

برآورد پارامتری بیز تجربی شدت ترافیک در سیستم صف $M/M/1$

احمد پوردرویش، سیدبهداد حسینی*

دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

چکیده

در این مقاله، برآورد بیزی و بیز تجربی پارامتر شدت ترافیک در مدل صف $M/M/1$ تحت توابع زیان متقارن و نامتقارن و بر اساس دو پیشین مختلف ناآگاهی بخش و بتا مورد بررسی قرار می‌گیرد. برآورد پارامترهای این مدل به روش‌های بیزی، درست‌نمایی ماکسیمم، گشتاوری ارائه می‌شود. خواص و کاربردهای این دو برآوردگر در نتایج عددی مورد بحث قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: برآورد درست‌نمایی، برآورد گشتاوری، برآورد بیزی، بیز تجربی.

دریافت: ۱۳۹۶/۴/۳۱ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۱

۱- مقدمه

تئوری صف، کاربردهای زیادی در نظریه ارتباطات، طرح کامپیوتر و... دارد که استنباط آماری در فرآیند تصادفی و روند صف‌بندی و برآورد پارامترهای صف، مانند نرخ ورود، نرخ خدمات و شدت ترافیک مورد توجه پژوهشگران در چند سال قرار گرفته است. فرض کنید سیستم صف $M/M/1$ با متوسط نرخ ورود λ و همچنین متوسط نرخ خدمات $\frac{1}{\mu}$ را داریم. متغیر تصادفی X شماری از مشتریان در سیستم در حالت صف پایدار می‌باشد که دارای تابع جرم احتمال زیر است:

$$f(x|\rho) = (1 - \rho) \rho^x \quad (1)$$

که ρ ، متغیر شدت ترافیک در سیستم $M/M/1$ می‌باشد. همچنین تابع درست‌نمایی را داریم:

$$L(\rho) = (1 - \rho)^n \rho^t$$

که در آن $t = \sum_{i=1}^n x_i$ مجموع مشتریان در سیستم است. در روش بیزی ما از دو توزیع پیشین بتا و ناآگاهی بخش استفاده می‌کنیم:

I: پیشین ناآگاهی بخش که هیچ اطلاعات قبلی از پارامتر ρ نداریم.

$$\pi_1(\rho; c) = \frac{1}{\rho^c} \quad (2)$$

II: توزیع پیشین بتا با پارامترهای معلوم α و β ، داریم:

$$\pi_2(\rho; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} \quad (3)$$

مرمو و بایاری (۱۹۹۴) برآورد بیزی از شدت ترافیک در مدل $M/M/1$ را به دست آوردند. بات (۲۰۱۵) در مورد تئوری صف، کتابی تحت عنوان مقدمه‌ای بر نظریه صف ارائه نمود. شارما و کومار (۱۹۹۹) برآوردهای بیزی و کلاسیک پارامترهای مختلف مدل $M/M/1$ را تحت تابع زیان مربع خطا به دست آوردند. همچنین، استفاده از روش‌های کلاسیک برای تخمین پارامترهای نامعلوم توزیع پیشین برای اولین بار توسط میسر در سال ۱۹۴۳ مطرح گردید (میسر، ۱۹۴۳). علاوه بر این، استفاده از تابع زیان متقارن توسط واریان و برآورد بیز شدت ترافیک تحت زیان نامتقارن توسط رن و ران ارائه گردید (واریان، ۱۹۷۵، رن و وان، ۲۰۱۲). به منظور به دست آوردن برآورد بیزی تجربی با استفاده از پکیج hypergeo در نرم‌افزار R، از کتاب نظریه تئوری R هانکین در سال ۲۰۱۵ استفاده گردیده است (هانکین، ۲۰۱۵). ادامه مقاله به این شرح می‌باشد. در بخش ۲، برآورد بیز شدت ترافیک را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳، برآورد بیز شدت ترافیک تحت زیان لاینکس ارائه می‌شود. در بخش ۴، برآورد بیز تجربی پارامتر شدت ترافیک مورد بحث قرار می‌گیرد و در بخش ۵، نتایج عددی ارائه می‌شود.

