

## رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری با استفاده از منطق فازی

سید حمزه میرزایی\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، ایران.

### چکیده

یکی از مشکلات مدل‌های بر پایه DEA<sup>۱</sup> برای رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری اولیوی آن است که به هر یک از گزینه‌ها (کاندیدها) اجازه می‌دهد تا بردار وزن خودش را داشته باشد. بنابراین، گزینه‌ها با بردارهای وزن متفاوتی ارزیابی می‌شود. در این پژوهش، ما مدلی را بر اساس تئوری فازی ارائه می‌کنیم تا نقاط ضعف مدل‌های پیشین را برطرف کنیم. این مدل بر اساس حل مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه به کمک منطق فازی پایه‌گذاری و از این طریق یک بردار از وزن‌های مشترک ارائه شده است؛ در نهایت گزینه‌ها رتبه‌بندی شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، منطق فازی، سیستم‌های رأی‌گیری.

پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۶

اصلاح: ۱۳۹۷/۱۰/۱۶

دریافت: ۱۳۹۷/۷/۱۹

### ۱- مقدمه

شیوه‌ی دستیابی یک گروه یا رتبه‌بندی اجتماعی از یک مجموعه از اولویت‌های فردی (که از وزن‌های مختلف برای گزینه‌های مختلف استفاده می‌کند)، یک جنبه‌ی مهم در زمینه‌ی تصمیم‌گیری می‌باشد. این گروه از فرآیندها شامل مواردی می‌باشد که در آن هر تصمیم‌گیرنده اولویت‌های خود را بر اساس ترتیب رتبه‌ی گزینه‌ها (کاندیدها) بیان می‌کند؛ یا مواردی که در آن‌ها از هر تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود یک زیرمجموعه از گزینه‌ها را از یک مجموعه شذنی انتخاب کرده و سپس آن‌ها را از پایین‌ترین تا بالاترین اولویت، رتبه‌بندی کند. در میان فرآیندهای توسعه‌یافته برای این موقعیت‌ها، یک خانواده شناخته‌شده از روش‌ها، قوانین نمره‌دهی وزنی است. قوانین نمره‌دهی وزنی به وسیله‌ی محاسبه یک امتیاز برای هر گزینه عمل می‌کند که به رتبه‌ی آن گزینه در ترتیب اولویت‌های فردی بستگی دارد. در ادامه، گزینه‌ها توسط تجمیع امتیازهای دریافتی رتبه‌بندی می‌شود. کوک و کریس (۱۹۹۰) نخستین بار بیان کردند که مدل‌های شامل یک مجموعه اعمال‌شده از وزن‌ها نمی‌توانند یک ارزیابی کلی عادلانه را برای رتبه‌بندی گزینه‌ها فراهم آورند. هر ارزیابی که دلالت بر استفاده از یک بردار نمره‌دهی خارجی دارد، تا حدودی دلخواه است. توجه داشته باشید که یک گزینه‌ی غیربرنده با بردار وزن در نظر گرفته‌شده برای ارزیابی می‌تواند با استفاده از بردارهای وزنی دیگر برنده باشد. کوک و کریس (۱۹۹۰) مدل تجمیع اولویت اولیه بر پایه‌ی روش‌های DEA را بر اجتناب از شخصی‌گرایی در انتخاب یک بردار

