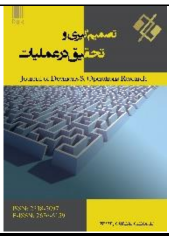
E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 8, No. 3 (2023) 785–799.



Paper Type: Original-Application Paper

# An Approach Based on Double-Frontier DEA for Determining Priorities and Obtaining Weights in AHP

**Hossein Azizi***

*Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran; azizhossein@gmail.com.*

***Citation:***

Azizi, H. (2023). An approach based on double-frontier DEA for determining priorities and obtaining weights in AHP. *Journal of decisions and operations research, 8*(3), 785-799.

Received: 02/07/2022 Reviewed: 05/08/2022 Revised: 09/09/2022 Accepted: 01/10/2022

## Abstract

**Purpose:** The Analytic Hierarchy Process (AHP) is a multiple criteria decision-making method extensively used in various fields. Prioritization of decision criteria or alternatives from pairwise comparison matrices in AHP has been studied extensively. This article proposed the "Double-Frontier DEA" approach for prioritization in AHP. This new approach uses two optimistic and pessimistic DEA models to obtain the best local priorities from a pairwise comparison matrix, regardless of whether it is fully consistent or not.

**Methodology:** One of these methods is Data Envelopment Analysis (DEA). The combination of DEA and AHP (DEAHP) is used to obtain and aggregate weights in AHP. Studies show that DEAHP fails in obtaining and aggregating weights in AHP and sometimes produces priority vectors contrary to evidence for inconsistent pairwise comparison matrices that limits its application.

**Findings:** This new approach uses two optimistic and pessimistic DEA models to obtain the best local priorities from a pairwise comparison matrix, regardless of whether it is fully consistent or not. Some numerical examples, including a real application of AHP for selecting an innovation team for a university, are provided to specify the advantages of the proposed approach and its potential applications.

**Originality/Value:** The double-frontier DEA approach generates true weights for fully consistent pairwise comparison matrices and best local priorities for inconsistent pairwise comparison matrices, that are logical and fit subjective judgments of decision-makers.

**Keywords:** Data envelopment analysis, Analytic hierarchy process, DEAHP, Multiple criteria decision-making.

Corresponding Author: azizhossein@gmail.com

Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۸، شماره (۳)، (۱۴۰۲)، ۷۹۹-۷۸۵

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

# یک رویکرد مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه برای تعیین اولویت و به دست آوردن وزن در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی

حسین عزیزی*

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران.

## چکیده

**هدف:** فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی[1] یک روش تصمیم‌گیری چندمعیاره[2] است که در عرصه‌های مختلفی به‌صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. به دست آوردن اولویت‌های معیارها یا گزینه‌های تصمیم از ماتریس‌های مقایسه زوجی در *AHP* به‌صورت گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. این مقاله رویکرد «*DEA* با مرز دوگانه» را برای تعیین اولویت در *AHP* پیشنهاد می‌کند. در این رویکرد جدید، از دو مدل *DEA* خوش‌بینانه و بدبینانه برای به دست آوردن بهترین اولویت‌های محلی از یک ماتریس مقایسه زوجی، صرف نظر از این‌که کاملا سازگار باشد یا نباشد، استفاده می‌شود.

**روش‌شناسی پژوهش:** یکی از روش‌های تعیین اولویت، تحلیل پوششی داده‌ها[3] است که در ترکیب با *AHP*، روش *DEAHP* را برای به دست آوردن و تجمیع وزن‌ها در *AHP* ایجاد می‌کند. بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش *DEAHP* برای به دست آوردن و تجمیع وزن‌ها در *AHP*، معیوب است و گاه برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار، بردارهای اولویت مخالف با شهود ایجاد می‌کند که موجب محدودیت کاربرد آن می‌شود. در این مقاله، یک رویکرد مبتنی بر «*DEA* با مرز دوگانه» را برای غلبه بر مشکلات *DEAHP* ارایه می‌کنیم.

**یافته‌ها:** به خاطر نیاز به توسعه نظریه *DEAHP* و روش‌های آن و هم کاربردهای واقعی آن، مدل *DEAHP* بدبینانه جدیدی را پیشنهاد کردیم که یک معیار یا گزینه تصمیم را از دیدگاه بدبینانه ارزیابی می‌کند. سپس با استفاده از یک شاخص، وزن‌های به دست آمده از دیدگاه‌های خوش‌بینانه و بدبینانه را تلفیق کردیم تا یک ارزیابی کلی از معیارها یا گزینه‌های تصمیم به دست آید. چند مثال عددی، ازجمله یک کاربرد واقعی از *AHP* برای انتخاب یک تیم نوآوری برای یک دانشگاه ارایه شدند، نتایج نشان‌دهنده مزایای رویکرد پیشنهادی و کاربردهای بالقوه آن می‌باشند.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** رویکرد *DEA* با مرز دوگانه برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملا سازگار وزن‌های حقیقی تولید می‌کند و برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار، بهترین اولویت‌های محلی را ایجاد می‌کند که منطقی و متناسب با قضاوت‌های ذهنی تصمیم گیرندگان هستند.

**کلیدواژه‌ها:** تحلیل پوششی داده‌ها، فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی، *DEAHP*، تصمیم‌گیری چندمعیاره.

## ۱- مقدمه

چگونگی به دست آوردن یک بردار اولویت از یک ماتریس مقایسه زوجی، موضوع مهمی در فرآیند بوده است و در مقالات *AHP* به‌طور گسترده‌ای موردبررسی قرار گرفته است. جدا از روش مشهور بردار ویژه[4] ساعتی [1]، تعداد زیادی از رویکردهای دیگر نیز پیشنهاد شده‌اند،

[1] Analytic Hierarchy Process (AHP)
[2] Multiple Criteria Decision Making (MCDM)
[3] Data Envelopment Analysis (DEA)
[4] Eigenvector Method (EM)

* نویسنده مسئول

azizhossein@gmail.com

مانند روش کم‌ترین مربعات وزنی [2]، روش کم‌ترین مربعات لگاریتمی [3]، روش کم‌ترین مربعات هندسی [4]، روش وزن ویژه گرادیانی [5] و ... .

*DEA* یک رویکرد با ماهیت داده‌ای برای ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از موجودیت‌های همتا به نام واحدهای تصمیم‌گیری[1] است که چندین ورودی را به چندین خروجی تبدیل می‌کنند. تعریف *DMU*، عام و انعطاف‌پذیر است. در سال‌های اخیر، شاهد کاربردهای متنوع *DEA* درزمینهٔ ارزیابی عملکرد انواع مختلف موجودیت‌ها در انواع مختلف فعالیت‌ها در محیط‌های مختلف و کشورهای مختلف بوده‌ایم. در این کاربردهای *DEA*، از اشکال مختلف *DMU* برای ارزیابی عملکرد موجودیت‌هایی از قبیل بیمارستان‌ها، دانشگاه‌ها، شهرها، دادگاه‌ها، شرکت‌های تجاری و ...، ازجمله عملکرد کشورها، مناطق و ... استفاده به عمل آمده است. از آن‌جا که *DEA* با فرضیات بسیار کمی همراه است، لذا امکان استفاده در مواردی دارد که رویکردهای دیگر به علت ماهیت پیچیده (و غالبا ناشناخته) روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد *DMUs*، در آن موارد با شکست مواجه شده‌اند.