۲- برآورد بیز

تجزیه و تحلیل بیزی، تابع زبانی که معمولاً استفاده می‌شود تابع زیان مربع خطاست که یک تابع زیان متقارن است. اما در بسیاری از کاربردها، به دلیل اینکه زیان ناشی از بیش برآوردی و کم برآوردی به یک اندازه نیست، از توابع زیان نامتقارن استفاده می‌کنیم. در این بخش، برآورد بیز شدت ترافیک با توابع زیان نامتقارن بررسی می‌شود. دو تابع زیان نامتقارن که در این بخش استفاده می‌شوند عبارت‌اند از:

(۱). تابع زیان درجه دو وزنی:

$$L(\hat{\rho}, \rho) = \frac{(\hat{\rho} - \rho)^2}{\hat{\rho}} \quad (۴)$$

و (۲). تابع زیان خطی، نمایی $linex$:

$$L(\hat{\rho}, \rho) = b[e^{a(\hat{\rho}-\rho)} - a(\hat{\rho}-\rho) - 1] \quad (۴)$$

اگر تابع زیان، درجه دو وزنی باشد، در این صورت میانگین زیان پسین می‌شود:

$$\begin{aligned} E[L(\hat{\rho}, \rho)|X] &= E\left[\frac{(\hat{\rho} - \rho)^2}{\hat{\rho}} | X\right] \\ &= E\left[\frac{\hat{\rho}^2 + \rho^2 - 2\rho\hat{\rho}}{\hat{\rho}} | X\right] \\ &= E\left[\hat{\rho} + \frac{\rho^2}{\hat{\rho}} - 2\rho | X\right] \\ &= E[\hat{\rho}|X] + E\left[\frac{\rho^2}{\hat{\rho}} | X\right] - E[2\rho|X] \\ &= \hat{\rho} + \frac{1}{\hat{\rho}} E[\rho^2|X] - 2E[\rho|X]. \end{aligned} \quad (۵)$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\hat{\rho}$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}} E[L(\hat{\rho}, \rho)|X] = 1 - \frac{E[\rho|X]^2}{\hat{\rho}^2}.$$

اکنون از حل تساوی $\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}} E[L(\hat{\rho}, \rho)|X]$ برآوردگر بیز ρ می‌شود:

$$\hat{\rho}_1 = E[\rho^2|X]^{\frac{1}{2}} \quad (۶)$$

که در ادامه، برآوردگر بیز ρ را تحت توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش و توزیع پیشین بتا محاسبه می‌کنیم.

۱-۲ برآورد بیزی شدت ترافیک تحت چگالی پیشین ناآگاهی بخش

تحت توزیع پیشین ناآگاهی در معادله (۴) چگالی پسین ρ می‌شود:

$$H_1(\rho|x) = \frac{(1-\rho)^n \rho^{y-c}}{\int_0^1 (1-\rho)^n \rho^{y-c} d\rho}, 0 < \rho < 1$$

لذا $\rho|x$ دارای توزیع بتا با پارامترهای $y-c+1$ و $n+1$ می‌باشد که برآورد بیزی ρ تحت زیان نامتقارن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= [E(\rho^2|X)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^1 \rho^2 h_1(\rho|X) d\rho \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\int_0^1 \rho^2 (1-\rho)^n \rho^{y-c} d\rho}{\int_0^1 (1-\rho)^n \rho^{y-c} d\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\int_0^1 (1-\rho)^n \rho^{y-c+2} d\rho}{\int_0^1 (1-\rho)^n \rho^{y-c} d\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\frac{\Gamma(y-c+3)\Gamma(n+1)}{\Gamma(y-c+n+4)}}{\frac{\Gamma(y-c+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(y-c+n+2)}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\Gamma(y-c+3)\Gamma(y-c+n+2)}{\Gamma(y-c+1)\Gamma(y-c+n+4)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{(y-c+2)(y-c+1)\Gamma(y-c+1)\Gamma(y-c+n+2)}{(y-c+n+3)(y-c+n+2)\Gamma(y-c+1)\Gamma(y-c+n+2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{(y-c+2)(y-c+1)}{(y-c+n+3)(y-c+n+2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{۷}$$

