Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۲، شماره (۲)، بهمن ۱۳۹۶

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۲)، بهمن ۱۳۹۶، صفحه: ۱۰۷-۱۱۵

تعیین بهره‌ورترین اندازه مقیاس واحد تولیدی با استفاده از فرآیند دومرحله‌ای بر اساس سطح تقاضا

عباسعلی نورا، فرانک حسین زاده سلجوقی، مریم خدادادی*

دانشکده ریاضی، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان.

**نویسنده مسئول*

چکیده

در دنیای واقعی، واحدهای تصمیم‌گیری وجود دارند که در آن‌ها فرآیند تولید را می‌توان به‌صورت یک فرآیند دومرحله‌ای یا چندمرحله‌ای در نظر گرفت. برای ارزیابی این نوع واحدها از روش تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای استفاده می‌شود. در این مقاله، واحدهای دومرحله‌ای موردبررسی قرارگرفته است که در فرآیند دومرحله‌ای، خروجی‌های مرحله اول، ورودی‌های مرحله دوم هستند که اصطلاحا به آن‌ها "اندازه‌های میانی" می‌گویند. هدف این تحقیق، تعیین و بررسی بهره‌ورترین اندازه مقیاس واحدهای تولیدی با استفاده از فرآیند دومرحله‌ای بر اساس سطح تقاضا است. در این راستا، ضمن تعیین واحدهای MPSS با روش‌های DEA کلاسیک، به تعمیم آن در مدل‌های دومرحله‌ای می‌پردازیم. سپس حداکثر و حداقل مقدار تولید واحدهای تولیدی که در بهره‌ورترین اندازه مقیاس قرار دارند را در هرکدام از مراحل به‌طور جداگانه به دست می‌آوریم و سپس آن را برای کل فرآیند تعمیم می‌دهیم؛ همچنین عرضه و تقاضا به‌عنوان دو شاخص خروجی در نظر گرفته‌شده است. ابتدا سطح تقاضا را برای هرکدام از مراحل به‌طور جداگانه تعیین می‌نماییم، سپس به‌کل فرآیند می پردازیم؛ به‌طوری‌که بتوان حداکثر و حداقل مقدار تقاضا را به دست آورد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، بهره‌ورترین اندازه مقیاس، تقاضا.

دریافت: ۱۳۹۶/۷/۲۵　　　پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱٤

۱- مقدمه

در مدل‌های کلاسیک DEA، هر واحد تصمیم‌گیری فقط با ورودی و خروجی‌های خود شناخته‌شده و به ساختار درونی DMU ها توجه نمی‌شود. اگر ساختار درونی DMU و روابط بین آن‌ها را نیز در نظر بگیریم مدل DEA شبکه‌ای به دست می‌آید و یکی از خصوصیات آن، اندازه‌گیری کارایی درون DMU ها می‌باشد. DEA دومرحله‌ای حالت خاصی از DEA شبکه‌ای است که در آن ساختار داخلی واحد تصمیم‌گیرنده دارای دو مرحله متوالی است. در چند سال اخیر مطالعاتی روی ساختار دومرحله‌ای داده‌ها صورت گرفته است که علاوه بر ورودی‌ها و خروجی‌ها، مجموعه‌ای از "اندازه میانی " بین این دو مرحله واقع‌شده است. تن و تاتسی(۲۰۰۹) مدل‌هایی را برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری با ساختار شبکه‌ای ارائه دادند. همچنین کائو و هوانگ (۲۰۰۸) با استفاده از دو ساختار سری و موازی مدل‌هایی را برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری شبکه‌ای ابداع کردند که کارایی کل فرآیند دومرحله‌ای بر مبنای حاصل‌ضرب کارایی مراحل تعریف شد؛ ژئو (۲۰۰۰) کارایی کل را به‌صورت مجموع وزن‌دار کارایی مراحل تعریف کردند. تجزیه کارایی در تحلیل پوششی داده شبکه‌ای را کائو موردبررسی قرارداد. چن و همکاران (۲۰۰۹)، رابطه بین روش چن و ژئو (۲۰۰٤) و روش کائو و هوانگ (۲۰۰۸)، رویکرد DEA دومرحله‌ای را بررسی