رامانا‌تان [6] یک روش *DEAHP* را برای اشتقاق و تجمیع وزن‌ها در *AHP* ابداع کرده است. روش *DEAHP*، هر معیار یا گزینه را در ماتریس مقایسه زوجی به‌عنوان یک موجودیت تصمیم‌گیری درنظر می‌گیرد که در *DEA* به آن *DMU* گفته می‌شود [7] و عناصر سطری ماتریس مقایسه زوجی را به‌عنوان خروجی‌های *DMUs* درنظر می‌گیرد و از یک ورودی ساختگی که مقدار یک دارد، برای همه *DMUs* استفاده می‌کند تا یک مدل *CCR* با ماهیت ورودی برای هر *DMU* ایجاد کند و بهترین کارایی نسبی آن را محاسبه کند. سپس از این بهترین کارایی‌های نسبی به‌عنوان اولویت‌های محلی *DMUs* (در این‌جا معیارها یا گزینه‌های تصمیم) استفاده می‌شود. *DEAHP* نشان داده است که می‌تواند وزن‌های حقیقی را برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملا سازگار تولید کند و توسط سوکلی و همکاران [8] برای انتخاب تامین‌کننده مورداستفاده قرار گرفته است. با این‌حال، معایبی نیز در روش *DEAHP* شناسایی شده است که در وانگ و همکاران [9] با مثال‌های عددی نشان داده شده است. مهم‌ترین عیب آن این است که هیچ تضمینی وجود ندارد که روش *DEAHP* بتواند برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار بردارهای وزن منطقی ایجاد کند؛ مثلا ماتریس مقایسه زوجی زیر را که ناسازگار است $(CR = 0.229 > 0.1)$، درنظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1 & 7 & 3 & 1/5 & 1 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/6 \\ 1 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1 & 6 & 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

برای این ماتریس مقایسه زوجی ناسازگار، *DEAHP* بردار اولویت را به‌صورت $(1,1,1/3,1,1,1)$ ایجاد می‌کند که معنی ندارد و مشخصا غیر منطقی، غیر شهودی و غیر قابل‌قبول است، زیرا مقایسه‌های زوجی در سطر اول *A* به‌روشنی نشان می‌دهند که معیار یا گزینه اول مهم‌تر از دیگران است و نمی‌تواند اهمیتی به‌اندازه آن‌ها داشته باشد. همین عیب است که کاربرد *DEAHP* را به‌طورجدی با محدودیت مواجه می‌سازد.

*DEAHP* نه‌تنها برای ماتریس‌های مقایسه زوجی بسیار ناسازگار، نتایج خلاف شهود به دست می‌دهد، بلکه هم‌چنین، ممکن است برای ماتریس‌های مقایسه زوجی که سازگاری رضایت‌بخشی دارند، یعنی $CR < 0.1$، نیز جواب‌های غیر منطقی ایجاد کند؛ مثلا ماتریس مقایسه زوجی زیر را که سازگاری رضایت‌بخش و قابل قبولی دارد $(CR = 0.0999 < 0.1)$ و در شرط $CR < 0.1$ صدق می‌کند، درنظر بگیرید.

[1] Decision-Making Units (DMUs)


عزیزی / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۷۹۹-۷۸۵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

اما *DEAHP* برای تمام پنج معیار یا گزینه تصمیم در این ماتریس، وزن‌های یکسان ایجاد می‌کند یعنی $W^*_{DEAHP} = (1,1,1,1,1)^T$ . این بردار اولویت بی‌معنا است و باید کنار گذاشته شود.

آندرولی و همکاران [10] به توسعه یک مدل *AHP* باهدف هدایت فرآیندهای تصمیم‌گیری در هنگام برخورد با مقاوم‌سازی لرزه‌ای ساختمان‌های صنعتی پرداختند. آن‌ها نه‌تنها خروجی تحلیل لرزه‌ای و ارزیابی‌های مهندسی، بلکه جنبه‌های اجتماعی-اقتصادی، مانند زمان توقف تولید را از طریق عملیات وزن‌دهی مناسب درنظر گرفتند. خو و همکاران [11] دو تعریف جدید از سازگاری جمعی برای روابط ترجیح فازی مردد ارایه کردند: سازگاری کاملا جمعی و سازگاری جمعی ضعیف. برای تایید سازگاری کاملا جمعی یا سازگاری جمعی ضعیف از روابط ترجیح فازی مردد، برخی از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی و مدل‌های برنامه‌ریزی مختلط ۰-۱ توسعه داده شد. روش‌ها تمام اطلاعات داده شده توسط تصمیم‌گیرنده را بدون تغییر طول عناصر فازی مردد درنظر گرفتند. رامیک [12] ماتریس‌های مقایسه زوجی را با عناصری از گروه مرتب‌شده خطی آبلی در یک بازه زمانی واقعی بررسی کرد. او مفهوم متقابل و سازگاری ماتریس مقایسه زوجی با عناصر فازی را معرفی کرد و خواص آن‌ها را بیان کرد. علاوه‌براین، یک روش کلی برای استخراج بردار اولویت از ماتریس مقایسه زوجی با عناصر فازی پیشنهاد کرد که امکان رتبه‌بندی یا رتبه‌بندی مجموعه معینی از گزینه‌ها را فراهم می‌کند. وانگ [13] دو روش بردار ویژه فازی را تحلیل و کاستی‌های آن‌ها را نشان داد. او دو چارچوب از اولویت‌های فازی مثلثی نرمال‌شده جمعی برای توصیف خوشه‌ای از بردارهای اولویت فازی هم‌ارز را معرفی کرد. بر اساس رابطه تقریبی بین ماتریس‌های رابطه ترجیح ضربی فازی مثلثی و مناسب‌ترین اولویت‌های فازی مثلثی نرمال‌شده جمعی آن‌ها، سه مساله ویژه با ماتریس‌های حقیقی مثبت ایجاد کرد و یک برنامه خطی مبتنی بر *EM* برای به دست آوردن بازه پشتیبان بر اساس اولویت‌های فازی مثلثی نرمال‌شده جمعی از ماتریس‌های رابطه ترجیح ضربی فازی ایجاد کرد. ژانگ و همکاران [14] به این سوال که آیا بردار اولویتی وجود دارد که اگر مختصات آن بتواند برخی انحرافات را تغییر دهد، می‌توان تمام عناصر ماتریس مقایسه زوجی را استخراج کرد؟ پرداختند. آن‌ها تصمیم‌گیری را با عدم قطعیت بررسی کردند و بر روش‌های اولویت‌بندی تحت پیوند جدید انحراف نسبی جمعی و اتصال داخلی انحراف نسبی ضربی تمرکز کردند که به همه عناصر در ماتریس مقایسه زوجی اجازه می‌دهد انحراف قابل‌تحمل داشته باشند.

در این مقاله، یک رویکرد مبتنی بر «*DEA* با مرز دوگانه» را برای غلبه بر مشکلات *DEAHP* ارایه می‌کنیم. رویکرد *DEA* با مرز دوگانه از دو مدل *DEA* که از دیدگاه‌های خوش‌بینانه و بدبینانه معیارها یا گزینه‌های تصمیم را ارزیابی می‌کنند، برای به دست آوردن بردار اولویت‌های محلی از یک ماتریس مقایسه زوجی، صرف‌نظر از این‌که کاملا سازگار یا ناسازگار باشند، استفاده می‌کنند. سپس با استفاده از یک شاخص، وزن‌های به‌دست‌آمده از دیدگاه‌های خوش‌بینانه و بدبینانه را تلفیق می‌کنیم تا یک ارزیابی کلی از معیارها یا گزینه‌های تصمیم به دست آید.

مقاله به‌صورت ذیل سازمان‌دهی شده است؛ در بخش ۲، *DEAHP* را به‌اختصار مرور می‌کنیم و در بخش ۳، رویکرد *DEA* با مرز دوگانه را برای تعیین اولویت در *AHP* ارایه می‌کنیم. بخش ۴ کاربردهای بالقوه رویکرد *DEA* با مرز دوگانه را با بررسی یک مثال کاربردی به نمایش می‌گذارد. مقایسه با سایر روش‌های اولویت‌دهی در بخش ۵ ارایه می‌شود. نتیجه‌گیری‌ها در بخش ۶ بیان شده‌اند.

## ۲- روش DEAHP

فرض کنید:

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (۱)$$

یک ماتریس مقایسه زوجی باشد که در این‌جا $a_{ii}=1$ و $a_{ji}=1/a_{ij}$ برای $j\neq i$ و $W=(w_1,\dots,w_n)^T$ بردار وزن آن است. در *DEAHP*، هر سطر ماتریس به‌عنوان یک *DMU* و ستون‌ها به‌عنوان خروجی‌ها درنظر گرفته می‌شوند. یک ورودی ساختگی وارد می‌شود تا به‌وسیله مدل‌های *DEA* حل شود. راماناتان [6] از مدل *CCR* [7] در حالت با ماهیت ورودی برای به دست آوردن وزن‌های محلی استفاده کرد:

$$Max\ w_o=\sum_{j=1}^{n}a_{oj}v_j,$$

$$s.t.\begin{cases}u_1=1,\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j-u_1\le 0,\quad i=1,\dots,n,\\ u_1,v_j\ge 0,\quad j=1,\dots,n.\end{cases}\qquad (۲)$$

در این‌جا $w_o$ نمره کارایی $DMU_o$ است که به‌عنوان وزن محلی آن درنظر گرفته می‌شود. **مدل (۲)** برای همه *DMUs* حل می‌شود تا بردار اولویت محلی $W^*=(w_1^*,\dots,w_n^*)^T$ ماتریس مقایسه زوجی $A$ به دست آید. ثابت شده است که *DEAHP* برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملا سازگار ( $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$ برای $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$)، وزن‌های صحیح را ارایه می‌کند [6].

