



Paper Type: Original Article



# Developing an Efficient Algorithm for Robust School Bus Routing with Heterogeneous Fleet

Mohamad Ali Movafaghpour\* 

*Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran; ali.movafagh@gmail.com.*

**Citation:**



Movafaghpour, M. A. (2023). Developing an efficient algorithm for robust school bus routing with heterogeneous fleet. *Journal of decisions and operations research*, 8(3), 566-577.

Received: 03/04/2022

Reviewed: 05/05/2022

Revised: 11/06/2022

Accepted: 23/07/2022

## Abstract

**Purpose:** In many real-world optimization problems, we are facing uncertainties in parameters describing the problem. In general, as a simplifying assumption, uncertainty is ignored. In the school bus routing problem, there are uncertain parameters that are assumed to have deterministic values. As a result of this simplifying assumption, the obtained solutions may be mismatched with the real world. This issue arose by violating some hard constraints.

**Methodology:** In this research, a mixed linear integer programming for school bus routing with mixed loading by using a heterogeneous fleet is presented. The uncertainty of travel times is modeled as interval numbers. We propose a heuristic algorithm to generate extreme scenarios. Each scenario is generated in order to make the last found optimal solution into an infeasible one as much as possible.

**Findings:** Experimental results show that deploying this novel algorithm for generating extreme scenarios, efficiently produces diverse scenarios. After the scenario generation algorithm is converged, the intersection of the feasible optimal solutions under diverse scenarios is extracted as robust sub-tours or robust trips.

**Originality/Value:** It is the first time to apply the notions of robust optimization using the extreme scenarios generation scheme. At each iteration of the extreme scenario's generation, the most conflicting scenario against a given optimum solution is generated. The main advantage of this method over other present robust optimization methods is its emphasis on maintaining the feasibility of the optimal solution when dealing with the most diverse set of uncertainty scenarios while keeping the computational effort needed as low as desired.

**Keywords:** Uncertainty, Mix loading, Heterogeneous vehicle, Robust optimization.

Corresponding Author: ali.movafagh@gmail.com

 <http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.3.1.7>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## نوع مقاله: پژوهشی



### توسعه یک الگوریتم کارا برای مسیریابی استوار اتوبوس مدرسه با تخصیص ناوگان ناهمگن

محمدعلی موفق پور\*

دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران.

#### چکیده

**هدف:** در مساله مسیریابی پارامترهایی وجود دارد که قطعی و معین نیستند و معمولا برای ساده‌سازی، بهترین برآوردی که از این پارامترها موجود است به‌عنوان داده قطعی استفاده می‌شود. در این رویکرد ممکن است در عمل، برخی از محدودیت‌ها نقض شده و جواب بهینه به‌دست آمده دیگر موجه نباشد.

**روش‌شناسی پژوهش:** در این تحقیق، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مخلوط برای مسیریابی با در نظر گرفتن بار ترکیبی، با استفاده از وسایل نقلیه ناهمگن و عدم قطعیت در زمان سفر ارایه شده است. برای رسیدن به جواب‌های استوار، یک الگوریتم ابتکاری برای تولید سناریوهای حدی توسعه داده شده است. پس از همگرا شدن الگوریتم تولید سناریو، زیرمجموعه‌ای از جواب‌ها که در بین جواب همه سناریوهای مختلف مشترکا باقی مانده باشد به‌عنوان قسمت استوار جواب معرفی می‌شود.

**یافته‌ها:** در این تحقیق در برخی قسمت‌ها کل یک تور استوار باقی مانده است و در برخی حالات نیز فقط سفر بین دو گره جزو جواب استوار مشاهده شد.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** این اولین بار است که مفاهیم بهینه‌سازی استوار با استفاده از طرح تولید سناریوهای حدی پیاده‌سازی می‌شود. در هر تکرار از تولید سناریوهای حدی، متناقض‌ترین سناریو در برابر یک راه‌حل بهینه داده‌شده تولید می‌شود. مزیت اصلی این روش نسبت به سایر روش‌های بهینه‌سازی استوار موجود، تاکید بر حفظ موجه بودن جواب بهینه در هنگام مواجهه با متنوع‌ترین مجموعه سناریوهای عدم قطعیت است درحالی‌که هم‌زمان تلاش می‌شود تا حجم محاسبات موردنیاز تا حد مطلوبی پایین نگه داشته شود.

کلیدواژه‌ها: بارگیری مرکب، بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت، وسایل نقلیه ناهمگن.

#### ۱- مقدمه

این مقاله نحوه حل موثر و کارآمد مساله مسیریابی اتوبوس مدرسه، وقتی زمان‌های سفر غیرقطعی هستند را نشان می‌دهد. در کاربردهای واقعی به‌ندرت می‌توان مقدار پارامترها را به‌طور دقیق تعیین کرد. در مسایل مسیریابی اتوبوس مدرسه به دلیل شرایط پیش‌بینی نشده نظیر ترافیک شهری، آب‌وهوای نامناسب (مانند بارندگی و لغزندگی جاده‌ها) و خرابی‌های مکانیکی نمی‌توان داده‌های قطعی برای زمان سفر به دست آورد؛ بنابراین، در این تحقیق به دنبال ارایه مدل ریاضی برای مسیریابی اتوبوس مدرسه هستیم. الگوریتم به‌کار گرفته‌شده در این مقاله کلی و عمومی است و برای کاربردهای دیگر قابل استفاده است، اما در این مقاله مدل ریاضی برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی را برای مساله مسیریابی اتوبوس مدرسه مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. به‌طور ویژه‌تر، مساله‌ای را بررسی می‌کنیم که در آن زمان‌های سفر به یک بازه عدم قطعیت تعلق دارند و تلاش می‌شود عملکرد سیستم در بدترین حالت بهینه گردد. پس رویکرد ما در چارچوب برنامه‌ریزی استوار

\* نویسنده مسئول

ali.movafagh@gmail.com

<http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.3.1.7>



قرار دارد که در آن، فقط در صورتی گفته می‌شود که یک جواب (حل) عملی و امکان‌پذیر است که برای تمام داده‌ها در یک بازه عدم قطعیت از پیش تعیین‌شده عملی و امکان‌پذیر باشد.

