

## محاسبه ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار برخی توزیع‌های آماری

رسول روزگار<sup>۱\*</sup>، بهالدین صوفی<sup>۲</sup>، حمیدرضا طاهری‌زاده<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه آمار، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

<sup>۲</sup>گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

### چکیده

ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار دو کمیت بسیار متداول در زمینه‌ی اندازه‌گیری ریسک مالی هستند. رویکردهای بسیاری برای محاسبه‌ی این دو کمیت وجود دارند که این رویکردها را می‌توان به سه دسته‌ی کلی پارامتری، نا پارامتری و نیمه نا پارامتری تقسیم‌بندی کرد. در روش پارامتری که رویکرد اصلی این مقاله است، فرض بر این است که توزیع بازده سهام به دسته‌ی خاصی از توزیع‌های پارامتری تعلق دارد. در این مقاله برای تعدادی از توزیع‌ها، ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار محاسبه‌شده و روابط مربوط به این دو کمیت برای چند توزیع متقارن بیان و اثبات شده است. با مقایسه نتایج عددی بر مبنای محاسبه قیمت‌های روزانه سهام شرکت کواکولا به مدت ۱۰ سال، نشان داده شده است که کسری مورد انتظار در مقابل ارزش در معرض ریسک کمیت قابل اتکا و معتبری در مبحث مدیریت ریسک می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** ارزش در معرض ریسک، کسری مورد انتظار، روش پارامتری.

پذیرش: ۱۳۹۷/۳/۱

دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۲۶

### ۱- مقدمه

ارزش در معرض ریسک<sup>۱</sup> که در اوایل دهه ۱۹۸۰ معرفی گردید یکی از معیارهای مهم و مطرح در صنعت مالی است که توسط نهادها و مؤسسات مالی برای اندازه‌گیری و مدیریت ریسک ناشی از سرمایه‌گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این وجود، این معیار با چالش‌هایی روبروست و مورد انتقاد سرمایه‌گذاران قرار می‌گیرد. آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹) و آسربی و تاشه (۲۰۰۲) نشان دادند که ارزش در معرض ریسک به علت عدم زیرجمع‌پذیری یک اندازه منسجم ریسک محسوب نمی‌شود. برای غلبه بر چنین نارسایی‌هایی، کسری مورد انتظار<sup>۲</sup> که در اواخر دهه ۱۹۹۰ معرفی گردید، به‌عنوان یک اندازه ریسک منسجم و به‌عنوان جایگزینی برای VaR مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقالات مقایسه‌ای بر مبنای مطالعات شبیه‌سازی شده نشان دادند که در بسیاری از موارد، ES عملکرد بهتر و مفیدتری نسبت به VaR دارد. راکفلر و اوریاسف (۲۰۰۲) نشان دادند که ES به‌سادگی و با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی بهینه می‌شود. یامای و یوشیبا (۲۰۰۲) این دو کمیت را از جنبه‌های بهینه‌سازی پرتفوی، تجزیه ریسک به عوامل ریسک مورد بررسی و مقایسه قرارداداند. آنان دریافتند که در زمینه‌ی بهینه‌سازی و تجزیه ریسک، ES عملکرد بهتری نسبت به VaR دارد اما ES نیاز به نمونه بیشتری نسبت به VaR برای همان

\* Corresponding author (E-mail: roozegar@yazd.ac.ir)

<sup>۱</sup>Value at Risk (VaR)

<sup>۲</sup>Expected Shortfall (ES)

سطح از دقت را دارد. در یک کاربرد دیگر، آوه و مون (۲۰۰۶) دریافته‌اند که مقادیر ES خیلی بیشتر از مقادیر به دست آمده برای VaR است و این بدان معناست که VaR زیان‌های مربوط به دم توزیع را کمتر پیش‌بینی می‌کند.

تخمین و محاسبه VaR و ES بر اساس سه رویکرد پارامتری، نا پارامتری و نیمه پارامتری انجام می‌گیرد. در روش پارامتری فرض بر این است که توزیع سری بازده به دسته خاصی از توزیع‌ها تعلق دارند. در این مقاله رویکردی پارامتری را برای محاسبه قیمت‌های روزانه سهام شرکت کوکاکولا به مدت ۱۰ سال به کار برده‌ایم. با مقایسه نتایج عددی بر مبنای محاسبه قیمت‌های روزانه سهام شرکت کوکاکولا به مدت ۱۰ سال برای چهار توزیع متقارن نشان داده‌ایم که استفاده از کمیت کسری مورد انتظار در مقابل کمیت ارزش در معرض ریسک خصوصاً در شرایط نامطلوب و غیرعادی بازار، اطمینان نسبی بیشتری را در مبحث مدیریت ریسک به ارمغان می‌آورد.

