Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۴، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۸

www.journal-dmor.ir

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۵۲-۳٤۵

# روشی برای محاسبه تراکم بازه‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها

**علیرضا حاجی‌حسینی *، فاطمه حکمت‌پور**

گروه ریاضی، واحد زاهدان، دانشگاه آزاد اسلامی، زاهدان، ایران

## چکیده

**در** تحلیل پوششی داده‌ها یک رویکرد برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحد های تصمیم‌گیری متجانس است. تراکم نیز یکی از مفاهیم مهم در تحلیل پوششی داده‌ها و اقتصاد می‌باشد. برای اندازه‌گیری تراکم در محیط نادقیق، مدل‌ها و روش‌های متعدد پیشنهاد شده است. هدف از این مقاله معرفی یک رویکرد جدید جهت اندازه‌گیری تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها است به طوری که داده‌ها بازه‌ای می‌باشند. در این مقاله از مدلهای تشخیص تراکم بر اساس مقایسه ورودی‌ها با وزن‌های مشترک و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای استفاده شده و برای واحدهای دارای تراکم، تراکم بازه‌ای معرفی شده است. روش پیشنهادی برای داده‌های بازه‌ای با مثال‌هایی نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی**: تحلیل پوششی داده‌ها، تراکم، برنامه‌ریزی بازه‌ای..

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۰۷ اصلاح: ۱۳۹۸/۰۹/۲۲ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰٤

## ۱- مقدمه

تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها زمانی رخ می‌دهد که افزایش یک یا چند ورودی می‌تواند با کاهش یک یا چند خروجی همراه باشد، بدون بهبود هر گونه ورودی یا خروجی دیگر (کوپر و همکاران، ۲۰۰۰). تحقیق در مورد تراکم توسط (فار و اسونسون، ۱۹۸۰) آغاز شده و در سال‌های ۱۹۸۳ و ۱۹۸۵ توسط فار و گراسکف تکمیل شده است. آنها مدلی با توجه به مفهوم تحلیل پوششی داده‌ها ارائه کردند. رویکرد دیگری نیز درسال ۱۹۹٦ توسط کوپر و همکاران ارائه شد. براکت و همکاران (۱۹۹٦) و کوپر و همکاران (۲۰۰۰) هم رویکردهایی جدید مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری تراکم ورودی را مطرح نموده‌اند. در حالی که ادبیات قابل توجه در مورد این موضوع وجود دارد، دو روش اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. یکی دیگر از روش‌های قابل توجه برای اندازه گیری تراکم، روش نورا و همکاران(۲۰۱۰) است. در این مقاله، از مدلهای تشخیص تراکم بر اساس مقایسه ورودی‌ها با وزن‌های مشترک(حاجی‌حسینی و همکاران، ۲۰۱۵) و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای(ونگ و همکاران، ۲۰۰۵) استفاده شده و برای واحدهای دارای تراکم، تراکم بازه‌ای معرفی می‌شود.

*عهده‌دار مکاتبات: hajihosseiny54@yahoo.com

**شناسه دیجیتال:** 10.22105/dmor.2020.104011

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۴۵-۳۵۲

## ۲- تراکم با استفاده از مجموعه مشترک وزن‌ها

تراکم یکی از مفاهیم مهم علم اقتصاد و تحلیل پوششی داده هاست. این مفهوم هنگامی رخ می‌دهد که افزایش یک یا چند ورودی باعث کاهش یک یا چند خروجی گردد و یا کاهش یک یا چند ورودی باعث افزایش یک یا چند خروجی شود، بدون آن‌که در سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها تغییری حاصل گردد. بنابراین تراکم نوعی ناکارایی است و لازم است واحدهای دارای تراکم، تعیین شده و میزان تراکم آنها نیز معین گردد. همچنین تراکم باعث زیان‌هایی در جامعه می‌شود از جمله زیان در تولید، زیان در مصرف و ... که باید جلوی این زیان‌ها گرفته شود. این موضوع در سال‌های اخیر مورد توجه زیاد ریاضی‌دانان و اقتصاددانان قرار گرفته است. مدل‌ها و روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری و تعیین میزان تراکم در واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه شده است. در این‌جا ابتدا مجموعه وزن مشترک نورا و همکاران(۲۰۱۲) برای مدل *BCC* آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش نورا و همکاران برای تراکم(۲۰۱۰) روش محاسبه تراکم با استفاده از مجموعه مشترک وزن‌ها(حاجی‌حسینی و همکاران، ۲۰۱۵) مطرح می‌گردد.

