Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۳، شماره (۲)، تابستان ۱۳۹۷

www.journal-dmor.ir

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۲)، تابستان ۱۳۹۷، صفحه: ۱۲۸-۱۳۷

روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسئله توزیع چند محصولی با هزینه ثابت

علی محمودی راد[1] *، حامد انصوری سواری[2]

[1]گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، ایران.

[2]گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، ایران.

چکیده

در این مقاله، مسئله توزیع چند محصولی با هزینه ثابت که نوع خاصی از مسئله حمل‌ونقل با هزینه ثابت می‌باشد، توسعه داده‌شده است. در مسئله توزیع چند محصولی با هزینه ثابت، محصولات از مبدأ با هزینه مستقیم و ثابت حمل و باحالت حمل مختلف به مقصدها ارسال می‌شوند. این مدل، به‌منظور تأمین تقاضای هر مشتری، مقدار حمل کالاها در این مسیرها را طوری تعیین می‌کند که مجموع هزینه‌های مستقیم و ثابت حمل کمینه شود. چون این مسئله از نوع مسائل چندجمله‌ای سخت است، نرم‌افزارهای بهینه‌سازی قادر به حل این مسئله در اندازه‌های کوچک و تا حدی متوسط هستند. به‌منظور حل مسئله در اندازه های متوسط و بزرگ، روش آزادسازی لاگرانژ را پیشنهاد می‌کنیم. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که روش آزادسازی لاگرانژ با شکاف بهینگی، قادر به حل مسایلی با ابعاد بالاتر در مقایسه با جواب حاصل از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی است.

واژه‌های کلیدی: مسئله توزیع چند محصولی، مسائل چندجمله‌ای سخت، آزادسازی لاگرانژ، هزینه ثابت.

دریافت: ۱۳۹۷/۲/۱ اصلاح: ۱۳۹۷/۴/۱۳ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۱۰

۱- مقدمه

در جهان رقابتی امروز، پیشرفت‌های چشمگیر درزمینه‌ی فناوری، بخصوص اطلاعات و افزایش تقاضاهای متنوع مشتریان، سازمان‌ها و شرکت‌های دولتی و خصوصی را با فضای کاملاً متفاوت مواجه کرده است، به‌طوری‌که مدیران دریافته‌اند که تلاش‌های مضاعف در پیاده‌سازی روش‌ها و رویکردهای نوین در جهت دستیابی به کارایی و اثربخشی و همچنین تأمین تقاضاهای مشتریان در اسرع وقت، باکیفیت بالا و هزینه کمتر، به نتایج و عملکرد ضعیفی منجر شده است. از طرفی، موفقیت اکثر سازمان‌های خصوصی، دولتی و نظامی به توانایی آن‌ها در ارائه خروجی‌های مطلوب و مدنظر مدیران است، ازاین‌رو مؤسسات و شرکت‌ها، همه و همه در راستای دستیابی به اهداف و همچنین کارایی و اثربخشی لازم در فعالیت‌های خود به فکر استفاده از روش‌ها و راهکارهای نوینی افتاده‌اند که بتواند در این زمینه آن‌ها را یاری نماید. برقراری ارتباطات منسجم و هماهنگ بین شرکا تجاری شرکت‌ها و سازمان‌ها باعث می‌شود که از مشکلات و ناکامی‌هایی که در مسیر توسعه فعالیت و عرضه محصولات و خدمات به مشتریان به وجود می‌آید کاسته شود و این هماهنگی و همکاری بین شرکت‌ها برای تولید محصول نهایی و عرضه‌ی آن به مشتری باعث تسریع فعالیت و خدمات‌دهی و همچنین بهبود عملکرد شرکت‌ها می‌شود، بنابراین می‌توان این نتیجه را گرفت که امروزه، شرکت‌ها و مارک‌های تجاری باهم رقابت نمی‌کنند بلکه زنجیره‌های تأمین هستند که با یکدیگر به رقابت می‌پردازند. در مدیریت زنجیره تأمین به شیوه سنتی، بهینه‌سازی فعالیت‌های مختلف نظیر خرید مواد و قطعات اولیه، تولید و توزیع محصولات نهایی به‌صورت مجزا و پی‌درپی صورت می‌گیرد، اما در حال حاضر با پیشرفت روش‌های بهینه‌سازی و افزایش سرعت محاسبات، امکان به‌کارگیری مدل‌های یکپارچه و برنامه‌ریزی هم‌زمان سطوح مختلف زنجیره تأمین به وجود آمده است. به‌کارگیری مدل‌های یکپارچه، خصوصاً در دهه گذشته، به شرکت‌هایی که در اندیشه صرفه‌جویی چشم‌گیر در هزینه‌های لجستیکی و پاسخ‌دهی سریع به نیازهای مشتریان خود بودند، کمک شایانی نموده است.

*عهده‌دار مکاتبات: alimahmoodirad@gmail.com

هزینه‌های توزیع/ لجستیک بخش مهمی از هزینه‌های کل تولید را تشکیل می‌دهند؛ هزینه‌های لجستیک، سالانه بیش‌تر از ۱۱ درصد از تولید ناخالص ملی در ایالات‌متحده است (توماس و گریفین، ۱۹۹۶). اسکیگون و همکاران (۲۰۰۶) به این نکته اشاره‌کرده‌اند که مقدار هزینه‌های لجستیک، ۳۰ درصد از کل هزینه‌های تولید است؛ ازاین‌رو بهینه‌سازی شبکه تولید-توزیع از اهمیت حیاتی برای شرکت‌ها و مؤسسات به‌منظور کاهش هزینه‌های لجستیک برخوردار است. بهبود قابل‌توجهی در هزینه‌ها از طریق طراحی شبکه‌های موفق و برنامه‌های کاربردی بهینه‌سازی/ یکپارچه‌سازی در زنجیره تأمین گزارش‌شده است (مارتین و همکاران، ۱۹۹۳).