در بخش ۲ به معرفی مفاهیم و اصطلاحات و مبانی نظری مورد نیاز می‌پردازیم. در بخش ۳ توضیح مختصری درباره سه رویکرد محاسبه کمیت‌های VaR و Es ارائه نموده و این دو کمیت را برای چهار توزیع‌های پارامتری محاسبه می‌کنیم. در بخش ۴ محاسبات عددی را برای چهار توزیع بخش قبل با استفاده از بسته نرم‌افزاری R ارائه می‌دهیم و در بخش ۵ نتایج را بازگو می‌نماییم.

## ۲- مبانی نظری

### ۲-۱ ارزش در معرض ریسک

VaR بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار روی سبد دارایی‌ها یا مجموعه سرمایه‌گذاری در طول افق زمانی مشخص و در شرایط عادی بازار و در یک سطح اطمینان معین است. به عبارتی دیگر برای احتمال معین  $0 < p < 1$  و سطح اطمینان پیش‌بینی  $(1 - p)$  تعبیر این معیار چنین است:

ما  $(1 - p)$  درصد اطمینان داریم که طی  $N$  روز آتی قطعاً بیشتر از مبلغ  $V$  متحمل زیان نخواهیم شد. متغیر  $V$  همان ارزش در معرض ریسک است که در بردارنده دو پارامتر افق زمانی  $(N)$  و سطح اطمینان  $(1 - p)$  می‌باشد (آسربی و تاشه، ۲۰۰۲).

ازلحاظ آماری VaR به عنوان یک چندک مرتبه  $p$  ام تعریف می‌شود. در واقع اگر متغیر تصادفی  $X$  با تابع توزیع  $F(\cdot)$  میزان زیان یا بازدهی منفی در یک بازه زمانی مشخص باشد، آنگاه VaR یک متغیر تصادفی  $X$  برای احتمال معین  $p \in (0,1)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{VaR}_p(X) = \inf\{x: F_X(x) \geq p\}.$$

در صورتی که متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع پیوسته  $F(\cdot)$  باشد  $\text{VaR}_p(X) = F^{-1}(p)$ .

### ۲-۲ کسری مورد انتظار

به هنگام استفاده گسترده از VaR در اواخر دهه ۱۹۹۰، مفهوم اندازه‌های منسجم ریسک توسط آرتزرنر و همکاران (۱۹۹۷) مطرح شد. آرتزرنر و همکاران (۱۹۹۹) نشان دادند که VaR در اصل زیر جمع‌پذیری صدق نمی‌کند و بنابراین یک اندازه منسجم ریسک محسوب نمی‌شود. به همین منظور ES توسط آرتزرنر و همکاران در سال ۱۹۹۹ معرفی شد.

آسربی و تاشه (۲۰۰۲) تعریف دقیق‌تری از کسری مورد انتظار ارائه دادند که برای توزیع‌های پیوسته و گسسته در اصول انسجام صدق می‌نمود. اگر  $F(\cdot)$  و  $f(\cdot)$  به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی متغیر تصادفی  $X$  باشند، کسری مورد انتظار

برای احتمال معین  $p \in (0,1)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ES_p(X) = \frac{1}{p} \{E[XI_{\{X \leq VaR_p(X)\}}]\} + p VaR_p(X) - VaR_p(X), \quad (1)$$

در صورتی که توزیع متغیر تصادفی  $X$  پیوسته باشد رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$ES_p(X) = \frac{1}{p} E[XI_{\{X \leq VaR_p(X)\}}] = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{VaR_p} xf(x) dx, \quad (2)$$