## ۲- پیشینه تحقیق

بهینه‌سازی استوار یکی از روش‌های جدید در برنامه‌ریزی ریاضی است که اخیراً توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. بهینه‌سازی استوار پاسخی است به عدم قطعیت در داده‌های ورودی. این رویکرد، در نهایت منجر به ایجاد یک سری از جواب‌هایی می‌شود که به‌طور چشم‌گیری حساسیت کمتری به عدم قطعیت در داده‌های ورودی داشته باشند. در صورتی که جواب بهینه ارائه‌شده توسط مدل بهینه‌سازی استوار با تغییر داده‌های ورودی حتی الامکان شدنی و نزدیک به جواب بهینه باقی بماند، یک جواب استوار نامیده می‌شود. این حالت را در ادبیات معمولاً استواری جواب می‌نامند. در اوایل دهه ۱۹۷۰ سوستر [1] یک مدل بهینه‌سازی خطی ارائه کرد که بهترین جواب موجه برای همه داده‌های ورودی را به ما می‌دهد به طوری که هر داده ورودی می‌تواند هر مقداری را از یک بازه بگیرد. این رویکرد تمایل به یافتن جواب‌هایی دارد که بسیار محافظه‌کارانه باشد. بدین معنی که برای اطمینان از پایدار بودن جواب در این رویکرد به مقدار زیادی از بهینگی مساله اسمی دور می‌شویم. بن-تال و نمیروفسکی [4]-[2] و ال-قائویی و لبرت [5]، [6] با فرض این‌که داده‌ها در مجموعه‌های بیضوی دارای عدم قطعیت هستند، الگوریتم‌های کارایی برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب، تحت عدم قطعیت داده‌ها ارائه نموده‌اند. فرمول‌بندی‌های استوار به‌دست‌آمده از این روش، از نوع درجه دو مخروطی می‌باشند. برتسیماس و سیم [7] رویکرد متفاوتی را برای کنترل سطح محافظه‌کاری معرفی کرده‌اند. این رویکرد از این مزیت برخوردار است که منجر به یک مدل بهینه‌سازی خطی می‌شود. سانگور و همکاران [8] اولین کسانی بودند که یک مساله مسیریابی استوار وسایل نقلیه با بازه‌های زمانی و زمان‌های سفر غیرقطعی ( $T-VRPTW$ ) را مطرح کردند. البته فرض مدل‌سازی آن‌ها شامل این بود که تمامی زمان‌ها بیشینه مقادیر را می‌گیرند که یک مدل بیش‌ازحد محافظه‌کارانه ایجاد کرد. یادان و همکاران [9] یک مدل بهینه‌سازی قوی برای یک مساله طراحی زمان‌بندی قابل‌اطمینان و جدید مسیر اتوبوس را با در نظر گرفتن عدم قطعیت زمان پیمایش اتوبوس و تلاش‌های بازیابی جدول زمان‌بندی رانندگان، پیشنهاد دادند که تابع هدف آن به حداقل رساندن مجموع مقدار مورد انتظار انحراف تصادفی زمان‌بندی هست و به‌وسیله شبیه‌سازی مونت‌کارلو<sup>۱</sup> مدل بهینه‌سازی استوار را حل کرده‌اند. یک مثال عددی بر مبنای یک مسیر اتوبوس واقعی در شهر سوشو چین انجام دادند تا قدرت مدل بهینه‌سازی مشخص شود. نتایج نشان دادند که زمان پیمایش برنامه‌ریزی‌شده بهینه (با زمان سکون) به رفتار بازیابی زمان‌بندی رانندگان اتوبوس و فلسفه‌های زمان‌بندی تصمیم‌گیرندگان بستگی دارد.

اگر و همکاران [10] به مطالعه مساله مسیریابی وسایل نقلیه ( $VRP$ ) همراه با پنجره زمانی که در آن زمان‌های سفر نامشخص است و متعلق به یک چندوجهی محدب از پیش تعیین شده است پرداخته‌اند. آن‌ها اولین فرمولاسیون استوار برای حل مسیریابی وسایل نقلیه همراه با پنجره زمانی و زمان سفر نامشخص را ارائه داده‌اند. مساله مسیریابی وسایل نقلیه همراه با پنجره زمانی مورد مطالعه آن‌ها محدودیت‌های اضافی ارائه نمی‌دهد و هر وسیله نقلیه می‌تواند تعداد دلخواه از گره‌ها را تا زمانی که پنجره‌های زمانی رعایت شوند بازدید کند. برای این هدف، یک فرمول جدید لایه‌لایه برای حل این نوع مسایل معرفی نموده‌اند که قادر به اعمال روش‌های کلاسیک برنامه‌ریزی استوار است. فرمول مبتنی بر یک نمایش لایه‌لایه از گراف است که قادر به ردیابی موقعیت هر یک از کمان‌ها در مسیر خود است. اگر و همکاران [10] یک فرمول مناسب برای رویکرد دوگانه برنامه‌ریزی استوار ارائه داده‌اند و اشکال این روش این است که تعداد لایه استفاده‌شده در فرمول برابر تعداد گره‌ها در گراف است که منجر به تولید تعداد بسیار زیادی متغیر و محدودیت می‌شود. آن‌ها نمی‌توانستند به‌سادگی تعداد لایه‌ها را کاهش دهند چراکه این کار موجب حذف راه‌حل بهینه برای مساله می‌شد. با این حال، با توجه به وجود پنجره‌های زمان، وسایل نقلیه معمولاً قادر به بازدید از تمام گره‌های گراف نیستند. با اعمال یک پیش‌پردازش به مساله، برای هر وسیله نقلیه، طولانی‌ترین مسیری که پنجره‌های زمانی را هم رعایت می‌کند محاسبه نمودند. آن‌ها فرمول گسترده را به مساله مسیریابی کشتی که در آن زمان، عامل بسیار مهمی است و تحویل باید در طول فواصل از پیش تعیین‌شده رخ دهد، اعمال کرده‌اند و در بستر حمل‌ونقل دریایی آزموده‌اند. نتایج محاسباتی برای فرمولاسیون لایه‌ای، بر روی نمونه‌هایی با ۱۰ و ۲۰ محموله و تعداد مختلف کشتی‌ها بین ۱ تا ۵ بررسی

<sup>۱</sup> Monte carlo



شده است. فرمول با استفاده از زبان مدل‌سازی *Xpress Mosel 3.2.3* کدنویسی شده و توسط *Xpress Optimizer 22.01.09* حل شده است. در نهایت به این نتیجه رسیدند که این روش می‌تواند موارد تا ۲۰ گره را حل کند.