اما مثال قبل در بخش ۱ به‌روشنی نشان داد که *DEAHP*، یعنی **مدل (۲)**، ممکن است گاهی از اوقات اولویت‌های محلی خلاف شهود برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار به دست آورد؛ بنابراین، کاربرد آن قابل اعتماد نیست. در بخش بعد، یک رویکرد *DEA* با مرز دوگانه را برای تعیین اولویت در *AHP* ایجاد می‌کنیم تا بر معایب *DEAHP* فایق آییم.

## ۳- رویکرد DEA با مرز دوگانه

### ۳-۱- مدل DEA/AR خوش‌بینانه برای AHP

وانگ و همکاران [15] برای تعیین مطلوب‌ترین وزن‌های معیارها یا گزینه‌های تصمیم، مدل *DEA/AR* زیر را پیشنهاد کردند:

$$Max\ w_o,$$

$$s.t.\begin{cases}w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j\le 1,\quad i=1,\dots,n,\\ w_j/\beta\le v_j\le w_j/n,\quad j=1,\dots,n.\end{cases}\qquad (۳)$$

در این‌جا اندیس « $o$ » به معیار تصمیم یا گزینه مورد ارزیابی، یعنی $DMU_o$ اشاره دارد، $v_j$ ( $j=1,\dots,n$ ) متغیرهای تصمیم هستند و $\beta$ کران بالای بردار ویژه بیشینه ماتریس مقایسه زوجی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\beta=min\left\{\max_i\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_j\right),\max_i\left(\frac{1}{c_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}c_j\right)\right\}.\qquad (۴)$$

در این‌جا $r_1,\dots,r_n$ و $c_1,\dots,c_n$ به ترتیب مجموع سطری و مجموع ستونی ماتریس مقایسه زوجی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ هستند. روشی را که از **مدل (۳)** برای به دست آوردن وزن‌ها از ماتریس‌های مقایسه زوجی استفاده می‌کند، روش *DEA/AR* خوش‌بینانه می‌نامند و وزن‌های حاصله را وزن‌های خوش‌بینانه می‌نامند [15].

**مدل (۳)** کارایی هر *DMU* را به‌عنوان اولویت آن تعریف می‌کند، یعنی $w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j$ ( $i=1,\dots,n$ ). قیود $w_j/\beta\le v_j\le w_j/n$ ( $j=1,\dots,n$ ) ناحیه اطمینان تحمیل‌شده بر **مدل (۳)** *DEA/AR* هستند. با حل **مدل (۳)** برای هر $w_i$ ( $i=1,\dots,n$ )، مطلوب‌ترین وزن‌ها برای $n$ معیار یا گزینه تصمیم را می‌توان به‌آسانی به دست آورد. ثابت شده است که **مدل (۳)** می‌تواند وزن‌های حقیقی را برای ماتریس‌های مقایسه زوجی سازگار ایجاد کند [15].

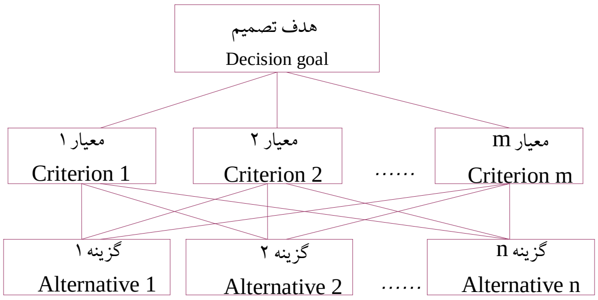
اکنون به مثال‌های عددی بررسی‌شده در بخش ۱ می‌پردازیم. برای ماتریس مقایسه زوجی $A$، بردار بهترین اولویت محلی $W_{DEA/AR}^*=(1.000,0.551,0.127,0.482,0.836,0.543)^T$ را با حل **مدل (۳)** به ترتیب برای هر یک از شش معیار یا گزینه تصمیم داریم. روشن است که بردار اولویت محلی به‌دست‌آمده از **مدل (۳)** معنی‌دار و منطقی است. برای ماتریس مقایسه زوجی $B$، با حل **مدل (۳)** به ترتیب برای هر یک از پنج معیار یا گزینه تصمیم، داریم $W_{DEA/AR}^*=(0.445,0.684,1.000,1.000,0.695)^T$ که معنی‌دار است.



عزیزی/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۷۹۹-۷۸۵

### ۲-۳- تجمیع بهترین اولویت‌های محلی

برای یک ساختار سلسله‌مراتبی در *AHP* که در **شکل ۱** نشان داده شده است، فرض کنید بهترین اولویت‌های محلی برای معیارها و گزینه‌ها همگی با روش *DEA/AR* به دست آمده است (**مدل (۳)**). فرض کنید $w_1,\ldots,w_m$ بهترین اولویت‌های محلی $m$ معیار تصمیم و $w_{1j},\ldots,w_{nj}$ بهترین اولویت‌های محلی $n$ گزینه تصمیم نسبت به معیار $jth\ (j=1,\ldots,m)$ باشد که در **جدول ۱** نشان داده شده‌اند و یک ماتریس تصمیم را بر اساس اصطلاحات *MCDM* تشکیل می‌دهند. بر اساس ماتریس تصمیم **جدول ۱**، اولویت سراسری هر گزینه تصمیم را می‌توان با استفاده از روش وزن‌دهی جمعی ساده [16] در *MCDM* به دست آورد. نتایج در ستون آخر **جدول ۱** نشان داده شده است. مساله این است که آیا ما باید بهترین اولویت‌های محلی را قبل از تجمیع نرمال‌سازی کنیم یا خیر.




**شکل ۱- یک ساختار سلسله‌مراتبی در تصمیم‌گیری AHP.**
**Figure 1- A hierarchical structure by AHP decision making.**

**جدول ۱- محاسبه وزن‌های مرکب.**
**Table 1- Computation of composite weights.**

| گزینه | معیار | | | | وزن مرکب |
|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ | $\cdots$ | $w_m$ | |
| $A_1$ | $w_{11}$ | $w_{12}$ | $\cdots$ | $w_{1m}$ | $\sum_{j=1}^{m} w_{1j} w_j$ |
| $A_2$ | $w_{21}$ | $w_{22}$ | $\cdots$ | $w_{2m}$ | $\sum_{j=1}^{m} w_{2j} w_j$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $A_n$ | $w_{n1}$ | $w_{n2}$ | $\cdots$ | $w_{nm}$ | $\sum_{j=1}^{m} w_{nj} w_j$ |

در *AHP* سنتی، اولویت‌های محلی همواره نرمال‌سازی می‌شوند، به‌طوری‌که مجموع آن‌ها یک می‌شود. بلتون و جئر [17] پیشنهاد می‌کنند که اولویت‌های محلی باید با تقسیم کردن آن‌ها بر مقدار بیشینه آن‌ها نرمال‌سازی شوند نه بر مجموع آن‌ها، به‌طوری‌که اولویت محلی بیشینه برابر با یک شود. ادعا شده است که این نرمال‌سازی می‌تواند از پدیده برعکس شدن رتبه اجتناب کند؛ اما ساعتی و وارگاس [18] مثال متقابلی ارایه کردند تا نشان دهند که روش نرمال‌سازی بلتون و جئر [17] نیز موجب معکوس شدن رتبه‌ها می‌شود. *DEAHP* نیز اولویت‌های محلی را بر اساس مقدار بیشینه آن‌ها نرمال‌سازی می‌کند، به این صورت که هر اولویت را منحصر می‌کند که کوچک‌تر یا مساوی با یک باشد.

منظور از نرمال‌سازی در *MCDM* آن است که ابعاد معیارها یا گزینه‌های مختلف حذف شوند و آن‌ها در محدوده تغییرات، مثلا *[0,1]*، باهم قابل‌مقایسه باشند. تا جایی که به *AHP* مربوط می‌شود، تمام معیارها و گزینه‌های تصمیم با استفاده از مقیاس ۹ امتیازی ارزیابی می‌شوند و بنابراین، مشکل واحدهای ابعادی ندارند. بهترین اولویت‌های محلی که با **مدل (۳)** *DEA* تعیین شده است، همگی در بازه *[0,1]* هستند. این دو ویژگی سبب می‌شوند که نرمال‌سازی درواقع برای بهترین اولویت‌های محلی ضروری نباشد.