* E-mail: maryamkhodadadi344@ymail.com

کردند و نشان دادند که مدل چن و ژو هم ارزی برای مدل کائو و هوانگ در تعیین امتیاز کارایی کلی فرآیند دومرحله‌ای می‌باشد (ژئو،۲۰۰۰). آپا و یو (۱۹۹۹) مدل‌های مختلفی تحت هر دو مدل ورودی محور و خروجی محور ارائه دادند که در این مدل ، واحدهای MPSS با حداکثر و حداقل خروجی تعیین می‌شوند.

۲- بهره‌ورترین اندازه مقیاس (MPSS)

تعریف ۲-۱ فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری DMUs برای ارزیابی وجود دارد و هر واحد ($DMU_j \ \ (j = 1. \ldots . n)$، دارای m ورودی (i=1,…,m) X_{ij} و s خروجی $Y_{rj} \ \ (r = 1 \ldots s)$ که واحد تحت ارزیابی DMU_o نام دارد که $o \in \{1,..n\}$.

مجموعه امکان تولید CCR را به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_c = \{(x\ ,y) \mid x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \ . y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j . \lambda_j \geq 0. j = 1. \ldots . n\}$$

مجموعه امکان تولید مدل BCC به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_v = \{(x,y) \mid x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \ . y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j . \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \lambda_j \geq 0. j = 1. \ldots . n\}$$

تعریف ۲-۲ فرض کنید $(x_0 . y_0)$ مختصات واحد تحت ارزیابی DMUo باشد و (α,β) اسکالرهایی باشند که میزان انبساط یا انقباض ورودی‌ها و خروجی‌ها را برحسب اینکه $\alpha, \beta > 1$ یا $\alpha,\beta < 1$ باشند، نشان می‌دهند. مدل زیر برای تعیین MPSS به‌صورت زیر تعریف‌شده است (آپا و یو، ۱۹۹۹):

$$\begin{aligned} & max \ \frac{\beta}{\alpha} \\ & \text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \alpha x_{io} \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \beta y_{ro} \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ & \alpha, \beta, \lambda_j \geq 0. \end{aligned} \tag{۱}$$

قضیه ۲-۱ شرط لازم برای اینکه DMU_o با بردار ورودی و خروجی x_0 و y_0، MPSS باشد آن است که در مدل (۱) داشته باشیم: $\frac{\beta^*}{\alpha^*} = 1 \max \ \frac{\beta}{\alpha} =$

برای تمام واحدهای تصمیم‌گیری، مدل (۱) را حل می‌کنیم و سپس واحدهایی که در بهره‌ورترین اندازه مقیاس قرار دارند را تفکیک می‌کنیم. فرض کنید $k = 1,\ldots,k'$ تعداد واحدهای MPSS شناسایی‌شده مدل (۱) باشند و (r=1,…s) Y_{rk}^{MPSS} و (i=1,…,m) X_{ik}^{MPSS} به ترتیب خروجی‌ها و ورودی‌های واحدهای MPSS باشند .ضمن تعیین واحدهای MPSS، حداکثر و حداقل سطح خروجی واحدهای MPSS را به دست می‌آوریم. برای تمام واحدهای تصمیم‌گیری، مدل (۱) را حل می‌کنیم و سپس واحدهایی که در بهره‌ورترین اندازه مقیاس قرار دارند را تفکیک می‌کنیم. فرض کنید $k = 1,\ldots,k'$ تعداد واحدهای MPSS شناسایی‌شده مدل (۱) باشند و (r=1,…s) Y_{rk}^{MPSS}و (i=1,…,m) X_{ik}^{MPSS} به ترتیب خروجی‌ها و ورودی‌های واحدهای MPSS باشند. ضمن تعیین واحدهای MPSS، حداکثر و حداقل سطح خروجی واحدهای MPSS را به دست می‌آوریم.