یکی از معروف‌ترین مدل‌های *DEA*، مدل مضربی *BCC* در ماهیت خروجی می‌باشد. کارایی $DMU_o$ با $m$ ورودی و $s$ خروجی به وسیله این مدل به صورت زیر (مدل ۱) ارزیابی می‌شود.

$$\begin{aligned} & min \quad \frac{v^t x_o + v_0}{u^t y_o}, \\ s.t. \quad & \frac{v^t x_j + v_0}{u^t y_j} \le 1 \qquad j = 1, \dots, n, \\ & u^t \ge 1\varepsilon, \\ & v^t \ge 1\varepsilon. \end{aligned} \qquad (۱)$$

$u^t = (u_1, \dots, u_s)$ و $v^t = (v_1, \dots, v_m)$، متغیرهای تصمیم‌گیرنده مسأله بوده و $x_j^t = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$، $y_j^t = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ بردارهای ورودی و خروجی $DMU_j (j = 1, \dots, n)$ می‌باشد. اگر جواب بهینه مدل بالا برابر یک باشد $DMU_o$ کاراست در غیر اینصورت ناکاراست. مدل برنامه‌ریزی خطی معادل مدل (۱) به صورت (۲) می‌باشد.

$$\begin{aligned} & min \quad v^t x_o + v_o \\ & s.t. \quad u^t y_o = 1, \\ & v^t x_j + v_o - u^t y_j \ge 0 \qquad j = 1, \dots, n, \\ & v^t \ge 1_m \varepsilon, \quad u^t \ge 1_s \varepsilon. \end{aligned} \qquad (۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در ناحیه شدنی مدل (۲)، هر اندازه سمت چپ قید دوم کوچکتر باشد واحد تصمیم‌گیرنده بیشتر ترجیح داده می‌شود. پس هنگامی که $v^t x_j + v_o - u^t y_j \ (j = 1, \dots, n)$ مینیمم شود، بهترین وزن به دست خواهد آمد. بنابراین به جای حل مدل (۲) می‌توان $v^t x_j + v_o - u^t y_j \ (j = 1, \dots, n)$ را با همان ناحیه شدنی قبل کمینه نمود به طوری که برنامه‌ریزی خطی چند هدفه ذیل جهت مشخص شدن مجموعه وزن‌های مشترک به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & min \ \ \{v^t x_j + v_o - u^t y_j \ ; \ \ j = 1, \dots, n\}, \\ & s.t. \quad v^t x_j + v_o - u^t y_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, n, \\ & \qquad u^t \geq 1_s \varepsilon, \\ & \qquad v^t \geq 1_m \varepsilon. \end{aligned} \tag{۳}$$

برای حل مدل (۳) از روش مجموع وزن دار شده با وزن های برابر با یک استفاده می‌شود. بنابراین برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{j=1}^{n} (v^t x_j + v_o - u^t y_j). \\ & s.t. \qquad v^t x_j + v_o - u^t y_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\ & \qquad u^t \geq 1_s \varepsilon \\ & \qquad v^t \geq 1_m \varepsilon. \end{aligned} \tag{٤}$$

حال اگر $(u^*, v^*, v_0^*)^t$ جواب بهینه مدل فوق باشد؛ مقدار کارایی $DMU_j$ به صورت $\varphi_j^* = \frac{v^* x_j + v_0^*}{u^* y_j}$ تعریف می‌شود و در صورتی که $\varphi_j^* = 1$ آنگاه $DMU_j$ کاراست.

پس همانند روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) برای تراکم مجموعه $\boldsymbol{E}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$E = \{j: \varphi_j^* = 1\} \tag{٥}$$

بیشترین مقدار ورودی برای هر مؤلفه در مجموعه $E$ را با $x_i^*$ نشان داده می‌شود.

$$x_i^* = \max_{j \in E} \ \ x_{ij} \tag{٦}$$

با توجه به مدل (٤) و ملاحظات اخیر تعریف زیر برای تراکم ارائه شده است (حاجی‌حسینی و همکاران، ۲۰۱۵).

تعریف ۱- تراکم در $DMU_o$ اتفاق می‌افتد اگر برای هر جواب بهینه $DMU_o$ از مدل (٤) شرایط زیر صادق باشد:

$\varphi_o^* > 1$ و حداقل یک ورودی از $DMU_o$ وجود داشته باشد که $x_{io} > x_i^*$ ، *i=1, …, m*.