### ۳- نوآوری مقاله

در مساله مسیریابی اتوبوس مدرسه یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار که نمی‌توان به‌طور قطعی مقدار آن را پیش‌بینی کرد، پارامتر زمان سفر بین گره‌ها است. در همه مقالات مرور شده در این تحقیق، مسایلی که با عدم قطعیت روبرو شده‌اند از نوع مساله مسیریابی وسیله نقلیه (*VRP*) هستند و تاکنون عدم قطعیت زمان سفر بین گره‌ها در مساله مسیریابی اتوبوس مدرسه (*SBRP*) مورد بررسی قرار نگرفته است. در این تحقیق ما به حل مدل ریاضی ارائه‌شده در شرایط عدم قطعیت زمان سفر بین گره‌ها می‌پردازیم و برای حل این مساله در شرایط عدم قطعیت از الگوریتم نوینی که به‌تازگی گزارش شده [11] برای برنامه‌ریزی مسیر و تخصیص سرویس به مدارس به‌صورت استوار استفاده می‌کنیم.

### ۴- مدل ریاضی مساله مسیریابی اتوبوس مدرسه با ناوگان ناهمگن

این مدل با استفاده از روش برنامه‌ریزی عدد صحیح مخلوط فرمول‌نویسی شده است و در واقع بر اساس مدل ارائه‌شده توسط پارک و همکاران [12] است. نمادگذاری مورد استفاده در ادامه آورده می‌شود.

$n$ : تعداد ایستگاه‌ها.

$D^k$ : ظرفیت هر وسیله نقلیه نوع  $k$ .

$s(k)$ : مکان گره شروع حرکت برای هر وسیله نقلیه  $k$ .

$e(k)$ : مکان گره پایان حرکت برای هر وسیله نقلیه  $k$ .

$B = \{s(1), e(1), \dots, s(k), e(k)\}$ : مجموعه نقاطی که وسایل نقلیه از آن‌جا شروع به حرکت می‌کنند و در آن‌ها متوقف می‌شوند.

$P^+$ : مجموعه نقاط بارگیری (ایستگاه‌های اتوبوس).

$P^-$ : مجموعه نقاط تخلیه بار (مدارس)  $N = P \cup B$ .

$R_i$ : حداکثر زمانی که دانش‌آموزان در خودرو هستند.

$t_{ij}$ : زمان جابجایی از گره  $i$  به  $j$ .

$d_i$ : تعداد دانش‌آموزانی که در ایستگاه  $i$  سوار می‌شوند.

$S_i$ : مدت‌زمان سرویس‌دهی (سوار و پیاده شده) در گره  $i$ .

$a_m, b_m$ : زودترین و دیرترین زمان ممکن برای رسیدن به مدرسه.

$f_k$ : هزینه اجاره هر نوع وسیله نقلیه.

$v_k$ : هزینه متغیر وابسته به طول مسیر طی شده.

$M$ : مقدار بزرگ.

$X_{ij}^k$ : متغیر باینری (دودویی) است و در صورتی مقدار یک می‌گیرد که وسیله نقلیه  $k$  بلافاصله بعد از گره  $i$  به گره  $j$  برود و در غیر این صورت صفر است.

$T_i^k$ : زمان رسیدن وسیله نقلیه  $k$  به گره  $i$ .

$l_i^k$ : تعداد تجمعی دانش‌آموزان در هر وسیله نقلیه پس از ملاقات هر ایستگاه  $i$ .

MILP<sub>1</sub>:

$$\text{Min } z = \sum_k f^k \sum_j x_{s(k)j}^k + \sum_k \sum_{i,j} v^k x_{ij}^k t_{ij}, \quad (1)$$

$$\text{Subject to } \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1 \quad i \in p^+, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^k - \sum_{j \in N} x_{ji}^k = 0, \quad i \in P, k \in K, i \neq j, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in P^+} x_{s(k)j}^k \leq 1, \quad k \in K, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in P^+} x_{i,e(k)}^k \leq 1, \quad k \in K, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^k - \sum_{j \in N} x_{j,n+i}^k = 0, \quad i \in p^+, k \in K, \quad (6)$$

$$T_i^k \leq T_{i+n}^k + M \left( 1 - \sum_{j \in N} x_{ij}^k \right), \quad i \in p^+, i \neq s(k), \quad (7)$$

$$T_i^k + s_i + t_{i,j} \leq T_j^k + M(1 - x_{ij}^k), \quad i, j \in p, \quad (8)$$

$$i \neq s(k),$$

$$T_{n+i}^k - T_i^k \leq R_i \sum_{j \in N} x_{ij}^k, \quad i \in p^+. \quad (9)$$

$$a_m \leq T_i^k \leq b_m, \quad i \in p^-, i \neq e(k), \quad (10)$$

$$l_i^k + d_j \leq l_j^k + m(1 - x_{i,j}^k), \quad i \in p, j \in p^+, \quad (11)$$

$$i \neq s(k), j \neq e(k),$$

$$l_i^k - d_{j-n} \leq l_j^k + m(1 - x_{ij}^k), \quad i \in p, j \in p^-, \quad (12)$$

$$i \neq s(k), j \neq e(k),$$

$$l_i^k \leq D^k, \quad i \in p^+, k \in K, \quad (13)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j \in p, k \in K. \quad (14)$$

تابع هدف (۱) به دنبال کمینه‌سازی هزینه ثابت و متغیر وسایل نقلیه جهت انتقال دانش‌آموزان از ایستگاه‌ها به مدارس است. محدودیت (۲) تضمین می‌کند که هر ایستگاه به طور دقیق یک‌بار توسط یک اتوبوس ملاقات شود. محدودیت (۳) نشان می‌دهد هر وسیله نقلیه که وارد گره  $i$  می‌شود باید حتماً از آن خارج شود. محدودیت (۴) تضمین می‌کند که یک وسیله نقلیه نمی‌تواند بیش از یک‌بار از مکان شروع (دپو) شروع به حرکت کند. محدودیت (۵) تضمین می‌کند که یک وسیله نقلیه نمی‌تواند بیش از یک‌بار به مکان پایانی (دپو) برود. محدودیت (۶) نشان می‌دهد گره  $i$  و  $i+n$  توسط یک وسیله نقلیه ملاقات می‌شود. محدودیت (۷) تضمین می‌کند زمان رسیدن هر نوع وسیله نقلیه به گره  $j$  بزرگ‌تر یا مساوی زمان رسیدن آن نوع وسیله نقلیه به گره  $i$  (گره قبلی) است. محدودیت (۸) اطمینان می‌دهد اگر هر نوع وسیله نقلیه از مجموعه  $k$  در گره  $i$  سرویس‌دهی کند و سپس به گره  $j$  برود، زمان رسیدن آن نوع وسیله نقلیه به گره  $j$  بزرگ‌تر یا مساوی مجموع زمان سرویس‌دهی و زمان جابه‌جایی بین نقاط است. محدودیت (۹) محدودیت مربوط به حداکثر زمان در راه بودن برای دانش‌آموزانی است که در یک ایستگاه سوار بر یک نوع وسیله نقلیه شده و در مقصد پیاده می‌شوند. محدودیت (۱۰) تا