کوندو و همکاران (۲۰۱۳) مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی چند محصولی و چندهدفه را در شرایط فازی ارائه دادند. ابتدا آن‌ها مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی چند محصولی و چندهدفه با ضرایب فازی برای تابع هدف و محدودیت‌ها را فرموله کردند و سپس دو روش برای حل آن پیشنهاد کردند: روش فازی زدایی بر اساس برنامه‌ریزی خطی فازی و روش دیگر بر اساس مفهوم کمینه عدد فازی برای تابع هدف که مقدار فازی را به‌جای مقدار قطعی برای تابع هدف فازی نتیجه می‌دهد، همچنین تکنیک‌های برنامه‌ریزی فازی و روش معیار جامع برای حل مسائل چندهدفه، مورداستفاده قرار گرفت. ملا علی‌زاده و همکاران (۲۰۱۳) مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه‌های ثابت را در محیط فازی در نظر گرفتند. آن‌ها هزینه‌های ثابت و هزینه‌های متغیر را عدد فازی مثلثی در نظر گرفتند و برای حل مسئله از الگوریتم‌های فرا ابتکاری شبیه‌سازی تبرید و جستجوی همسایگی متغیر استفاده کردند. صانعی و همکاران (۲۰۱۳) الگوریتم الکترومغناطیس را برای حل مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت پیشنهاد دادند و به‌منظور تنظیم پارامترها و عملگرهای الگوریتم از روش طراحی آزمایش تاگوچی استفاده کردند. آن‌ها همچنین این الگوریتم را با الگوریتم شبیه‌سازی تبرید مقایسه کردند.

پرامانیک و همکاران (۲۰۱۵) مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی چندهدفه با هزینه ثابت را با در نظر گرفتن تمام پارامترهای موجود در مسئله از نوع فازی، فرمول‌بندی و حل کردند. متغیرها و پارامترهای فازی با استفاده از اندازه‌های امکان و لزوم متناظرشان جایگزین شده و مدل حاصل با روش گرادیان کاهشی توسعه داده شد و توسط نرم‌افزار لینگو حل گردید. محمودی راد و همکاران (۱۳۹۶) مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت را با متغیرهای فازی نوع -۲ توسعه دادند. آن‌ها بر اساس نظریه امکان فازی و تعریف اندازه اعتبار، تابع هدف مسئله را با استفاده از ارزش در معرض ریسک هزینه‌های کل تشکیل دادند و نیازمندی‌های مشتریان را با عنوان محدودیت‌های اعتبار مدل‌سازی کردند. همچنین متغیرهای فازی نوع-۲ را با روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی به مقادیر قطعی تبدیل کردند. جلیل و همکاران (۲۰۱۸) برای مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی در شرایط عدم قطعیت، مدل چند سطحی ارائه کردند. روش آزادسازی لاگرانژ در حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مانند مسئله طراحی شبکه زنجیره تأمین، مسئله حمل‌ونقل و طراحی شبکه به کار گرفته‌شده است (اردلان و همکاران، ۲۰۱۶؛ صانعی و همکاران، ۲۰۱۷؛ حیدری فتحیان و پسندیده، ۲۰۱۸). اگرچه روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی، به‌طور گسترده‌ای استفاده‌شده است، ولی بر اساس تحقیقات انجام‌شده، این روش برای حل مسئله توزیع چند محصولی با هزینه ثابت به کار گرفته نشده است. در این پژوهش به‌منظور حل مسئله توزیع چند محصولی با هزینه ثابت در ابعاد بالا از روش آزادسازی لاگرانژ استفاده می‌شود.

ساختار مقاله به این شرح است که در ادامه بیان می‌گردد. در بخش دوم، مدل ریاضی مسئله حمل‌ونقل چند محصولی با هزینه ثابت آورده شده است. روش آزادسازی لاگرانژ در بخش سوم موردبررسی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم به حل مسئله حمل‌ونقل چند محصولی با هزینه ثابت با روش آزادسازی لاگرانژ پرداخته‌شده است. نتیجه محاسباتی در بخش پنجم آورده شده است و در بخش ششم به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات می‌پردازد.

۲- مسئله حمل‌ونقل چند محصولی با هزینه ثابت

گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید که V مجموعه‌ی رئوس از دو نوع گره تشکیل‌شده است. نوع اول، شامل M گره مبدأ $(i=1,...,M)$ و نوع دوم شامل N گره مقصد (مشتری) $(j=1,...,N)$ است و K نوع محصول $(k=1,...,K)$ وجود دارد که برای حمل آن‌ها از L نوع متفاوت $(l=1,...,L)$ حالت حمل استفاده می‌شود. هدف، برآورده کردن تمام تقاضاهای مشتریان در مبدأ است به‌طوری‌که کل هزینه‌ی ارتباط و مسیریابی محصول به حداقل برسد. در این مسئله، برای حمل محصولات از یک گره مبدأ به گره مقصد، دو نوع هزینه وجود دارد. هزینه‌ی اول هزینه‌ی ثابت است که برای هر یک از مسیرهای بین مبدأها و مقصدها وجود دارد و با