۲-۲ برآورد بیزی شدت ترافیک تحت چگالی پیشین بتا

برآورد بیزی شدت ترافیک ρ با توجه به معادله (۱) و چگالی پسین بتا را تحت زیان نامتقارن به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} h_2(\rho|x) &= \frac{(1-\rho)^{n+\beta-1} \rho^{y+\alpha-1} d\rho}{\int_0^1 (1-\rho)^{n+\beta-1} \rho^{y+\alpha-1} d\rho} \sim B(y+\alpha, n+\beta) \\ &= \hat{\rho}_2 = [E(\rho^2|X)]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \rho^2 h_2(\rho|X) d\rho \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\int_0^1 (1-\rho)^{n+\beta-1} \rho^{y+\alpha+1} d\rho}{\int_0^1 (1-\rho)^{n+\beta-1} \rho^{y+\alpha-1} d\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\frac{\Gamma(y+\alpha+2)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(y+\alpha+n+\beta+2)}}{\frac{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(y+\alpha+n+\beta)}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{(y+\alpha+1)\Gamma(y+\alpha+1)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)}{(y+\alpha+n+\beta+1)(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{(y+\alpha+1)(y+\alpha)\Gamma(y+\alpha)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)}{(y+\alpha+n+\beta+1)(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{(y+\alpha+1)(y+\alpha)}{(y+\alpha+\beta+n+1)(y+n+\alpha+\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{۸}$$



تابع زیان دیگری به نام تابع زیان لاینکس است که توسط واریان معرفی گردیده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\theta, T) = b(e^{v(T-\theta)} - v(T-\theta) - 1) \quad (9)$$

در تابع (۹)، $b > 0$ را مقیاس اندازه گیری و $v \neq 0$ را شکل اندازه گیری می نامند. این تابع زیان اکیداً محدب بوده و برای مقادیر مثبت و کوچک v یعنی $v^j \approx 0$ برای $j \geq 3$ ، این تابع زیان تقریباً متقارن می شود.

نکته: با در نظر گرفتن $b = 1$ و همچنین با توجه به بسط $e^{v(T-\theta)} \approx 1 + v(T-\theta) + \frac{v^2(T-\theta)^2}{2}$ و جایگذاری آن در تابع زیان لاینکس خواهیم داشت:

$$L(\theta, T) \approx \frac{v^2(T-\theta)^2}{2}$$

که به یک تابع زیان مربع خطا شباهت دارد. در نتیجه برای مقادیر کوچک $|v|$ برآوردهای بهینه به دست آمده تحت تابع زیان لاینکس تفاوت چندانی با برآوردهای به دست آمده تحت تابع زیان مربع خطا ندارد.

ماکر جی و چودوری (۲۰۰۵) برآورد بیز شدت ترافیک ρ تحت زیان لاینکس را مورد بررسی قرار دادند که در این بخش برآورد بیزی شدت ترافیک ρ را تحت تابع زیان لاینکس محاسبه می کنیم.

با توجه به فرمول (۹) و با فرض اینکه $\Delta = (\hat{\rho}_B - \rho)$ ، تحت تابع زیان لاینکس داریم:

$$L(\Delta) = b(e^{a\Delta} - a\Delta - 1) \quad a \neq 0, b \neq 0$$

از این رو برآورد بیز شدت ترافیک را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} E[L(\hat{\rho}, \rho) | X] &= R(\hat{\rho}_B, \rho) \\ &= E_{\rho|X} L(\Delta) = bE(e^{a(\hat{\rho}-\rho)} - a(\hat{\rho}-\rho) - 1) \\ &= b(Ee^{a(\hat{\rho}-\rho)} - aE(\hat{\rho}-\rho) - 1) \\ &= E(e^{-a\rho})e^{a\hat{\rho}_B} - a\hat{\rho}_B + aE(\rho) - 1 \\ \frac{\partial L(\Delta)}{\partial \rho} &= 0 \\ &= ae^{a\hat{\rho}}E(e^{-a\hat{\rho}}|X) - a = 0 \\ E(e^{-a\hat{\rho}}|X) &= e^{-a\hat{\rho}_B} \\ \ln E(e^{-a\hat{\rho}}|X) &= -a\hat{\rho}_B \\ \hat{\rho}_B &= -\frac{1}{a} \ln E(e^{-a\rho}). \end{aligned} \quad (10)$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} E_{\rho|X}(e^{-a\rho}) &= \\ &= \frac{1}{B(y+\alpha, n+\beta)} \int_0^1 e^{-a\rho} \rho^{y+\alpha-1} (1-\rho)^{n+\beta-1} d\rho \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-a\rho)^i}{i!} \frac{\int_0^1 e^{-a\rho} \rho^{y+\alpha-1} (1-\rho)^{n+\beta-1} d\rho}{B(y+\alpha, n+\beta)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-a\rho)^i}{\Gamma(i+1)} \frac{\text{beta}(y+\alpha+i, n+\beta)}{\text{beta}(y+\alpha, n+\beta)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-a\rho)^i}{\Gamma(i+1)} \frac{\Gamma(y+\alpha+i)\Gamma(y+\alpha+\beta+n)}{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(y+\alpha+\beta+n+i)} \end{aligned} \quad (11)$$