**محدودیت (۱۲)** محدودیت‌های مربوط به بارگیری هر وسیله نقلیه هستند. **محدودیت (۱۰)** نشان می‌دهد زمانی که هر نوع از مجموعه وسایل نقلیه  $k$  پس از آن که گره  $i$  را ملاقات می‌کند به گره  $z$  که مربوط به مجموعه نقاط بارگیری است می‌رود؛ تعداد دانش‌آموزان در آن نوع از وسیله نقلیه، هنگام ملاقات گره  $z$ ، بزرگ‌تر یا مساوی مجموع دانش‌آموزان در هنگام ملاقات گره  $i$  به اضافه‌ی تعداد دانش‌آموزان بارگیری شده در گره  $z$  است. **محدودیت‌های (۱۱)** و **(۱۲)** این مطلب را نشان می‌دهد که چنانچه وسیله نقلیه  $k$  پس از ملاقات گره  $i$  بلافاصله به گره  $z$  که عضو مجموعه نقاط تخلیه بار (مدارس) است برود، تعداد دانش‌آموزان هنگام ملاقات گره  $z$ ، بزرگ‌تر مساوی تعداد دانش‌آموزان در وسیله نقلیه  $k$  هنگام ملاقات گره  $i$  منهای تعداد دانش‌آموزانی است که در گره  $z$  پیاده می‌شوند. **محدودیت (۱۳)** به ظرفیت هر وسیله نقلیه مربوط می‌شود (وسایل نقلیه ناهمگن). **محدودیت (۱۴)** عدد صحیح بودن نوع متغیرها را بیان می‌کند.

## ۵- الگوریتم برنامه‌ریزی استوار

در برنامه‌ریزی خطی با داده‌هایی که عدم قطعیت بازه‌ای دارند، نمی‌توان انتظار داشت که با تکنیک‌هایی مثل شبیه‌سازی مونت کارلو یا تحلیل‌های سطحی بتوان به جواب‌های نقطه‌ای قابل‌اعتمادی دست یافت. در واقع استراتژی استوار برای حل بهینه این‌گونه مسایل باید به جای تمرکز بر یافتن جواب‌های نقطه‌ای استوار (معرفی یک بردار  $X$  به‌عنوان جواب بهینه) که تحت همه سناریوها موجه (که عملاً غیرممکن است) باشد، باید به دنبال یافتن بازه‌هایی برای هر یک از متغیرهای تصمیم  $x$  باشد که تحت همه سناریوهای ممکن با احتمال معینی شامل جواب موجه باشد. به بیان دیگر با داشتن مساله بهینه‌سازی مثل؛

$$LP_{2.1}: \quad (15)$$

$$Max z = cx, \quad (16)$$

$$Subject to A x \leq b, \quad i \in I, \quad (17)$$

$$A_{eq} x = b_{eq}, \quad i \in E, \quad (18)$$

$$x \geq 0. \quad (19)$$

از آن‌جا که همه ضرایب فنی و مقادیر سمت راست بازه‌ای هستند، کران بالا و پایین آن‌ها را این‌گونه نام‌گذاری می‌کنیم:

$$\underline{A} \leq A \leq \bar{A}. \quad (20)$$

$$\underline{A}_{eq} \leq A_{eq} \leq \bar{A}_{eq}. \quad (21)$$

$$\underline{b} \leq b \leq \bar{b}. \quad (22)$$

$$\underline{b}_{eq} \leq b_{eq} \leq \bar{b}_{eq}. \quad (23)$$

پس جواب بهینه  $x^*$  هم باید به صورت بازه‌ای تعریف شود.

$$\underline{x} \leq x^* \leq \bar{x}. \quad (24)$$

به سادگی و با اندکی تحقیق مشخص می‌شود که در مسایلی که تعداد محدودیت‌های تساوی مستقل ( $A_{eq}x = b_{eq}$ ) از تعداد متغیرهای تصمیم  $x$  بیشتر باشد، هیچ جواب نقطه‌ای وجود نخواهد داشت که به ازای همه حالت‌های ممکن در فضای جواب صدق کند؛ اما برای مسایلی که تعدادی قید نامساوی با پارامترهای غیرقطعی بازه‌ای دارند می‌توان جواب‌های پایه‌ای یافت که برخی متغیرها همواره و تحت همه سناریوها پایه باقی می‌مانند و فقط مقدار بهینه آن‌ها در یک بازه تغییر می‌کند. در رویکرد برنامه‌ریزی استوار موردنظر در این تحقیق، ما به دنبال مجموعه‌ای از متغیرهای پایه هستیم که تحت سناریوهای مختلف همواره عضو جواب پایه باقی می‌مانند و فقط مقدار بهینه آن‌ها تغییر می‌کند؛ زیرا از دیدگاه کاربردی، مدیران برای پیاده‌سازی برنامه‌ها به دنبال اجزایی از برنامه هستند که به‌عنوان لنگرگاه و نقطه شروع پیاده‌سازی، اجرا شوند؛ سپس در مورد مقدار بهینه و سایر متغیرهای پایه بر اساس شرایط لحظه‌ای و ظاهر شدن سناریوهای محیطی تصمیم‌گیری به‌روز صورت گیرد.

مزیت این رویکرد حل مسایل برنامه‌ریزی با عدم قطعیت بازه‌ای در سادگی پیاده‌سازی جواب‌های تولیدشده توسط آن در شرایط عملیاتی است. به‌عنوان نمونه یک کارگاه تولیدی را در نظر بگیرید که ضرایب تکنولوژیکی میزان مصرف منابع توسط محصولات به دلیل بالا (و بالطبع غیرثابت) بودن نرخ ضایعات به‌طور قطعی قابل‌شناسایی نیست. در این شرایط هر مدیر تولید کارکشته‌ای می‌داند که مقدار بهینه تولید از هر کدام از محصولات اگر در چه بازه‌ای قرار گیرد، حتماً در پایان به جواب موجه می‌رسد. لذا ما در این بخش با پیروی از این منطق به دنبال یافتن مقدار بازه‌های استوار برای متغیرهای تصمیم بهینه هستیم؛ زیرا در عمل، برای هر متغیر تصمیم یک بازه مجاز وجود

دارد که در زمان اجرا و پیاده‌سازی عملیاتی تعیین‌کننده بوده و مورد نیاز مدیران است. مدیران در شرایط عدم اطمینان نیاز دارند حدود مجاز متغیرهای تصمیم را بدانند تا بتوانند تصویر کلی از تصمیمات آینده داشته باشند. در چنین شرایطی الزاماً یک مقدار صریح برای متغیرهای تصمیم کاربردی ندارد. زیرا برای تصمیمات استوار لازم است تا مدیران بتوانند با حرکت در حاشیه امنی که به جواب موجه بهینه می‌رسد عملاً اثر عدم قطعیت ورودی بر نتیجه تصمیماتشان، کنترل‌شده باقی بماند.