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره۲، شماره (۲)، بهمن ۱۳۹۶ ، صفحه: ۱۰۷-۱۱۵

۳- تعیین حداکثر و حداقل سطح خروجی در واحدهای MPSS

در این بخش به تعیین حداکثر و حداقل سطح خروجی واحدهای MPSS می‌پردازیم که این واحدها دارای چندین ورودی و چندین خروجی هستند. ابتدا مجموعه $\mathrm{MPSS}^{\max} = \{(x^l, y^l)\}$ که مجموعه‌ای از نقاط MPSS با حداکثر سطح خروجی $y^l = \max \ \{y \mid (x.y) \in \text{MPSS set}\}$ است. مجموعه $\mathrm{MPSS}^{\min} = \{(x^s, y^s)\}$ که مجموعه‌ای از نقاط MPSS با حداقل خروجی $y^s = \min \ \{y \mid (x.y) \in \text{MPSS set}\}$ است را تعریف می‌کنیم. از بین تمام واحدهای MPSS، حداکثر سطح خروجی از مدل زیر به دست می‌آید (لی،۲۰۱٦).

$$
\begin{aligned}
y^s = \max & \sum_{r=1}^{s} y_r \\
s.t. & \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \ \geq \ y_r \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k \ = 1 \\
& y_r \,.\, \lambda_k \ \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

همچنین از مدل زیر می‌توانیم واحدMPSS ای را به دست آوریم که دارای حداکثر سطح خروجی است که M یک عدد مثبت بزرگ است؛ این رابطه افزایش تاثیر خروجی‌ها نسبت به ورودی‌ها را نشان می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
& Max\, M\sum_{r=1}^{s} y_r + \sum_{i=1}^{m} x_i \\
s.t. \quad & \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \geq y_r \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} = x_i \\
& \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \\
& y_r . x_i . \lambda_k \ \geq 0, \in \{1. \dots . m\} . \in \{1. \dots . k'\}
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

در بین تمام واحدهای MPSS می‌توانیم حداقل سطح خروجی را از مدل زیر به دست آوریم:

$$
\begin{aligned}
y^s = \mathrm{Min} & \sum_{r=1}^{s} y_r \\
s.t. & \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \ \leq \ y_r \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\
& y_r \geq 0 \ \ \lambda_k \ \geq 0 \,, r \in \{1. \dots . s\} . \in \{1. \dots . k'\}
\end{aligned}
\tag{٤}
$$

۴- رابطه MPSS و تحقق تقاضا

واحدهای تصمیم‌گیرنده، ورودی را دریافت می‌کنند و روی آن‌ها پردازش انجام می‌دهند و خروجی‌ها را تولید می‌کنند.در این بخش، تقاضا را به‌عنوان یک شاخص خروجی در نظر گرفتیم که با داشتن حداکثر سطح خروجی واحدهای MPSS و با ثابت نگه‌داشتن سطح ورودی می‌توانیم حداکثر یا حداقل مقدار تقاضا را از رابطه زیر به دست آوریم. درواقع می‌توانیم حداقل و حداکثر مقدار تقاضا را تنظیم کنیم (لی، ۲۰۱٦).

$$
\begin{aligned}
&\text{Min/Max} \quad \sum_{k=1}^{k'} D_k \\
&s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} \le x_i \\
&\qquad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = D_k \\
&\qquad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1.
\end{aligned} \tag{۵}
$$

همچنین رابطه زیر می‌تواند واحد MPSS را با تقاضای معلوم را شناسایی نماید:

$$
\begin{aligned}
&Min \sum_{i=1}^{m} x_i \\
&\sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} \le x_i \\
&s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = D_k \\
&\qquad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1.
\end{aligned} \tag{٦}
$$