### ۳-۳- مدل DEA/AR بدبینانه برای AHP

به خاطر نیاز به توسعه نظریه *DEAHP* و روش‌های آن و هم کاربردهای واقعی آن، مدل *DEAHP* بدبینانه جدیدی را پیشنهاد می‌کنیم که یک معیار یا گزینه تصمیم را از دیدگاه بدبینانه ارزیابی می‌کند. وزن‌های که از دیدگاه بدبینانه اندازه‌گیری شده‌اند، وزن‌های بدبینانه

نامیده می‌شوند. وزن بدبینانه معیار یا گزینه تصمیم تحت ارزیابی نسبت به معیارها یا گزینه‌های تصمیم دیگر را می‌توان با مدل *DEA/AR* بدبینانه زیر اندازه‌گیری کرد:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \hat{w}_o\,,\\
&s.t.\ \begin{cases}\hat{w}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \geq 1, & i = 1,\ldots,n,\\ \hat{w}_j / \beta \leq v_j \leq \hat{w}_j / n, & j = 1,\ldots,n.\end{cases}
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

در این‌جا نیز اندیس پایین « $o$ » نشان‌دهنده گزینه یا معیار تصمیم مورد ارزیابی یعنی $DMU_o$ است و $v_j$ ( $j = 1,\ldots,n$ ) متغیرهای تصمیم هستند و $\beta$ از **رابطه (٤)** تعیین می‌شود. درصورتی‌که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\hat{w}_o^* = 1$ باشد، آن‌گاه گفته می‌شود که گزینه یا معیار تصمیم تحت ارزیابی ناکارای *DEA/AR* یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت گفته می‌شود که غیر ناکارای بدبینانه است. واضح است که غیر کارای خوش‌بینانه لزوما به معنای ناکارای بدبینانه نیست و به همین ترتیب، غیر ناکارای بدبینانه لزوما به معنای کارای خوش‌بینانه نیست. برخلاف **مدل (۳)** که به آن مدل *DEA/AR* خوش‌بینانه می‌گویند، **مدل (۵)** *DEA/AR* بدبینانه در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر گزینه یا معیار تصمیم می‌باشد.

دوباره به مثال‌های عددی بررسی‌شده در بخش ۱ می‌پردازیم. برای ماتریس مقایسه زوجی $A$، بردار بهترین اولویت محلی $W^*_{DEA/AR} = (7.845, 3.154, 1.000, 3.455, 5.538, 3.198)^T$ را با حل **مدل (۵)** به ترتیب برای هر یک از شش معیار یا گزینه تصمیم داریم. روشن است که بردار اولویت محلی به‌دست‌آمده از **مدل (۵)** و **مدل (۳)** در رتبه $C_2$ و $C_4$ اختلاف دارند. برای ماتریس مقایسه زوجی $B$، با حل **مدل (۵)** به ترتیب برای هر یک از پنج معیار یا گزینه تصمیم داریم: $W^*_{DEA/AR} = (1.000, 1.472, 2.229, 2.183, 1.545)^T$. روشن است که بردار اولویت محلی به‌دست‌آمده از **مدل (۵)** بین رتبه $C_3$ و $C_4$ افتراق قایل شده است، درحالی‌که **مدل (۳)** چنین قدرت افتراقی ندارد.

## ۴-۳- وزن میانگین توانی-ادغام وزن‌های خوش‌بینانه و بدبینانه

ازنظر تئوری، وزن‌های خوش‌بینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند. برای این منظور، وزن‌های بدبینانه را باید تعدیل کرد. فرض کنید $\alpha$ ( $0 < \alpha < 1$ ) ضریب تعدیل باشد. آن‌گاه وزن بدبینانه تعدیل‌شده را می‌توان به‌صورت $\tilde{\psi}^*_j = \alpha \hat{w}^*_j$ ( $j = 1,\ldots,n$ ) نوشت که باید شرط $\tilde{\psi}^*_j = \alpha \hat{w}^*_j < w^*_j$ ( $j = 1,\ldots,n$ ) را تامین کند؛ یعنی $\alpha < min_{j \in \{1,\ldots,n\}} \{w^*_j / \hat{w}^*_j\}$. بر این اساس، بازه وزن مربوط به گزینه یا معیار تصمیم $jth$ ( $j = 1,\ldots,n$ ) را می‌توان به‌صورت $[\alpha \hat{w}^*_j, w^*_j]$ ( $j = 1,\ldots,n$ ) بیان کرد. این مطلب شناخته شده است که برای مقایسه اعداد بازه‌ای غالبا باید نقطه وسط آن‌ها را باهم مقایسه کرد [19]. نقطه وسط وزن بازه‌های فوق با عبارت $(\alpha \hat{w}^*_j + w^*_j) / 2\ (j = 1,\ldots,n)$ به دست می‌آید. به خاطر وجود پارامتر $\alpha$، رتبه‌بندی در میان $n$ گزینه یا معیار تصمیم تحت تاثیر مقدار $\alpha$ قرار می‌گیرد. برای حذف تاثیر $\alpha$ روی رتبه‌بندی گزینه‌ها یا معیارهای تصمیم و اجتناب از دشواری تعیین پارامتر $\alpha$، ما میانگین توانی وزن‌های به‌دست‌آمده از **مدل (۳)** و **مدل (۵)** را برای رتبه‌بندی گزینه‌ها یا معیارهای تصمیم پیشنهاد می‌کنیم.

فرض کنید $b_1,\ldots,b_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند و $r \neq 0$. در این صورت

$$M^r_n(b_1,\ldots,b_n) = \sqrt[r]{\frac{1}{n}(b^r_1 + \cdots + b^r_n)}, \qquad (۶)$$

را میانگین توانی می‌نامند. برای رتبه‌بندی گزینه‌ها یا معیارهای تصمیم، می‌توان **رابطه (٦)** را به‌صورت زیر تغییر داد:

$$Q_j = \sqrt[3]{\frac{(w^*_j)^3 + (\hat{w}^*_j)^3}{2}}, \quad j = 1,\ldots,n. \qquad (۷)$$

عموما هر چه وزن‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بزرگ‌تر باشند، گزینه یا معیار تصمیم دارای اولویت بالا شناسایی می‌شود؛ بنابراین، با توجه به **رابطه (۷)** می‌توان از میانگین توانی به‌عنوان وزن عملکرد کلی، برای رتبه‌بندی گزینه‌ها یا معیارهای تصمیم استفاده کرد. از آن‌جا که مقدار $1/\sqrt[3]{2}$ تاثیری در رتبه‌بندی گزینه‌ها یا معیارهای تصمیم ندارد، لذا شاخص زیر را به‌عنوان وزن عملکرد کلی هر گزینه یا معیار تصمیم درنظر می‌گیریم:



عزیزی / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۷۹۹-۷۸۵

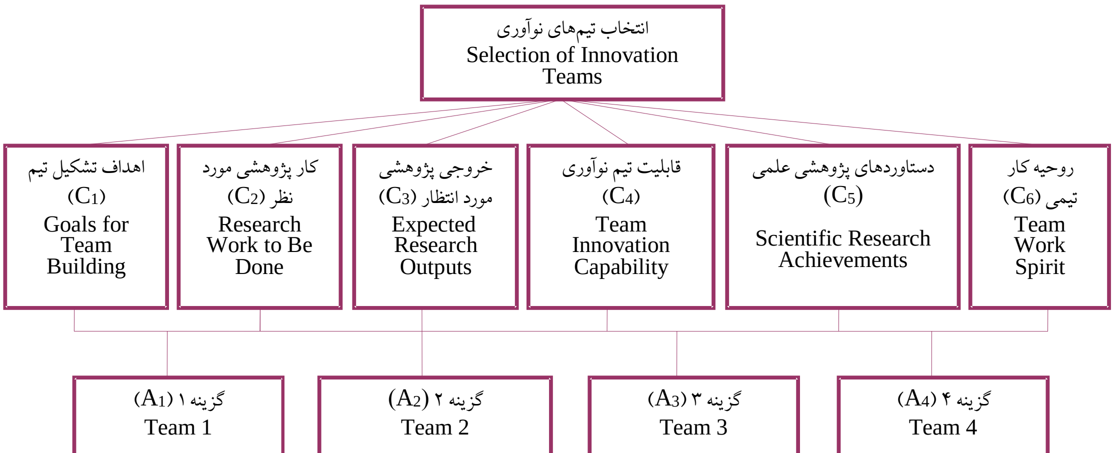
$$\omega_j = \sqrt[3]{(\hat{w}_j^*)^3 + (w_j^*)^3}, \quad j = 1,\dots,n. \qquad (۸)$$

$\omega_j$ ($j=1,\dots,n$) میانگین توانی وزن گزینه یا معیار تصمیم $jth$ را از هر دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه به‌طور هم‌زمان اندازه‌گیری می‌کند. از آن‌جا که وزن گزینه یا معیار تصمیم تعریف‌شده توسط **رابطه (۸)** تلفیق وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری شده از هر دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه است، به آن وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر «*DEA* با مرز دوگانه» می‌گوییم که جامع‌تر و واقع‌گرایانه‌تر از وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر *DEA/AR* خوش‌بینانه یا بدبینانه است و به‌صورت بهتر و دقیق‌تری می‌تواند منعکس‌کننده وزن گزینه یا معیار تصمیم باشد.