<sup>1</sup>Data Envelopment Analysis

از وزن‌ها ارائه کردند. گرین و همکاران (۱۹۹۶) برای تمایز‌گزینه‌های کارا، استفاده از روش ارزیابی متقاطع را ارائه کردند. هاشمیتو (۱۹۹۷) استفاده از مدل حذفی<sup>۱</sup> DEA/AR را برای مدل ناحیه‌ی اطمینان کوک و کریس (۱۹۹۰) ارائه کرد. روش‌های ذکر شده، مستقل از گزینه‌های ناکارا نبودند. این روش‌ها از اطلاعاتی که مربوط به گزینه‌های ناکارا بود، برای متمایز کردن گزینه‌ها کارا استفاده می‌کردند. اوباتا و ایشی (۲۰۰۳) بر این نظر بودند که اطلاعات مربوط به گزینه‌های ناکارا و هم‌چنین این بی‌ثباتی نباید در متمایز کردن گزینه‌های کارا مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین آن‌ها مدلی ارائه کردند که مستقل از واحدهای ناکارا بود. برای دوری کردن از انتخاب تابع شدت تمایز و هم‌چنین انتخاب عامل تمایز نگوچی و همکاران (۲۰۰۲) مدل ترتیب قوی DEA را ارائه کردند. یکی از اشکالات اصلی در مدل‌های بر پایه DEA این است که به هر واحد اجازه می‌دهد تا بردار وزن خودش را داشته باشد؛ به عبارت دیگر هر واحد در بهترین شرایط خودش ارزیابی می‌شود. این انعطاف‌پذیری باعث ارزیابی واحدها با یک مجموعه از وزن‌های مختلف خواهد شد. بنابراین مقایسه و رتبه‌بندی واحدها در شرایط یکسان امکان‌پذیر نخواهد بود. برای دوری کردن از ظهور وزن‌های مختلف، مدلی برای یافتن یک مجموعه از وزن‌های مشترک، نخستین بار توسط کوک و همکاران (۱۹۹۰) ارائه و توسط رول و همکاران (۱۹۹۱) کامل شد. پس از آن، مدل‌های مختلفی برای محاسبه‌ی مجموعه وزن‌های مشترک ارائه گردید؛ بنابراین با استفاده از وزن‌های مشترک جهانشاهلو و همکاران (۲۰۰۵) سعی در رتبه‌بندی کاندیدهای کارا نمودند. یک مدل دو مرحله‌ای برای تعیین یک رتبه‌بندی گروهی از گزینه‌ها توسط کانترراس (۲۰۱۱) با استفاده از وزن‌های مشترک ارائه شد. در این پژوهش سعی شده است با ارائه مدلی جدید، نقاط ضعف مدل‌های گذشته برطرف شود. مدل پیشنهادی بر مبنای حل مدل‌های تصمیم‌گیری چندهدفه به کمک تئوری فازی طراحی که پس از حل منجر به ایجاد یک مجموعه از وزن‌های مشترک شده است. با بهره‌گیری از این مدل، هدف اصلی تحقیق یعنی رتبه‌بندی بهتر گزینه‌ها نسبت به مدل‌های پایه، محقق می‌گردد. ادامه مقاله به این صورت است که در بخش دوم سیستم رأی‌گیری اولویتی توضیح داده می‌شود. در بخش سوم روش حل مدل‌های تصمیم‌گیری چندهدفه به کمک تئوری فازی بیان می‌شود. در بخش چهارم، ما روش خود را برای رتبه‌بندی کاندیدها در سیستم رأی‌گیری اولویتی با توجه به تئوری فازی ارائه می‌کنیم. در بخش پنجم دو مثال عددی را ارائه می‌نماییم و در بخش ششم نتیجه‌گیری می‌نماییم.

## ۲- سیستم رأی‌گیری اولویتی

فرض کنید  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  یک مجموعه از  $n$  ( $n > 3$ ) کاندید باشد که توسط یک گروه از تصمیم‌گیرنده‌ها ارزیابی شده است و هر تصمیم‌گیرنده اولویت‌هایی را با انتخاب یک زیرمجموعه از  $k$  گزینه (یا مجموعه کامل  $A$ ) و رتبه‌بندی آن‌ها از بالاترین تا پایین‌ترین اولویت ارائه کرده است. بنابراین یک بردار ترتیب را می‌توان از اولویت‌های هر تصمیم‌گیرنده همانند یک بردار که شامل اسامی گزینه‌ها به ترتیب اولویت می‌باشد را به دست آورد. از هر بردار ترتیب که به روش گفته شده به دست می‌آید، می‌توانیم یک بردار رتبه را با اختصاص دادن عدد مکان هر گزینه در بردار ترتیب به دست آوریم. مقدار ۱ به مهم‌ترین گزینه و  $n$  به کم‌اهمیت‌ترین گزینه اختصاص می‌یابد. توجه داشته باشید که یک بردار رتبه شامل مقدار رتبه هر گزینه می‌باشد، در صورتی که بردار ترتیب شامل اسامی گزینه‌ها است. بنابراین در چارچوب رأی‌گیری اولویتی، هر کاندید مانند گزینه  $i$  تعداد  $v_{r_1}$  رأی را در مکان اول،  $v_{r_2}$  رأی را در مکان دوم... و  $v_{r_k}$  رأی را در مکان  $k$ ام دریافت می‌کند. مسئله اصلی، به کارگرفتن این آرا در روشی معقول، برای به دست آوردن یک شاخص مطلوبیت سراسری برای هر کاندید است. نخستین بار کوک و کریس (۱۹۹۰) مدلی را بر اساس مدل‌های DEA به صورت زیر ارائه کردند.