در مدل‌های معمولی DEA، هر واحد تصمیم‌گیری فقط با ورودی و خروجی‌های خود شناخته می‌شود و به ساختار درونی DMU ها توجه نمی‌گردد. اگر ساختار درونی DMU و روابط بین آن‌ها را نیز در نظر بگیریم مدل DEA شبکه‌ای به دست می‌آید که متفاوت باDEA معمولی است و یکی از خصوصیات آن اندازه‌گیری کارایی درون DMU هاست. DEA دومرحله‌ای حالت خاصی از DEA شبکه‌ای است که در آن، ساختار داخلی واحد تصمیم‌گیرنده دارای دو مرحله متوالی است. چن و همکاران (۲۰۱٤)، لی و همکاران (۲۰۱۲) و کوک و همکاران (۲۰۱۰) مطالعاتی روی ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای انجام دادند (لی، ۲۰۱٦). در ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای، خروجی‌های مرحله اول به‌عنوان ورودی‌های مرحله دوم قرار می‌گیرند(خداکرمی، شبانی و ساعن،۲۰۱٤). فرض کنید$j = \{1. \dots .J\}$، مجموعه‌ای از DMU ها باشد که در آن $\{i=1, \dots,m\}$ x_{ij} ، $\{r = 1. \dots .R\}$ y_{rj}، $\{q = 1. \dots .Q\}$ z_{qj} ، به ترتیب ورودی‌ها، واسطه بین ورودی‌ها و خروجی‌ها، و خروجی‌ها باشند. اسکالرهای $1 <=> \gamma.\beta.\alpha$ انبساط یا انقباض ورودی‌ها، واسطه بین ورودی‌ها و خروجی‌ها، و خروجی‌ها را نشان می‌دهد.مدل (۱) را برای MPSS دومرحله‌ای به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم (خداکرمی، شبانی و ساعن،۲۰۱٤).

$$
\begin{aligned}
& Max\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}\right) \\
& s.t.\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \alpha x_{io} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = \beta y_{ro} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \alpha. \beta. \lambda_j \ge 0.
\end{aligned} \tag{۷}
$$

در برنامه‌های کاربردی دنیای واقعی ممکن است که یک سری از خروجی‌های مرحله اول، ورودی‌های مرحله دوم نباشند و یا یک سری از ورودی‌های مرحله دوم، خروجی‌های مرحله اول نباشند. برای مقابله با چنین شرایطی، مدل بالا را به‌صورت زیر گسترش می‌دهیم.

$$
\begin{aligned}
& Max\left(\frac{\beta}{\alpha_L}+\frac{\gamma_L}{\beta}\right) \\
& s.t.\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \alpha x_{io} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = \beta y_{ro} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{qj} \ge \gamma z_{qo} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.
\end{aligned} \tag{۸}
$$

۵- تعیین حداکثر و حداقل سطح خروجی واحدهای MPSS در مدل‌های DEA شبکه‌ای دومرحله‌ای

فرض کنید $j = \{1. \dots . J\}$، مجموعه‌ای از DMU ها باشد که در آن $x_{ij}\ \{i = 1. \dots . m\}$، $y_{rj}\ \{r = 1. \dots . R\}$، $z_{qj}\ \{q = 1. \dots . Q\}$ به ترتیب ورودی‌ها، واسطه بین ورودی‌ها و خروجی‌ها، خروجی‌ها باشند. حداکثر سطح خروجی را ابتدا برای هرکدام از مراحل جداگانه به دست می آوریم. سپس آن را به مدل یکپارچه تبدیل می‌کنیم. حداکثر سطح خروجی برای مرحله اول از مدل (۹) به دست می‌آید که در آن Y_{rk}^{mpss} واسطه بین ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای MPSS است.

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{r=1}^{s} y_r \\
& s.t.\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \ge y_r \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\
& y_r . \lambda_k \ge 0.
\end{aligned} \tag{۹}
$$

همچنین حداکثر سطح خروجی برای مرحله دوم از مدل زیر به دست می‌آید که در آن Z_{qk}^{mpss} خروجی واحدهای MPSS در مرحله دوم است.

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{q=1}^{Q} z_q \\
& s.t. \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Z_{qk}^{mpss} \geq z_q \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\
& z_q . \lambda_k \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

سپس حداکثر سطح خروجی برای مدل‌های DEA شبکه‌ای دومرحله‌ای ازلحاظ خروجی‌ها را از مدل یکپارچه زیر به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{r=1}^{s} y_r + \sum_{q=1}^{Q} z_q \\
& s.t. \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \geq y_r \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Z_{qk}^{mpss} \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \geq z_q \\
& y_r . \lambda_k \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

همچنین ما می‌توانیم با در نظر گرفتن تاثیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در هرکدام از مراحل، حداکثر سطح خروجی را برای واحدهای MPSS به دست آوریم. با اضافه کردن محدودیت $\sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} = x_i$به مدل (۱۱) می‌توانیم واحد MPSS، با ورودی‌ها و خروجی‌های منحصربه‌فرد به‌صورت ($X_{ik}^{mpss} . Y_{rk}^{mpss}$) در مرحله اول به دست آوریم. حداکثر سطح خروجی برای مرحله اول از مدل زیر به دست می‌آید که در آن X_{ik}^{mpss}، ورودی‌های واحدهای MPSS در مرحله اول است.