در این‌جا مثال‌های عددی بررسی‌شده در بخش ۱ را با استفاده از رویکرد *DEA* با مرز دوگانه ارزیابی می‌کنیم. برای ماتریس مقایسه زوجی $A$، بردار اولویت محلی $W_{DFA} = (7.850, 3.160, 1.001, 3.488, 5.544, 3.203)^T$ را با **رابطه (۸)** به ترتیب برای هر یک از شش معیار یا گزینه تصمیم به دست آوردیم. روشن است که بردار اولویت محلی به‌دست‌آمده از **رابطه (۸)** هر دو وزن خوش‌بینانه و بدبینانه را باهم ادغام می‌کند و لذا جامع‌تر است. برای ماتریس مقایسه زوجی $B$، با **رابطه (۸)** به ترتیب برای هر یک از پنج معیار یا گزینه تصمیم، داریم: $W_{DFA} = (1.029, 1.520, 2.294, 2.251, 1.591)^T$. روشن است که بردار اولویت محلی به‌دست‌آمده از **رابطه (۸)** هم بین رتبه $C_3$ و $C_4$ افتراق قایل شده است، درحالی‌که ارزیابی فقط از دیدگاه خوش‌بینانه چنین قدرت افتراقی را ندارد.

## ۴- مثال کاربردی

ایجاد تیم نوآوری یک راهبرد توسعه مهم در دانشگاه‌های چین است. دانشگاهی در چین می‌خواهد برای علوم انسانی و اجتماعی یک تیم نوآوری بسازد [20]. چهار گزینه توسط دانشکده‌های مختلف ارایه شده‌اند، ولی فقط یکی از آن‌ها باید به‌عنوان تیم نوآوری انتخاب شود. معیارهای انتخاب که توسط کمیته علمی دانشگاه درنظر گرفته شده‌اند، عبارت‌اند از: اهداف تشکیل تیم، کارهای تحقیقاتی موردنظر، خروجی تحقیقاتی مورد انتظار، قابلیت نوآوری تیم، دستاوردهای پژوهشی علمی و روحیه کار تیمی. **شکل ۲** ساختار سلسله‌مراتبی انتخاب تیم‌های نوآوری را نشان می‌دهد. به کمیته علمی دانشگاه برای این انتخاب، روش *AHP* به‌عنوان ابزار تصمیم‌گیری پیشنهاد می‌شود. کمیته علمی باید هنگام آن‌جام مقایسه‌های زوجی بحث کافی آن‌جام دهد تا اتفاق‌نظر در میان اعضای کمیته ایجاد شود. **جدول ۲** ماتریس‌های مقایسه زوجی ایجادشده توسط کمیته علمی دانشگاه و اولویت‌های مربوط به آن‌ها بر اساس روش بردار ویژه و *DEA* با مرز دوگانه را نشان می‌دهد. بر اساس **جدول ۲** می‌توان دید که $C_4$ مهم‌ترین معیار برای انتخاب تیم نوآوری است، $C_5$ و $C_1$ بعدازآن قرار گرفته‌اند. در این سه معیار، گزینه‌های $A_1$ و $A_3$ مشخصا عملکردی بهتر از $A_2$ و $A_4$ دارند؛ بنابراین، انتخاب نهایی احتمالا بین $A_1$ و $A_3$ است. **جدول ۳** اولویت‌های سراسری چهار گزینه را که از **جدول ۲** تجمیع شده است نشان می‌دهد. اولویت‌های سراسری به‌دست‌آمده از روش‌های مختلف همگی نشان می‌دهد که $A_1$ بهترین گزینه است؛ بنابراین، انتخاب نهایی ساخت تیم نوآوری، $A_1$ است. بر اساس این دو جدول به‌آسانی می‌توان دید که *DEA* با مرز دوگانه برای تمام ماتریس‌های مقایسه زوجی **جدول ۲** و اولویت‌های سراسری **جدول ۳**، رتبه‌بندی اولویت دقیقا یکسانی با روش بردار ویژه ایجاد می‌کند. این بازه نشان دهنده درستی استفاده از *DEA* با مرز دوگانه برای به دست آوردن اولویت‌های *AHP* است.




شکل ۲- ساختار سلسله‌مراتبی انتخاب تیم نوآوری.

**Figure 2- Hierarchical structure for innovation team selection.**

جدول ۲- ماتریس‌های مقایسه زوجی برای شش معیار تصمیم و چهار گزینه و اولویت‌های آن‌ها با EM و مدل‌های DEA/AR.

**Table 2- Pairwise comparison matrices for six selection criteria and four alternative teams and their priorities determined by EM and DEA/AR modesl.**

الف- مقایسه زوجی شش معیار تصمیم نسبت به هدف تصمیم‌گیری.

**A- Pairwise comparisons of six selection criteria with respect to decision goal.**

| معیار | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $C_1$ | 1 | 2 | 3 | 1.3 | 1.2 | 4 | 0.1640 | 0.4365 | 3.6195 |
| $C_2$ | 1.2 | 1 | 2 | 1.3 | 1.2 | 2 | 0.1075 | 0.2862 | 2.3720 |
| $C_3$ | 1.3 | 1.2 | 1 | 1.5 | 1.4 | 2 | 0.0654 | 0.1740 | 1.4456 |
| $C_4$ | 3 | 3 | 5 | 1 | 2 | 7 | 0.3791 | 1.0000 | 8.3762 |
| $C_5$ | 2 | 2 | 4 | 1.2 | 1 | 5 | 0.2389 | 0.6332 | 5.2759 |
| $C_6$ | 1.4 | 1.2 | 1.2 | 1.7 | 1.5 | 1 | 0.0450 | 0.1194 | 1.0000 |

ب- مقایسه چهار گزینه نسبت به معیار $C_1$.

**B- Pairwise comparisons of four alternative teams with respect to criterion C1.**

| معیار | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $A_1$ | 1 | 7 | 3 | 5 | 0.5650 | 1.0000 | 10.1111 |
| $A_2$ | 1.7 | 1 | 1.5 | 1.3 | 0.0553 | 0.0989 | 1.0000 |
| $A_3$ | 1.3 | 5 | 1 | 3 | 0.2622 | 0.4699 | 4.6605 |
| $A_4$ | 1.5 | 3 | 1.3 | 1 | 0.1175 | 0.2118 | 2.0976 |

*نسبت سازگاری (CR) = 0.0433 و β = 4.900

ج- مقایسه چهار گزینه نسبت به معیار $C_2$.

**C- Pairwise comparisons of four alternative teams with respect to criterion $C_2$.**

| معیار | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $A_1$ | 1 | 1.3 | 3 | 1.2 | 0.1624 | 0.3120 | 2.1366 |
| $A_2$ | 3 | 1 | 7 | 3 | 0.5390 | 1.0000 | 6.9825 |
| $A_3$ | 1.3 | 1.7 | 1 | 1.3 | 0.0678 | 0.1432 | 1.0000 |
| $A_4$ | 2 | 1.3 | 3 | 1 | 0.2307 | 0.3995 | 2.7304 |

*نسبت سازگاری (CR) = 0.0254 و β = 4.429

د- مقایسه چهار گزینه نسبت به معیار $C_3$.