که در آن $F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)$ تابع فوق هندسی با پارامترهای $(y + \alpha)$ و $(y + \alpha + \beta + n)$ و $(-a)$ می باشد. در نتیجه برآورد بیز شدت ترافیک تحت زیان لینکس را داریم:

$$\hat{\rho}_B = -\frac{1}{a} \ln E_{\rho|X}((e^{-a\rho})|X)$$

$$\hat{\rho}_B = -\frac{1}{a} \ln[F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)]$$

تابع ریسک برآوردگر بیز می شود:

$$R(\hat{\rho}_B, \rho) = b \left[e^{-\ln F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)} \cdot F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a) \right. \\ \left. - a \frac{-1}{a} \ln F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a) + a \frac{y + \alpha}{y + \alpha + \beta + n} - 1 \right]$$

$$= b \left[\frac{1}{F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)} \cdot F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a) \right. \\ \left. + \ln(F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)) + a \frac{y + \alpha}{y + \alpha + \beta + n} \right] \quad (12)$$

$$= b \left[\ln(F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)) + a \frac{y + \alpha}{y + \alpha + \beta + n} \right]$$

همچنین ریسک بیز تحت زیان لینکس را می توان به دست آورد:

$$r_{\zeta, \hat{\rho}_B} = E(v_B(\hat{\rho}_B | x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} v_B(\hat{\rho}_B | x_1, x_2, \dots, x_n) \pi(\rho | x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} R(\hat{\rho}_B, \rho) \pi(\rho | x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (13)$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} b E[(e^{a(\hat{\rho}-\rho)} - a(\hat{\rho}-\rho) - 1)] \pi(\rho | x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} b \left[\ln(F(y + \alpha, y + \alpha + \beta + n; -a)) \right. \\ \left. + a \frac{y + \alpha}{y + \alpha + \beta + n} \right] \cdot \frac{\text{beta}(y + \alpha, n + \beta)}{\text{beta}(\alpha, \beta)}$$

۴- بیز تجربی

روش بیزی برای انجام آزمون فرض به لحاظ آنکه پارامترهای مورد آزمون در توزیع را متغیرهای تصادفی در نظر می گیرد، دارای مزیت هایی نسبت به روش کلاسیک (غیربیزی) ست، زیرا عدم قطعیت پارامترها را از لحاظ احتمالی توجیه می کند و اطلاعاتی را که تحلیل گر در مورد مسأله دارد از طریق توزیع پیشین در انجام آزمون اعمال می کند. اما یکی از مشکلاتی که در استفاده از روش بیزی رخ می دهد این است که اطلاعات تحلیل گر درباره توزیع پیشین ممکن است کم باشد. مثلاً شکل کلی توزیع پیشین معلوم بوده اما پارامترهای آن مجهول باشند و یا اساساً توزیع پیشین نامعلوم باشد. برای حل این مشکل دو راه وجود دارد: اول آنکه بخواهیم مسأله را با استفاده از رویکرد بیز حل کنیم که در این حالت برای پارامترهای توزیع پیشین نیز توزیع های دیگری در نظر می گیریم که این کار ممکن است تا چند مرحله نیز ادامه یابد. با استفاده از روش عدم قطعیتی که ناشی از مشخص نبودن توزیع پیشین است از طریق توزیع هایی که به پارامترهای توزیع پیشین نسبت می دهیم، توجیه می کنیم.

