Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷

حل معکوس مسئله ۱-میانه با استفاده از آلفا برش فازی

منا خداقلی[1]، اردشیر دولتی[2*]، علی حسین زاده [1]

[1]گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

[2]گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

چکیده

مسائل مکان‌یابی تسهیلات، یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه تحقیق در عملیات و علم مدیریت به شمار می‌رود. هدف از حل این نوع مسائل، تعیین مکان مناسبی در بین نقاط تقاضا، جهت استقرار تسهیلات و مراکز خدمات رسانی است، به‌گونه‌ای که این مراکز حداکثر بازده و خدمات‌رسانی را با کمترین هزینه به سایر مشتریان متقاضی داشته باشند. از کاربردهای معروف این مسئله می‌توان به مکان‌یابی انبارها، بیمارستان‌ها، ایستگاه‌های امداد و نجات، تأسیسات نظامی، شعب بانک و ... اشاره کرد؛ اما در برخی از موارد، تسهیلات به‌صورت غیر بهینه مکان‌یابی شده‌اند و به دلایل مختلفی امکان جابه‌جایی آن‌ها وجود ندارد، در این صورت مسائل مکان‌یابی معکوس مطرح می‌شوند. یکی از مهم‌ترین این نوع مسائل، معکوس مسئله ۱-میانه می‌باشد. با توجه به اینکه در دنیای واقعی بسیاری از پارامترهای مسئله مشخص و دقیق نیستند، انگیزه‌ای شد تا در این مقاله معکوس مسئله ۱-میانه فازی را بررسی کنیم. بر اساس مفهوم آلفا-برش برای اعداد فازی مثلثی، ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به‌صورت بازه‌ای برای این مسئله در هر سطح اطمینان $\alpha \in [0,1]$ به دست می‌آوریم و سپس یک روش حل بر اساس حساب بازه‌ای و معرفی یک تابع رتبه ارائه می‌کنیم. دراین‌صورت، بر اساس این روش، حل معکوس مسئله ۱-میانه با پارامترهای فازی، با حل کلاسیک این مسئله متناظر خواهد بود. در پایان نیز به‌منظور نشان دادن کارایی روش حل پیشنهادی، یک مثال عددی ارائه کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: معکوس مسئله ۱-میانه، زیردرخت ماکسیمال، معیار بهینگی، عدد فازی مثلثی، برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی، آلفا برش، حساب بازه‌ای.

دریافت: ١٣٩٦/١٠/٦ پذیرش: ١٣٩٧/٣/٢٩

۱- مقدمه

مسائل مکان‌یابی و تحلیل موقعیت تأسیسات و تسهیلات، از مهم‌ترین مسائل حوزه تحقیق در عملیات و علم مدیریت می‌باشد که اخیراً موردتوجه محققین فراوانی قرارگرفته است. این مسئله درزمینه‌ی استقرار تسهیلات در بخش درمانی، اداری، نظامی، آموزشی، برنامه‌ریزی شهری، ایستگاه‌های آتش‌نشانی، استقرار شعب بانک و ... دارای کاربردهای بسیاری است. هدف از حل این نوع مسائل، تعیین مکان مناسبی جهت احداث مراکز خدمات‌رسانی و استقرار تسهیلات در بین نقاط تقاضا می‌باشد، به‌گونه‌ای که کار آیی این مراکز تا حد امکان بیشینه گردد و مشتریان بتوانند به سهولت و با کمترین هزینه به این تسهیلات دسترسی داشته باشند. در مسائل مکان‌یابی کلاسیک، مکان‌های بهینه جهت استقرار تسهیلات جدید، با توجه به توابع هدف مشخص می‌شود. هرکدام از این توابع هدف دارای مزایا و معایبی بوده و برای کاربردهای خاصی در نظر

* Corresponding author (E-maildolati@shahed.ac.ir)

www.journal-dmor.ir

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۷۱-۵۸

گرفته‌شده‌اند. از معروف‌ترین توابع هدف مکان‌یابی، می‌توان به مسائل ۱–میانه (گلوی،۲۰۱۰)، ۱–مرکز (نگوین و سپاسیان، ۲۰۱٦)، p–مرکز (فتحعلی، راد و شرباف، ۲۰۱٤)، p–میانه (فتحعلی، راد و شرباف، ۲۰۱٤) و میانه–مرکز (هالپرن،۱۹۷٦) اشاره کرد که در مدیریت برنامه‌ریزی شهری نیز کاربرد دارد (خداقلی و دولتی،۱۳۹۷). یکی از توابع هدف معروف که در بیشتر کاربردها ممکن است مورداستفاده قرار گیرد تابع میانه می‌باشد. درواقع میانه، رأسی (رئوسی) از گراف است که مجموع همه فاصله‌های وزنی از یک رأس مشخص را مینیمم می‌کند. مسائل مکان‌یابی به دودسته مسائل مکان‌یابی پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند. در مکان‌یابی پیوسته، تسهیلات و امکانات موردنظر می‌توانند در هر نقطه‌ای از فضای موردمطالعه استقرار یابند، اما در مسائل مکان‌یابی گسسته، تسهیلات موردنظر صرفاً باید روی نقاط موجود در فضای گسسته موردبحث قرار گیرد. به‌عنوان یک مثال کاربردی از مسائل مکان‌یابی در مدیریت شهری می‌توانیم فرض کنیم که در یک شبکه شهری، رئوس، نماینده مناطق شهری، یال‌ها نیز مسیرها یا خیابان‌های بین مناطق و وزن هر رأس میزان تقاضای مشتریان هر منطقه شهری را نشان می‌دهند. هدف از مسئله مکان‌یابی گسسته روی گراف، استقرار تسهیلات روی یکی از رئوس گراف است به‌گونه‌ای که تا حد امکان، دسترسی به این تسهیلات برای متقاضیان با حداکثر کارایی و کمترین هزینه صورت گیرد؛ اما در برخی موارد، تسهیلات به‌صورت غیر بهینه مکان‌یابی شده‌اند و به دلایل مختلفی امکان جابه‌جایی آن‌ها وجود ندارد و یا جابه‌جایی آن‌ها هزینه زیادی را ایجاد می‌کند؛ بنابراین مشتریان برای برآورده شدن نیازشان توسط تسهیلات مستقرشده در مکان‌های غیر بهینه باید متحمل هزینه بیشتری شوند. در این صورت با صرف هزینه و تغییر پارامترهای مسئله می‌توان مکان غیر بهینه استقرار تسهیلات را به یک مکان بهینه تبدیل کرد؛ اما ازآنجایی‌که برای تغییر هر پارامتر، هزینه‌ای را متحمل می‌شویم، سعی می‌شود تغییر پارامترها به‌گونه‌ای باشد که علاوه بر دست‌یابی به هدف، مجموع کل هزینه‌های حاصل از این تغییرات کمینه شود. این نوع مسائل را مسائل مکان‌یابی معکوس می‌نامند. در این مقاله، معکوس مسئله ۱–میانه را روی شبکه‌های درختی به‌عنوان یک مسئله مکان‌یابی گسسته موردبررسی قرار داده‌ایم. هدف از حل معکوس مسئله ۱– میانه، تغییر برخی از پارامترهای مسئله مانند وزن رئوس و یا وزن (طول) یال‌ها با کمترین هزینه، تحت تغییرات کران‌دار است، به‌گونه‌ای که رأس از پیش مشخص‌شده‌ای با توجه به پارامترهای تغییریافته، به یک رأس ۱–میانه تبدیل شود.