## ۶- تولید سناریوهای حدی به ازای یک جواب داده‌شده

همان‌طور که گفته شد، برای بررسی اثر عدم قطعیت بازه‌ای پارامترهای ورودی بر فضای حل مساله، هرچند شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌تواند به‌عنوان یک ابزار قدرتمند مورد استفاده قرار گیرد، اما به دلیل گستردگی بی‌کران سناریوهای ممکن (به دلیل پیوسته بودن مقدار پارامترهای غیرقطعی)، بهتر است ما به دنبال روشی کارآتر برای تولید سناریوهای مهم و حدی باشیم. در این جا منظور از سناریوهای مهم و حدی سناریوهایی است که تا حد امکان فضای جواب موجه تحت هرکدام، هم‌پوشانی کمتری با سایر سناریوها داشته باشد. لذا در این تحقیق ما دنبال این هستیم تا با داشتن جواب بهینه تحت یک سناریو دلخواه، یک سناریو جدید شناسایی کنیم که بیشترین مقدار خطای عدم ارضای محدودیت‌ها برای جواب بهینه موجود (تحت سناریوی قبلی) را تولید می‌کند؛ به عبارت دیگر ما به دنبال یک سناریو حدی هستیم که بدترین (دارای بیشترین خطای عدم رعایت محدودیت‌ها) سناریوی ممکن به ازای یک جواب بهینه داده شده باشد.

در ادامه این تحقیق، پارامترهای  $A$ ،  $A_{eq}$  و  $b$  دارای عدم قطعیت بازه‌ای فرض می‌شوند و پارامترهای  $c$  ضرایب تابع هدف به‌عنوان مقادیر قطعی فرض می‌شوند. قابل توجه است که فرض قطعی بودن ضرایب تابع هدف  $c$  بر روی کلیت مساله تأثیری ندارد؛ زیرا می‌توان تابع هدف ماکزیم‌سازی را به صورت یک محدودیت  $x \leq z$  به مساله اضافه کرد.

$$LP_{2-2}: \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= CX \\ \text{Subject to } (A + \varepsilon) X_{(I)} &\leq b + \delta, \end{aligned} \quad (25)$$

$$(A_{eq} + \varepsilon_{eq}) X_{(I)} = b_{eq} + \delta_{eq}, \quad (26)$$

$$X_{(I)} \geq 0. \quad (27)$$

به ازای یک سناریو دلخواه، فرض کنید پارامترهای  $A$ ،  $A_{eq}$  و  $b$  مقداردهی شده و یک جواب بهینه  $X_{(I)}$  تولیدشده باشد. در این صورت، چون سناریوی مفروض که  $X_{(I)}$  با توجه به آن تولیدشده، ممکن است در عمل رو نشود، ولی خطای ممکن در مقدار این پارامترها را به ترتیب با  $\varepsilon$ ،  $\varepsilon_{eq}$ ،  $\delta$  و  $\delta_{eq}$  نشان می‌دهیم. پس، حداکثر خطای ممکن در مقدار این پارامترهای مساله با توجه به کران بالا و پایین پارامترهای مربوطه (رابطه (۱۹) تا رابطه (۲۲)) خواهد بود:

$$\underline{A} - A \leq \varepsilon \leq \bar{A} - A. \quad (28)$$

$$\underline{A}_{eq} - A_{eq} \leq \varepsilon_{eq} \leq \bar{A}_{eq} - A_{eq}. \quad (29)$$

$$\underline{b} - b \leq \delta \leq \bar{b} - b. \quad (30)$$

$$\underline{b}_{eq} - b_{eq} \leq \delta_{eq} \leq \bar{b}_{eq} - b_{eq}. \quad (31)$$

اگر با صرف نظر از  $\varepsilon$ ،  $\delta_{eq}$  و  $\varepsilon_{eq}$  مساله حل شده باشد و یک بردار جواب  $X_{(I)}$  موجود باشد، سوالی که مطرح می‌شود این است که به ازای این  $X_{(I)}$  بدترین سناریویی که می‌تواند روی دهد کدام است. برای پاسخ به این سوال باید مدل ریاضی ذیل حل شود که در آن  $A$ ،  $A_{eq}$ ،  $b$  و  $b_{eq}$  پارامترهای معین و قطعی بوده و  $\varepsilon$ ،  $\delta_{eq}$  و  $\varepsilon_{eq}$  متغیر تصمیم هستند. مدل ذیل مقدار جدیدی برای خطای ممکن در مقدار این پارامترهای غیرقطعی (یا به عبارت دیگر میزان تلورانس  $\varepsilon$ ،  $\delta_{eq}$  و  $\varepsilon_{eq}$ ) را به گونه‌ای می‌یابد که جواب بهینه داده‌شده  $X_{(I)}$  که قبلاً تحت یک سناریوی قبلی تولیدشده، به بدترین شکل ممکن و با بیشترین مقدار خطا، غیرموجه شود.

$$NLP_{2-3}:$$

$$\text{Max } z = \sum_{i \in I} D_i + \sum_{i \in E} |Deq_i|, \quad (32)$$

$$\text{subject to } \varepsilon X - \delta - D \geq b - AX, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{eq} X - \delta_{eq} - Deq = b_{eq} - A_{eq} X, \quad (34)$$

$$\underline{A} - A \leq \varepsilon \leq \bar{A} - A. \quad (35)$$







$$\underline{A}_{eq} - A_{eq} \leq \varepsilon_{eq} \leq \bar{A}_{eq} - A_{eq}. \quad (36)$$

$$\underline{b} - b \leq \delta \leq \bar{b} - b. \quad (37)$$

$$\underline{b}_{eq} - b_{eq} \leq \delta_{eq} \leq \bar{b}_{eq} - b_{eq}. \quad (38)$$

$$D \geq 0. \quad (39)$$

$$\varepsilon, \varepsilon_{eq}, \delta, \delta_{eq}, Deq. \text{ آزاد در علامت.} \quad (40)$$

که در آن  $D_i$  میزان تعدی از نامساوی  $i$ th مدل  $LP_{2-2}$  و  $Deq_i$  میزان تعدی از تساوی  $i$ th مدل  $LP_{2-2}$  است.