<sup>1</sup>DEA/Assurance Region



$$V_p = \text{Max} \sum_{j=1}^k w_j v_{pj}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{rj} \leq 1 \quad r = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$w_j - w_{j+1} \geq d(j, \varepsilon) \quad j = 1, \dots, k-1$$

$$w_k \geq d(k, \varepsilon),$$

که در آن  $w_j$  وزن مکان رتبه  $j$  ام،  $v_{rj}$  تعداد آرا بدست آمده توسط گزینه‌ی  $r$  ام در مکان  $j$  ام،  $\varepsilon$  یک عدد غیر ارشمیدسی بسیار کوچک،  $d(j, \varepsilon)$  تابع شدت تمایز و  $V_p$  مقدار تجمیع به‌دست آمده توسط گزینه‌ی  $P$  ام ( $P = 1, \dots, n$ ) است. مدل (۱) برای هر گزینه حل می‌شود و هر گزینه که دارای مقدار تجمیع بیشتری باشد دارای رتبه بهتری خواهد بود. در این مدل با فرض  $n$  خروجی که همان تعداد آرای به‌دست آمده توسط هر کاندید است و یک ورودی با مقدار واحد، معادل مدل معروف DEA/AR خواهد بود (تامپسون وهمکاران، ۱۹۸۶) را ببینید. محدودیت‌های  $w_j - w_{j+1} \geq d(j, \varepsilon)$  ناحیه‌ی اطمینان را ارائه می‌کنند. در این مدل مانند مدل‌های DEA، هر کاندید مانند یک واحد تصمیم‌گیری (DMU) در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱- کاندید  $P$  با مدل (۱) کارآ (برنده) است هرگاه  $V_p^* = 1$  باشد.

بر اساس فلسفه‌ی DEA در مدل‌های DEA به هر گزینه اجازه داده می‌شود تا بردار وزن خود را داشته باشد. به این ترتیب از شخصی‌گرایی در انتخاب بردارهای وزن جلوگیری خواهد شد. ولی از طرفی، هر گزینه در بهترین شرایط خودش ارزیابی می‌شود و این انعطاف‌پذیری مدل‌های DEA باعث می‌شود که بردارهای وزنی مختلفی ایجاد و رتبه‌بندی گزینه‌ها بدین طریق با مشکلاتی مواجه شود. بنابراین در ادامه، مدل ارائه شده سعی در رفع نقاط ضعف مدل‌های قبلی دارد.

### ۳- حل مسائل چندهدفه به کمک تئوری فازی

تصمیم‌گیری چندهدفه یکی از شاخص‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره است. مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه همزمان به دنبال بهینه کردن چندین هدف که با هم در تضاد می‌باشند با وجود محدودیت‌های مختلف هستند. شکل کلی یک برنامه‌ریزی چندهدفه به صورت مدل زیر خواهد بود:

$$\text{Max} \{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \quad (2)$$

s. t.

$$x \in X \subset R^n,$$

که در آن  $f_i(x)$  بیانگر  $i$  امین تابع هدف و  $X$  یک مجموعه از جواب‌های شدنی است که داریم  $X = \{x | g_t(x) \geq 0, t = 1, \dots, s\}$ . در مسائل یک‌هدفه، محدودیت‌ها همگی در جهتی حرکت می‌کنند تا تابع هدف را بهینه سازند اما در مسائل چندهدفه هر یک از توابع هدف درصدی هستند تا محدودیت‌ها را به جهت دلخواه خود حرکت دهند و این تضاد سرمنشأ مشکلات حل مسائل چندهدفه است. مسائل چندهدفه همواره به دنبال بهترین جوابی هستند که هر یک از اهداف تا حد ممکن برآورده شود.

تعریف ۲- نقطه  $x^* \in X$  را یک جواب بهینه (غیر مغلوب) مسئله (۲) گویند هرگاه هیچ نقطه‌ی دیگری از  $X$  مانند  $x \in X$  یافت نشود که  $f_i(x) \geq f_i(x^*)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) باشد.