بورکارد، پلشیتشیگ[1] و ژانگ (۲۰۰٤) برای این مسئله روی شبکه درخت با وزن‌های رأسی مثبت، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای ارائه دادند. چندین سال بعد نیز گلوی (۲۰۱۰) ثابت کرد که مدل ریاضی این مسئله روی شبکه درخت یا مسیر با وزن‌های رأسی مثبت و منفی با مدل ریاضی مسئله کوله‌پشتی پیوسته معادل است که درنتیجه این مسئله در زمان خطی توسط الگوریتمی که بالاس و زمل (۱۹۸۰) ارائه دادند، قابل‌حل خواهد بود. بورکارد، پلشیتشیگ و ژانگ، (۲۰۰۸) برای این مسئله بر روی گراف دوری، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای مطرح کردند. بناب، بورکارد و علیزاده، (۲۰۱۰) معکوس مسئله ۱–میانه را روی فضای $\mathbb{R}^d$ موردمطالعه قراردادند. همچنین، بناب، بورکارد و گسنر (۲۰۱۱) معکوس مسئله p–میانه را روی شبکه با امکان تغییر طول یال‌ها بررسی نمودند. معکوس مسئله ۱–میانه تحت نرم چبیشف، فاصله همینگ تنگنایی و فاصله همینگ جمعی وزنی نیز با امکان تغییر وزن رئوس روی شبکه‌های درختی توسط گان و ژانگ (۲۰۱۲) موردبررسی قرارگرفته است. همچنین این مسئله با امکان تغییر طول یال‌ها روی شبکه‌های درختی تحت نرم خطی، نرم چبیشف و فاصله همینگ تنگنایی توسط وو و همکاران (۲۰۱۳) موردبررسی قرارگرفته است. نگوین (۲۰۱۵) نیز برای معکوس مسئله ۱–میانه روی گراف‌های بلوکی با امکان تغییر وزن رئوس، الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه نمود.

[1] Pleschiutschnig

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۵۸–۷۱

ازآنجاکه در مسئله ۱–میانه، میزان تقاضای مشتریان از مراکز خدمات‌رسانی و تسهیلات و همچنین هزینه تغییر میزان تقاضای آن‌ها مشخص و دقیق نیست و درنتیجه با عدم قطعیت روبه‌رو می‌باشد، به دست آوردن میزان دقیق تقاضای بهینه مشتریان از مراکز تسهیلات به‌دوراز واقعیت خواهد بود. در این صورت، الگوریتم‌های کلاسیک قادر به حل این‌گونه مسائل نخواهند بود. بدین منظور، ما در این مقاله، به‌منظور رفع عدم قطعیت، از روش‌های فازی برای حل معکوس مسئله ۱–میانه استفاده کرده‌ایم. در کاربردهای دنیای واقعی، پارامترها نادقیق و غیرقطعی هستند. یکی از بهترین راه‌ها برای نشان دادن عدم قطعیت، منطق فازی می‌باشد که در آن، پارامترهای مسئله فازی در نظر گرفته می‌شوند. مجموعه‌های فازی در ابتدا توسط زاده (۱۹٦۵) معرفی شد. بلمن و زاده (۱۹۷۰) تصمیم‌گیری در محیط فازی را بیان کردند. ایده بلمن و زاده در تصمیم‌گیری برای اولین بار توسط تاناکا، اوکودا و آسیا (۱۹۷۳)، در حوزه برنامه‌ریزی ریاضی به‌کاررفته شد. زیمرمن (۱۹۷٦) با فرض خطی بودن توابع عضویتی که تصمیم‌گیرنده به‌طور ذهنی تعیین می‌کند و با فرض به‌کارگیری تصمیم حداکثر سازی (بلمن و زاده، ۱۹۷۰)، نشان داد که مسائل برنامه‌ریزی خطی (LP) با آرمان‌های فازی و محدودیت‌های فازی به‌راحتی قابل‌حل هستند. یکی از مهم‌ترین کاربردهای تصمیم‌گیری فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) می‌باشد که کارهای زیادی در این زمینه انجام‌شده است. باکلی و فیورینگ (۲۰۰۰) روشی را برای پیدا کردن جواب فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی با تغییر تابع هدف به یک مسئله چندهدفه معرفی کردند. ژانگ و همکاران (۲۰۰۳) روشی را برای حل مسائل LP با ضرایب هدف فازی پیشنهاد دادند. الله ویرانلو و همکاران (۲۰۰۸) نیز روشی را بر پایه غیرفازی‌سازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (FFLP) پیشنهاد دادند. در ادامه، دهقان، هاشمی و قطعی (۲۰۰٦) یک رویکرد جدید برای پیدا کردن جواب دقیق سیستم‌های تماماً فازی از معادلات ارائه کردند. کومار، کور و سینگ (۲۰۱۱) نیز روشی را برای حل مسئله FFLP با محدودیت مساوی بیان نمودند که روش آن‌ها توسط صابری نجفی و عدالت پناه (۲۰۱۳) اصلاح شد. حسین زاده و عدالت پناه (۲۰۱٦) با استفاده از تابع رتبه و اعداد فازی L-R روشی نوین برای حل FFLP ارائه کردند.