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{r=1}^{s} y_r \\
& s.t. \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \geq y_r \\
& \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} = x_i \\
& \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \\
& y_r . x_i . \lambda_k \geq 0, \in \{1. \dots . m\}. \in \{1. \dots . k'\}
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

همچنین با اضافه کردن محدودیت$\sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = y_r$به مدل (۱۲) می‌توانیم واحد MPSS را با ورودی‌ها و خروجی‌های منحصربه‌فرد به‌صورت($Y_{rk}^{mpss} . Z_{qk}^{mpss}$) در مرحله دوم به دست آوریم.

$$\begin{gathered} Max \sum_{q=1}^{Q} z_q \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Z_{qk}^{mpss} \geq z_q \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = y_r \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\ z_q . \lambda_k \geq 0. \end{gathered} \tag{۱۳}$$

سپس حداکثر سطح خروجی برای مدل‌های DEA شبکه‌ای دومرحله‌ای را از مدل یکپارچه زیر به دست می‌آوریم که از مدل زیر می‌توانیم واحدMPSS با ورودی‌ها، واسطه‌ی خروجی و ورودی، و خروجی‌های منحصربه‌فرد به‌صورت($X_{ik}^{mpss} . Y_{rk}^{mpss} . Z_{qk}^{mpss}$) به دست آوریم.

$$\begin{gathered} Max \left(\sum_{r=1}^{s} y_r + \sum_{q=1}^{Q} z_q\right) \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} = x_i \\ s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = y_r \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Z_{qk}^{mpss} \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \geq z_q \\ y_r . \lambda_k \geq 0. \end{gathered} \tag{۱٤}$$

همچنین می‌توانیم از مدل‌های زیر، افزایش تاثیر خروجی‌ها نسبت به ورودی را در مدل یکپارچه زیر به دست آوریم.

$$\begin{gathered} \text{Max } M\left(\sum_{r=1}^{s} y_r + \sum_{q=1}^{Q} z_q\right) + \sum_{i=1}^{m} x_i \\ s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} = x_i \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = y_r \\ \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Z_{qk}^{mpss} \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \geq z_q. \end{gathered} \tag{۱۵}$$

۶- تعیین عرضه (تقاضا) بر اساس حداکثر سطح خروجی در مدل‌های شبکه‌ای

در این بخش به تعیین تقاضا (عرضه) بر اساس حداکثر سطح خروجی در مدل‌های چندمرحله‌ای می‌پردازیم. عرضه و تقاضا دو مفهوم اقتصادی هستند که عرضه به معنای مقدار تولید از طرف تولیدکنندگان و تقاضا به معنای تمایل مصرف‌کنندگان به کالای تولیدکنندگان است. هر چه مقدار تقاضا بیشتر باشد مقدار عرضه هم بیشتر است. در این بخش تقاضا (عرضه) را به‌عنوان شاخص خروجی در نظر می‌گیریم که با داشتن حداکثر سطح خروجی واحدهای MPSS و با ثابت نگه‌داشتن سطح ورودی می‌توانیم حداکثر یا حداقل مقدار تقاضا در مرحله‌ی اول را از رابطه زیر به دست می‌آوریم. درواقع می‌توانیم حداقل و حداکثر مقدار تقاضا را بر اساس حداکثر خروجی تنظیم کنیم.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Min/Max} \quad \sum_{\mathbf{r=1}}^{s} \mathbf{D_r} \\
&s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} \le x_{ij} \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\
&\quad \lambda_k .\ D_r . x_{ij} . y_{rj} \ge 0.
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