روش دوم، استفاده از روش های کلاسیک (غیربیزی) برای تخمین توزیع پیشین یا پارامترهای نامعلوم آن می باشد. این روش که اساساً یک روش غیربیزی به حساب می آید، روش بیز تجربی نامیده می شود. این روش اولین بار توسط میسر (۱۹۴۳) مطرح شد سپس رابینز در سال های ۱۹۵۴، ۱۹۶۴ و ۱۹۸۴ در چند مقاله اصلی خود کلیات و ساختار آن را مطرح

نمود. روش بیز تجربی بر اساس اطلاعات از توزیع پیشین به دو روش عمده تقسیم می‌شود. در صورتی که شکل توزیع پیشین معلوم باشد و فقط پارامترهای آن مجهول باشد، پارامترها از طریق روش‌های معمولی برآورد یابی مانند روش ماکزیمم درستنمایی یا روش گشتاور برآورد می‌شوند. این روش را روش بیز تجربی پارامتری می‌نامند. اما در صورتی که شکل توزیع پیشین نامعلوم باشد ولی بتوان فرض‌های خاصی را بر روی آن در نظر گرفت (مثلاً متناهی بودن گشتاور اول) با استفاده از روش‌های ناپارامتری، به برآورد توزیع پیشین و توزیع حاشیه‌ای پرداخته می‌شود. این روش را روش بیز تجربی ناپارامتری می‌نامند.

۴-۱ رویکرد بیز تجربی

در بخش‌های قبل، برآورد بیز شدت ترافیک ρ را تحت توزیع پیشین $beta(\alpha, \beta)$ به دست آوردیم که پارامترهای توزیع پیشین یعنی α و β معلوم بودند. در حالی که این پارامترها مجهول باشند، می‌توان این پارامترها را از روش‌های مختلف برآورد کرد که با جایگذاری آن‌ها در برآوردهای بیز، برآوردگر بیز تجربی به دست می‌آید.

با توجه به اینکه توزیع $X|\rho$ یک توزیع هندسی $1 - \rho$ با تابع احتمال

$$f(x|\rho) = (1 - \rho)^n \rho^{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (14)$$

می‌باشد و توزیع پیشین ρ توزیع $beta(\alpha, \beta)$ با تابع چگالی

$$\pi(\rho|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} \quad 0 < \rho < 1 \quad (15)$$

می‌باشد، لذا تابع حاشیه‌ای \underline{x} می‌شود:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \rho^y (1 - \rho)^n \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} d\rho$$

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(y + \alpha)\Gamma(n + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(y + \alpha + n + \beta)}$$

$$\text{که } y = \sum_{i=1}^n x_i$$

از روی توزیع حاشیه‌ای X می‌توان پارامترهای α و β را برآورد کرد. در این بخش از دو روش درستنمایی ماکزیمم و گشتاوری برای برآورد پارامتر α و β استفاده می‌شود.

۴-۲ روش درستنمایی ماکزیمم بیز تجربی

در روش درستنمایی ماکزیمم، مقادیر α و β را طوری پیدا می‌کنیم تا تابع چگالی حاشیه‌ای \underline{X} ماکزیمم شود.

لگاریتم تابع چگالی حاشیه‌ای \underline{X} می‌شود:

$$L = \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n | \alpha, \beta) \quad (16)$$

$$= \ln(\Gamma(\alpha + \beta)) + \ln(\Gamma(y + \alpha)) + \ln(\Gamma(n + \beta))$$

$$- \ln(\Gamma(y + \alpha + n + \beta)) - \ln(\Gamma(\alpha)) - \ln(\Gamma(\beta))$$

با مشتق‌گیری، تابع درستنمایی نسبت به α و β عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha + \beta)) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(y + \alpha)) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(n + \beta)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(y + \alpha + n + \beta))$$

$$- \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\beta))$$



$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\alpha + \beta)) + \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(y + \alpha)) + \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(n + \beta)) - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(y + \alpha + n + \beta)) - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\beta)).$$

با توجه به تابع دای گامای $\varphi(z) = \frac{d(\ln \Gamma(z))}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha + y)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha)) \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha + \beta)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha)) \right) \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha + \beta + n + y)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(\Gamma(\alpha)) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$= [\varphi(\alpha + y) - \varphi(\alpha)] + [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\alpha)] - [\varphi(\alpha + \beta + n + y) - \varphi(\alpha)]$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\alpha + y)) - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\beta)) \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\alpha + \beta)) - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\beta)) \right) \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\alpha + \beta + n + y)) - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\Gamma(\beta)) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$= [\varphi(\beta + n) - \varphi(\beta)] + [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\beta)] - [\varphi(\alpha + \beta + n + y) - \varphi(\beta)]$$