مقدار تراکم در $\boldsymbol{i}$–امین ورودی $DMU_o$ با $s_i^{c'}$ نشان داده می‌شود و

$$s_i^{c'} = \ \ x_{io} - x_i^* \tag{۷}$$

مجموع همه $s_i^{c'}$ ها مقدار تراکم $DMU_o$ می‌باشد.

تراکم در $DMU_o$ وجود ندارد در صورتی که $x_{io} \leq x_i^*$ یا $s_i^{c'} = 0$ برای هر *i=1, …, m*.

**قضیه ۱–** اگر $DMU_o$ در روش حاجی‌حسینی و همکاران تراکم داشته باشد آنگاه با مقدار تراکم $DMU_o$ در روش کوپر برابر است.

**برهان:** مقدار تراکم به دست آمده از مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران(۲۰۰۲) برای واحد تصمیم‌گیرنده $\boldsymbol{o}$–ام به صورت زیر است

$$S_i^{-c*} = x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{۸}$$

از مقایسه دو معادله اخیر و $\boldsymbol{s_i^{c'}} = \boldsymbol{x_{io}} - \boldsymbol{x_i^*}$ نتیجه می‌گیریم که برای اثبات $\boldsymbol{s_i^{c'}} = \boldsymbol{s_i^{-c*}}$ کافیست ثابت شود که رابطه (۹) برقراراست.

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{۹}$$

برای اثبات رابطه (۹) به خلف گیریم که

$$x_i^* \neq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{۱۰}$$

رابطه (۱۰) ایجاب می‌کند که یکی از حالت‌های زیر را داشته باشیم:

$$i) \quad x_i^* > \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij},$$
$$ii) \quad x_i^* < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij},$$

اینک ثابت خواهیم نمود که هیچ یک از روابط ***i)*** یا ***ii)*** نمی‌تواند اتفاق بیفتد. با توجه به ***i)*** چون $DMU_o^* \in T_v$ ، یک بردار $\bar{\lambda} \in [0,1]$ وجود دارد(نورا و همکاران، ۲۰۱۰) به طوری که

$X^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j X_j$ و $\varphi_o^* Y_o + S^{+*} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j Y_j$ ورودی و خروجی بردار مجازی $DMU_o^*$ است و متناظراً داریم که

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{$a'$}$$

$$\varphi_o^* y_{ro} + s_r^{+*} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j y_{rj}, \qquad r = 1, \dots, s, \tag{$b'$}$$

علاوه بر این با توجه به مجموعه امکان تولید $T_v$ قید زیر را نیز داریم

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j = 1, \tag{$c'$}$$

سه قید $(a')$، $(b')$ و $(c')$ تعدادی از قیود مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران (۲۰۰۲) می‌باشد که به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{gathered}
x_{io} - s_i^{c'} = x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j y_{rj} = \varphi_o^* y_{ro} + s_r^{+*}, \qquad r = 1, \dots, s, \\
\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j = 1, \\
x_{io} \geq x_i^* \;\; => \;\; s_i^{c'} \geq 0.
\end{gathered}$$

در واقع $(\bar{\lambda}, s_i^{c'})$ یک جواب شدنی از مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران (۲۰۰۲) است. بنابراین اگر شرط ***i)*** برقرار باشد داریم:

$$x_i^* > \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$\overset{*(-1)}{\Longrightarrow} \quad -x_i^* < -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$\overset{+\ x_{io}}{\Longrightarrow} \quad x_{io} - x_i^* < \ x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij,} \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$=> \quad s_i^{c'} < s_i^{-c*}, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$=> \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^{c'} < \sum_{i=1}^{m} s_i^{-c*}$$

چون $(\bar{\lambda}, s_i^{c'})$ یک جواب شدنی از مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران (۲۰۰۲) در ارزیابی $DMU_o$ است پس رابطه $\sum_{i=1}^{m} s_i^{c'} < \sum_{i=1}^{m} s_i^{-c*}$ در تناقض است با فرض بهینگی $(\lambda^*, \ s_i^{-c*})$ بنابراین قید ***i)*** نمی‌تواند درست باشد.