روش آلفا–برش یک روش استاندارد برای انجام عملیات حسابی بر روی اعداد فازی می‌باشد. هلن و اوما (۲۰۱۵) روشی را برای عملیات حسابی بر روی اعداد فازی پنتاگون و محاسبه تابع رتبه این اعداد فازی ارائه دادند. محققین دیگری مانند سودا و ویاجالاکسمی (۲۰۱٦) و کامبل (۲۰۱۷) نیز درزمینه‌ی روش آلفا–برش مقالاتی را ارائه کردند. درزمینه‌ی مدل‌سازی مکان‌یابی با داده‌های غیرقطعی نیز با استفاده از منطق فازی کارهای زیادی انجام‌شده است. کنوس، ایوورا و لیرن (۲۰۰۱) روشی را برای حل مسئله p–میانه پیشنهاد کرده‌اند؛ در مقاله کنوس، ایوورا و لیرن (۲۰۰۸) تعدادی تکنیک تحلیل حاشیه‌ای[1] برای مطالعه اینکه چگونه توابع عضویت بر روی جواب‌ها تأثیر می‌گذارد، بیان‌شده است. پرز، وگا و وردگای (۲۰۰٤) مسائل مکان‌یابی با وزن طول‌های فازی را در نظر گرفته و روشی برای حل آن ارائه داده‌اند. کوتانگیلا- مایویا و وردگای (۲۰۰۵) نیز یک فرمول‌بندی برای یافتن جواب بهینه مسئله p–میانه در محیط فازی ارائه دادند. همچنین، تالشیان و فتحعلی (۲۰۱٦) به حل مسئله p–میانه با تبدیل به حالت Crisp[2] پرداخته‌اند.

ساختار مقاله به‌صورت زیر شرح داده می‌شود: در بخش دوم، مفاهیم پایه‌ای از نظریه مجموعه فازی و آلفا برش فازی را مطالعه می‌کنیم. در بخش سوم، مدل ریاضی معکوس مسئله ۱–میانه با امکان تغییر وزن رئوس را روی شبکه‌های درختی بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، بر اساس مفهوم آلفا–برش برای یک عدد فازی مثلثی، یک برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به‌صورت بازه‌ای برای معکوس مسئله ۱–میانه در هر سطح اطمینان $\alpha \in [0,1]$، به دست می‌آوریم و سپس یک روش حل بر اساس حساب بازه‌ای ارائه می‌کنیم.

---

[1] Marginal

[2] قطعی

۲- مقدمات و تعاریف اولیه

در این قسمت برخی مفاهیم پایه‌ای از نظریه مجموعه فازی و مفاهیم آلفا برش مورداستفاده در مقاله‌های عزتی، خرم و عنایتی (۲۰۱۳)، کاور و کومار (۲۰۱٦)، سودا و آنیتا (۲۰۱۵) و دوتا، بروآ و علی (۲۰۱۱) بیان می‌کنیم. برای نشان دادن یک مجموعه فازی، روش‌های مختلفی رایج است. یک روش، به‌کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است.

تعریف ۲-۱ مجموعه فازی: فرض کنید A یک مجموعه باشد، مجموعه $A=\{(x,\mu_A(x))\,|\,x\in A,\mu_A(x):X\to[0,1]\}$ را یک مجموعه فازی می‌گویند. $\mu_A(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی A می‌باشد.

تعریف ۲-۲ اعداد فازی[1] و ویژگی‌های آن: عدد فازی A، یک مجموعه فازی روی خط اعداد حقیقی است که در دو شرط نرمال بودن و تحدّب صدق نماید. ازآنجاکه اکثر مجموعه‌های فازی شرایط نرمال بودن و تحدّب را برآورده می‌سازند، بنابراین اعداد فازی مرسوم‌ترین نوع مجموعه‌های فازی می‌باشند. اعداد فازی دارای انواع مختلفی هستند. یکی از انواع اعداد فازی، عدد فازی مثلثی است که در ادامه ویژگی‌های آن موردبحث قرار می‌گیرد.

تعریف ۲-۳ عدد فازی مثلثی: یک عدد فازی $\tilde{A}=(a,b,c)$ یک عدد فازی مثلثی است به‌طوری‌که a شاخه راست، b میانه و c شاخه راست آن می‌باشد. یک عدد فازی مثلثی مثبت است اگر و فقط اگر $a\geq 0$.

تعریف ۲-٤ عملگرهای حسابی اعداد مثلثی: عملگرهای حسابی بین دو عدد فازی مثلثی، روی یک مجموعه کلی از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

فرض کنید $\tilde{A}=(a,b,c)$ و $\tilde{B}=(e,f,g)$ دو عدد مثلثی باشند آنگاه:

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(a,b,c)\oplus(e,f,g)=(a+e,b+f,c+g)$$
$$-A=-(a,b,c)=(-a,-b,-c)$$
$$A\ominus B=(a,b,c)\ominus(e,f,g)=(a-e,b-f,c-g)$$
$$A\otimes\tilde{B}=\begin{cases}(ae,bf,cg), & a\geq 0\\ (ag,bf,cg), & a<0,c\geq 0\\ (ag,bf,ce), & c<0\end{cases}.$$

تعریف ۲-۵ تابع عضویت برای اعداد فازی مثلثی: اگر $\tilde{A}=(a,b,c)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، در این صورت تابع عضویت این عدد فازی به‌صورت زیر می‌باشد:

[1]Fuzzy Numbers

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۵۸-۷۱

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \frac{c-x}{c-b} & b\le x\le c\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

تعریف ۲-۶ تابع رتبه برای اعداد فازی: فرض کنید $F(\mathbb{R})$ یک مجموعه از اعداد فازی تعریف‌شده روی مجموعه اعداد حقیقی باشد. در این صورت $R:F(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ یک تابع رتبه است که هر عدد فازی را به محور حقیقی (که ترتیب در آن موجود است) نگاشت می‌کند.

تعریف ۲-۷ حساب بازه‌ای: عملگرهای حسابی بین دو بازه را به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید $[a,b]$ و $[c,d]$ دو بازه روی مجموعه اعداد حقیقی باشند، در این صورت:

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$$
$$[a,b].[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]$$
$$\frac{[a,b]}{[c,d]}=[\min(\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}),\max(\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d})]\qquad s.t.\quad 0\notin[c,d]$$

هر مجموعه فازی به‌صورت کامل و منحصربه‌فرد با آلفا-برش‌های آن تعریف می‌شود. آلفا-برش هر عدد فازی، به ازای هر مقدار آلفا در بازه $[0,1]$، بازه‌های بسته از اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۲-۸ آلفا-برش: فرض کنید A یک مجموعه فازی روی مجموعه X باشد. در این صورت، آلفا برش این مجموعه به‌صورت $A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_A(x)\ge\alpha\}$ تعریف می‌شود.