با تغییر متغیر  $u = F(x)$  نتیجه می‌شود که

$$ES_p(X) = \frac{1}{p} \int_0^p VaR_u(X) du. \quad (3)$$

### ۳- روش‌های محاسبه VaR و ES

رویکردهای بسیاری برای محاسبه VaR و ES وجود دارد؛ اما در مجموع می‌توان روش‌های محاسبه، این دو کمیت را به سه دسته‌ی پارامتری، نا پارامتری و نیمه پارامتری تقسیم‌بندی کرد. پارامتری فرض بر این است که سری بازده سهام از توزیع خاصی پیروی می‌کند. در این حالت محاسبه VaR و ES مستلزم محاسبه معکوس تابع توزیع و محاسبه یک انتگرال است؛ در این صورت این کمیت‌ها به‌عنوان توابعی از پارامترهای مدل استخراج می‌شوند. در ادامه این بخش برای توزیع‌های نرمال، استودنت، لاپلاس<sup>۱</sup> و لجستیک، این دو کمیت به صورت جداگانه محاسبه می‌شود.

رویکرد دیگر، رویکرد نا پارامتری است و هیچ فرض خاصی را بر توزیع بازده دارایی‌ها تحمیل نمی‌کند. رویکرد نا پارامتری از آخرین توزیع تجربی بازده و نه یک توزیع نظری برای برآورد سنج‌های ریسک بهره می‌گیرد و بر این فرض استوار است که آینده نزدیک تا اندازه‌ای به گذشته نزدیک شبیه است. از جمله روش‌های نا پارامتری می‌توان به روش‌های شبیه‌سازی تاریخی، روش شبیه‌سازی تاریخی فیلتر شده، روش کرنل و روش کرنل پیراسته اشاره نمود (نادر نژاد، زنگ و چن، ۲۰۱۴). رویکرد دیگری که در محاسبه کمیت‌های VaR و ES استفاده می‌شود مبتنی بر روش‌های برآورد VaR و ES است که شامل عناصر پارامتری و نا پارامتری است. در سال ۲۰۰۸ روشی نیمه پارامتری برای برآورد ES بر اساس نظریه انتظارات که مبتنی بر مینیم کردن مجموع مربعات معین-متریک خاص است، پیشنهاد شد (تیلر، ۲۰۰۸). در سال ۲۰۱۴ روش نیمه پارامتریک دیگری شامل فرآیندهای دم‌کلفت ارائه گردید (نادر نژاد و همکاران، ۲۰۱۴).

### ۳-۱ توزیع‌های پارامتری مورد بررسی

در این بخش رابطه مربوط به VaR و ES برای چهار دسته از توزیع‌های پارامتری متقارن اثبات شده است.



مهم‌ترین و شناخته‌شده‌ترین توزیع احتمالی پیوسته، توزیع نرمال است.

**تعریف ۱-۱-۳** متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نرمال با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma$  است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < +\infty \quad (۴)$$

که در آن  $-\infty < \mu < +\infty$  پارامتر مکان و  $\sigma > 0$  پارامتر شکل است.

**قضیه ۱-۱-۳** اگر  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  آنگاه

$$ES_p(X) = \mu - \frac{\sigma}{p} \phi(\Phi^{-1}(p)) \quad (۵)$$

که در آن  $\Phi(\cdot)$  و  $\phi(\cdot)$  به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

**اثبات:** ابتدا مقدار VaR را محاسبه می‌نماییم. برای این منظور فرض می‌کنیم که  $Y \sim N(0,1)$ ; در این صورت  $X = \mu + \sigma Y$

در نتیجه:

$$G(x) = P(X \leq x) = P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p$$

بنابراین

$$VaR_p(X) = G^{-1}(p) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p)$$

برای محاسبه ES با استفاده از (۴) و (۵) داریم:

$$ES_p(X) = \frac{1}{p} \int_0^p [\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)] du = \mu + \frac{\sigma}{p} \int_0^p \Phi^{-1}(u) du$$

برای محاسبه انتگرال فرار می‌دهیم  $t = \Phi^{-1}(u)$  پس  $u = \Phi(t)$  و  $du = \phi(t) dt$ ; بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$ES_p(X) = \mu + \frac{\sigma}{p} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} t \phi(t) dt = \mu + \frac{\sigma}{p} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \frac{t}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

با به کار بردن تغییر متغیر  $Z = \frac{t^2}{2}$  حاصل  $Z = \frac{t^2}{2}$  از جایگذاری این مقدار در (۸) نتیجه می‌شود

$$ES_p(X) = \mu - \frac{\sigma}{p} \phi(\Phi^{-1}(p)).$$



توزیع t-استیودنت<sup>۱</sup> در مدیریت ریسک به ویژه در مدل بندی بازده دارایی‌های شرطی وقتی که دارای دم‌های پهن‌تری نسبت به توزیع نرمال هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در سال ۱۹۸۷ بولرسلو از توزیع t-استیودنت در مدل بندی بازده نرخ ارز خارجی استفاده کرد.