با توجه به فرمول $\varphi(x + n) - \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x+i}$ داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{y-1} \frac{1}{\alpha + i} + \sum_{i=0}^{\beta-1} \frac{1}{\alpha + i} - \sum_{i=0}^{y+n+\beta-1} \frac{1}{\alpha + i}.$$

همچنین می توان $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}$ را با توجه به (۱۴) به دست آورد:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\beta + j} + \sum_{j=0}^{a-1} \frac{1}{\beta + j} - \sum_{j=0}^{\alpha+y+n-1} \frac{1}{\beta + j}.$$

با حل معادلات $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$ و $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ به روش های عددی، برآوردهای MLE پارامترهای α و β یعنی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ محاسبه می شوند

که با جایگذاری در برآوردگر بیز، ρ نیز $\hat{\rho} = \left[\frac{(\alpha+\beta)(y+\alpha)(n+\beta)}{(\alpha)(\beta)(y+\alpha+n+\beta)} \right]^{\frac{1}{2}}$ برآورد بیز تجربی می شود:

$$\hat{\rho}_{EB} = \left(\frac{(y + \hat{\alpha} + 1)(y + \hat{\alpha})}{(y + \hat{\alpha} + \beta + n + 1)(y + n + \hat{\alpha} + \beta)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

۳-۴ روش گشتاور برآورد بیز تجربی

در روش گشتاوری برای برآورد پارامترهای توزیع پیشین یعنی α و β ، ابتدا گشتاورهای X را به صوت زیر محاسبه می کنیم:

داریم:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E_{\rho}(E(x|\rho)) \\ &= E\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \\ &= \int \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-1} \\ &= \int \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha} (1-\rho)^{\beta-2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\beta(\alpha + 1, \beta - 1)}{\beta(\alpha, \beta)} \\
 &= \frac{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta - 1)}{\Gamma(\alpha) (\beta - 1) \Gamma(\beta - 1)} \\
 &= \frac{\alpha}{\beta - 1}
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 E(X_1^2) &= E(E(x^2|\rho)) = E(\text{Var}(x|\rho) + E^2(x|\rho)) \\
 &= E\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right) + E\left(\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\right)
 \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right) &= \int \frac{1}{(1-\rho)^2} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-1} \\
 &= \int \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-3} \\
 &= \frac{\beta(\alpha, \beta - 2)}{\beta(\alpha, \beta)} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)}{(\beta)(\beta - 1)(\beta - 2)}
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 E\left(\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\right) &= \int \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-1} \\
 &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha+1} (1-\rho)^{\beta-3} \\
 &= \frac{\beta(\alpha + 2, \beta - 2)}{\beta(\alpha, \beta)} \\
 &= \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha}{\beta(\beta - 1)(\beta - 2)}
 \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)}{(\beta)(\beta - 1)(\beta - 2)} + \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha}{\beta(\beta - 1)(\beta - 2)} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2) + (\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha}{\beta(\beta - 1)(\beta - 2)} \quad (20)
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن یک نمونه n تایی x_1, x_2, \dots, x_n می‌توان برآوردهای گشتاوری α و β را از حل معادلات

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = \bar{X}^2 \end{cases}$$

یا دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta - 1} = \bar{X} \\ \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2) + (\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha}{(\beta)(\beta - 1)(\beta - 2)} = \bar{X}^2 \end{cases}$$

پیدا کرد. با حل دستگاه معادلات فوق به روش‌های عددی می‌توان $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را محاسبه نمود که با جایگذاری در برآوردگر

$$\hat{\rho}_B = \left[\frac{(\alpha + \beta)(y + \alpha)(n + \beta)}{(\alpha)(\beta)(y + \alpha + n + \beta)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

بیز $\hat{\rho}_{EB} = \left(\frac{(y + \hat{\alpha} + 1)(y + \hat{\alpha})}{(y + \hat{\alpha} + \beta + n + 1)(y + n + \hat{\alpha} + \beta)} \right)^{\frac{1}{2}}$ بیز