اینک رابطه ***ii)*** را در نظر می‌گیریم ( $x_i^* < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}$ ) تعریف می‌کنیم $\hat{x}_{io} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}$ و $\hat{y}_{ro} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_{rj}$ پس $\widehat{DMU} = (\hat{X}, \hat{Y})$ روی مرز کارایی قرار دارد لذا $\widehat{DMU} \in E$ و با توجه به خواص مجموعه ***E*** داریم: $x_i^* \geq \hat{x}_{io} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij} \quad i = 1, \dots, m$ که متناقض رابطه ***ii)*** است.

بنابراین هیچ یک از روابط ***i)*** و ***ii)*** برقرار نبوده و اثبات کامل می‌گردد. به عبارت دیگر ما داریم که

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij} \qquad i = 1, \dots, m \ => \ s_i^{-*} = s_i^{c'}, \quad i = 1, \dots, m,$$

روش حاجی‌حسینی و همکاران (۲۰۱۵) شبیه روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) می‌باشد با این برتری که این روش برای همه واحدها به جای ***n*** برنامه‌ریزی خطی یک برنامه‌ریزی خطی حل می‌کند. بنابراین محاسبات به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته، علاوه بر این دانش قابل فهم ساده‌تری از تراکم را فراهم می‌نماید.

## ۳- محاسبه تراکم بازه‌ای

$n$ واحد تصمیم‌گیرنده با $m$ ورودی و خروجی در نظر بگیرید که داده‌ها بازه‌ای و به صورت زیر باشد.

$$x_{ij} \in \left[x_{ij}^L, x_{ij}^U\right], \qquad i = 1,2, \dots, m, \tag{۱۱}$$

$$y_{rj} \in \left[y_{ij}^L, y_{ij}^U\right], \qquad r = 1,2, \dots, S, \tag{۱۲}$$

در اندازه‌گیری تراکم با داده‌های بازه‌ای، ابتدا باید بازه کارایی در هر $DMU$ تعیین گردد. برای این کار جهت هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از دو مدل معرفی شده زیر توسط ونگ و همکاران (۲۰۰۵)، کارایی بدبینانه و خوشبینانه مشخص می‌شود.

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤ ، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۵۲-۳۴۵

در مدل زیر بدترین حالت ارزیابی $DMU$ ها در نظر گرفته شده است که بیشترین ورودی و کمترین خروجی را دارد.

$$
\begin{aligned}
& x_i^* = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j \, x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
s.t. \quad & v^t x_j^U + v_o - u^t y_j^L \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\
& u^t \geq 1_s \varepsilon, \\
& v^t \geq 1_m \varepsilon
\end{aligned} \tag{۱۳}
$$

حال اگر $(u^*, v^*, v_0^*)^t$ جواب بهینه مدل فوق باشد؛ مقدار کارایی بدبینانه $\mathrm{DMU_j}$ به صورت $\varphi_j^{*U} = \frac{v^* x_j^U + v_0^*}{u^* y_j^L}$ تعریف می‌شود.

در مدل (١٤) نیز که در زیر آمده است، بهترین حالت ارزیابی $DMU$ ها در نظر گرفته شده است که کمترین ورودی و بیشترین خروجی را دارد.

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{j=1}^{n} (v^t x_j^L + v_o - u^t y_j^U y_j) \\
s.t. \quad & v^t x_j^L + v_o - u^t y_j^U \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\
& u^t \geq 1_s \varepsilon, \\
& v^t \geq 1_m \varepsilon,
\end{aligned} \tag{١٤}
$$

حال اگر $(u^*, v^*, v_0^*)^t$ جواب بهینه مدل فوق باشد؛ مقدار کارایی خوشبینانه $DMU_j$ به صورت $\varphi_j^{*L} = \frac{v^* x_j^L + v_0^*}{u^* y_j^U}$ تعریف می‌شود.

بعد از تعیین بازه کارایی، مشابه روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) برای محاسبه تراکم، مجموعه $\acute{E}$ را به صورت زیر تعریف می شود.

