




Paper Type: Original Article



## A Two-Phase Parametric Approach for Solving Flexible Fuzzy Transportation Problem

Gohar Shakouri<sup>1,\*</sup> , Seyed Hadi Nassery<sup>2</sup>, Mohammad Mahdi Paydar<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran; gshakoori2@gmail.com.

<sup>2</sup> Department of Applied Mathematics, Mazandaran University, Babolsar, Iran; nhadi57@gmail.com.

<sup>3</sup> Department of Industrial Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran; Paydar@nit.ac.ir.

**Citation:**



Shakouri, G., Nassery, S. M., & Paydar, M. M. (2023). A two-phase parametric approach for solving flexible fuzzy transportation problem. *Journal of decisions and operations research*, 8(1), 236-255.

Received: 08/10/2021

Reviewed: 10/11/2021

Revised: 14/12/2021

Accepted: 25/02/2022

### Abstract

**Purpose:** The transportation problem, as one of the most important and most practical models related to linear programming, has always been of interest to researchers. Due to the lack of accurate information, variable economic conditions, uncontrollable factors and especially variable conditions of available resources, to adapt to the real conditions, we are faced with a kind of uncertainty, both flexibility in constraints and fuzzy nature of the parameters. Hence, one method to express the conditions of this modeling is to use flexible fuzzy numbers that make it more adaptable to real conditions.

**Methodology:** In this research, after reviewing the research literature, the transportation problem is modeled by considering the flexible-interval fuzzy supply constraint. Then, for the solution process, a flexible fuzzy approach to the proposed model is studied.

**Findings:** Numerical example analysis indicates that parametric linear programming approach offers a reliable design so that the decision maker can obtain a better selection of resources with the most satisfaction.

**Originality/Value:** In this research, parametric approach with flexible relationship is discussed and based on the research results, the solution is obtained with the most satisfaction in constraints.

**Keywords:** Flexible linear problem, Fuzzy transportation model, Parameter linear programming, Membership function, Flexible fuzzy constraint.

Corresponding Author: gshakoori2@gmail.com

 <http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.5.13.3>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## یک رویکرد پارامتری دو مرحله‌ای برای حل مساله حمل‌ونقل فازی انعطاف‌پذیر

گوهر شکوری<sup>۱</sup>، سید هادی ناصری<sup>۲</sup>، محمد مهدی پایدار<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>گروه علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

<sup>۲</sup>گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

<sup>۳</sup>گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران.

### چکیده

**هدف:** مساله حمل‌ونقل، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین و کاربردی‌ترین مدل‌های مرتبط با برنامه‌ریزی خطی، همواره مورد توجه محققین می‌باشد. با توجه به فقدان اطلاعات دقیق، شرایط اقتصادی متغیر، عوامل غیرقابل کنترل و به‌ویژه شرایط متغیر منابع در دسترس، برای تطبیق با شرایط واقعی عملاً با نوعی از عدم قطعیت، هم انعطاف‌پذیری در قیود و هم فازی بودن ماهیت پارامترها مواجه هستیم. از این‌رو، یک روش برای بیان شرایط این مدل‌سازی، استفاده از اعداد فازی انعطاف‌پذیر است که باعث می‌شود با شرایط واقعی تطبیق بیش‌تری داشته باشد.

**روش‌شناسی پژوهش:** در این تحقیق، پس از بررسی ادبیات پژوهش، مساله حمل‌ونقل کلاسیک با در نظر گرفتن محدودیت عرضه فازی انعطاف‌پذیر-بازهای، مدل‌سازی می‌شود. در ادامه برای فرآیند حل، یک رویکرد فازی انعطاف‌پذیر برای مدل پیشنهادی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

**یافته‌ها:** تجزیه و تحلیل مثال عددی بیانگر آن است که رویکرد برنامه‌ریزی خطی پارامتری طرحی مطمئن‌تر را به ما می‌دهد تا تصمیم‌گیرنده اجازه انتخاب بهتری از منابع با بیش‌ترین رضایتمندی به دست آورد.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** در این پژوهش، به رویکرد پارامتری با رابطه انعطاف‌پذیر پرداخته می‌شود و بر اساس نتایج پژوهش، جواب با بیش‌ترین رضایتمندی در قیود به دست می‌آید.

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر، مدل حمل‌ونقل فازی، برنامه‌ریزی خطی پارامتری، تابع عضویت، قید فازی انعطاف‌پذیر.