اما بهینگی همزمان کلیه‌ی اهداف، امری غیرممکن به نظر می‌رسد. برای حل مسائل چندهدفه راه‌حل‌های بسیاری ارائه شده است که از میان آن‌ها حل فازی مسائل چندهدفه (کهرمان، ۲۰۰۸) در ادامه تشریح می‌شود. برای حل، هر یک از

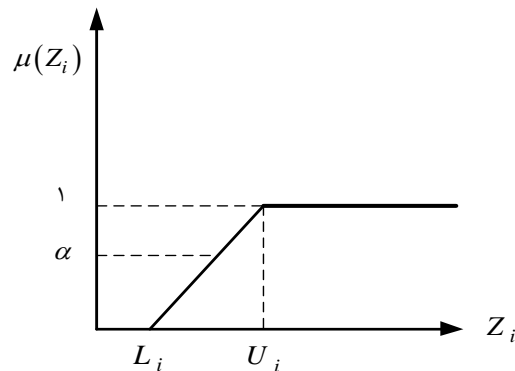
توابع هدف با در نظر گرفتن تمام محدودیت‌ها یک بار ماکزیم‌سازی و بار دیگر مینیم‌سازی می‌شود. برای ماکسیم‌سازی مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U_i &= \text{Max } f_i(x) \quad i = 1, \dots, m \\ \text{s.t.} \quad & x \in X \subset R^n. \end{aligned} \quad (3)$$

برای مینیم‌سازی مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L_i &= \text{Min } f_i(x) \quad i = 1, \dots, m \\ \text{s.t.} \quad & x \in X \subset R^n. \end{aligned} \quad (4)$$

با حل دو مدل تک‌هدفی (۳) و (۴) کران‌های توابع هدف به دست می‌آیند. برای تابع هدف  $i$  ام ( $i=1, \dots, m$ ) کران بالا را با  $U_i$  و کران پایین را با  $L_i$  نمایش می‌دهیم. حال، تابع عضویت تابع هدف  $i$  ام را به صورت شکل ۱ خواهیم داشت.



شکل ۱- تابع عضویت تابع هدف  $i$  ام.

با توجه به شکل ۱ تابع عضویتی به صورت (۵) را می‌توان تعریف کرد:

$$\mu(Z_i) = \begin{cases} 0 & Z_i < L_i \\ \frac{(Z_i - L_i)}{U_i - L_i} & L_i \leq Z_i \leq U_i \\ 1 & Z_i > U_i. \end{cases} \quad (5)$$

بنابراین توابع هدف به شکل فازی با تابع عضویت مشخص نوشته شده است که هر کدام به مقدار بهینه‌ی خود نزدیک‌تر شود دارای مطلوبیت بیشتری خواهد بود. برای ایجاد تغییرات در مدل،  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) به صورت درصدی که تابع هدف  $i$  ام به مقدار بهینه‌ی خود نزدیک شده است، تعریف می‌شود. در واقع مقدار  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) کم‌ترین تابع عضویت تابع هدف است؛  $\alpha_i = \min(Z_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) و  $\alpha_i \leq \mu(Z_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) در فرآیند حل مسئله سعی می‌شود تا مقدار  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) به حداکثر مقدار خود برسد؛ یعنی هر یک از توابع هدف تا حد ممکن به مقدار بهینه‌ی خود نزدیک شود؛ بنابراین مدل (۲) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:





$$\text{Max} \sum_{i=1}^m \pi_i \alpha_i$$

s.t.

$$\alpha_i \leq (Z_i - L_i) / (U_i - L_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$x \in X \subset R^n$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

در مدل (۶) وزن اعمال شده برای تابع هدف  $i$  ام ( $i = 1, \dots, m$ ) است که باید مشخص باشد و در غیر این صورت برابر ۱ فرض می‌شود. حال، مدل (۶) را می‌توان به صورت مدل (۷) باز نویسی کرد.

$$\text{Max} \sum_{i=1}^m \pi_i \alpha_i$$

s.t.

$$Z_i \geq U_i - (U_i - L_i)(1 - \alpha_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$x \in X \subset R^n$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود فرم یک مسئله‌ی چندهدفه به شکل مسئله‌های تک‌هدفه و دارای جواب بهینه و قابل حل توسط نرم‌افزارهای برنامه‌ریزی خطی تبدیل شده است. اما وجود  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) نشان می‌دهد توابع هدف هم‌چنان به مقدار بهینه‌ی خود نمی‌رسند و این امر تا حدودی حاصل می‌گردد.