حداکثر یا حداقل مقدار تقاضا در مرحله‌ی اول را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Min/Max} \quad \sum_{q=1}^{Q} D_q \\
&s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \le y_{rj} \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{qk}^{mpss} = D_q \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\
&\quad \lambda_k . D_q . x_{ij} . y_{rj} \ge 0.
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

سپس حداکثر یا حداقل مقدار تقاضا بر اساس حداکثر سطح خروجی و برای مدل‌های دومرحله‌ای را از مدل یکپارچه زیر به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Min/Max} \quad \left(\sum_{r=1}^{s} D_r + \sum_{q=1}^{Q} D_q\right) \\
&s.t. \quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k X_{ik}^{mpss} \le x_{ij} \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} \le y_{rj} \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{rk}^{mpss} = D_r \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k Y_{qk}^{mpss} = D_q \\
&\quad \sum_{k=1}^{k'} \lambda_k = 1 \\
&\quad \lambda_k . D_q .\ D_r . x_{ij} . y_{rj} \ge 0.
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها به بررسی و تعیین واحدهای MPSS پرداخته شد. سپس حداکثر و حداقل سطح خروجی‌ها برای واحد MPSS موردبررسی قرار گرفت و تقاضا به‌عنوان یک شاخص خروجی در نظر گرفته شد که بر اساس آن توانستیم سازمان‌ها و واحدهای تصمیم‌گیری که در بهره‌ورترین اندازه مقیاس هستند و به تقاضای ما پاسخ می‌دهند را تعیین کنیم. همچنین مقدار تقاضا بر اساس حداکثر خروجی تنظیم گردید. سپس این مدل‌ها را برای DEA شبکه‌ای تعمیم دادیم و حداکثر سطح خروجی را برای فرآیند دومرحله‌ای، ابتدا برای هرکدام از مراحل

جداگانه به دست آوردیم؛ سپس آن را به مدل یکپارچه تبدیل کردیم. به‌علاوه مدل‌های تعیین حداکثر و حداقل مقدار تقاضا برای فرآیند دومرحله‌ای را به دست آوردیم. بحث و مطالعه ما در این مقاله بر روی DEA شبکه‌ای با داده‌های حقیقی بوده است، لذا می‌توان آن را برای DEA شبکه‌ای برای فرآیند دومرحله‌ای یا چندمرحله‌ای با داده‌های فازی نادقیق انجام داد که در مطالعات بعدی به ارائه آن خواهیم پرداخت.

منابع انگلیسی

Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European journal of operational research*, *197*(1), 243-252.

Chen, Y., Zhu, J., 2004. Measuring information technologies indirect impact on firm performance. *Information technology & management journal 5* (1–2), 9–22.

Zhu, J. (2000). Setting scale efficient targets in DEA via returns to scale estimation method. *Journal of the operational research society*, *51*(3), 376-378.

Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, *185*(1), 418-429.

Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European journal of operational research*, *196*(3), 1170-1176.

Appa, G., & Yue, M. (1999). On setting scale efficient targets in DEA. *Journal of the operational research society*, *50*(1), 60-69.

Lee, C. Y. (2016). Most productive scale size versus demand fulfillment: A solution to the capacity dilemma. *European journal of operational research*, *248*(3), 954-962.

Chen, Y., Cook, W. D., Kao, C., & Zhu, J. (2014). Network DEA pitfalls: Divisional efficiency and frontier projection. *Data envelopment analysis* (pp. 31-54). DOI 10.1007/978-1-4899-8068-7_2.

Lee, C. Y., & Johnson, A. L. (2012). Two-dimensional efficiency decomposition to measure the demand effect in productivity analysis. *European journal of operational research*, *216*(3), 584-593.

Cook, W. D., Liang, L., & Zhu, J. (2010). Measuring performance of two-stage network structures by DEA: a review and future perspective. *Omega*, *38*(6), 423-430.

Khodakarami, M., Shabani, A., & Saen, R. F. (2014). A new look at measuring sustainability of industrial parks: a two-stage data envelopment analysis approach. *Clean technologies and environmental policy*, *16*(8), 1577-1596.