به بیان دقیق‌تر، در مقابل هر جواب بهینه موجه  $X_{(1)}$  از مساله  $LP_{2-2}$  که به ازای  $A, A_{eq}, b$  و  $b_{eq}$  تحت یک سناریو داده‌شده تولید می‌شود،  $NLP_{2-3}$  با مقادیری به تلورانس‌های  $\varepsilon, \delta_{eq}, \varepsilon_{eq}$  یک سناریوی متضاد تولید می‌کند که در صورت اعمال این تلورانس‌ها به پارامترهای مدل  $LP_{2-2}$ ، جواب بهینه موجه قبلی  $X_{(1)}$  به بدترین شکل ممکن طرد و ناموجه می‌شود. برای شناسایی این بدترین سناریوی حدی مربوط به یک جواب موجه داده‌شده کافی است مساله  $NLP_{2-3}$  با دریافت  $X_{(1)}$  به‌عنوان پارامتر و هم‌چنین ماتریس‌های  $\underline{A}, A, \bar{A}, \underline{A}_{eq}, A_{eq}, \bar{A}_{eq}$  و بردارهای  $\underline{b}, b, \bar{b}, \underline{b}_{eq}, b_{eq}, \bar{b}_{eq}$  نیز به‌عنوان پارامترهای ورودی حل شود. بر این اساس مدل محاسبه سناریوی متضاد حدی مربوط به مدل  $MILP_1$  به‌صورت ذیل خواهد بود:

$LP_{2-4}$ :

$$\text{Max} \sum_{i,j,i \neq j} D_{i,j}, \quad (41)$$

$$\text{Subject to. } \varepsilon_{i,j} + D_{i,j} \geq -T_i^k - s_i - t_{i,j} + T_j^k + m(1 - x_{ij}^k) \quad i, j \in p, i \neq s(k), \quad (42)$$

$$\left( \underline{t}_{i,j} - t_{i,j} \right) \leq \varepsilon_{i,j} \leq \left( \bar{t}_{i,j} - t_{i,j} \right) \quad i, j \in p, \quad (43)$$

$$D_{i,j} \geq 0, \varepsilon_{i,j} \text{ free in sign } i, j \in p, \quad (44)$$

فرآیند تولید سناریوهای حدی برای مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه موجه داده‌شده این‌گونه خواهد بود: الگوریتم با یک سناریو دلخواه یعنی تخصیص مقادیر دلخواه به  $t_{ij}$ ، شروع می‌شود. سپس جستجو برای جواب بهینه  $x_{ij}^k(\text{scenario} = 1)$  مربوط به این سناریو توسط مدل  $MILP_1$  انجام می‌شود. بعدازآن با کمک مدل  $LP_{2-4}$  مقدار تلورانس  $\varepsilon_{ij}(\text{scenario} = 1)$  برای پارامترهای غیرقطعی زمان‌های سفر  $t_{ij}(\text{scenario} = 1)$  تحت بدترین سناریو ممکن نسبت به آخرین جواب بهینه  $x_{ij}^k(\text{scenario} = 1)$  تولید می‌کنیم. در تکرار بعد، بر اساس آخرین سناریو حدی تولیدشده که مقدار جدید پارامتر غیرقطعی آن برابر با

$$t_{ij}(\text{scenario} = 2) = t_{ij}(\text{scenario} = 1) + \varepsilon_{ij}(\text{scenario} = 1).$$

است، جواب بهینه  $x_{ij}^k(\text{scenario} = 1)$  مساله  $MILP_1$  یافت می‌شود. این فرآیند تا زمان رسیدن به شرایط همگرایی تکرار می‌شود.

ممکن است این سوال به ذهن خواننده متبادر شود که چه تضمینی وجود دارد که مدل ریاضی مساله (چه مدل ریاضی مساله اصلی در رابطه (۱) تا رابطه (۱۴) و چه مدل تولید سناریوی حدی در رابطه (۴۱) تا رابطه (۴۴)) جواب موجه داشته باشد. در پاسخ باید گفت که چنانچه مدل مساله اصلی معتبر باشد، ما می‌توانیم وارد مرحله تولید سناریوهای حدی شویم که در این‌جا همان‌طور که در ابتدای بخش ۴ گفته شد، مدل مساله ریاضی مسیریابی اتوبوس مدرسه با ناوگان ناهمگن گفته‌شده در رابطه (۱) تا رابطه (۱۴) مبتنی بر مدل ارایه‌شده توسط پارک، تائه و کیم [12] است. در مورد اعتبارسنجی مدل تولید سناریوهای حدی نیز باید گفت که اگر مدل تولید سناریوهای حدی در حالت عام (مدل (۳۲) تا مدل (۴۰)) و یا مدل خاص برای تولید سناریوهای حدی برای مساله مسیریابی اتوبوس مدرسه با ناوگان ناهمگن (مدل (۴۱) تا مدل (۴۴)) جواب موجهی یافت، به معنای وجود یک سناریوی جدید است که باید مجدداً به ازای آن یک‌بار دیگر مساله اصلی (رابطه (۱) تا رابطه (۱۴)) را با مقادیر جدید برای پارامترهای غیرقطعی حل کرد؛ ولی اگر مدل تولید سناریوهای حدی مساله (مدل (۴۱) تا مدل (۴۴)) جواب موجهی نیافت، به معنای ختم محاسبات و اتمام فرآیند جستجو برای سناریوهای حدی است.



در صورت فراخوانی متوالی مدل *MILP1* و *LP2-4* مجموعه‌ای از سناریوها تولید می‌شود. فرآیند تولید سناریوهای حدی تا زمانی ادامه می‌یابد که یا یکی از سناریوها تکرار شود یا این که تعداد معینی تکرار طی شود. پس از توقف تکرارها برای متغیرهای تصمیم، مقادیر متعددی وجود دارد که هر کدام از آن‌ها تحت یک سناریو حدی بهینه است.

سناریوهای مختلف مسیرهای متفاوت انواع استواری ذیل را ایجاد می‌کند:

- استواری در یال: در تکرارهای متوالی تحت سناریوهای مختلف برخی یال‌ها همواره جزو مسیر بهینه باقی می‌مانند.
- استوار بودن تور: در تکرارهای متوالی تحت سناریوهای مختلف برخی تورها همواره جزو مسیر بهینه باقی می‌مانند.
- استوار بودن استفاده از نوع خاصی از وسیله نقلیه: در تکرارهای متوالی تحت سناریوهای مختلف، مسیر یک تور توسط وسیله نقلیه‌ی ثابت انجام شود.