#### ۴- مدل پیشنهادی برپایه‌ی تئوری فازی

همان‌طور که ذکر شد پژوهش حاضر به دنبال ارائه‌ی مدلی برای مقایسه‌ی کارایی واحدهای مختلف است. در مدل‌های پایه برای هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری به صورت جداگانه، کارایی بهینه می‌شود، اما همان‌طور که در مدل (۷) مشاهده می‌شود کارایی کلیه واحدها با یکدیگر سنجیده می‌شود. با این روش، مقایسه‌ی کارایی واحدها با یکدیگر امکان پذیر است زیرا همگی باهم در نظر گرفته شده است. مدل (۱) را می‌توان به صورت یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه مانند مدل (۸) در نظر گرفت (ببینید (کورنبلوس، ۱۹۹۱)).

$$\text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^k w_j v_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^k w_j v_{nj} \right\}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{rj} \leq 1 \quad r = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$w_j - w_{j+1} \geq d(j, \varepsilon) \quad j = 1, \dots, k-1$$

$$w_k \geq d(k, \varepsilon).$$

مشاهده می‌شود که مدل فوق یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه است؛ بنابراین ما برای حل آن از روش ارائه شده در قسمت قبل استفاده می‌کنیم. بنابراین مدل (۸) را یک بار برای محاسبه‌ی کران بالای کارایی و یک بار برای کران پایین کارایی برای هر یک از کاندیدها باز نویسی می‌کنیم. مدل (۸) برای محاسبه‌ی کران بالای کارایی کاندید  $p$  به صورت مدل (۹) است.

$$U_p = \text{Max} \sum_{j=1}^k w_j v_{pj}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{rj} \leq 1 \quad r=1, \dots, n \quad (9)$$

$$w_j - w_{j+1} \geq d(j, \varepsilon) \quad j=1, \dots, k-1$$

$$w_k \geq d(k, \varepsilon).$$

و برای محاسبه‌ی کران پایین کارایی کاندید p، مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$L_p = \text{Min} \sum_{j=1}^k w_j v_{pj}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{rj} \leq 1 \quad r=1, \dots, n \quad (10)$$

$$w_j - w_{j+1} \geq d(j, \varepsilon) \quad j=1, \dots, k-1$$

$$w_k \geq d(k, \varepsilon).$$

مشاهده می‌شود که  $W = (w_1, \dots, w_k) = (\underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_k, \cdot)$  یک جواب شدنی مدل (۱۰) است و چون مسئله، مینیمم‌سازی است پس یک جواب بهینه‌ی این مسئله نیز می‌باشد؛ بنابراین نیازی به حل این مدل نداریم. پس مدل (۹) را برای هر یک از کاندیدها حل و کران‌های بالا توابع هدف را مشخص می‌کنیم. پس از محاسبه‌ی کران‌های بالا مدل نهایی را به صورت زیر ارائه می‌کنیم:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^n \pi_r \alpha_r$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{rj} \geq U_r - (U_r - L_r)(1 - \alpha_r) \quad r=1, \dots, n \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{rj} \leq 1 \quad r=1, \dots, n$$

$$w_j - w_{j+1} \geq d(j, \varepsilon) \quad j=1, \dots, k-1$$

$$w_k \geq d(k, \varepsilon).$$

با حل مدل (۱۱) توسط نرم افزارهای برنامه‌ریزی خطی، جواب مسئله به دست می‌آید که همان وزن ورودی‌ها و خروجی‌ها

است. پس از جای‌گذاری وزن‌ها در رابطه‌ی  $V_p = \sum_{j=1}^k w_j v_{pj}$ ، کارایی هر یک از واحدها به دست می‌آید.

## ۵- مثال عددی

در این بخش، دو مثال عددی را ارائه می‌کنیم. در مثال اول، مدل پیشنهادی را توضیح داده و در مثال دوم، مدل ارائه شده را با نتایج به دست آمده از چند مدل رتبه‌بندی دیگر مقایسه می‌کنیم.

مثال زیر از کوک و کریس (۱۹۹۰) انتخاب شده است که در آن تعداد آرای به دست آمده توسط ۴ کاندید در جدول (۱) خلاصه شده است.