**تعریف ۱-۲-۳** متغیر تصادفی X دارای توزیع t-استیودنت با n درجه آزادی است هرگاه

$$f(x) = K(n) \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} ; \quad -\infty < x < +\infty$$

که در آن  $K(n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$ . تابع توزیع مربوطه عبارت است از:

$$F(x) = \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} - \frac{\text{sign}(x)}{2} I_{\frac{n}{x^2+n}} \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

**قضیه ۱-۲-۳** فرض کنید X دارای توزیع t-استیودنت با n درجه آزادی و q چندک مرتبه p ام آن باشد؛ در این صورت

$$ES_p(X) = \frac{1}{p} \left[ -K(n) \frac{n}{n-1} \left(1 + \frac{q^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}} \right]$$

**اثبات:** فرض کنید که q چندک مرتبه p ام و در واقع جواب  $F(q) = p$  باشد. در این صورت

$$q = \text{VaR}_p(X) = \sqrt{n} \text{sign} \left( p - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{I_a^{-1} \left( \frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right)} - 1}$$

که در آن  $a = 2p$  اگر  $p < \frac{1}{2}$  و  $a = 2(1-p)$  اگر  $p \geq \frac{1}{2}$ .

برای محاسبه ES از فرمول (۳) و با قرار دادن تابع چگالی داریم:

$$ES_p(X) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^q x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

با به کار بردن تغییر متغیر  $u = 1 + \frac{x^2}{n}$  و  $xdx = \frac{n}{2} du$  می‌توان نوشت:

$$ES_p(X) = \frac{1}{p} \left[ -K(n) \frac{n}{2} \int_{1+\frac{q^2}{n}}^{+\infty} u^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right] = \frac{1}{p} \left[ -K(n) \frac{n}{n-1} \left(1 + \frac{q^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right]$$

### ۳-۳ توزیع لاپلاس

توزیع لاپلاس برای مدل بندی داده‌های متقارن که دارای منحنی فراوانی با دم‌های قطور است، به کار برده می‌شود.

**تعریف ۱-۳-۳** متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع لاپلاس (دونمایی) با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma$  است هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma$  را به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس می‌نامیم.

**قضیه ۱-۳-۳** فرض کنید که متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع لاپلاس با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma$  باشد؛ در این صورت

$$(۹) ES_p(X) = \begin{cases} \mu + \sigma[\text{Ln}(2p) - 1]; & p < \frac{1}{2} \\ \mu + \sigma - \frac{\sigma}{p} + \sigma \frac{1-p}{p} \text{Ln}(1-p) + \sigma \left(\frac{1-p}{p}\right) \text{Ln}2; & p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**اثبات:** با استفاده از تابع چگالی، تابع توزیع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) dt & ; \quad t < \mu \\ \frac{1}{2\sigma} \left\{ \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) dt + \int_{\mu}^x \exp\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right) dt \right\} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & ; \quad t \geq \mu. \end{cases}$$

با به کار بردن تغییر متغیر  $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$  در هر یک از انتگرال‌های بالا نتیجه می‌شود که

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & x \geq \mu. \end{cases}$$

معکوس تابع توزیع به سادگی به دست می‌آید. داریم:

$$F^{-1}(p) = \text{VaR}_p(X) = \begin{cases} \mu + \sigma \text{Ln}(2p) & ; \quad p < \frac{1}{2} \\ \mu - \sigma \text{Ln}[2(p-1)] & ; \quad p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

با استفاده از فرمول (۴) می‌توان نوشت:

$$ES_p(X) = \frac{1}{2} \int_0^p F^{-1}(u) du =$$

$$= \frac{1}{p} \begin{cases} \int_0^p (\mu + \sigma \text{Ln}(2u)) du & ; \quad p < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} (\mu + \sigma \text{Ln}(2u)) du + \int_{\frac{1}{2}}^p (\mu - \sigma \text{Ln}(2(1-u))) du & ; \quad p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

برای حالت  $p < \frac{1}{2}$  با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء و با انتخاب  $\text{Ln}(2u) = t$  و  $du = dv$  نتیجه می‌شود

که

$$ES_p = \mu + \sigma[\text{Ln}(2p) - 1].$$



حالت  $p \geq \frac{1}{2}$  به روش مشابه به دست می‌آید.