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۲)، تابستان ۱۳۹۷، صفحه: ۱۳۷-۱۲۸

f_{ijkl} نشان داده می‌شود. این هزینه، بیانگر هزینه‌ی ثابت برای حمل محصول k ام از گره مبدأ i به گره مقصد j با استفاده از l امین حالت حمل‌ونقل است. هزینه‌ی دوم، هزینه‌ی متغیر حمل نام دارد که متناسب با مقدار کالای حمل شده است و با v_{ijkl} نشان داده می‌شود، این هزینه، بیانگر هزینه‌ی متغیر برای حمل هر واحد محصول k ام از گره مبدأ i به گره مقصد j با استفاده از l امین حالت حمل‌ونقل است. هر وسیله‌ی حملی دارای یک ظرفیت حمل می‌باشد که با c_{ijl} نشان داده می‌شود. همچنین w_k مقدار ظرفیت موردنیاز به‌وسیله یک واحد کالای k ام می‌باشد. در این صورت، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط این مسئله عبارت است از (صانعی و همکاران ۲۰۱۳):

$$\min \ Z = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} f_{ijkl}\, Y_{ijkl} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} V_{ijkl}\, X_{ijkl} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} X_{ijkl} \le S_{ik} \qquad \forall i,k \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} X_{ijkl} \ge d_{jk} \qquad \forall j,k \tag{3}$$

$$X_{ijkl} \le M\, Y_{ijkl} \qquad \forall i,j,k,l \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{K} w_k X_{ijkl} \le c_{ijl} \qquad \forall i,j,l \tag{5}$$

$$X_{ijkl} \ge 0 \qquad \forall i,j,k,l \tag{6}$$

$$Y_{ijkl} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,k,l \tag{7}$$

که در آن $M=\min\{s_{ik}, d_{jk}\}$. در مدل بالا، تابع هدف (۱) مجموع هزینه‌های ثابت و مستقیم حمل‌ونقل را کمینه می‌کند. دسته محدودیت (۲)، محدودیت عرضه کالا در مبدأ را تضمین می‌کند. دسته محدودیت (۳) محدودیت‌های تقاضا در مقصدها را بیان می‌کند. دسته محدودیت (۴) که ارتباط بین X_{ijkl} و y_{ijkl} را برقرار می‌کند، اطمینان می‌دهد که مسیر (i,j) برای ارسال کالا انتخاب می‌شود (یعنی $y_{ijkl}=1$) به شرطی که $X_{ijkl} > 0$ باشد. دسته محدودیت (۵) بیان می‌کند تعداد کالای ارسالی از ظرفیت وسایل حمل کمتر است، درنهایت، دسته محدودیت‌های (۶) و (۷) به ترتیب، محدودیت‌های نامنفی بودن متغیرهای تصمیم و دودویی مسئله هستند.

۳- روش آزادسازی لاگرانژ

حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط در اندازه‌های کوچک و متوسط توسط نرم‌افزارهای بهینه‌سازی به‌راحتی صورت می‌گیرد، اما با افزایش اندازه مسئله، سرعت حل آن کاهش می‌یابد. حل مسائل بسیار بزرگ، به دلیل محدودیت‌های حافظه، با این نرم‌افزارها دچار مشکل می‌شود. روش آزادسازی لاگرانژ، یکی از روش‌های پرکاربرد برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید و مشکل، به‌خصوص مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح است. این روش که اولین بار توسط هلد و کارپ (۱۹۷۱) به‌منظور حل مسئله فروشنده دوره‌گرد ابداع شد، یکی از روش‌هایی است که یک مسئله بهینه‌سازی مقید و مشکل را توسط یک مسئله ساده‌تر حل می‌کند.

ایده اصلی روش آزادسازی لاگرانژ، آزاد کردن محدودیت‌های پیچیده و ضرب آن‌ها در ضریبی به نام ضرایب لاگرانژ و افزودن آن‌ها به تابع هدف مسئله می‌باشد. انتظار می‌رود حل مسئله آزادشده، آسان‌تر از حل مسئله اصلی باشد. به ازای هر مقدار ثابت از ضرایب لاگرانژ، جواب بهینه مسئله آزادشده، کران پایینی برای مسئله اصلی خواهد بود (در مسئله کمینه‌سازی)؛ به‌عبارت‌دیگر هر جواب از مسئله آزادشده یک کران برای جواب مسئله اصلی ارائه می‌دهد. به دلیل حذف برخی قیود و بزرگ‌تر شدن ناحیه شدنی، حل مسئله آزادشده آسان‌تر از حل مسئله اصلی خواهد بود. از طرفی، جواب مسئله آزادشده به‌شرط شدنی بودن در مسئله اصلی، کران بالایی برای آن خواهد بود (در مسئله کمینه‌سازی). برای این منظور، معمولاً یک الگوریتم ابتکاری برای ساختن جواب شدنی (کران بالا) از جواب کران پایین پیشنهاد می‌شود؛ درنتیجه با بیشینه کردن کمینه حاصل از مسئله آزادشده، کران پایین بهتری برای مسئله اصلی به دست می‌آید

و در یک فرآیند تکراری می‌توان جواب حاصل را به سمت جواب مسئله اصلی سوق داد. برای این منظور از روش زیر گرادیان برای حل مسئله دوگان لاگرانژی استفاده می‌شود. مسئله بیشینه‌سازی تابع لاگرانژ با متغیرهای دوگان (ضرایب لاگرانژ) را مسئله دوگان لاگرانژی می‌نامند.