جدول ۱- تعداد رأی های به دست آمده.

کاندید	$V_{r1}$	$V_{r2}$
۱	۶	۸
۲	۴	۱۱
۳	۸	۲
۴	۳	۰

ما در این جا مانند کوک و کریس (۱۹۹۰) قرار می دهیم  $d(j, \varepsilon) = 0$ ،  $\pi_r = 1 (r=1, \dots, n)$ ؛ کران های پایین را برابر صفر در نظر گرفته و برای محاسبه ی کران های بالا، مدل (۹) را حل می کنیم. بنابراین داریم  $U_1 = 1$ ،  $U_2 = 1$ ،  $U_3 = 1$  و  $U_4 = 0.375$ . حال با توجه به کران های به دست آمده، مدل (۱۱) را حل می کنیم. پس از حل داریم  $W = (w_1, w_2) = (0.1154, 0.385)$ . با توجه به رابطه ی  $V_r = \sum_{j=1}^n w_j v_{rj}$  که  $(r = 1, \dots, 4)$  محاسبه می کنیم، خواهیم داشت  $V_1^* = 1/0.004$ ،  $V_2^* = 0.8851$ ،  $V_3^* = 1/0.002$  و  $V_4^* = 0.3462$ ؛ بنابراین کاندید شماره ی یک دارای بهترین رتبه خواهد بود و کاندید برنده خواهد بود.

۵-۲ یک مثال مقایسه ای

یک گروه از تصمیم گیرنده ها از میان ۷ گزینه که با  $A = \{A_1, \dots, A_7\}$  نشان داده شده است، بایستی دو گزینه ی بهتر را انتخاب و رتبه بندی کنند. نتایج به دست آمده از تصمیم گیرنده ها در جدول (۲) خلاصه شده است (این مثال از گرین و همکاران (۱۹۹۶) انتخاب شده است).

جدول ۲- تعداد رأی های به دست آمده.

گزینه ها	$V_{r1}$	$V_{r2}$
$A_1$	۳۲	۱۰
$A_2$	۲۸	۲۰
$A_3$	۱۳	۳۶
$A_4$	۲۰	۲۷
$A_5$	۲۷	۱۹
$A_6$	۳۰	۸
$A_7$	۰	۳۰

برای حل این مثال نیز مانند مثال قبل در نظر می گیریم  $d(j, \varepsilon) = 0$  و کران پایین را برابر صفر در نظر می گیریم. کران های بالا را از حل مدل (۱۰) به دست می آوریم. با حل مدل (۱۱) وزن های مکان رتبه به صورت  $W = (w_1, w_2) = (0.214, 0.201)$  به دست خواهد آمد. نتایج و رتبه ی گزینه ها در جدول (۳) خلاصه شده است. نتایج به دست آمده از چند مدل رتبه بندی دیگر نیز برای مقایسه با مدل ارائه شده آورده شده است. همان طور که مشاهده می شود مدل ارائه شده توسط آباتا و ایشی (۲۰۰۳) قادر به رتبه بندی گزینه های (۴)، (۵)، (۶) و (۷) نیست. هم چنین مدل ارائه شده



توسط کوک و کریس (۱۹۹۰) با تغییر مقدار  $\varepsilon$ ، رتبه‌بندی‌های متفاوتی را به دست می‌دهد و مانند مدل DEA/AR Exclusion (هاشمیتو، ۱۹۹۷) از بردارهای وزنی متفاوت در رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کند. مدل ارائه شده توسط کانتراس (۲۰۱۱) یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط است که روش حل این نوع برنامه‌ریزی بسیار مشکل‌تر از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی است؛ هم‌چنین با رجوع به کانتراس (۲۰۱۱) می‌توان میزان پیچیدگی را که به مراتب بیش‌تر از مدل ارائه شده در این مقاله است مشاهده کرد. برای رتبه‌بندی با روش ارائه شده در این مقاله کافی است تنها  $n+1$  مدل را حل کنیم که همه به صورت برنامه‌ریزی خطی بوده و به آسانی قابل حل به کمک نرم‌افزارهای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی هستند.

جدول ۳- امتیاز و رتبه‌ی گزینه‌ها.