اگر $\tilde{A}=(a,b,c)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، در این صورت آلفا برش این عدد فازی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha=[(b-a)\alpha+a,c-(c-b)\alpha]$$

تعریف ۲-۹ عملگر حسابی اعداد فازی با استفاده از روش آلفا-برش:

فرض کنید $\tilde{A}=(a,b,c)$ و $\tilde{B}=(p,q,r)$ اعداد فازی مثلثی باشند. در این صورت، آلفا-برش برای اعداد فازی A و $\tilde{B}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha=[(b-a)\alpha+a,c-(c-b)\alpha],\ B_\alpha=[(q-p)\alpha+p,r-(r-q)\alpha]$$

و عملگرهای حسابی آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha+B_\alpha=[a+p+(b-a+q-p)\alpha,c+r-(c-b+r-q)\alpha]$$

$$A_\alpha-B_\alpha=[a-r+(b-a+r-q)\alpha,c+(c-p)-(c-b+q-p)\alpha]$$

$$A_\alpha*B_\alpha=[((b-a)\alpha+a)*((q-p)\alpha+p),(c-(c-b)\alpha)*(r-(r-q)\alpha)]$$

$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha}=[\frac{(b-a)\alpha+a}{r-(r-q)\alpha},\frac{c-(c-b)\alpha}{(q-p)\alpha+p}]$$

۳- معکوس مسئله ۱-میانه

یک شبکه درختی به‌صورت $T=(V,E)$ را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که $V=\{v_1,...,v_n\}$ مجموعه متناهی از رئوس، $E=\{e_1,...,e_m\}$ مجموعه یال‌های درخت T است. همچنین فرض کنید $W=\{w_1,...,w_n\}$ مجموعه وزن قطعی رئوس درخت T می‌باشد. هر یال $e_j \in E$ دارای طول مثبت l_j و هر رأس $v_i \in V$ دارای وزن قطعی $w_i \in \mathbb{R}^+$ است. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره $u,v \in V$، با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود. فرض می‌کنیم $W(T)$ مجموع وزن همه رئوس درخت باشد، یعنی $W(T):=\sum_{i=1}^{n} w_i$.

تعریف ۳-۱ ۱-میانه رأسی است که مجموع همه فاصله‌های وزنی از آن تا سایر رئوس مینیمم است؛ بنابراین رأس $v_s \in V$ یک ۱- میانه درخت T است هرگاه:

$$\sum_{v_j \in V} w_j d(v_s,v_j) \leqslant \sum_{v_j \in V} w_j d(v_i,v_j) \qquad \forall v_i \in V$$

هدف از حل معکوس مسئله ۱-میانه با تغییر وزن رئوس روی درخت‌ها، اصلاح وزن رئوس با کمترین هزینه به‌صورت w^* تحت تغییرات کران‌دار است، به گونه ای‌که رأس از پیش مشخص‌شده v_s که نسبت به مجموعه وزن رئوس داده‌شده w ۱-میانه نیست، به یک رأس ۱-میانه درخت تغییریافته، تبدیل شود؛ بنابراین مدل ریاضی این مسئله به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^{n} c_j |w_j^* - w_j| \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} w_j^* d(v_s, v_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} w_j^* d(v_i, v_j) \qquad \forall v_i \in V \\ & \underline{w}_j \leqslant w_j^* \leqslant \overline{w}_j \qquad j=1,...,n \end{aligned} \tag{1}$$

به‌طوری‌که $\underline{w}_j$ و $\overline{w}_j$ به ترتیب کران پایین و کران بالای وزن رئوس را نشان می‌دهد و c_j هزینه تغییر هر واحد از وزن رئوس v_j می‌باشد.

اگر افزایش و کاهش وزن هر رأس $v_j \in V$ را به ترتیب با p_j و q_j نشان دهیم، آنگاه وزن هر رأس از درخت داده‌شده به‌صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$w_j^* = w_j + p_j - q_j \quad j=1,...,n.$$

فرض کنید رأس v_s، رأس از پیش مشخص‌شده‌ای از درجه k باشد، در این صورت زیردرخت‌های ماکسیمال در $T-v_s$ را با $T_1,...,T_k$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $W(T_i):=\sum_{v_j \in T_i} w_j$ مجموع وزن هر زیردرخت را بیان می‌کند.

لم ۳-۱ (بورکارد، پلشیتشیگ و ژانگ، ۲۰۰٤). (شرط بهینگی ۱-میانه بودن یک رأس): درخت $T=(V,E)$ را در نظر بگیرید. رأس v_s از درجه k، یک ۱-میانه درخت T است، اگر و فقط اگر:

$$W(T_i) \leqslant \frac{W(T)}{2} \qquad \forall\ i=1,...,k$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۵۸-۷۱

لم ۳–۲ (بورکارد، پلشیتشیگ و ژانگ، ۲۰۰٤). فرض کنید رأس $v_m \in V$، نسبت به وزن‌های داده‌شده w_i، ۱– میانه درخت T باشد و $v_s \in V$ ($v_s \neq v_m$) رأسی از درجه k باشد که نسبت به w_i ها ۱– میانه نیست، در این صورت، فقط زیردرخت ماکسیمال T_k در $T - v_s$ که شامل رأس v_m است، ناقض شرط بهینگی است.

لم ۳–۳ (بورکارد، پلشیتشیگ و ژانگ، ۲۰۰٤). فرض کنید $W^*(T_1) \leqslant \frac{W^*(T)}{2}, \ldots, W^*(T_{k-1}) \leqslant \frac{W^*(T)}{2}$ در این صورت، رأس $v_s \in V$ ۱– میانه درخت T نسبت به وزن‌های اصلاح‌شده است اگر و فقط اگر:

$$D := W^*(T_k) - \frac{W^*(T)}{2} = 0$$

بازنویسی مدل ریاضی این مسئله که توسط بورکارد، پلشیتشیگ و ژانگ (۲۰۰٤) و گلوی (۱۰۲۰) ارائه‌شده است، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & Min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = b \\ & x_j \leqslant \bar{x}_j \quad \forall\ j = 1,\ldots,n \\ & x_j \geqslant 0 \quad \forall\ j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{۲}$$

که c_j و $b := 2D = 2W(T_k) - W(T)$ مثبت هستند و

$$x_j := \begin{cases} q_j & v_j \in T_k \\ p_j & v_j \notin T_k \end{cases}, \qquad \bar{x}_j := \begin{cases} \bar{p}_j & x_j = p_j \\ \bar{q}_j & x_j = q_j \end{cases}, \qquad c_j := \begin{cases} c_j^- & v_j \in T_k \\ c_j^+ & v_j \notin T_k \end{cases}.$$

$\bar{x}_j$ کران بالای تغییرات وزن رئوس را نشان می‌دهد. همچنین c_j^+ هزینه افزایش وزن رئوس و c_j^- هزینه کاهش وزن رئوس را نشان می‌دهد.