**D- Pairwise comparisons of four alternative teams with respect to criterion $C_3$.**

| معیار | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $A_1$ | 1 | 1.5 | 1.3 | 1.7 | 0.0587 | 0.1224 | 1.0000 |
| $A_2$ | 5 | 1 | 3 | 1.2 | 0.3156 | 0.6592 | 5.3274 |
| $A_3$ | 3 | 1.3 | 1 | 1.3 | 0.1442 | 0.3022 | 2.4461 |
| $A_4$ | 7 | 2 | 3 | 1 | 0.4814 | 1.0000 | 8.1690 |

*نسبت سازگاری (CR) = 0.0237 و β = 4.441

عزیزی / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۷۹۹-۷۸۵

ه- مقایسه چهار گزینه نسبت به معیار $C_4$.

**E- Pairwise comparisons of four alternative teams with respect to criterion $C_4$.**

| معیار | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $A_1$ | 1 | 2 | 1.3 | 5 | 0.2480 | 0.4505 | 4.1839 |
| $A_2$ | 1.2 | 1 | 1.3 | 2 | 0.1394 | 0.2535 | 2.3508 |
| $A_3$ | 3 | 3 | 1 | 9 | 0.5535 | 1.0000 | 9.2988 |
| $A_4$ | 1.5 | 1.2 | 1/9 | 1 | 0.0591 | 0.1075 | 1.0000 |

*نسبت سازگاری (CR) = 0.0223 و $\beta = 4.423$

و- مقایسه چهار گزینه نسبت به معیار $C_5$.

**F- Pairwise comparisons of four alternative teams with respect to criterion $C_5$.**

| معیار | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $A_1$ | 1 | 7 | 3 | 5 | 0.5565 | 1.0000 | 10.1111 |
| $A_2$ | 1.7 | 1 | 1.5 | 1.3 | 0.0542 | 0.0989 | 1.0000 |
| $A_3$ | 1.3 | 5 | 1 | 4 | 0.2808 | 0.5169 | 5.0069 |
| $A_4$ | 1.5 | 3 | 1.4 | 1 | 0.1085 | 0.2017 | 1.9567 |

*نسبت سازگاری (CR) = 0.0633 و $\beta = 5.061$

ی- مقایسه چهار گزینه نسبت به معیار C6.

**G- Pairwise comparisons of four alternative teams with respect to criterion $C_6$.**

| معیار | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | وزن‌های EM | مدل‌های DEA/AR | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مدل (۳) | مدل (۵) |
| $A_1$ | 1 | 1.2 | 3 | 1.5 | 0.1310 | 0.2299 | 2.3101 |
| $A_2$ | 2 | 1 | 5 | 1.3 | 0.2388 | 0.4184 | 4.2152 |
| $A_3$ | 1.3 | 1.5 | 1 | 1.7 | 0.0563 | 0.0989 | 1.0000 |
| $A_4$ | 5 | 3 | 7 | 1 | 0.5738 | 1.0000 | 10.1111 |

*نسبت سازگاری (CR) = 0.0288 و $\beta = 4.765$

جدول ۳- اولویت‌های سراسری برای چهار گزینه با تجمیع از جدول ۲.

**Table 3- Global priorities of the four alternative teams aggregated from Table 2.**

الف- با روش EM.

**A- By Eigenvector Method (EM).**

| | معیارها | | | | | | اولویت‌های سراسری |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | |
| وزن‌های معیارها | 0.1640 | 0.1075 | 0.0654 | 0.3791 | 0.2389 | 0.0450 | |
| گزینه ۱ | 0.5650 | 0.1624 | 0.0587 | 0.2480 | 0.5565 | 0.1310 | 0.3469 |
| گزینه ۲ | 0.0553 | 0.5390 | 0.3156 | 0.1394 | 0.0542 | 0.2388 | 0.1642 |
| گزینه ۳ | 0.2622 | 0.0678 | 0.1442 | 0.5535 | 0.2808 | 0.0563 | 0.3392 |
| گزینه ۴ | 0.1175 | 0.2307 | 0.4814 | 0.0591 | 0.1085 | 0.5738 | 0.1497 |

ب- با مدل (۳) DEA.

B- By DEA model (3).

| | معیارها | | | | | | اولویت‌های سراسری |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | |
| وزن‌های معیارها | 0.4365 | 0.2862 | 0.1740 | 1.0000 | 0.6332 | 0.1194 | |
| گزینه ۱ | 1.0000 | 0.3120 | 0.1224 | 0.4505 | 1.0000 | 0.2299 | 1.6582 |
| گزینه ۲ | 0.0989 | 1.0000 | 0.6592 | 0.2535 | 0.0989 | 0.4184 | 0.8102 |
| گزینه ۳ | 0.4699 | 0.1432 | 0.3022 | 1.0000 | 0.5169 | 0.0989 | 1.6378 |
| گزینه ۴ | 0.2118 | 0.3995 | 1.0000 | 0.1075 | 0.2017 | 1.0000 | 0.7354 |

ج- با مدل (۵) DEA.

C- By DEA model (5).

| | معیارها | | | | | | اولویت‌های سراسری |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | |
| وزن‌های معیارها | 3.6195 | 2.3720 | 1.4456 | 8.3762 | 5.2759 | 1.0000 | |
| گزینه ۱ | 10.1111 | 2.1366 | 1.0000 | 4.1839 | 10.1111 | 2.3101 | 133.8112 |
| گزینه ۲ | 1.0000 | 6.9825 | 5.3274 | 2.3508 | 1.0000 | 4.2152 | 57.0652 |
| گزینه ۳ | 4.6605 | 1.0000 | 2.4461 | 9.2988 | 5.0069 | 1.0000 | 128.0813 |
| گزینه ۴ | 2.0976 | 2.7304 | 8.1690 | 1.0000 | 1.9567 | 10.1111 | 54.6885 |

د- با DEA با مرز دوگانه.

D- By double-frontier DEA.

| | رتبه چهار گزینه بر اساس معادله (۸) |
|---|---|
| گزینه ۱ | 133.8113 (1) |
| گزینه ۲ | 57.0652 (3) |
| گزینه ۳ | 128.0814 (2) |
| گزینه ۴ | 54.6886 (4) |

## ۵- مقایسه با سایر روش‌های اولویت‌دهی

در این بخش، روش اولویت‌دهی پیشنهادی را با روش بردار ویژه، روش کم‌ترین مربعات، روش کم‌ترین مربعات وزنی، روش کم‌ترین مربعات لگاریتمی و رویکرد ماکزیموم‌سازی ضریب همبستگی (*CCMA*) مقایسه می‌کنیم [21] تا تفاوت‌ها، محاسن و معایب آن‌ها را نشان دهیم.

### ۵-۱- روش بردار ویژه

*EM* ابتدا توسط ساعتی [22] پیشنهاد شد که نشان داد بردار اولویت موردنظر $W$ را می‌توان با بردار ویژه سمت راست اصلی ماتریس $A$ تقریب زد. بردار اولویت را با حل دستگاه خطی زیر می‌توان استخراج کرد:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda_{max} w_i, \quad i=1,\dots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w_i > 0, \quad i=1,\dots,n. \end{cases} \tag{۹}$$

در این‌جا $\lambda_{max}$ مقدار ویژه بیشینه ماتریس مقایسه زوجی $A$ است. مطابق با نظریه مقدار ویژه، قضیه *Perron-Frobenius* تضمین می کند که $\lambda_{max}$ و $W$ منحصر به فرد، حقیقی و مثبت هستند زیرا همه درایه‌های ماتریس $A$ مثبت هستند. *EM* تخمین نسبتا خوبی با

آشفتگی‌های کوچک در نزدیکی ماتریس سازگار ارایه می‌دهد. با این‌حال، هنگامی که درجه ناسازگاری زیاد می‌شود-یعنی تفاوت بین $\lambda_{max}$ و $n$ افزایش می‌یابد - اعتبار جواب را نمی‌توان تضمین کرد [23].

## ۲-۵- روش کم‌ترین مربعات مستقیم

با درنظر گرفتن مجموع مربعات خطای ضمنی $EM$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-w_i/w_j)^2, \qquad (۱۰)$$

که به‌طور کلی کمینه نیست، جنسن [24] روش کم‌ترین مربعات را برای به حداقل رساندن مجموع مربعات خطای ضمنی پیشنهاد کرد:

$$\begin{aligned} & \min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-w_i/w_j)^2, \\ & s.t. \\ & \sum_{i=1}^{n}w_i=1, \\ & w_i>0, \quad i=1,\dots,n. \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

حل عددی روش کم‌ترین مربعات به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی غیر خطی دشوار است. گولانی و کرس [25] پیشنهاد کردند که ممکن است جواب‌های متعددی داشته باشد. برای حذف این موضوع چندین روش اولویت‌بندی که مبتنی بر بهینه‌سازی است، پیشنهاد شده است.