۴- حل مسئله با روش آزادسازی لاگرانژ

به‌طورکلی در مسائل برنامه‌ریزی متغیرهای صحیح، محدودیت‌های شامل متغیرهای دودویی، حل مسئله را دشوار می‌کند، این محدودیت‌ها را محدودیت‌های پیچیده می‌گویند. برای ساختن مسئله آزادشده، پیچیده‌ترین محدودیت‌ها باید به تابع هدف انتقال داده شوند. بر اساس بررسی صورت گرفته از مدل حمل‌ونقل با هزینه ثابت مرحله‌ای در ابعاد بالا، محدودیت (۴) از دسته محدودیت‌های سخت مسئله هست و به‌عنوان محدودیت‌های پیچیده انتخاب می‌شوند. با ضرب کردن این محدودیت در ضریب لاگرانژ $\lambda_{ijkl} \geq 0$ و افزودن آن به تابع هدف، مسئله لاگرانژ آزادشده به دست خواهد آمد. بنابراین مسئله لاگرانژ آزادشده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min\ OF_{LR}(\lambda) &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} f_{ijkl}\, Y_{ijkl} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} V_{ijkl}\ X_{ijkl} \\ &+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} \lambda_{ijkl}\left(X_{ijkl} - M\, Y_{ijkl}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}\right) Y_{ijkl} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(V_{ijkl} + \lambda_{ijkl}\right) X_{ijkl} \end{aligned} \tag{۹}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} X_{ijkl} \leq S_{ik} \qquad \forall i,k \tag{۱۰}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} X_{ijkl} \geq d_{jk} \qquad \forall j,k \tag{۱۱}$$

$$\sum_{k=1}^{K} w_k X_{ijkl} \leq c_{ijl} \qquad \forall i,j,k,l \tag{۱۲}$$

$$X_{ijkl} \geq 0 \qquad \forall i,j,k,l \tag{۱۳}$$

$$Y_{ijkl} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,k,l \tag{۱۴}$$

جهت به دست آوردن کران پایین برای مسئله اصلی، مسئله بالا باید حل شود. با توجه به اینکه متغیرهای y_{ijkl} در محدودیت‌های (۱۰) و (۱۱) وجود ندارد، لذا می‌توان جمله $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}\right)Y_{ijkl}$ را از تابع هدف (۹) حذف کرد؛ درنتیجه مسئله آزادسازی لاگرانژ به دو زیر مسئله به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

زیر مسئله (P1):

$$\text{(P1):} \quad \min\ OF_{P1} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(V_{ijkl} + \lambda_{ijkl}\right) X_{ijkl} \tag{۱۵}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} X_{ijkl} \leq S_{ik} \qquad \forall i,k \tag{۱۶}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} X_{ijkl} \geq d_{jk} \qquad \forall j,k \tag{۱۷}$$

$$X_{ijkl} \geq 0 \qquad \forall i,j,k,l \tag{۱۸}$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۲)، تابستان ۱۳۹۷، صفحه: ۱۲۸-۱۳۷

زیر مسئله (P2):

$$\text{(P2): } \min\ OF_{P2} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}\right)Y_{ijkl} \tag{۱۹}$$

$$y_{ijkl} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j, k, l \tag{۲۰}$$

اگر شکل ستاره‌دار، متغیرها و عبارات بیانگر مقدار بهینه آن‌ها باشد، کران پایین (LB) برای مسئله اصلی با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$LB = OF_{LR}^{*}(\lambda) = OF_{P1}^{*} + OF_{P2}^{*} \tag{۲۱}$$

که OF_{P1}^{*} و x_{ijk}^{*} از حل زیر مسئله (P1) که یک مسئله خطی است به دست می‌آیند. زیر مسئله (P1) به دلیل خطی بودن به‌سادگی توسط نرم‌افزارهای بهینه‌سازی قابل‌حل است. برای به دست آوردن مقدار بهینه زیر مسئله (P2)، از یک الگوریتم ابتکاری که در زیر پیشنهاد می‌شود، استفاده می‌کنیم.

۴-۱ الگوریتم ابتکاری برای حل زیر مسئله

برای به دست آوردن جواب بهینه مسئله (P2)، با توجه به این‌که این مسئله از نوع کمینه‌سازی است، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: برای مقادیر منفی $f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}$ مقدار بهینه y_{ijkl} برابر یک انتخاب می‌شود، یعنی $y_{ijkl}^{*} = 1$.

حالت ۲: برای مقادیر مثبت $f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}$ مقدار بهینه y_{ijkl} برابر صفر انتخاب می‌شود، یعنی $y_{ijkl}^{*} = 0$.

درنتیجه $OF_{P2}^{*} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}\right)Y_{ijkl}^{*}$.

بنابراین الگوریتم به دست آوردن کران پایین برای مسئله اصلی در الگوریتم (۱) در شکل ۱ آورده شده است.

الگوریتم ۱: الگوریتم کران پایین

۱. مسئله (P1) را جهت به دست آوردن جواب بهینه x_{ijkl}^{*} و مقدار تابع هدف بهینه OF_{P1}^{*} حل کنید.

۲. برای $\forall i, j, k, l$ مراحل زیر را انجام دهید:

۲. ۱. اگر $f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl} < 0$ آنگاه قرار دهید: $y_{ijkl}^{*} = 1$ ، در غیر این صورت قرار دهید: $y_{ijkl}^{*} = 0$.

۳. مقدار تابع هدف بهینه (P2) را محاسبه کنید، یعنی

$$OF_{P2}^{*} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(f_{ijkl} - M\lambda_{ijkl}\right)Y_{ijkl}^{*}$$

۴. مقدار تابع هدف مسئله لاگرانژ را به‌عنوان کران پایین مسئله اصلی محاسبه کنید:

$$LB = OF_{LR}^{*}(\lambda) = OF_{P1}^{*} + OF_{P2}^{*}$$

شکل ۱- الگوریتم پیدا کردن کران پایین برای مسئله اصلی.