	Cook&Krees Model $d(j, \varepsilon) = \varepsilon$		DEA/AR Exclusion Model		Ishii & Obata Model		I. Contreras Model		Proposed Method	
گزینه‌ها	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه
$A_1$	۰٫۹۷۴۰	۲	۱٫۰۷۴۵	۱	۳۲	۱	۲۷٫۲۹	۱	۰٫۸۸۵۸	۵
$A_2$	۱	۱	۱٫۰۴۲۸	۲	۲۵٫۷۱۴	۲	۲۶٫۲۹	۲	۱٫۰۰۱۲	۲
$A_3$	۰٫۸۱۵۱	۶	۱٫۰۲۰۸	۳	۲۴٫۵	۳	۱۷٫۹۳	۶	۱٫۰۰۱۸	۱
$A_4$	۰٫۸۸۱۳	۵	۰٫۹۶۹۳	۴	نشدنی	-	۲۱٫۵۰	۵	۰٫۹۷۰۷	۳
$A_5$	۰٫۹۶۰۵	۳	۰٫۹۶۱۱	۵	نشدنی	-	۲۵٫۲۹	۴	۰٫۹۵۹۷	۴
$A_6$	۰٫۸۹۵۱	۴	۰٫۹۳۷۵	۶	نشدنی	-	۲۵٫۲۹	۳	۰٫۸۰۲۸	۶
$A_7$	۰٫۳۹۴۰	۷	۰٫۶۱۲۲	۷	نشدنی	-	۶٫۴۳	۷	۰٫۶۰۳	۷

### ۶- نتیجه‌گیری

یکی از مشکلات مدل‌های بر پایه‌ی DEA، ایجاد بردار وزن‌های مختلف است که این موضوع باعث می‌شود که رتبه‌بندی واحدها، تحت ارزیابی دچار مشکل شده و تصمیم‌گیرنده نتواند واحد کارتر را مشخص کند. برای رفع این مشکل مدل‌هایی توسط محققین ارائه شده است که یک بردار از وزن‌های مشترک را ارائه می‌کند. در پژوهش حاضر، سعی گردید تا با نگرشی نو به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، مدلی مناسب برای رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری ارائه، تشریح و حل شود. مدل ارائه شده با به دست آوردن وزن‌های مشترک، سعی در بهبود مقایسه‌ی واحدهای تصمیم‌گیری با وزن‌های مختلف داشت. مدل پیشنهادی می‌تواند زمینه‌ساز مطالعات بعدی با استفاده از این مدل و نگرشی جدید به مدل‌های بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها برای رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری اولویتی به صورت چندهدفه باشد.

### منابع

- Contreras, I. (2011). A DEA-inspired procedure for the aggregation of preferences. *Expert systems with applications*, 38(1), 564-570.
- Cook, W. D., & Kress, M. (1990). A data envelopment model for aggregating preference rankings. *Management science*, 36(11), 1302-1310.
- Cook, W. D., Roll, Y., & Kazakov, A. (1990). A dea model for measuring the relative efficiency of highway maintenance patrols. *INFOR: information systems and operational research*, 28(2), 113-124.
- Green, R. H., Doyle, J. R., & Cook, W. D. (1996). Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation. *European journal of operational research*, 90(3), 461-472.
- Hashimoto, A. (1997). A ranked voting system using a DEA/AR exclusion model: A note. *European journal of operational research*, 97(3), 600-604.
- Jahanshahloo, G. R., Memariani, A., Lotfi, F. H., & Rezaei, H. Z. (2005). A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. *Applied mathematics and computation*, 166(2), 265-281.
- Kahraman, C. (Ed.). (2008). *Fuzzy multi-criteria decision making: theory and applications with recent developments* (Vol. 16). Springer Science & Business Media.
- Kornbluth, J. S. H. (1991). Analysing policy effectiveness using cone restricted data envelopment analysis. *Journal of the operational research society*, 42(12), 1097-1104.
- Noguchi, H., Ogawa, M., & Ishii, H. (2002). The appropriate total ranking method using DEA for multiple categorized purposes. *Journal of computational and applied mathematics*, 146(1), 155-166.
- Obata, T., & Ishii, H. (2003). A method for discriminating efficient candidates with ranked voting data. *European Journal of operational research*, 151(1), 233-237.
- Roll, Y., Cook, W. D., & Golany, B. (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis. *IIE transactions*, 23(1), 2-9.
- Thompson, R. G., Singleton Jr, F. D., Thrall, R. M., & Smith, B. A. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*, 16(6), 35-49.