## ۳-۵- روش کم‌ترین مربعات وزنی

چو و همکاران [2] روش کم‌ترین مربعات وزنی را با کمینه‌سازی تابع نرم $l_2$، به‌صورت زیر فرمول‌بندی کردند:

$$\begin{aligned} & \min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j-w_i)^2 \\ & s.t. \\ & \sum_{i=1}^{n}w_i=1, \\ & w_i>0, \quad i=1,\dots,n. \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از ضریب لاگرانژ می‌توان **مدل (۱۲)** را به یک دستگاه خطی تبدیل کرد. بلانکمیر [26] نشان داد که جواب روش کم‌ترین مربعات وزنی منحصر به فرد، اکیدا مثبت و رتبه را به شدت حفظ می‌کند. با توجه به این ویژگی‌ها به نظر می‌رسد روش کم‌ترین مربعات وزنی به اندازه سایر روش‌ها مفید باشد.

## ۴-۵- روش مربع خی

جنسن [27] روش مربع خی[1] را برای استفاده از فاصله $\chi^2$ به عنوان تابع هدف برای تخمین بردار اولویت پیشنهاد کرد:

$$\begin{aligned} & \min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(a_{ij}-w_i/w_j)^2}{w_i/w_j}\right) \\ & s.t. \\ & \sum_{i=1}^{n}w_i=1, \\ & w_i>0, \quad i=1,\dots,n. \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

[1] Chi-square method

به دلیل تابع هدف غیر خطی، مربع خی نسبت به سایر روش‌های اولویت‌بندی ترجیح کمتری دارد.

### ۵-۵- روش کم‌ترین مربعات لگاریتمی

روش کم‌ترین مربعات لگاریتمی از دیدگاه آماری با استفاده از میانگین هندسی عناصر سطر $ith$ ماتریس $A$ ، به عنوان تخمین بردار اولویت توسعه داده شد. برای کم‌ترین مربعات لگاریتمی، نرمال‌سازی ضربی $\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$ که معادل $\sum_{i=1}^{n} ln\, w_i = 0$ است، تحمیل شده است.

$$\begin{aligned} & min\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}^{n}(ln\, a_{ij} - (ln\, w_i - ln\, w_j))^2 \\ & s.t. \\ & \prod_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ & w_i > 0, \quad i = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

کروفورد و ویلیامز [28] نشان دادند که خطای قضاوت تصمیم‌گیرندگان از توزیع نرمال لگاریتمی پیروی کند، مطلوب است. تابع هدف در تفاضل $(ln\, w_i - ln\, w_j)$ اکیدا محدب است و بنابراین اکیدا محدب در $W$ است؛ بنابراین، کم‌ترین مربعات لگاریتمی یک جواب منحصر به فرد دارد که می توان آن را به سادگی در نقطه‌ای یافت که مشتق جزیی مرتبه اول برابر صفر است.

### ۶-۵- رویکرد بیشینه‌سازی ضریب همبستگی

وانگ و همکاران [21] یک روش اولویت را پیشنهاد کردند: رویکرد بیشینه‌سازی ضریب همبستگی[1] که اولویت‌هایی را جستجو می‌کند که قادرند ضریب همبستگی را بین خود اولویت‌ها و هر ستون یک ماتریس مقایسه زوجی، بیشینه نمایند. این‌گونه اولویت‌ها منحصر به فرد نیستند و می‌توان آن‌ها را به طرق مختلفی تعیین کرد. $CCMA$ به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & Max\ J = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - \frac{1/n + \alpha\hat{w}_i^*}{1/n + \alpha\hat{w}_j^*}\right)^2, \\ & s.t. \\ & \alpha \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن $\hat{w}_i^*$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{w}_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\right)^2}}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{۱۶}$$

به‌علاوه

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \bar{a}_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_{kj} - \bar{a}_j)^2}}, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{۱۷}$$

که در این‌جا $\bar{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ .

[1] Correlation Coefficient Maximization Approach (CCMA)



عزیزی / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه: ۷۹۹-۷۸۵

مثال ۱: ماتریس مقایسه ناسازگار زیر را که توسط لیپووتسکی و کونکلین [29] بررسی شده است، درنظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

برای این ماتریس مقایسه زوجی $\beta = 14.4561$ به دست آمده است. **جدول ٤** بردارهای اولویت حاصل از روش‌های اولویت مختلف را نشان می‌دهد. به‌طوری‌که از **جدول ٤** واضح است، روش‌های مختلف اولویت به رتبه‌بندی‌های متفاوتی منجر می‌شوند. علت اصلی این مساله آن است که ماتریس مقایسه اولیه $A$ بسیار ناهمساز بود و باید آن را تنظیم کرد. لیپووتسکی و کونکلین [29] نشان دادند که ترتیب رتبه‌بندی تعدیل‌شده به‌صورت $w_8 > w_7 > w_1 > w_3 > w_2 > w_6 > w_5 > w_4$ است. رتبه‌بندی **رابطه (۸)** دقیقا معادل ترتیب رتبه‌بندی ایجادشده توسط $EM$ است.

**جدول ۴- بردارهای اولویت و ترتیب رتبه‌بندی برای مثال ۱ که از روش‌های اولویت مختلف به دست آمده است.**
**Table 4- Priority vectors and ranking orders for example 1 obtained by different priority methods.**

| | رابطه (۸) | روش بردار ویژه | روش کم‌ترین مربعات وزنی | روش کم‌ترین مربعات | روش کم‌ترین مربعات لگاریتمی | روش مربع خی | رویکرد ماکزیموم‌سازی ضریب همبستگی |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_1$ | 9.2017 (3) | 0.1730 (3) | 0.1427 (2) | 0.2202 (2) | 0.1748 (2) | 0.1797 (2) | 0.1815 (3) |
| $W_2$ | 2.5415 (5) | 0.0540 (5) | 0.0543 (5) | 0.0468 (5) | 0.0626 (5) | 0.0593 (5) | 0.0825 (5) |
| $W_3$ | 11.6188 (2) | 0.1881 (2) | 0.1213 (3) | 0.1494 (4) | 0.1487 (4) | 0.1785 (3) | 0.1508 (4) |
| $W_4$ | 1.0002 (8) | 0.0175 (8) | 0.0301 (8) | 0.0290 (8) | 0.0193 (8) | 0.0217 (8) | 0.0214 (8) |
| $W_5$ | 1.6782 (7) | 0.0310 (7) | 0.0465 (6) | 0.0413 (7) | 0.0356 (7) | 0.0369 (7) | 0.0426 (7) |
| $W_6$ | 1.8275 (6) | 0.0363 (6) | 0.0465 (6) | 0.0416 (6) | 0.0423 (6) | 0.0420 (6) | 0.0565 (6) |
| $W_7$ | 8.0517 (4) | 0.1668 (4) | 0.0891 (4) | 0.2029 (3) | 0.1670 (3) | 0.1431 (4) | 0.1818 (2) |
| $W_8$ | 12.0401 (1) | 0.3332 (1) | 0.4695 (1) | 0.2687 (1) | 0.3496 (1) | 0.3388 (1) | 0.2829 (1) |

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا با دو ماتریس مقایسه زوجی، عیب عمده $DEAHP$ را نشان دادیم که در آن اولویت‌های غیر منطقی و خلاف شهود برای ماتریس‌های مقایسه زوجی به دست می‌آمد، صرف نظر از این‌که سازگاری رضایت‌بخش داشته باشند یا خیر. برای غلبه بر این مشکل و به دست آوردن اولویت‌های منطقی برای ماتریس‌های مقایسه زوجی، یک رویکرد $DEA$ با مرز دوگانه را جهت تعیین اولویت در $AHP$ پیشنهاد کردیم. دو مدل $DEA$ خوش‌بینانه و بدبینانه ارایه شدند تا بهترین اولویت‌های محلی را از یک ماتریس مقایسه زوجی صرف نظر از این‌که سازگار کامل باشند یا نباشند به دست آورند. رویکرد $DEA$ با مرز دوگانه دارای مشخصات خوب زیر است:

۱. تولید وزن‌های حقیقی برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملا سازگار.
۲. تولید بهترین اولویت‌های محلی که منطقی و متناسب با قضاوت‌های ذهنی تصمیم گیرندگان هستند، برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار.
۳. قابل اعمال هم برای $AHP$ و هم برای مسایل تصمیم‌گیری گروهی $AHP$.