مسئله برنامه‌ریزی خطی (۲) یک مسئله کوله‌پشتی پیوسته است که توسط الگوریتم بالاس و زمل (۱۹۸۰) در زمان خطی قابل‌حل است؛ بنابراین معکوس مسئله ۱–میانه روی درخت با امکان تغییر وزن رئوس تحت نرم خطی، در زمان $O(n)$ قابل‌حل می‌باشد؛ بنابراین درنهایت پس از به دست آوردن مقدار x_jها، وزن‌های بهینه رئوس به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$w_j^* := \begin{cases} w_j - x_j & v_j \in T_k \\ w_j + x_j & v_j \notin T_k \end{cases}$$

۴- مدل‌سازی معکوس مسئله ۱-میانه با آلفا-برش فازی و الگوریتم حل آن

ازآنجایی‌که در دنیای واقعی، پارامترهای مسئله، مقادیر دقیق و قطعی ندارند، انگیزه‌ای شد تا در این قسمت از مقاله معکوس مسئله ۱–میانه را به‌صورت غیرقطعی تحت نظریه مجموعه فازی بررسی نماییم. یک شبکه درخت غیرقطعی به‌صورت $\bar{T} = (V, E)$ را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعه متناهی از رئوس و $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ مجموعه یال‌های درخت $\bar{T}$ است. فرض کنید $\tilde{W} = \{\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n\}$ مجموعه اعداد فازی مثلثی و نشان‌دهنده وزن غیرقطعی

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۵۸-۷۱

رئوس درخت $\overline{T}$ باشد. هر یال $e_j \in E$ دارای طول مثبت l_j و هر رأس $v_i \in V$ دارای وزن فازی $w_i \in TF^+$ است. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره $u,v \in V$، با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود. هدف از حل معکوس مسئله ۱-میانه با تغییر وزن رئوس روی درخت‌ها، اصلاح وزن رئوس با کمترین هزینه به‌صورت w^*، تحت تغییرات کران‌دار است، به گونه ای‌که رأس از پیش مشخص‌شده v_s که نسبت به مجموعه وزن رئوس داده‌شده $\tilde{W}$، ۱-میانه نیست، به یک رأس ۱-میانه درخت تغییریافته، تبدیل شود. اکنون می‌خواهیم این مسئله را در حالتی که تمامی پارامترها اعداد فازی مثبت هستند موردمطالعه قرار دهیم؛ بنابراین فرض کنید که هزینه افزایش وزن رئوس، هزینه کاهش وزن رئوس، کران بالا و کران پایین تغییر وزن رئوس به ترتیب مجموعه اعداد فازی مثلثی به‌صورت $C^+ = \{\tilde{c}_1^+,...,\tilde{c}_n^+\}$، $C^- = \{\tilde{c}_1^-,...,\tilde{c}_n^-\}$، $\overline{W} = \{\overline{w}_1,...,\overline{w}_n\}$ و $\underline{W} = \{\underline{w}_1,...,\underline{w}_n\}$ باشند. در ادامه، معکوس مسئله ۱-میانه تماماً فازی را مدل بندی می‌کنیم. یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max\,(Min)\ \ C^T \otimes X \\
& s.t. \quad A \otimes X = B \\
& \qquad X, A, C, B \in F^+
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

به‌طوری‌که $\boldsymbol{C}^T = \left[\tilde{\boldsymbol{c}}_j\right]_{1\times n}, \boldsymbol{X} = \left[\tilde{\boldsymbol{x}}_j\right]_{n\times 1}, \boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_{ij}\right]_{m\times n}, \boldsymbol{B} = \left[\tilde{\boldsymbol{b}}_i\right]_{m\times 1}$.

بنابراین با توجه به مدل (2) و (3)، مدل ریاضی معکوس مسئله ۱-میانه تماماً فازی مثلثی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Min \sum_{j=1}^{n} (\tilde{c}_j \otimes x_j) \\
& s.t. \ \sum_{J=1}^{n} x_j = b \\
& x_j \leq \overline{x}_j \\
& \tilde{c}_j, x_j, b, \overline{x}_j \in TF^+ \qquad \forall j
\end{aligned}
\tag{٤}
$$

مدل فوق معادل است با مدل زیر:

$$
\begin{aligned}
& Min \sum_{j=1}^{n} ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}) \otimes (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})) \\
& s.t. \ \sum_{J=1}^{n} (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) = (b_1, b_2, b_3) \\
& (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) \leq (\overline{x}_{j1}, \overline{x}_{j2}, \overline{x}_{j3}) \qquad \forall j \\
& x_{j1} \geq 0 \qquad \forall j \\
& x_{j2} - x_{j1} \geq 0 \qquad \forall j \\
& x_{j3} - x_{j2} \geq 0 \qquad \forall j
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

حال برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (۵)، الگوریتمی مبتنی بر روش آلفا-برش ارائه می‌نماییم و برای هر سطح اطمینان $\alpha \in [0,1]$ جواب بهینه به دست می‌آوریم. شکل کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای مدل (۵) در هر سطح اطمینان $\alpha \in [0,1]$ مبتنی بر روش آلفا-برش به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$Min \sum_{j=1}^{n}(c_{j\alpha}\otimes x_{j_\alpha})$$

$$s.t. \quad \sum_{J=1}^{n} x_{j_\alpha} = b_\alpha$$

$$x_{j_\alpha} \le \overline{x}_{j\alpha} \qquad (٦)$$

$$x_{j1} \ge 0 \qquad \forall j$$

$$x_{j2} - x_{j1} \ge 0 \qquad \forall j$$

$$x_{j3} - x_{j2} \ge 0 \qquad \forall j$$

به‌طوری‌که b_α، $c_{j\alpha}$، $\overline{x}_{\alpha j}$ و $x_{\alpha j}$ به‌صورت آلفا–برش می‌باشند. مدل فوق، یک مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای برای $\alpha \in [0,1]$ است که با توجه به الگوریتم‌های کلاسیک قابل‌حل نمی‌باشد. در ادامه، الگوریتمی را جهت تبدیل مدل (٦) به یک مدل کلاسیک و قطعی ارائه می‌کنیم.