از کران پایین تولیدشده توسط الگوریتم ۱، برای تولید کران بالا برای مسئله اصلی (P2) استفاده می‌شود که در بخش بعدی آمده است.

۴-۲ تولید کران بالا برای مسئله اصلی

جوابی که توسط الگوریتم ۱ به دست می‌آید، برای محاسبه کران بالا استفاده می‌شود. در موارد زیادی جواب کران پایین ممکن است در مسئله اصلی شدنی نباشد. در چنین مواردی باید روش ابتکاری برای به دست آوردن یک جواب شدنی برای مسئله اصلی، با استفاده از جواب حاصل از کران پایین، ارائه داد. در مسئله تحت بررسی، حالت‌های نقض برای جواب مسئله عبارت‌اند از:

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۲)، تابستان ۱۳۹۷، صفحه: ۱۲۸-۱۳۷

حالت ۱: اگر $y^*_{ijkl}=0$ و $x^*_{ijkl}>0$ باشد، معنی می‌دهد که یک تعداد کالایی از مبدأ i به مقصد j فرستاده‌شده ولی هزینه ثابتی برای آن در نظر گرفته نشده است.

حالت۲: اگر $y^*_{ijkl}=1$ و $x^*_{ijkl}=0$ باشد، معنی می‌دهد که هیچ کالایی از مبدأ i به مقصد j فرستاده نشده ولی هزینه ثابتی برای آن در نظر گرفته‌شده است.

حالت‌های ۱ و۲ برای به دست آوردن یک کران بالای شدنی، باید اصلاح شوند؛ برای این منظور یک الگوریتم ابتکاری در زیر پیشنهاد می‌شود.

الگوریتم۲: الگوریتم کران بالا

۱. برای $\forall i,j,k,l$ مراحل زیر را انجام دهید:

۱. ۱. با استفاده از الگوریتم ۱ جواب مسئله لاگرانژ، یعنی x^*_{ijkl} و y^*_{ijkl} را به دست آورید.

۱. ۲. اگر $y^*_{ijkl}=0$ & $x^*_{ijkl}>0$ آنگاه قرار دهید $y^*_{ijkl}=1$.

۱. ۳. اگر $y^*_{ijkl}=1$ & $x^*_{ijkl}=0$ آنگاه قرار دهید $y^*_{ijkl}=0$.

۲. با استفاده از قرار دادن x^*_{ijkl} و y^*_{ijkl} در تابع هدف مسئله اصلی، کران بالای مسئله اصلی را محاسبه کنید، یعنی

$$UB=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} f_{ijkl}\,Y^*_{ijkl}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} V_{ijkl}\,X^*_{ijkl}$$

شکل۲- الگوریتم پیدا کردن کران بالا برای مسئله اصلی.

درنتیجه با استفاده از الگوریتم ۲، جوابی که از کران پایین حاصل می‌گردد، با انجام تغییراتی برای مسئله اصلی، یک کران بالا خواهد بود.

۳-۴ الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

هر بار که یک کران پایین و درنتیجه کران بالا برای مسئله اصلی به دست می‌آید، اگر اختلاف بین کران‌های پایین و بالا کمتر از مقدار کوچک از پیش تعیین‌شده (می‌گوییم ε) باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد و جواب به‌دست‌آمده به‌عنوان جواب بهینه معرفی می‌شود. در غیر این صورت، الگوریتم تا تکرار معینی اجرا می‌شود. در هر تکرار، ضرایب لاگرانژ باید به‌روز شوند که یکی از روش‌های معروف، روش زیرگرادیان است (فیشر، ۱۹۸۱). برای این منظور، یک طول گام برای هر تکرار به‌وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_{ijkl}^{iter}=\frac{\pi\left(UB-OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter})\right)}{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(x_{ijkl}^{iter}-M\,y_{ijkl}^{iter}\right)^2} \tag{۲۲}$$

$$\lambda_{ijkl}^{itet+1}=\lambda_{ijkl}^{itet}+\theta_{ijkl}^{itet}\left(x_{ijkl}^{iter}-M\,y_{ijkl}^{iter}\right) \tag{۲۳}$$

که $\pi\in[0,2]$ انتخاب می‌شود، UB بهترین کران بالای به‌دست‌آمده تا این تکرار و $OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter})$ مقدار تابع هدف بهینه از مسئله آزادشده است. همچنین اگر پس از چندین تکرار، بهبودی در مقدار کران پایین صورت نگیرد، مقدار π نصف می‌شود. معیار توقف برای روش آزادسازی لاگرانژ یکی از معیارهایی است که قبلاً بیان شد. روند کلی روش آزادسازی لاگرانژ برای مسئله تحت بررسی، در الگوریتم ۳ آمده است.

الگوریتم ۳: الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

۱. شمارنده تکرار الگوریتم را انتخاب کنید ($iter = 0$).

۲. مقدار ضرایب لاگرانژ را انتخاب کنید ($\lambda^{iter} = \lambda^{*} = 0,$).

۳. مقدار کران بالا و کران پایین را انتخاب کنید ($UB = \infty$ و $LB = 0$).

٤. مقدار π را انتخاب کنید ($\pi = 2$).

۵. بیشینه تعداد تکرارها (I) را تعیین کنید.

۶. تا زمانی که $\frac{UB-LB}{UB} > \varepsilon$ مراحل زیر را تکرار کنید.

۶. ۱. مسئله آزادشده لاگرانژ را با الگوریتم ۱ حل کرده و مقدار بهینه آن یعنی $OF_{LR}^{iter}(\lambda)$ را به دست آورید.