### ۳-۴ توزیع لجستیک

یکی دیگر از توزیع‌های متقارن پراهمیت توزیع لجستیک است. شکل توزیع لجستیک خیلی شبیه شکل توزیع نرمال است با این تفاوت که در مرکز، توزیع نرمال قله‌ای تر و دم‌های نازک‌تری نسبت به توزیع لجستیک دارد.

**تعریف ۳-۴-۱** متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع لجستیک است هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

تابع توزیع برابر است با

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

**قضیه ۳-۴-۱** اگر  $X$  دارای توزیع لجستیک با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma$  باشد آنگاه

$$ES_p(X) = \mu + \sigma \operatorname{Lnp} + \sigma \frac{1-p}{p} \operatorname{Ln}(1-p).$$

**اثبات:** معکوس تابع توزیع برابر است با  $F^{-1}(x) = \mu + \sigma \operatorname{Ln}\left(\frac{x}{1-x}\right)$  در نتیجه

$$\operatorname{VaR}_p(X) = F^{-1}(p) = \mu + \sigma \operatorname{Ln}\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

برای محاسبه  $ES$  داریم:

$$\begin{aligned} E_p(X) &= \frac{1}{p} \int_0^p \operatorname{VaR}(u) du \\ &= \frac{1}{p} \left[ \int_0^p \mu du + \sigma \int_0^p \operatorname{Ln}\left(\frac{u}{1-u}\right) du \right] \\ &= \mu + \frac{\sigma}{p} \int_0^p \operatorname{Ln} u du - \int_0^p \operatorname{Ln}(1-u) du = \mu + \frac{\sigma}{p} [I_1 - I_2]. \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم:

$$\begin{cases} I_1 = u \operatorname{Ln} u - u \Big|_0^p = p \operatorname{Lnp} - p \\ I_2 = u \operatorname{Ln} u - u \Big|_{1-p}^p = -(1-p) \operatorname{Ln}(1-p) - p. \end{cases}$$

بنابراین

$$ES_p(X) = \mu + \sigma \operatorname{Lnp} + \sigma \frac{1-p}{p} \operatorname{Ln}(1-p).$$



۴-۱ داده‌های مورد بررسی

در این مقاله، به منظور محاسبه VaR و ES از داده‌های روزانه قیمت سهام شرکت کوکاکولا در بازه زمانی اول ژانویه ۲۰۰۱ تا سی و یکم دسامبر ۲۰۱۰ استفاده شده است. داده‌ها از سایت یاهو فاینانس<sup>۱</sup> گرفته شده که شامل شش ستون از جمله تاریخ، قیمت اولیه سهام (قیمت سهام در لحظه باز شدن بازار سهام)، بالاترین قیمت و پایین‌ترین قیمت، قیمت نهایی (قیمت سهام در زمان بستن بازار سهام) و حجم معاملات می‌باشد. قیمت‌ها بر اساس دلار آمریکا هستند.



۴-۲ محاسبه ES و VaR

همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، در روش پارامتری، دقت بالا در محاسبه اندازه‌های ریسک به برازش تابع توزیع مناسب به سری بازده سهام بستگی دارد، از این رو تحلیل داده‌ها از طریق سری بازدهی سهام یعنی  $X_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$  انجام گرفته است که در آن  $P_{t-1}$  قیمت اولیه و  $P_t$  قیمت پایانی سهام است. برای بررسی همبستگی سریالی داده‌ها از آزمون دوربین و واتسون استفاده شده است که بر مبنای نتایج به دست آمده، داده‌ها فاقد همبستگی سریالی است. برای برازش تابع چگالی مناسب به سری بازده سهام از پکیج VaRES در نرم‌افزار آماری R استفاده شده است. با توجه به هیستوگرام داده‌ها، شناخته‌شده‌ترین توزیع‌های متقارن از جمله نرمال،  $t$ -استیودنت، لاپلاس و لجستیک با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی و توسط توابع موجود در VaRES به داده‌ها برازش داده شده است. بسندگی برازش‌های هر چهار توزیع، توسط آزمون یک نمونه‌ای کولموگروف-اسمیرنوف<sup>۲</sup> مورد ارزیابی قرار گرفته است. برآورد پارامترها، مقادیر معیار اطلاع آکائیک، آماره کولموگروف-اسمیرنوف و مقادیر (P - Value) برای هر چهار توزیع در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱- برآورد پارامترها، مقادیر معیار اطلاع آکائیک، آماره کولموگروف-اسمیرنوف و P - Value برای توزیع نرمال،  $t$ -استیودنت، لجستیک و لاپلاس.

