگیری آن‌ها در سایر الگوهای بازده به‌مقیاس است. با توجه به نتایج می‌توان دید که امکان نشدنی بودن تابع فاصله جهت‌دار در شبکه دومرحله‌ای با حضور ورودی‌های غیرقابل کنترل و محصولات میانی نامطلوب تحت بازده به‌مقیاس ثابت منتفی نیست و لذا امکان بدتعریفی در محاسبه‌ی شاخص بهره‌وری لئونبرگر وجود دارد، ولی مدل‌ها و الگوریتم پیشنهادی این مطالعه به‌خوبی این مشکل را مهار می‌کند.

منابع

- Arabi, B., Munisamy, S., & Emrouznejad, A. (2015). A new slacks-based measure of Malmquist–Luenberger index in the presence of undesirable outputs. *Omega*, 51, 29-37.
- Banker, R. D., & Morey, R. C. (1986). Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs. *Operations research*, 34(4), 513-521.
- Briec, W., & Kerstens, K. (2009). Infeasibility and directional distance functions with application to the determinateness of the Luenberger productivity indicator. *Journal of optimization theory and applications*, 141(1), 55.
- Chambers, R. G. (2002). Exact nonradial input, output, and productivity measurement. *Economic theory*, 20(4), 751-765.
- Chambers, R. G., Färe, R., & Grosskopf, S. (1996). Productivity growth in APEC countries. *Pacific economic review*, 1(3), 181-190.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- Kalhor, A., & Kazemi Matin, R. K. (2018). Performance evaluation of general network production processes with undesirable outputs: A DEA approach. *RAIRO-operations research*, 52(1), 17-34.
- Kuosmanen, T. (2005). Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs. *American journal of agricultural economics*, 87(4), 1077-1082.
- Lozano, S., Gutiérrez, E., & Moreno, P. (2013). Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs. *Applied mathematical modelling*, 37(4), 1665-1676.
- Oh, D. H. (2010). A global Malmquist-Luenberger productivity index. *Journal of productivity analysis*, 34(3), 183-197.