۵- بررسی رفتار برآوردگر بیز و بیز تجربی تحت زیان نامتقارن

در این بخش، برای بررسی رفتار بیزی و بیز تجربی، یک مطالعه شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار R انجام می‌شود. در این مطالعه، شبیه‌سازی به اندازه $n = 50$ از توزیع هندسی با پارامتر 0.8 و $0.5 = \rho$ ، سپس با نمونه‌های تولیدشده، برآوردهای بیزی و بیز تجربی محاسبه می‌شود. جداول (۱) و (۲) میانگین مجذور خطای $\hat{\rho}$ را بر اساس ۲۰۰۰ بار شبیه‌سازی نشان می‌دهند.



جدول ۱- برآوردگر و خطای برآوردگر با $\rho = 0.5$ و $n = 50$.

c	$\hat{\rho}_1$	$MSE(\hat{\rho}_1)$	α	β	$\hat{\rho}_2$	$MSE(\hat{\rho}_2)$
۰,۰	۰,۴۹۸۲	۰,۰۰۲۳	۱	۱	۰,۵۰۱	۰,۰۰۲۳
۱,۰	۰,۴۹۱۸	۰,۰۰۲۵	۱	۱,۵	۰,۴۹۵۲	۰,۰۰۲۵
۱,۵	۰,۴۸۸۵	۰,۰۰۲۷	۱	۲	۰,۴۹۱۲	۰,۰۰۲۳
۲	۰,۴۸۷۰	۰,۰۰۲۹	۱,۵	۱	۰,۴۸۷۰	۰,۰۰۲۳
۲,۵	۰,۴۸۴۰	۰,۰۰۲۹	۲	۱,۵	۰,۵۰۱	۰,۰۰۲۳
۳	۰,۴۸۱۳	۰,۰۰۳۱	۲,۵	۳	۰,۴۹۲۱	۰,۰۰۲۱

جدول ۲- برآوردگر و خطای برآوردگر با $\rho = 0.8$ و $n = 50$.

c	$\hat{\rho}_1$	$MSE(\hat{\rho}_1)$	α	β	$\hat{\rho}_2$	$MSE(\hat{\rho}_2)$
۰,۰	۰,۷۹۵۶	۲,۴e-۰۵	۱	۱	۰,۷۹۴۴	۳,۹e-۰۵
۱,۰	۰,۷۹۴۸	۳,۴e-۰۵	۱	۱,۵	۰,۷۹۲۹	۶,۳e-۰۵
۱,۵	۰,۷۹۴۲	۴,۲e-۰۵	۱	۲	۰,۷۹۱۹	۸,۲e-۰۵
۲	۰,۷۹۳۹	۴,۶e-۰۵	۱,۵	۱	۰,۷۹۶۰	۲,۰۱e-۰۵
۲,۵	۰,۷۹۳۵	۵,۳e-۰۵	۲	۱,۵	۰,۷۹۳۵	۵,۳e-۰۵
۳	۰,۷۹۳۱	۶,۰e-۰۵	۲,۵	۳	۰,۷۸۸۸	۰,۰۰۱۵۹۰

جدول ۳- مقادیر برآورد بیزی و بیز تجربی.

α	β	ρ	$\hat{\rho}$	$MSE(\hat{\rho})$	$\hat{\rho}_{ml}^{EB}$	$MSE(\hat{\rho}_{ml}^{EB})$	$\hat{\rho}_{mm}^{EB}$	$MSE(\hat{\rho}_{mm}^{EB})$
۲	۲	۰,۸۳۳۳۳	۰,۸۳۳۱۱	۴e-۰۸	۰,۸۲۵۴	۶,۲۴۱e-۰۵	۰,۸۳۲۵	۶,۴e-۰۷
۳	۳	۰,۹۶۶۶۶	۰,۹۶۶۵۱	۱e-۰۸	۰,۹۶۴۰	۶,۷۶e-۰۶	۰,۹۶۶۵	۱e-۰۸
۴	۴	۰,۹۹۲۸۵	۰,۹۹۲۸۲	۹e-۱۰	۰,۹۹۲۱	۴,۹e-۰۷	۰,۹۹۲۸	۲,۵e-۰۹
۲	۳	۰,۹۱۶۶۶۶	۰,۹۱۶۱۷	2.5e-	۰,۹۱۰۷	۳,۴۸e-۰۵	۰,۹۱۶۳	۹e-۰۸
۳	۲	۰,۹۱۶۶۶۶	۰,۹۱۶۴۷	۴e-۰۸	۰,۹۱۲۶	۱,۶e-۰۵	۰,۹۱۶۴	۴e-۰۸
۴	۱۰	۰,۹۹۹۶۵	۰,۹۹۹۶۵	۱e-۱۴	۰,۹۹۹۵	۱e-۰۸	۰,۹۹۹۶	۴e-۱۴
۱۰	۴	۰,۹۹۹۶۵	۰,۹۹۹۶۵	۱e-۱۲	۰,۹۹۹۶	۴,۹e-۱۳	۰,۹۹۹۶	۴e-۱۴