$\acute{E}$ بزرگترین مجموعه تأثیرگذاری است که ممکن است داده‌های بالا را شامل شود. به عبارت دیگر $DMU$ هایی که شامل

$$\acute{E} = \{DMU_j | \varphi_j^{*L} = 1\}, \tag{۱۵}$$

مجموعه É هستند بهترین شرایط را دارند. اینک هدف تعیین تراکم بازه‌ای است به طوری که مقدار احتمالی مرتبط با هر ترکیب آن از مقادیر ورودی و خروجی بازه‌ای مربوط به $DMU$ های هر بازه به دست آید. با توجه به این واقعیت که شرط لازم برای وجود تراکم ناکارایی است، پس در$DMU$ هایی با جواب $\varphi^{*L} = \varphi^{*u} = 1$ تراکم وجود ندارد. به عبارت دیگر $DMU$ در مجموعه مؤثرÉ در بهترین حالت خود قرار دارند اما تراکم را نشان نمی‌دهند. با این حال ممکن است $DMU$ هایی که در بدترین حالت خود قرار دارند نیز ناکارا باشند. بنابراین تراکم برای $DMU$ هایی که در این حالت قرار دارند، وجود دارد. خوشبینانه‌ترین حالت ممکن در محاسبه تراکم وجود کمترین مؤلفه ورودی یک $DMU$ در مقایسه با بیشترین مؤلفه ورودی از $DMU$ هایی که در مجموعه É قرار دارد. علاوه بر این $x_i^{*U}$ را به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\forall\, i = 1, \dots, m \ \exists t_i \quad s.t. \quad x_{t_i}^U = x_i^{*U} = max\,\{x_{ij}^U | j \in \acute{E}\}, \tag{١٦}$$

در خوشبینانه‌ترین حالت ممکن، بیشترین مؤلفه ورودی یک $DMU$ با کمترین مؤلفه ورودی در هر یک از $DMU$ های موجود در مجموعه $\acute{E}$ مقایسه شده است (آنها در بهترین حالت کارایی هستند). $x_i^{*L}$ نیز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$s.t. \quad x_{k_i}^L = x_i^{*L} = min\left\{x_{ij}^l \middle| j \in \acute{E}\right\}, \forall \quad i = 1, \dots, m \ \exists k_i \tag{۱۷}$$

حال پایین‌ترین حد تراکم در ورودی $\boldsymbol{i}$ از $DMU_0$ را که توسط $S_{io}^{CL}$ مشخص می شود به صورت زیر است:

$$S_{io}^{CL} = x_{io}^L - x_i^{*U}, \qquad i = 1, \dots, m \tag{۱۸}$$

ااگر $S_{io}^{CL} > 0$ باشد، مقدار تراکم نشان داده شده است در غیر این صورت تراکم در پایین‌ترین حالت صفر است.

علاوه بر این بالاترین حد تراکم $DMU_0$ در ورودی $i$ با $S_{io}^{CU}$ نشان داده می‌شود و در این صورت تعریف می‌شود.

$$S_{io}^{CU} = x_{io}^U - x_i^{*L}, \qquad i = 1,2, \dots, m, \tag{۱۹}$$

اگر $S_{io}^{CU} > 0$ باشد، مقدار تراکم نشان داده شده است در غیر این صورت تراکم در بالاترین حد صفر است.

**قضیه ۲–** بازه $[S_o^{CL}, S_o^{CU}]$ نشان دهنده حد بالا و پایین تراکم برای $DMU_0$ هستند.

**اثبات (برهان خلف):** فرض کنید $S_i^{-c}$ مقدار تراکم $DMU_0$ درورودی $i$ می باشد به طوری که $S_{io}^{-c} < S_{io}^{Cl}$، بنابراین وجود دارد $D\bar{M}U$ ی کارایی که $D\bar{M}U \in \acute{E}$ و $S_{io}^{-C} = x_{io}^L - \bar{x}_i$ با توجه به فرض، روابط زیر را داریم:

$$S_{io}^{-C} < S_{io}^{CL} \Rightarrow x_{io}^L - \bar{x}_i < x_{io}^L - x_i^{*U} \Rightarrow \bar{x}_i > x_i^{*U},$$

ااز آنجا که $D\bar{M}U \in \acute{E}$ و این با تعریف $x_i^{*U}$ در تناقض است.

به طوری مشابه برای حد بالا فرض می‌کنیم $S_i^{+c}$ که نشان‌دهنده مقدار تراکم $\mathrm{DMU}_0$ در ورودی $i$ است به طوری که $S_{io}^{+C} > S_{io}^{CU}$ پس وجود دارد $D\tilde{M}U$ کارایی که $D\tilde{M}U \in \acute{E} S_{io}^{+C} = s_{io}^U = \tilde{x}_i$ و از معادله زیر می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_{io}^{+C} < S_{io}^{CU} \Rightarrow x_{io}^U - \tilde{x}_i > x_{io}^U - x_i^{*L} \Rightarrow x_i^{*L} > \tilde{x}_i,$$

از آنجایی که $D\bar{M}U \in \acute{E}$ و این با تعریف $x_i^{*L}$ در تناقض است. بنابراین نشان داده شد که بازه $[S_o^{CL}, S_o^{CU}]$ حد بالا و پایین برای تراکم $DMU_0$ است.