انتظار می‌رود که رویکرد $DEA$ با مرز دوگانه بتواند نقش مهمی در مطالعات و کاربردهای $AHP$ ایفا کند.

## سپاس‌گزاری

مؤلف مایل است از سردبیر و دو بررسی کننده بی‌نام به خاطر نظرات و پیشنهادات سازنده‌شان که در بهبود این مقاله بسیار سودمند بودند، تشکر کند.



## منابع


[1] Saaty, T. L. (1994). *Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process*. RWS Publications. https://cir.nii.ac.jp/crid/1130282271510816896

[2] Chu, A. T. W., Kalaba, R. E., & Spingarn, K. (1979). A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. *Journal of optimization theory and applications*, *27*, 531–538.

[3] Crawford, G. B. (1987). The geometric mean procedure for estimating the scale of a judgement matrix. *Mathematical modelling*, *9*(3–5), 327–334.

[4] Islei, G., & Lockett, A. G. (1988). Judgemental modelling based on geometric least square. *European journal of operational research*, *36*(1), 27–35.

[5] Cogger, K. O., & Yu, P. L. (1985). Eigenweight vectors and least-distance approximation for revealed preference in pairwise weight ratios. *Journal of optimization theory and applications*, *46*, 483–491.

[6] Ramanathan, R. (2006). Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process. *Computers & operations research*, *33*(5), 1289–1307.

[7] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, *2*(6), 429–444.

[8] Sevkli, M., Lenny Koh, S. C., Zaim, S., Demirbag, M., & Tatoglu, E. (2007). An application of data envelopment analytic hierarchy process for supplier selection: a case study of BEKO in Turkey. *International journal of production research*, *45*(9), 1973–2003.

[9] Wang, Y. M., Parkan, C., & Luo, Y. (2008). A linear programming method for generating the most favorable weights from a pairwise comparison matrix. *Computers & operations research*, *35*(12), 3918–3930.

[10] Andreolli, F., Bragolusi, P., D'Alpaos, C., Faleschini, F., & Zanini, M. A. (2022). An AHP model for multiple-criteria prioritization of seismic retrofit solutions in gravity-designed industrial buildings. *Journal of building engineering*, *45*, 103493. https://doi.org/10.1016/j.jobe.2021.103493

[11] Xu, Y., Dai, W., Huang, J., Li, M., & Herrera-Viedma, E. (2022). Some models to manage additive consistency and derive priority weights from hesitant fuzzy preference relations. *Information sciences*, *586*, 450–467.

[12] Ramík, J. (2021). Deriving priority vector from pairwise comparisons matrix with fuzzy elements. *Fuzzy sets and systems*, *422*, 68–82. DOI: https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.11.022

[13] Wang, Z. J. (2021). Eigenproblem driven triangular fuzzy analytic hierarchy process. *Information sciences*, *578*, 795–816.

[14] Zhang, J., Kou, G., Peng, Y., & Zhang, Y. (2021). Estimating priorities from relative deviations in pairwise comparison matrices. *Information sciences*, *552*, 310–327.

[15] Wang, Y. M., Chin, K. S., & Poon, G. K. K. (2008). A data envelopment analysis method with assurance region for weight generation in the analytic hierarchy process. *Decision support systems*, *45*(4), 913–921.

[16] Hwang, C. L., & Masud, A. S. M. (2012). *Multiple objective decision making-methods and applications: a state-of-the-art survey* (Vol. 164). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45511-7

[17] Belton, V., & Gear, T. (1983). On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies. *Omega*, *11*(3), 228–230.

[18] Saaty, T. L., & Vargas, L. G. (1984). The legitimacy of rank reversal. *Omega*, *12*(5), 513–516.

[19] Moore, R. E. (1979). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM. https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611970906.fm

[20] Wang, Y. M., Luo, Y., & Xu, Y. S. (2013). Cross-weight evaluation for pairwise comparison matrices. *Group decision and negotiation*, *22*(3), 483–497.

[21] Wang, Y. M., Parkan, C., & Luo, Y. (2007). Priority estimation in the AHP through maximization of correlation coefficient. *Applied mathematical modelling*, *31*(12), 2711–2718.

[22] Saaty, T. L. (1980). *The analytical hierarchy process, planning, priority*. McGraw-Hill.

[23] Saaty, T. L. (2003). Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. *European journal of operational research*, *145*(1), 85–91.

[24] Jensen, R. E. (1984). An alternative scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology*, *28*(3), 317–332.

[25] Golany, B., & Kress, M. (1993). A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices. *European journal of operational research*, *69*(2), 210–220.

[26] Blankmeyer, E. (1987). Approaches to consistency adjustment. *Journal of optimization theory and applications*, *54*, 479–488.

[27] Jensen, R. E. (1983). Comparisons of eigenvector, least squares, chi square, and logarithmic least squares methods of scaling a reciprocal matrix. *Working paper 153*, *552*, 310–327. http://www.trinity.edu/rjensen/127wp/127wp.htm

[28] Crawford, G., & Williams, C. (1985). A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of mathematical psychology*, *29*(4), 387–405.

[29] Lipovetsky, S., & Conklin, W. M. (2002). Robust estimation of priorities in the AHP. *European journal of operational research*, *137*(1), 110–122.

## ضمایم

### نسبت سازگاری





در $AHP$ کلاسیک، مساله تصمیم‌گیری چندمعیاری به‌صورت سلسله‌مراتبی در سطوح مختلف تنظیم می‌شود که حاوی تعداد متناهی از معیارها و گزینه‌ها هستند. با اعمال مقایسه‌های زوجی، اهمیت نسبی عناصر تصمیم از طریق نسبت‌های مقایسه زوجی دقیق تعیین می‌شود. آن‌گاه یک ماتریس مقایسه زوجی به دست می‌آید و از آن برای تجمیع وزن‌های گزینه‌ها استفاده می‌شود؛ اما وزن‌های به دست آمده فقط در صورتی قابل اعتماد هستند که قضاوت‌های یک تصمیم گیرنده کاملا سازگار باشند. در اکثر موارد، واقع‌گرایانه نیست که انتظار داشته باشیم که یک ماتریس مقایسه زوجی کاملا سازگار باشد، چرا که تصمیم گیرنده تحت تاثیر موارد زیادی از عدم اطمینان قرار می‌گیرد. در نتیجه، تعریف ماتریس‌های مقایسه زوجی سازگار توسط ساعتی [22] ارایه شد تا سطح معینی از انحراف قابل قبول در آن گنجانده شود. در ادامه، ابتدا ماتریس‌های مقایسه زوجی سازگار و سازگار در حد قابل قبول را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $A=(a_{ij})_{n\times n}$ نشان دهنده یک ماتریس مقایسه زوجی باشد که در آن $a_{ij}=1/a_{ji}, a_{ij}\in R^+$ ، برای همه $i,j=1,\dots,n$ .

**تعریف ۱-** یک ماتریس مقایسه زوجی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ سازگار است، اگر $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$ برای همه $i,j,k=1,\dots,n$ . وقتی که $A$ ناسازگار است، ساعتی [22] یک شاخص سازگاری ($CI$) و یک $CR$ را برای اندازه‌گیری سطح ناسازگاری ارایه کرده است، یعنی:

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1},\quad CR=CI/RI.$$

در این‌جا $\lambda_{max}$ و $n$ بزرگ‌ترین مقدار ویژه و مرتبه $A$ هستند. $RI$ یک شاخص تصادفی است که متوسط $CI$ تعداد زیادی از ماتریس‌های مقایسه زوجی انتخاب شده به‌صورت تصادفی است و بستگی به مرتبه ماتریس‌های داده شده در جدول $A1$ دارد. وقتی که $CR<0.1$ ، ماتریس مقایسه زوجی $A$ در حد قابل قبولی سازگار دانسته می‌شود. وقتی که $CR\geq 0.1$ ، گفته می‌شود که ماتریس $A$ ازنظر سازگاری غیر قابل‌قبول است که باید در حد سازگاری قابل قبول تعدیل شود تا تصمیمات عقلانی باشد.

**جدول ۱- میانگین شاخص سازگاری ماتریس‌های تصادفی تولید شده.**

**Tabale 1- The mean consistency index of randomly generated matrices.**

| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.54 | 1.52 | 1.49 | 1.46 | 1.41 | 1.36 | 1.26 | 1.12 | 0.89 | 0.52 | 0 | 0 | RI |