### ۸- نتایج محاسباتی

فرمول‌بندی مساله در محیط نرم‌افزار بهینه‌سازی *GAMS* کدنویسی شد. برای حل مدل از حل‌کننده *CPLEX* استفاده شده است. محاسبات بر روی رایانه همراه با پردازنده *Core i7* با سرعت پردازش  $2/4$  گیگاهرتز، حافظه داخلی ۸ گیگابایتی و سیستم عامل ویندوز ۷ انجام شده است.

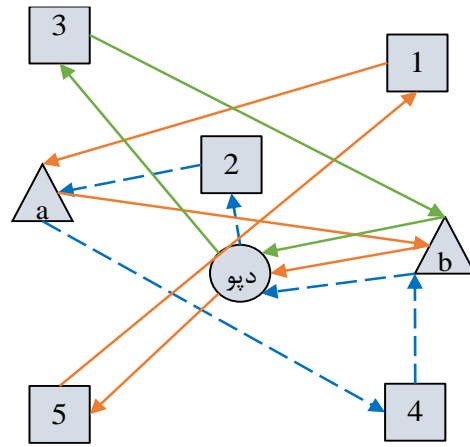
بازه عدم قطعیت زمان سفر بین هر دو گره  $10\% \pm$  در نظر گرفته شد. اولین جواب بهینه بر اساس مقدار مرکزی طبق جدول ۱ تولید شد (شکل ۱) و سپس سناریو حدی شماره متضاد آن با نام سناریو ۱ تولید شد.

همان‌گونه که از مقایسه شکل ۱ و شکل ۲ روشن می‌شود، برخی یال‌ها بدون در نظر گرفتن وسیله نقلیه، تکرار شده‌اند که به معنی استواری یال است. در دومین سناریو حدی متضاد (شکل ۳)، دوباره استواری در ۲ یال مشاهده شد. سناریو حدی متضاد سوم (شکل ۴) علاوه بر استواری در یال، استواری در تور و وسیله نقلیه (برای تور: دپو-۳-*b*-دپو) حاصل شد. در سناریو چهارم (شکل ۵) استواری در یال و تور و وسیله نقلیه حاصل از سناریو سوم تکرار شد. در سناریو پنجم (شکل ۶) وسیله نقلیه و تور (دپو-۲-*a-4-b*-دپو)، ولی تورهای استوار (دپو-۳-*b*-دپو) و (دپو-۱-*a-b*-دپو) بدون وسیله نقلیه استوار یافته شدند. در سناریو ششم (شکل ۷) همه تورهای به‌دست‌آمده از سناریو پنجم عیناً تکرار و استواری همه تورها و وسایل نقلیه حاصل شد.

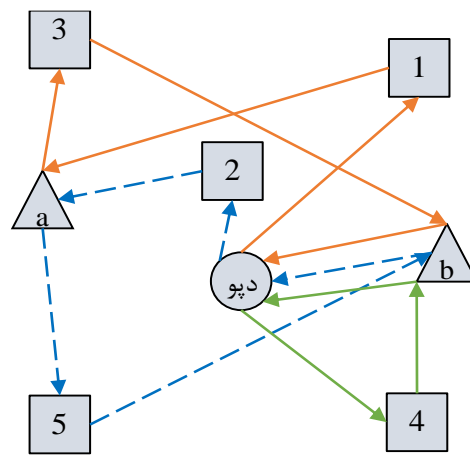
جدول ۱- مقادیر پارامتر زمان سفر بین گره‌ها برای مثال با ۸ گره.

Table 1- Trip times for the 8 nodes example.								
دپو	B	A	5	4	3	2	1	
1.204	1.3	2.343	3.052	2.8	1.702	1.204	0	1
10	0.89	1.166	1.878	2.06	1.204	0	1.204	2
2.012	2.08	1.403	2.501	3.106	0	1.204	0.41	3
1.204	1.5	2.22	1.612	0	3.19	1.204	2.8	4
1.063	2.06	1.118	0	1.612	2.501	1.878	3.052	5
1.077	1.811	0	1.118	2.22	1.403	1.166	2.343	a
10	0	1.811	2.06	1.5	2.08	0.89	1.3	b
0	10	1.077	1.063	1.204	2.012	10	1.204	دپو

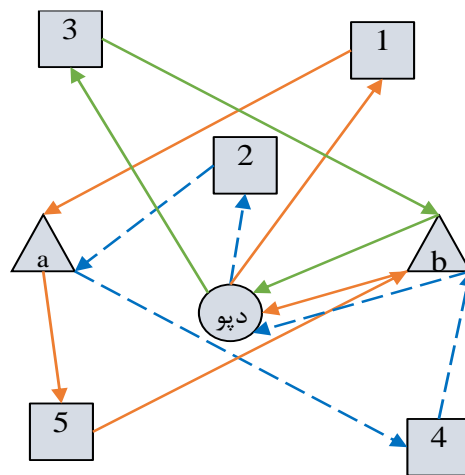




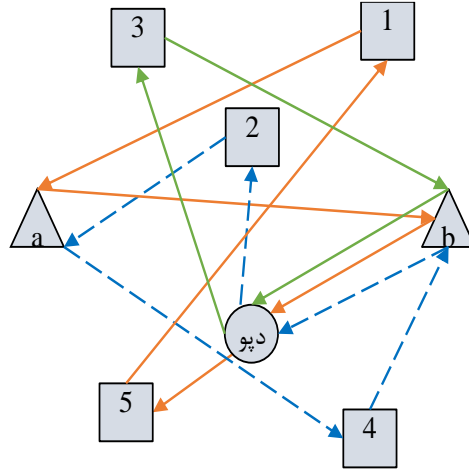
شکل ۱- مسیرهای حاصل از یک سناریو دلخواه.  
Figure 1- The routes resulting from an arbitrary scenario.



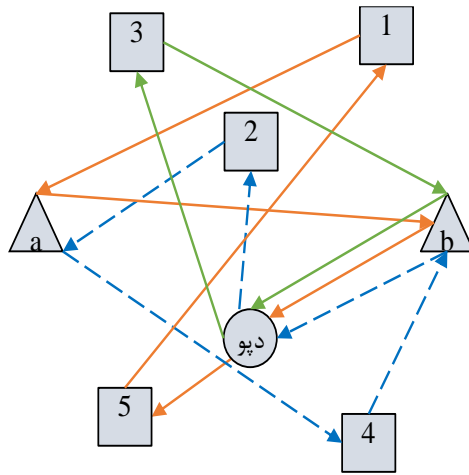
شکل ۲- مسیرهای حاصل از سناریو اول.  
Figure 2- The routes resulting from the first scenario.