## ۴- مثال عددی

**مثال ۱–** جدول زیر را با داده‌های بازه ای در نظر بگیرید (٦ واحد تصمیم گیرنده با یک ورودی و یک خروجی).

**جدول ۱**- داده‌های بازه‌ای.

| DMU | ورودی $x$ | خروجی $y$ |
|---|---|---|
| $A$ | [2,3] | [1,3] |
| $B$ | [4,6] | [5,6] |
| $C$ | [8,9] | [6,8] |
| $D$ | [7,10] | [2,3] |
| $E$ | [12,13] | [5,7] |
| $F$ | [14,15] | [3,4] |

با توجه به مدل (۱٤)، مجموعه $\acute{E}$ را به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\acute{E} = \{A, B, C, E\},$$

توسط روابط (۱٦) و (۱۷) دو مقدار $x^{*U} = 13$ و $x^{*L} = 2$ به دست می‌آید.

سرانجام با استفاده از رابطه (۱۸) و (۱۹) پایین‌ترین مقدار تراکم ممکن ($S^{CL}$) و بالاترین مقدار تراکم ممکن ($S^{CU}$) محاسبه شده است که نتایج در **جدول ۲** آمده است.



**جدول ۲**- تراکم بازه‌ای مثال ۱.

| DMU | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Interval Congestion | [0,1] | [0,4] | [0,7] | [0,8] | [0,11] | [1,13] |

## ۵- نتیجه‌گیری

تراکم با داده‌های بازه‌ای کمتر مورد توجه قرار گرفته است که در این مقاله، با استفاده از مدلهای تشخیص تراکم بر اساس مقایسه ورودی‌ها با وزن‌های مشترک و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای برای واحدهای دارای تراکم، تراکم بازه‌ای معرفی گردید. از برتری‌های روش این است که برای همه واحدها جهت کارایی کران پایین و بالا به جای $n$ برنامه‌ریزی خطی یک برنامه‌ریزی خطی حل می‌کند. بنابراین محاسبات به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته، علاوه بر این دانش قابل فهم ساده‌تری از تراکم بازه‌ای را مطرح نموده است.

## منابع


Banker, R. D., Chang, H. & Cooper, W. W. (1996). Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in data envelopment analysis. *European journal of operational research, 89*(3), 473-481.

Brockett, P. L., Cooper, W. W., Wang, Y. & Shin H-C. (1996). Inefficiency and congestion in Chinese production before and after the 1978 economic reforms. *Socio-Economic planning sciences, 32*(1), 1-20.

Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu J. (2000). A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA. *Socio-Economic planning sciences, 34*(1), 1-25.

Cooper, W. W., Deng, H., Huang, Z. M. & Li, S. X. (2002). A one-model approach to congestion in data envelopment analysis. *Socio-Economic planning sciences, 36*(4), 231-238.

Färe, R. & Grosskopf, S. (1983). Measuring congestion in production. *Journal of economics, 43*(3), 257-271.

Färe, R., Grosskopf, S. & Lovell, C. K. (1985). *The measurement of efficiency of production*. Springer Science & Business Media.

Färe, R. & Svensson, L. (1980). Congestion of production factors. *Journal of the econometric society*, 1745-1753.

Hajihosseini, A., Noura, A. & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2015). A New Approach to Measuring Congestion in DEA with Common Weights. *Indian journal of science and technology, 8*(6), 574-580.

Noura, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo G. R., Rashidi, S. F. & Parker, B. R. (2010). A new method for measuring congestion in data envelopment analysis. *Socio-Economic planning sciences, 44*(4), 240-246.

Payan, A., Noura, A. & Nozohour, M. (2012). Improvement of Ranking Method Based on Effectiveness Of Units In Society By Common Weights Approach In DEA. *WSEAS transactions on mathematics, 11*(9), 742-750.

Wang, Y. M., Greatbanks, R. & Yang, J. B. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy sets and systems, 153*(3), 347-370.


نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤ ، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳٤۵-۳۵۲