الگوریتم پیشنهادی. در این قسمت، برای معکوس مسئله ۱–میانه با پارامترهای فازی، الگوریتمی تحت چارچوب نظریه مجموعه‌های فازی مبتنی بر روش آلفا–برش ارائه می‌کنیم:

ورودی:

- درخت غیرقطعی $\overline{T} = (V, E)$ با مجموعه رئوس $V = \{v_1,...,v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{e_1,...,e_m\}$.
- مجموعه اعداد فازی مثلثی $W = \{w_1,...,w_n\}$ به‌عنوان مجموعه وزن رئوس و مجموعه اعداد فازی مثلثی $\overline{W} = \{\overline{w}_1,...,\overline{w}_n\}$ و $\underline{W} = \{\underline{w}_1,...,\underline{w}_n\}$ به ترتیب به‌عنوان کران بالا و کران پایین تغییر وزن رئوس.
- مجموعه اعداد فازی مثلثی $C^+ = \{\tilde{c}_1^+,...,\tilde{c}_n^+\}$ و $C^- = \{\tilde{c}_1^-,...,\tilde{c}_n^-\}$ به‌عنوان هزینه افزایش و هزینه کاهش وزن رئوس.
- رأس مشخص‌شده $v_s \in V$ با درجه k.

گام ۱. ابتدا وزن کل درخت را با استفاده از اعمال حسابی جمع اعداد فازی مثلثی به دست می‌آوریم:

$$W(\overline{T}) = \sum_{j=1}^{n} w_j = (x, y, z)$$

گام ۲. وزن هر زیر درخت در $\overline{T} - v_s$ را با استفاده از اعمال حسابی جمع اعداد فازی مثلثی به دست می‌آوریم:

$$W(\overline{T}_i) = \sum_{v_j \in T_i} w_j = (p_i, q_i, r_i)$$

گام ۳. آلفا–برش نصف وزن کل درخت غیرقطعی و وزن هر زیر درخت غیرقطعی را برای هر $\alpha \in [0,1]$ به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{W(\overline{T})_\alpha}{2} = [\frac{(y-x)\alpha + x}{2}, \frac{z-(z-y)\alpha}{2}]$$

$$W(\overline{T}_i)_\alpha = [(q_i - p_i)\alpha + p_i, r_i - (r_i - q_i)\alpha]$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۵۸-۷۱

گام ٤. رتبه بازه‌های به‌دست‌آمده در گام ۳ را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

در این مقاله ما یک تابع رتبه جدید، تحت عنوان رتبه میانگین برای بازه $[a,b]$ به‌صورت زیر ارائه می‌کنیم:

$$R([a,b]) = \frac{a+b}{2},$$

در این صورت رتبه بازه‌های به‌دست‌آمده برای وزن درخت و هر زیر درخت به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$R(W(\bar{T})_\alpha) = \frac{(2y-x-z)\alpha + x + z}{2}$$

$$R(\frac{W(\bar{T}_i)_\alpha}{2}) = \frac{(2q_i - p_i - r_i)\alpha + p_i + r_i}{4}.$$

گام ۵. اگر برای $\alpha \in [0,1]$ و هر زیر درخت $\bar{T}_i$ داشته باشیم $R(W(\bar{T}_i)_\alpha) \le R(\frac{W(\bar{T}_i)_\alpha}{2})$، آنگاه متوقف می‌شویم، وزن‌های فعلی بهینه هستند، در غیر این صورت طبق لم ۲ تنها زیر درختی که شرط بهینگی لم ۱،۳ را نقض می‌کند با $\bar{T}_k$ نمایش می‌دهیم.

گام ٦. مقدار b برای $\alpha \in [0,1]$ در مدل (٤) را با توجه به گام ٤ به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$b = 2(R(W(\bar{T}_k)_\alpha) - R(\frac{W(\bar{T})_\alpha}{2}))$$

گام ۷. کران بالای تغییرات وزن رئوس را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$R(\bar{x}_{j_\alpha}) = \begin{cases} R(w_{j_\alpha}) - R(\underline{w}_{j_\alpha}) & v_j \in \bar{T}_k \\ R(\bar{w}_{j_\alpha}) - R(w_{j_\alpha}) & v_j \notin \bar{T}_k \end{cases}$$

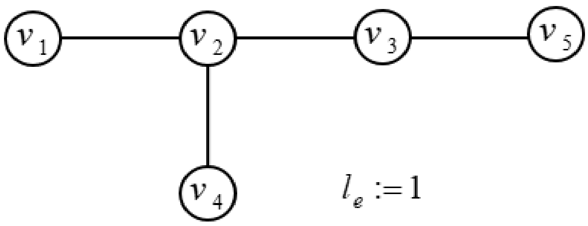
گام ۸. با توجه به گام‌های فوق، مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی و کلاسیک متناظر با مدل (٦) به‌صورت مدل زیر فرموله می‌شود؛ به‌طوری‌که این مدل برای هر $\alpha \in [0,1]$ مقدار بهینه و جواب بهینه را توسط الگوریتم پیشنهادی (بالاس و زمل، ۱۹۸۰) در زمان خطی به دست می‌آورد.

$$\begin{aligned}
&Min\ R(\sum_{j=1}^{n}(c_{j\alpha} \otimes x_{j_\alpha})) \\
&s.t.\ R(\sum_{J=1}^{n} x_{j_\alpha}) = b \\
&R(x_{j_\alpha}) \le R(\bar{x}_{j\alpha}) \qquad \forall j \\
&x_{j1} \ge 0 \qquad \forall j \\
&x_{j2} - x_{j1} \ge 0 \qquad \forall j \\
&x_{j3} - x_{j2} \ge 0 \qquad \forall j
\end{aligned} \tag{۷}$$

۵- مثال عددی

در این قسمت جهت فهم بهتر الگوریتم پیشنهادی مثالی را ارائه می‌نماییم.

مثال ۱. شبکه درختی رسم شده در شکل ۱ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم طول تمامی یال‌ها برابر با یک باشد.



شکل ۱- شبکه درختی مثال ۱.

هم‌چنین وزن رئوس، کران بالا و کران پایین وزن رئوس و هزینه‌های تغییر وزن رئوس در جدول ۱ لیست شده است. در این مثال فرض کرده‌ایم که هزینه‌های افزایش و کاهش وزن رئوس یکسان باشد. می‌خواهیم وزن رئوس را با کمترین هزینه تغییر دهیم به‌گونه‌ای که رأس v_2 یک رأس ۱-میانه درخت شکل ۱ شود.