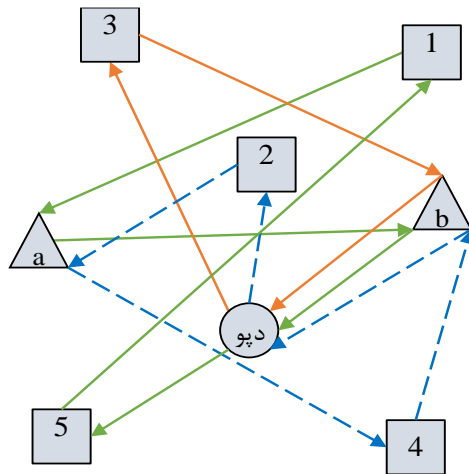
شکل ۳- مسیرهای حاصل از سناریو دوم.  
Figure 3- The routes resulting from the second scenario



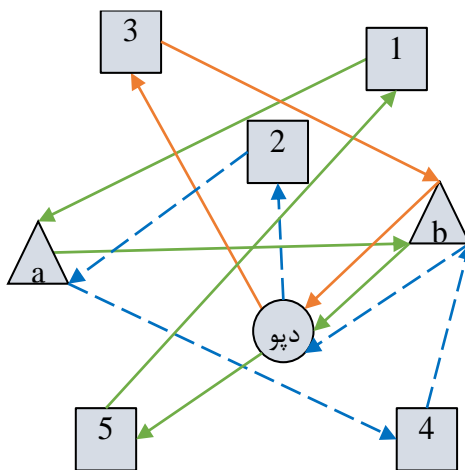
شکل ۴- مسیر های حاصل از سناریو سوم.  
Figure 4- The routes resulting from the third scenario.



شکل ۵- مسیر های حاصل از سناریو چهارم.  
Figure 5- The routes resulting from the fourth scenario.



شکل ۶- مسیر های حاصل از سناریو پنجم.  
Figure 6- The routes from the fifth scenario.



شکل ۷- مسیرهای حاصل از سناریو ششم.  
Figure 7- The routes from the sixth scenario.

## ۹- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مقایسه جواب‌های (مسیرها و یال‌ها) حاصل از سناریوها در بازه‌های مختلف بیانگر استواری برخی یال‌ها در برخی بازه‌ها و استواری برخی تورها در بازه‌های دیگر است. در سناریو ششم که زمان سفر فاصله ۵۳٪ از مقادیر اولیه و قطعی دارد، همه تورها به استواری رسیده‌اند. نتایج سناریوهای حل‌شده با الگوریتم برنامه‌ریزی استوار نشان‌دهنده درستی و اعتبار متدولوژی مورد استفاده در مساله مسریابی اتوبوس مدرسه است.

مهم‌ترین کاربرد الگوریتم *SELIS* که در این جا برای تولید سناریوهای حدی متناقض توسعه داده شد، برنامه‌ریزی در شرایط عدم اطمینان است. ما به دنبال بررسی اثر عدم قطعیت پارامترهای محیطی مساله بر روی بازه موجه متغیرهای تصمیم بهینه هستیم. به‌عنوان نمونه کاربردی، زمانی که یک مدیر به دنبال حل مساله برنامه‌ریزی تولید در شرایط عدم قطعیت زمان انجام فعالیت‌ها یا هزینه فعالیت‌ها است، ترجیح می‌دهد پس از برنامه‌ریزی، کار را آغاز کند و هر زمانی که اطلاعات جدیدی از پارامترهای محیطی دریافت کرد، فقط مقدار برخی متغیرهای تصمیم را تغییر دهد که تلورانس بیشتری دارند؛ یعنی متغیرهای تصمیمی که طول بازه بهینه آن‌ها محدود است، باید تثبیت شوند و حرکت به سمت موجه کردن جواب و رسیدن به جواب‌های موجه باید از طریق تغییر در متغیرهای تصمیمی باشد که بازه تغییرات مجاز آن‌ها گسترده‌تر است. الگوریتم *SELIS* این بینش را به مدیران می‌دهد که از ابتدای کار بدانند تغییرات مقدار کدام متغیرهای تصمیم تاثیر کمتری روی کاهش بهینگی و تاثیر بیشتری روی موجه کردن جواب دارند تا در ادامه مقدار این متغیرها را به‌صورت شناور و به مرور پیشرفت کار تعیین و تثبیت کنند.

با توجه به اهمیت کاربردی این‌گونه تحلیل‌ها در شرایط عدم قطعیت، نویسنده به دنبال استفاده از الگوریتم *SELIS* برای بررسی نحوه کنترل و مدیریت عدم قطعیت بازه‌ای پارامترها در سایر مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی از جمله زمان‌بندی پروژه، برنامه‌ریزی تولید و ... است. لذا به‌عنوان تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود به‌جز عدم قطعیت بازه‌ای، الگوریتمی مشابه *SELIS* برای مواجهه با عدم قطعیت فازی و سایر انواع مسایل برنامه‌ریزی که مدل برنامه‌ریزی ریاضی آن‌ها قبلاً توسعه داده شده است، توسعه یابد.

## منابع

- [1] Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, 21(5), 1154–1157.
- [2] Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of operations research*, 23(4), 769–805.
- [3] Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations research letters*, 25(1), 1–13.



- [4] Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, 88, 411–424.
- [5] El Ghaoui, L., & Lebret, H. (1997). Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 18(4), 1035–1064. DOI:10.1137/S0895479896298130
- [6] El Ghaoui, L., Oustry, F., & Lebret, H. (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM journal on optimization*, 9(1), 33–52. DOI:10.1137/S1052623496305717
- [7] Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1), 35–53. DOI:10.1287/opre.1030.0065
- [8] Sungur, I., Ordóñez, F., & Dessouky, M. (2008). A robust optimization approach for the capacitated vehicle routing problem with demand uncertainty. *Iie transactions*, 40(5), 509–523.
- [9] Yan, Y., Meng, Q., Wang, S., & Guo, X. (2012). Robust optimization model of schedule design for a fixed bus route. *Transportation research part C: emerging technologies*, 25, 113–121. DOI:10.1016/j.trc.2012.05.006
- [10] Agra, A., Christiansen, M., Figueiredo, R., Hvattum, L. M., Poss, M., & Requejo, C. (2013). The robust vehicle routing problem with time windows. *Computers & operations research*, 40(3), 856–866.
- [11] Movafaghpour, M. A. (2016). *Project sequence scheduling with interval uncertainty on activities* [presentation]. International conference on industrial engineering and management. **(In Persian)**. <https://civilica.com/doc/504368>
- [12] Park, J., Tae, H., & Kim, B. I. (2012). A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem. *European journal of operational research*, 217(1), 204–213. DOI:10.1016/j.ejor.2011.08.022