۶. ۲. اگر $OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter}) > LB$ آنگاه قرار دهید

$LB = OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter}),\ \lambda^{*} = \lambda^{iter}$.

۶. ۳. با استفاده از الگوریتم ۲،جواب شدنی برای مسئله اصلی با مقدار تابع هدف UB_{iter} را به دست آورید.

۶. ۴. اگر $UB_{iter} < UB$ آنگاه قرار دهید $UB := UB_{iter}$.

۶. ۵. مقدار ضرایب لاگرانژ را با استفاده از روابط زیر به‌روز کنید.

$$\theta_{ijkl}^{iter} = \frac{\pi(UB - OF_{LR}^{iter}(\lambda^{iter},\gamma^{iter}))}{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(x_{ijkl}^{iter} - M\, y_{ijkl}^{iter})^2}$$

$$\lambda_{ijkl}^{itet+1} = \lambda_{ijkl}^{itet} + \theta_{ijkl}^{itet}(x_{ijkl}^{iter} - M\, y_{ijkl}^{iter}), \lambda_{ijkl}^{itet+1} = \max\{0, \lambda_{ijkl}^{itet+1}\},$$

٦. ٦. اگر (در ۳۰ تکرار متوالی، مقدار کران پایین بروز نشود) آنگاه قرار می‌دهیم $\pi = \pi/2$.

۷. قرار دهید $iter = iter + 1$ و به گام ٦ بروید.

شکل۳- الگوریتم کلی آزادسازی لاگرانژ برای مسئله حمل‌ونقل با هزینه ثابت مرحله‌ای.

۵- نتایج محاسباتی

در این بخش، الگوریتم آزادسازی لاگرانژ را برای مسئله پیشنهادی در قالب مثال عددی اجرا می‌کنیم. الگوریتم با نرم‌افزار GAMS 23.5 کد شده و روی یک کامپیوتر با مشخصات Intel Icore i7 با پردازنده‌ی 2.50GHZ و RAM 12GB اجرا شد. همچنین ۱۵ مسئله در ابعاد مختلف در نظر گرفته‌شده است. تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای مسئله به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- *تعداد متغیرهای پیوسته عبارت‌اند از:* $|M|\times|N|\times|K|\times|L|$.
- *تعداد متغیرهای صحیح (دودویی) عبارت‌اند از:* $|M|\times|N|\times|K|\times|L|$.
- *تعداد محدودیت‌ها عبارت‌اند از:* $(|M|+|N|)\times(|K|+|L|)+(3\times|M|\times|N|\times|K|\times|L|)$.

اندازه مسائل و مشخصات پارامترها در جدول ۱ و ۲ نشان داده‌شده است.

با توجه به جدول ۱، برای بزرگ‌ترین اندازه (یعنی مسئله ۱۷)، مسئله تحت بررسی شامل ۴۸۰۰۰۰۰۰ متغیر پیوسته، ۴۸۰۰۰۰۰۰ متغیر صحیح دودویی و ۴۸۰۰۰۰۰۰ محدودیت است که نشان‌دهنده آن است مسئله تحت بررسی چقدر برای حل شدن سخت است. برای حل مسئله با روش آزادسازی لاگرانژ، تعداد تکرارها ($I = 300$ ، $\varepsilon = 10^{-2}$ ، $I_{\max} = 30$ و $\pi = 2$) در الگوریتم برای مسائل مختلف استفاده‌شده است.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۲)، تابستان ۱۳۹۷، صفحه: ۱۲۸-۱۳۷

جدول ۱ - اندازه مسائل آزمایشی.

شماره مسئله	$\|M\|$	$\|N\|$	$\|K\|$	$\|L\|$	تعداد متغیرها: پیوسته	تعداد متغیرها: صحیح	تعداد محدودیت‌ها
۱	۵	۱۰	۲	۲	۲۰۰	۲۰۰	۶۵۴
۲	۱۵	۲۵	۵	۳	۵۶۲۵	۵۶۲۵	۱۷۲۶۵
۳	۱۵	۲۵	۸	۶	۱۸۰۰۰	۱۸۰۰۰	۵۴۴۲۳
۴	۲۰	۴۰	۱۲	۱۰	۹۶۰۰۰	۹۶۰۰۰	۲۸۸۹۲۰
۵	۴۰	۶۰	۱۲	۱۰	۲۸۸۰۰۰	۲۸۸۰۰۰	۸۶۶۵۲۰
۶	۶۰	۸۰	۱۲	۱۰	۵۷۶۰۰۰	۵۷۶۰۰۰	۱۷۳۲۹۲۰
۷	۶۰	۸۰	۲۰	۱۵	۱۴۴۰۰۰۰	۱۴۴۰۰۰۰	۴۳۲۵۱۰۰
۸	۸۰	۱۰۰	۲۵	۲۰	۴۰۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰۰	۱۲۰۰۸۵۰۰
۹	۱۰۰	۱۰۰	۲۵	۲۰	۵۰۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰۰۰	۱۵۰۱۰۵۰۰
۱۰	۱۰۰	۱۲۰	۲۵	۲۰	۶۰۰۰۰۰۰	۶۰۰۰۰۰۰	۱۸۰۱۲۵۰۰
۱۱	۱۲۰	۱۵۰	۲۵	۲۰	۹۰۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰۰۰	۲۷۰۱۸۵۰۰
۱۲	۱۰۰	۱۲۰	۴۰	۳۰	۱۴۴۰۰۰۰۰	۱۴۴۰۰۰۰۰	۴۳۲۱۳۲۰۰
۱۳	۱۸۰	۲۰۰	۲۵	۲۰	۱۸۰۰۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰۰۰	۵۴۰۳۶۵۰۰
۱۴	۱۲۰	۱۵۰	۴۵	۴۰	۳۲۴۰۰۰۰۰	۳۲۴۰۰۰۰۰	۹۷۲۱۹۸۰۰
۱۵	۱۸۰	۲۰۰	۳۵	۳۰	۳۷۸۰۰۰۰۰	۳۷۸۰۰۰۰۰	۱۱۳۴۳۷۰۵۰
۱۶	۱۵۰	۱۵۰	۴۵	۴۰	۴۰۵۰۰۰۰۰	۴۰۵۰۰۰۰۰	۱۲۱۵۲۴۳۰۰
۱۷	۲۰۰	۲۰۰	۴۰	۳۰	۴۸۰۰۰۰۰۰	۴۸۰۰۰۰۰۰	۱۴۴۰۴۱۲۰۰