جدول ۱- لیست مجموعه اعداد فازی مثلثی متناظر با شبکه درختی مثال ۱.

j	1	2	3	4	5
w_j	(2,3,4)	(4,5,7)	(3,6,9)	(2,3,5)	(6,7,9)
$\tilde{c}_j$	(2,4,7)	(2,5,7)	(1,2,4)	(3,4,7)	(3,5,8)
$\overline{w}_j$	(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,2,3)	(1,2,4)
$\underline{w}_j$	(3,4,6)	(7,8,9)	(9,10,12)	(3,6,8)	(5,7,12)

برای $\alpha = 0.2$ الگوریتم پیشنهادی را اجرا می‌کنیم:

گام ۱. محاسبه وزن کل درخت: $W(T) = \sum_{j=1}^{5} w_j = (17, 24, 34)$

گام ۲. محاسبه وزن هر زیر درخت:

$$\tilde{W}(\overline{T}_1) = \tilde{w}_1 = (2,3,4)$$
$$W(\overline{T}_2) = w_4 = (3,4,7)$$
$$W(\overline{T}_3) = w_3 + w_5 = (2,4,9)$$

گام ۳. آلفا-برش وزن کل درخت و وزن هر زیر درخت:

$$\frac{W(\overline{T})_\alpha}{2} = [\frac{7\alpha+17}{2}, \frac{34-10\alpha}{2}]$$
$$W(\overline{T}_1)_\alpha = [\alpha+2, 4-\alpha]$$
$$W(\overline{T}_2)_\alpha = [\alpha+2, 5-2\alpha]$$
$$W(\overline{T}_3)_\alpha = [4\alpha+9, 18-5\alpha]$$

گام ٤. محاسبه رتبه بازه‌های به‌دست‌آمده در گام قبل:

$$
\begin{aligned}
&R(\frac{W(\overline{T})_\alpha}{2}) = \frac{51-3\alpha}{4} \overset{\alpha=0.2}{=} 12.6 \\
&R(W(\overline{T}_1)_\alpha) = 3 \\
&R(W(\overline{T}_2)_\alpha) = 3.4 \\
&R(W(\overline{T}_3)_\alpha) = 13.4
\end{aligned}
$$

گام ٥. پیدا کردن زیر درختی که شرط بهینگی را نقض می‌کند:

چون $R(W(\overline{T}_3)_\alpha) \geq R(\frac{W(\overline{T})_\alpha}{2})$؛ بنابراین زیر درخت $\overline{T}_3$ شرط بهینگی را خدشه‌دار می‌کند.

گام ٦. محاسبه مقدار b:

$$
b = 2(R(W(\overline{T}_k)_\alpha) - R(\frac{W(\overline{T})_\alpha}{2})) \overset{\alpha=0.2}{=} 2(13.4-12.6) = 1.6
$$

گام ٧. محاسبه کران بالای تغییرات وزن رئوس:

$$
\begin{aligned}
&R(\overline{x}_{1_\alpha}) = R(\overline{w}_{1_\alpha}) - R(w_{1_\alpha}) = \frac{3-\alpha}{2} \overset{\alpha=0.2}{=} 1.4 \\
&R(\overline{x}_{2_\alpha}) = R(\overline{w}_{2_\alpha}) - R(w_{2_\alpha}) = \frac{5+\alpha}{2} \overset{\alpha=0.2}{=} 2.6 \\
&R(\overline{x}_{3_\alpha}) = R(w_{3_\alpha}) - R(\underline{w}_{3_\alpha}) = \frac{6+2\alpha}{2} \overset{\alpha=0.2}{=} 3.2 \\
&R(\overline{x}_{4_\alpha}) = R(\overline{w}_{4_\alpha}) - R(w_{4_\alpha}) = \frac{4+2\alpha}{2} \overset{\alpha=0.2}{=} 2.2 \\
&R(\overline{x}_{5_\alpha}) = R(w_{5_\alpha}) - R(\underline{w}_{5_\alpha}) = 5
\end{aligned}
$$

گام ٨. حل مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی و کلاسیک زیر:

$$
\begin{aligned}
&Min\ R(\sum_{j=1}^{5}(c_{j\alpha} \otimes x_{j_\alpha})) \\
&s.t.\ \ R(\sum_{J=1}^{5} x_{j_\alpha}) = 1.6 \\
&R(x_{j_\alpha}) \leq R(\overline{x}_{j\alpha}) \qquad \forall j = 1,\dots,5 \\
&x_{j1} \geq 0 \qquad \forall j = 1,\dots,5 \\
&x_{j2} - x_{j1} \geq 0 \qquad \forall j = 1,\dots,5 \\
&x_{j3} - x_{j2} \geq 0 \qquad \forall j = 1,\dots,5
\end{aligned}
$$

با حل مدل فوق توسط نرم‌افزار لینگو، جواب‌های بهینه و مقدار بهینه به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۷۱-۵۸

مقدار بهینه: 3.84

جواب بهینه:

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = (0,0,0)$$
$$x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}) = (1.6,1.6,1.6)$$

بنابراین، وزن‌های بهینه به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$w_1^* = w_1, \quad w_2^* = w_2, \quad w_4^* = w_4, \quad w_5^* = w_5$$
$$w_3^* = w_3 - x_3 = (1.4,1.4,1.4)$$

با تکرار این فرآیند، مقدار بهینه و جواب بهینه در برخی از سطوح اطمینان در جدول ۲ لیست شده‌اند.

جدول ۲- لیست جواب بهینه و مقدار بهینه مثال ۱ برای برخی از سطوح اطمینان.

α	مقدار بهینه	جواب بهینه x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.2	3.84	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.6,1.6,1.6)	(0,0,0)	(0,0,0)
0.4	3.91	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.7,1.7,1.7)	(0,0,0)	(0,0,0)
0.6	3.96	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.8,1.8,1.8)	(0,0,0)	(0,0,0)
0.8	3.99	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.9,1.9,1.9)	(0,0,0)	(0,0,0)

۶- نتیجه‌گیری

هدف از حل مسائل بهینه‌سازی معکوس، تغییر پارامترهای مسئله با کمترین هزینه است به‌گونه‌ای که جواب شدنی از پیش مشخص‌شده‌ای به یک جواب بهینه از مسئله تغییریافته تبدیل شود. ازآنجاکه در دنیای واقعی، با عدم قطعیت و ابهام در پارامترها روبه‌رو هستیم، در این مقاله، یکی از مسائل مکان‌یابی معکوس تحت عنوان معکوس مسئله ۱-میانه را تحت چارچوب نظریه مجموعه فازی موردبررسی قراردادیم و روشی را مبتنی بر روش آلفا-برش جهت حل این مسئله ارائه نمودیم؛ به‌طوری‌که روش پیشنهادی برای هر سطح اطمینان $\alpha \in [0,1]$ جواب بهینه به دست آورد.