مشاهدات این دو جدول نشان می‌دهد که برآوردهای بیزی، تغییرات بسیار کمی نسبت به پارامتر شدت ترافیک دارند. با توجه به جدول ۲ داریم مقدار پارامتر شدت ترافیک 0.8 بوده که مقادیر برآورد شده تحت پیشین ناآگاهی بخش، بسیار نزدیک به پارامتر شدت ترافیک می‌باشد و در پیشین بتا به مقادیر اولیه $\beta\alpha$ بستگی دارد که در جدول ۳ مقایسه بین برآوردها تحت پیشین بتا با مقادیر اولیه مختلف $\beta\alpha$ آورده شده است. همچنین مقادیر برآورد شده پارامتر شدت ترافیک در حالتی که تحت زیان نامتقارن باشد بسیار نزدیک‌تر از مقادیر برآورد شده در حالتی که تحت زیان درجه‌دو هست،

می‌باشد؛ در واقع بیان می‌کند تابع زیان نامتقارن در مقایسه با تابع زیان درجه دو بسیار مفیدتر است که باعث جلوگیری از بیش برآوردی و همچنین کم برآوردی حاصل از تابع زیان درجه می‌باشد. هدف از برآورد بیز تجربی، رسیدن به مقدار واقعی بیز شدت ترافیک در صورتی که توزیع پیشین ما دارای پارامترهای مجهول α و β باشند هست. ملاحظه می‌کنیم محاسبه برآورد بیز تجربی از طریق گشتاور به مقدار واقعی برآورد بیز شدت ترافیک نزدیک‌تر از مقدار برآورد بیز تجربی از روش درست‌نمایی در مقادیر مختلف اولیه α و β می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش‌های مختلفی برای برآورد پارامتر شدت ترافیک در مدل صف $M/M/1$ مرور شدند. پس از انتخاب روش‌های مختلف در برآورد از جمله برآورد بیز تجربی، به مقایسه این برآوردگرها باهم پرداختیم که برای محاسبات برآورد بیز تجربی از شبیه‌سازی عددی استفاده کردیم و توانستیم پارامتر شدت ترافیک را برآورد کنیم.

منابع انگلیسی

- Armero, C., & Bayarri, M. J. (1994). Bayesian prediction in $M/M/1$ queues. *Queueing systems*, 15(1-4), 401-417.
- Bhat, U. N. (2015). *An introduction to queueing theory: modeling and analysis in applications*. Birkhäuser.
- Hankin, R. K. (2015). Numerical evaluation of the Gauss hypergeometric function with the hypergeo package. *The R journal*, 7, 81-88.
- Mises, R. V. (1942). On the correct use of Bayes' formula. *The annals of mathematical statistics*, 13(2), 156-165.
- Mukherjee, S. P., & Chowdhury, S. (2005). Bayesian estimation of traffic intensity. *IAPQR transactions*, 30(2), 89.
- Ren, H., & Wang, G. (2012). Bayes estimation of traffic intensity in $M/M/1$ queue under a precautionary loss function. *Procedia engineering*, 29, 3646-3650.
- Sharma, K. K., & Kumar, V. (1999). Inferences on $M/M/1:(\infty; FIFO)$ Queue System. *Opsearch*, 36(1), 26-34.
- Varian, H. R. (1975). A Bayesian approach to real estate assessment. *Studies in bayesian econometric and statistics in honor of Leonard J. Savage*, 195-208.