جدول۲- مشخصات پارامترها برای مسائل مختلف.

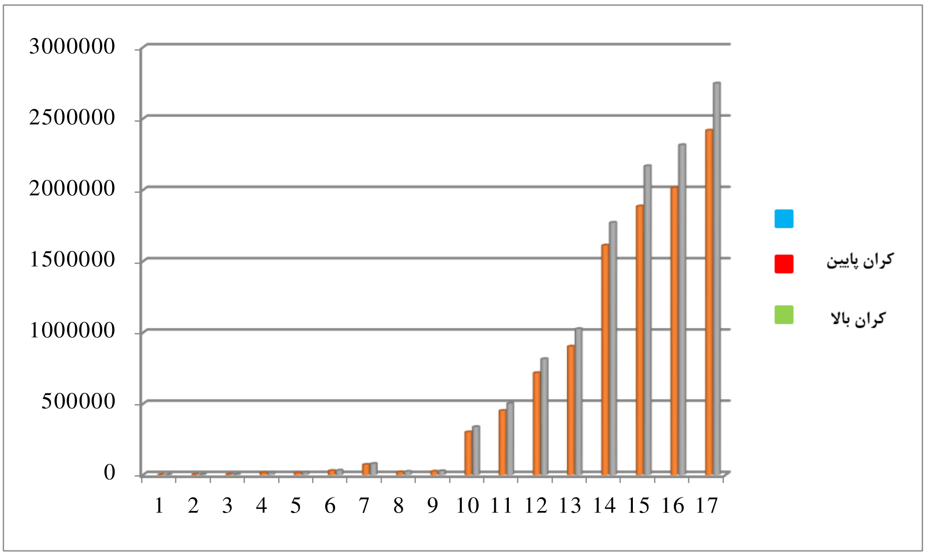
مقادیر پارامترها	پارامترها	اندیس‌ها
$U(20, 100)$	a_i	$\forall i \in M$
$U(50, 200)$	b_j	$\forall j \in N$
$U(100, 600)$	f_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$
$U(10, 100)$	c_{ij}	$\forall i \in M, j \in N$

با توجه به اینکه، هراندازه مسئله با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ و نرم‌افزار GAMS حل‌شده باشد، شکاف بهینگی (Gap) و زمان اجرای آن در جدول ۳ گزارش‌شده است.

در جدول ۳، کران پایین (LB)، کران بالا (UB) و شکاف بهینگی هراندازه از مسئله نشان داده‌شده است، همچنین $Gap = (UB - LB)/UB$. از این جدول می‌توان دریافت که نرم‌افزار GAMS قادر به حل مسئله از شماره ۶ به بعد نخواهد بود؛ درحالی‌که مسائل ۱ تا ۵ را به‌طور بهینه حل می‌کند. همچنین برای مسائل ۱ تا ۵ اجرای بهتری از روش آزادسازی لاگرانژ دارد، ولی از شماره ۶ به بعد، روش آزادسازی لاگرانژ جواب خوبی با شکاف بهینگی داده‌شده می‌دهد؛ درحالی‌که نرم‌افزار GAMS قادر به حل آن‌ها نیست. شکل ۴ کران پایین و کران بالای اجرای الگوریتم لاگرانژ را نشان می‌دهد. همچنین از جدول ۳ نتیجه می‌شود که زمان اجرای روش آزادسازی لاگرانژ با افزایش ابعاد مسئله افزایش می‌یابد.

جدول ۳- اجرای روش آزادسازی لاگرانژ و جواب نرم‌افزار GAMS.