منابع

خداقلی، منا و دولتی، اردشیر. (۱۳۹۷). کاربرد مسائل مکان‌یابی در برنامه‌ریزی شهری. پنجمین همایش ریاضیات و علوم انسانی (ریاضی مالی).

Allahviranloo, T., Lotfi, F. H., Kiasary, M. K., Kiani, N. A., & Alizadeh, L. (2008). Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function. *Applied mathematical sciences*, *2*(1), 19-32.

Balas, E., & Zemel, E. (1980). An algorithm for large zero-one knapsack problems. *Operations research*, *28*(5), 1130-1154.

Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, *17*(4), B-141.

Bonab, F. B., Burkard, R. E., & Alizadeh, B. (2010). Inverse median location problems with variable coordinates. *Central european journal of operations research*, *18*(3), 365-381.

Bonab, F. B., Burkard, R. E., & Gassner, E. (2011). Inverse p-median problems with variable edge lengths. *Mathematical methods of operations research*, *73*(2), 263-280.

Buckley, J. J., & Feuring, T. (2000). Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming. *Fuzzy sets and systems*, *109*(1), 35-53.

Burkard, R. E., Pleschiutschnig, C., & Zhang, J. (2004). Inverse median problems. *Discrete optimization*, *1*(1), 23-39.

Burkard, R. E., Pleschiutschnig, C., & Zhang, J. (2008). The inverse 1-median problem on a cycle. *Discrete optimization*, *5*(2), 242-253.

Canós, M. J., Ivorra, C., & Liern, V. (2001). The fuzzy p-median problem: A global analysis of the solutions. *European journal of operational research*, *130*(2), 430-436.

Canós, M. J., Ivorra, C., & Liern, V. (2008). Marginal analysis for the fuzzy p-median problem. *European journal of operational research*, *191*(1), 264-271.

Dehghan, M., Hashemi, B., & Ghatee, M. (2006). Computational methods for solving fully fuzzy linear systems. *Applied mathematics and computation*, *179*(1), 328-343.

Dutta, P., Boruah, H., & Ali, T. (2011). Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study. *International journal of latest trends in computing*, *2*(1), 99-107.

Ezzati, R., Khorram, E., & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. *Applied mathematical modelling*, *39*(12), 3183-3193.

Fathali, J., Rad, N. J., & Sherbaf, S. R. (2014). The p-median and p-center Problems on Bipartite Graphs. *Iranian journal of matematical sciences and informatics*, *9*(2), 37-43.

Galavii, M. (2010). The inverse 1-median problem on a tree and on a path. *Electronic notes in discrete mathematics*, *36*, 1241-1248.

Guan, X., & Zhang, B. (2012). Inverse 1-median problem on trees under weighted Hamming distance. *Journal of global optimization*, *54*(1), 75-82.

Halpern, J. (1976). The location of a center-median convex combination on an undirected tree. *Journal of regional science*, *16*(2), 237-245.

Helen, R., & Uma, G. (2015). A new operation and ranking on Pentagon Fuzzy Numbers. *International journal of mathematical sciences and applications*, *5*(2), 341-346.

Hosseinzadeh, A., & Edalatpanah, S. A. (2016). A new approach for solving fully fuzzy linear programming by using the lexicography method. *Advances in fuzzy systems*, *4*.

Kamble, A. J. (2017). Some Notes on Pentagonal Fuzzy Numbers. *International journal of fuzzy mathematical archive*, *13*(2),113-121.

Kaur, J., & Kumar, A. (2016). *An Introduction to Fuzzy Linear Programming Problems*. Springer Publishing Company, Incorporated.

Kumar, A., Kaur, J., & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied mathematical modelling*, *35*(2), 817-823.

Kutangila-Mayoya, D., & Verdegay, J. L. (2005). p-Median problems in a fuzzy environment. *Mathware & soft computing*, *12*(2).

Nguyen, K. T. (2016). Inverse 1-median problem on block graphs with variable vertex weights. *Journal of optimization theory and applications*, *168*(3), 944-957.

Nguyen, K. T., & Sepasian, A. R. (2016). The inverse 1-center problem on trees with variable edge lengths under Chebyshev norm and Hamming distance. *Journal of combinatorial optimization*, *32*(3), 872-884.

Perez, J. A. M., Vega, J. M. M., & Verdegay, J. L. (2004). Fuzzy location problems on networks. *Fuzzy sets and systems*, *142*(3), 393-405.

Najafi, H. S., & Edalatpanah, S. A. (2013). A note on "A new method for solving fully fuzzy linear programming problems". *Applied mathematical modelling*, *37*(14-15), 7865-7867.

Sudha, A. S., & Anitha, N. (2015). Solving a Interval Fuzzy Linear Programming Problem using Alpha-Cut Operation. *International journal of computer applications*, *112*(10).

Sudha, A. S., & Vijayalakshmi, K. R. Application Of Symmetric Hexagonal Intuitionist Fuzzy Numbers In A Transportation Problem. *Mathematical sciences international research journal*, *5*(2), 2278-8697.

Taleshian, F., & Fathali, J. (2016). A Mathematical Model for Fuzzy-Median Problem with Fuzzy Weights and Variables. *Advances in operations research*, *2016*.

Tanaka, H., Okuda, T., & Asai, K. (1973). Fuzzy mathematical programming. *Transactions of the society of instrument and control engineers*, *9*(5), 607-613.

Wu, L., Lee, J., Zhang, J., Wang, Q. (2013). The inverse 1-median problem on tree networks with variable real edge lengths. *Mathematical problems in engineering*. http://dx.doi.org/10.1155/2013/313868.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*, 69-78.

Zhang, G., Wu, Y. H., Remias, M., & Lu, J. (2003). Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems. *Applied Mathematics and computation*, *139*(2-3), 383-399.

Zimmermann, H. J. (1975). Description and optimization of fuzzy systems. *International journal of general system*, *2*(1), 209-215.

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۵۸-۷۱