	MLE	-2 log L	K-S	P-value	AIC
Normal	$\hat{\mu} = 0.0004, \hat{\sigma} = 0.110$	-۹۵۲۸/۶۵۲	۰/۰۶۸۳	۰/۰۰	-۹۵۲۴/۶۵۲
T	$\hat{n} = 24.6005$	۲۸۳۰/۵۱۷	۰/۴۸۲۹	۰/۰۰	۲۸۳۲/۵۱۷
Logestic	$\hat{\mu} = 0.0001, \hat{\sigma} = 88.016254$	۳۲۲۴۴/۴۸	۰/۵	۰/۰۰	۳۲۲۴۸/۴۸
Laplace	$\hat{\mu} = 0.0004, \hat{\sigma} = -4.7835$	-۹۶۸۱/۰۷۹	۱/۷۰۸۹	۰/۶۲	-۹۶۷۷/۰۷۹

با توجه به نتایج جدول ۱، مشاهده می‌شود که به جز توزیع لاپلاس، در توزیع‌های دیگر مقدار P - Value کمتر از مقدار ۰,۰۵ است و این به معنای این است که آزمون کولموگروف-اسمیرنوف در سطح معناداری ۰,۰۵ رد می‌شود و در نتیجه، داده‌ها به خوبی به منحنی‌های توزیع‌های مذکور برازش می‌شود.

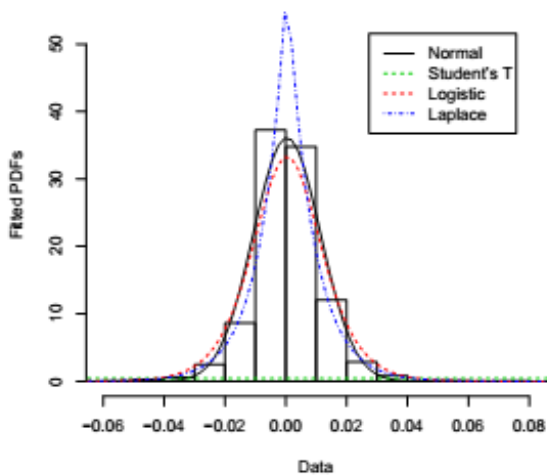
نمودارهای مربوط به هیستوگرام و توابع چگالی برازش داده شده در شکل ۱ آمده است. برای رسم این نمودارها از توابع dNormal، dT، dLogestic و dLaplace در بسته نرم‌افزاری VaRES استفاده شده است. نمودارهای مربوط به VaR و ES برای هر چهار توزیع و در سطوح مختلف p در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده است. مقادیر VaR و Es