اجرا با نرم‌افزار GAMS			اجرا با روش آزادسازی لاگرانژ				شماره مسئله
زمان اجرا (ثانیه)	شکاف بهینگی	مقدار تابع هدف	زمان اجرا (ثانیه)	شکاف بهینگی (درصد)	کران بالا	کران پایین	
۴	۰	۹۱۵	۷	۰/۰۲	۹۱۵	۹۱۴/۸	۱
۴	۰	۲۶۱۷	۷۲	۰/۲۳	۲۶۱۷	۲۶۱۰/۹	۲
۴	۰	۳۸۳۶	۲۴۲	۰/۹۵	۳۸۵۴	۳۸۱۷/۱	۳
۸	۰	۱۴۸۲۴	۹۳۸	۰/۳۸	۱۵۰۳۷	۱۴۹۷۹/۷	۴
۱۵	۰	۱۴۸۰۳	۱۵۶۲	۷/۹	۱۶۰۷۴	۱۴۷۸۸/۳	۵
–	–	–	۳۱۱۸	۷/۹	۳۲۱۲۹	۲۹۵۵۸/۹	۶
–	–	–	۳۹۷۱	۸	۷۹۰۰۳	۷۲۶۸۲/۳	۷
–	–	–	۲۰۴۱۷	۱۵/۹	۲۳۹۰۸/۴	۲۰۰۸۳/۱	۸
–	–	–	۲۶۳۲۱	۱۰	۲۷۸۹۱/۵	۲۵۱۰۲/۲	۹
–	–	–	۳۰۴۶۱	۱۰/۹	۳۳۸۴۴۴	۳۰۱۲۱۵/۶	۱۰
–	–	–	۱۱۰۷۲	۱۰	۵۰۱۹۸۵	۴۵۱۷۸۶/۴	۱۱
–	–	–	۷۴۹۰۸	۱۱/۹	۸۱۵۳۳۶	۷۱۷۴۹۵/۹	۱۲
–	–	–	۹۴۱۴۹	۱۲	۱۰۲۶۶۷۶	۹۰۳۴۷۴/۵	۱۳
–	–	–	۱۶۸۹۲۴	۹	۱۷۷۱۳۸۹	۱۶۱۱۹۶۳/۸	۱۴
–	–	–	۱۹۷۲۴۰	۱۲/۹	۲۱۶۸۳۹۸	۱۸۸۶۵۰۶/۵	۱۵
–	–	–	۲۰۹۹۳۲	۱۲/۹	۲۳۱۵۹۹۲	۲۰۱۴۹۱۳/۳	۱۶
–	–	–	۲۵۱۷۱۸	۱۱/۹	۲۷۴۷۵۷۱	۲۴۱۷۸۶۲/۷	۱۷



شکل ۴- کران پایین و کران بالای اجرای الگوریتم لاگرانژ.

۶- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات

در این پژوهش ابتدا مدلی برای مسئله توزیع چند محصولی با هزینه ثابت ارائه گردید. ازآنجایی‌که این مسئله یک مسئله از نوع NP-Hard است، از روش ابتکاری آزادسازی لاگرانژ برای دستیابی به جواب مسئله استفاده شد. نتایج مثال عددی نشان داد که نرم‌افزارهای برنامه‌ریزی عدد صحیح، تنها قادر به حل این مسائل تا ابعاد خاصی هستند؛ درحالی‌که روش آزادسازی لاگرانژ با یک شکاف بهینگی، قادر به حل ابعاد بالاتری است. برخی از موضوعاتی که برای تحقیقات بعدی می‌توان برشمرد، عبارت‌اند از:

- *در نظر گرفتن مقادیر تقاضا در مقصد به‌صورت تصادفی و سپس حل آن با روش‌های فرا ابتکاری.*
- *حل مسئله حمل‌ونقل با هزینه ثابت با استفاده از روش‌های تجزیه بندرز، تجزیه دنتزیگ- ولف، شاخه و برش، شاخه و قیمت و مقایسه آن‌ها با روش شاخه و کران.*

منابع

محمودی راد، علی، صالحی دره باریک، مرضیه و تقاعدی، روح الله. (۱۳۹۶). مسئله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت با متغیرهای فازی نوع-۲. مجله تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، ۲(۳)، ۱۹۴-۱۷۹.

Ardalan, Z., Karimi, S., Naderi, B., & Khamseh, A. A. (2016). Supply chain networks design with multi-mode demand satisfaction policy. *Computers & industrial engineering*, *96*, 108-117.

Eskigun, E., Uzsoy, R., Preckel, P. V., Beaujon, G., Krishnan, S., & Tew, J. D. (2007). Outbound supply chain network design with mode selection and lead time considerations. *Naval research logistics (NRL)*, *54*(3), 282-300.

Fisher, M. L. (1981). The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management science*, *27*(1), 1-18.

Gendron, B. (in press). Revisiting Lagrangian relaxation for network design. *Discrete applied mathematics*.doi: https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.07.003

Held, M., & Karp, R. M. (1971). The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II. *Mathematical programming*, *1*(1), 6-25.

Jalil, S. A., Javaid, S., & Muneeb, S. M. A decentralized multi-level decision making model for solid transportation problem with uncertainty. *International journal of system assurance engineering and management*, 1-12.

Heidari-Fathian, H., & Pasandideh, S. H. R. (2018). Green-Blood supply chain network design: Robust optimization, Bounded Objective Function & Lagrangian relaxation. *Computers & industrial engineering*. *12*, 95-105.

Kundu, P., Kar, S., & Maiti, M. (2013). Multi-objective multi-item solid transportation problem in fuzzy environment. *Applied mathematical modelling*, *37*(4), 2028-2038.

Martin, C. H., Dent, D. C., & Eckhart, J. C. (1993). Integrated production, distribution, and inventory planning at Libbey-Owens-Ford. *Interfaces*, *23*(3), 68-78.

Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., Nezhad, S. S., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Yazdani, M. (2013). Solving a fuzzy fixed charge solid transportation problem by metaheuristics. *Mathematical and computer modelling*, *57*(5-6), 1543-1558.

Pramanik, S., Jana, D. K., & Maiti, M. (2015). A fixed charge multi-objective solid transportation problem in random fuzzy environment. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *28*(6), 2643-2654.

Sanei, M. Mahmoodirad, A. Molla-Alizadeh-Zavardehi, S. (2013), An Electromagnetism-like algorithm for fixed charge solid transportation problem, *International journal of mathematical modelling & computations*, 3(4), 345-354.

Sanei, M., Mahmoodirad, A., Niroomand, S., Jamalian, A., & Gelareh, S. (2017). Step fixed-charge solid transportation problem: a Lagrangian relaxation heuristic approach. *Computational and applied mathematics*, *36*(3), 1217-1237.

Thomas, D. J., & Griffin, P. M. (1996). Coordinated supply chain management. *European journal of operational research*, *94*(1), 1-15.