<sup>۱</sup>Yahoo Finance

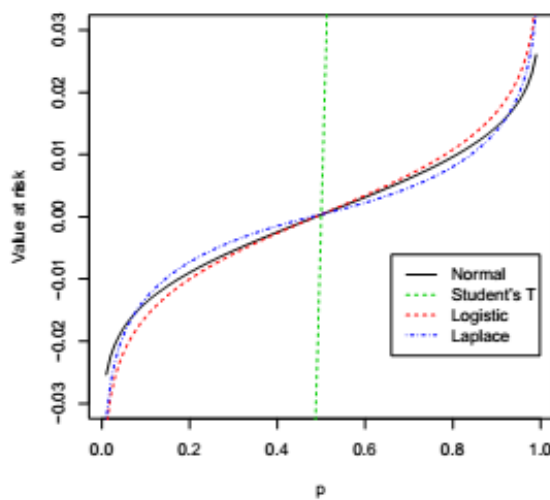
<sup>۲</sup>Kolmogorov-Smirnov



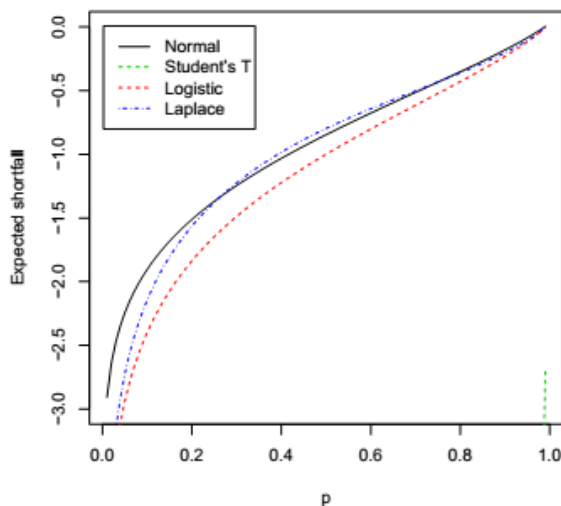
محور عمودی شکل‌های ۲ و ۳ بر مبنای روابط به‌دست‌آمده در بخش‌های ۳-۱ تا ۳-۴ برحسب مقادیر مختلف  $p$  در محور افقی محاسبه و نمودارهای مربوط به هر توزیع به رنگ خاصی رسم گردیده است.



شکل ۱- هیستوگرام و توابع چگالی برازش داده‌شده به داده‌ها.



شکل ۲- تخمین ارزش در معرض خطر برای داده‌های شرکت کوکاکولا.



شکل ۳- تخمین کسری مورد انتظار برای داده‌های شرکت کوکاکولا.



رویکرد پارامتری محاسبه VaR و Es از جمله رویکردهای مهم در مدیریت ریسک بوده که در مقاله حاضر برای چهار توزیع متقارن این دو کمیت محاسبه گردید. برای بررسی مزیت‌های این دو کمیت، داده‌های روزانه قیمت سهام شرکت کوکاکولا برای ۱۰ سال مورد بررسی قرار گرفت. همچنان که در شکل‌های و مشاهده شد، در سطوح اطمینان مختلف مقادیر ES نسبت به مقادیر VaR برای این سهام به نحو واضحی بیشتر است. این مطلب در خصوص همه توزیع‌های برازش داده‌شده صادق است. این مقدار، بیشتر بر این موضوع دلالت دارد که یک تصمیم‌گیرنده در مقام مدیریت ریسک بازار در صورتی که از VaR استفاده کند مقدار ریسک را کمتر از حد واقع در نظر می‌گیرد، یعنی در شرایط نامطلوب و غیرعادی بازار، VaR می‌تواند اطلاعات نادرستی را به دست دهد و این دقیقاً همان موضوعی است که در ادبیات مدیریت ریسک از آن به‌عنوان کاستی‌های VaR یاد شده است. در مقابل، اتکا به ES می‌تواند این اطمینان نسبی را برای تصمیم‌گیرندگان به ارمغان آورد که مقدار زیان متحمل یا همان ریسک مورد نظر را کمتر از آنچه هست در نظر نگرفته‌اند. محاسبات مربوط به کمیت‌های VaR و ES در این مقاله، معایب استفاده از کمیت VaR به‌عنوان یکی از کمیت‌های مهم در مدیریت ریسک را به‌خوبی نشان داد و در مقابل مزیت به‌کارگیری کمیت ES را مشخص نمود.

## منابع

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of banking & finance*, 26(7), 1487-1503.
- Artzner, P. (1997). Thinking coherently. *Risk*, 68-71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.
- Nadarajah, S., Zhang, B., & Chan, S. (2014). Estimation methods for expected shortfall. *Quantitative finance*, 14(2), 271-291.
- Oh, S., & Moon, S. J. (2006). Comparative analysis of portfolio risk measures based on EVT-copula approach during financial crises. *Asia-Pacific journal of financial studies*, 35(3), 175-205.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7), 1443-1471.
- Taylor, J. W. (2008). Estimating value at risk and expected shortfall using expectiles. *Journal of financial econometrics*, 6(2), 231-252.
- Yamai, Y., & Yoshida, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition, and optimization. *Monetary and economic studies*, 20(1), 87-121.