### ۱- مقدمه

از عوامل مهم رقابت واحدهای اقتصادی، کاهش هزینه‌های تمام‌شده محصول می‌باشد. هزینه حمل‌ونقل بخش عمده‌ای از هزینه‌های تمام شده را شامل می‌شود، به همین دلیل مدیریت حمل‌ونقل یکی از تصمیمات استراتژیکی کلیدی در زنجیره‌تأمین می‌باشد. مساله حمل‌ونقل به‌عنوان یکی از شاخه‌های مهم علم تحقیق در عملیات است و هدف آن، تعیین مسیر حمل و تخصیص کالا از مبدا به مقصد است به‌گونه‌ای که هزینه کل حمل‌ونقل در عین تأمین محدودیت‌های عرضه و تقاضا به حداقل برسد. ولی در دنیای واقعی به دلایل عوامل غیرقابل کنترل محیط اقتصادی، با عدم اطمینان و ابهام در پارامترهای مسایل حمل‌ونقل مواجه می‌شویم که در چنین شرایطی ضرایب به‌وسیله پارامترهای غیرقطعی تعریف می‌شوند. بررسی این مسایل در شرایط غیرقطعی از اهمیت بالایی برای محققین برخوردار است. با توجه به کاربرد بسیار گسترده منطق فازی در تصمیم‌گیری و سابقه کهن مطالعات بهینه‌سازی فازی کارهای برجسته‌ای در ادبیات موضوع نمایان شده است. با توجه

\* نویسنده مسئول

Gshakoori2@gmail.com

<http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.5.13.3>



به این‌که اغلب داده‌های واقعی، دقیق نیستند و نیاز به مدل فازی بیش از پیش احساس می‌شود، محققان زیادی مساله حمل و نقل کلاسیک را در محیط فازی بررسی نمودند. لیو و کائو [1] براساس اصل گسترش مساله حمل و نقل را حل نمودند. آن‌ها مدل حمل و نقل با ضرایب هزینه و مقادیر عرضه و تقاضای فازی مثلثی معرفی نمودند و مساله را به دو زیر مساله، یک‌بار با محدوده کران پایین عرضه و تقاضا و بار بعد با محدوده کران بالا در نظر گرفتند و برای محاسبه مقدار تابع هدف فازی از آلفا برش استفاده نمودند. گانی و رازک [2] یک روش دومرحله‌ای برای مساله حمل و نقل با اعداد فازی دوزنقه‌ای معرفی کردند. در مرحله اول مقداری محصول برای برآورده شدن حداقل شرایط مقصد فرستاده می‌شود و مقادیر مازاد منابع در صورت وجود، با توجه به هزینه حمل و نقل، ارسال می‌شود که هدف به حداقل رساندن مجموع هزینه‌های حمل و نقل می‌باشد. پندیان و ناتراجان [3] الگوریتم روش نقطه صفر فازی برای مساله حمل و نقل با ضرایب هدف و عرضه و تقاضای فازی مثلثی بازه‌ای ارائه دادند. ناتراجان [4] به روش جداسازی براساس نقطه صفر، مساله حمل و نقل با ضرایب هدف و عرضه و تقاضای بازه‌ای حل نمود. برای یافتن جواب بهینه، دو زیر مساله با کران بالا محدودیت و مساله با کران پایین محدودیت در نظر گرفته و سپس به روش نقطه صفر، جواب بهینه را به دست آورد. کائور و کومار [5] روش جدیدی برای حمل و نقل فازی به کمک رتبه‌بندی معرفی کردند. گابریل و همکاران [6] از بهینه‌سازی استوار دومرحله‌ای استفاده نمودند. گاوو و همکاران [7] الگوریتم حل مساله حمل و نقل با هزینه نادقیق و تقاضای تصادفی معرفی کرده است که با استفاده از حداقل رساندن مقدار موردانتظار تابع هدف و در نظر گرفتن سطوح اطمینان روی محدودیت‌ها مدل ریاضی دقیق آن را نوشته و با تئوری احتمال مساله را حل نمودند. پرشوتکومار و آنانتاناریان [8] برای یافتن راه‌حل بهینه مساله حمل و نقل با هزینه، عرضه و تقاضای فازی دوزنقه‌ای از تکنیک‌های رتبه‌بندی استفاده کرده و مساله را به مساله دقیق تبدیل نمود. اکیل‌باشا و همکاران [9] از روش *mid-width* برای مساله بازه‌ای حمل و نقل، دانتزیگ [10] الگوریتم سیمپلکس برای مساله حمل و نقل فازی استفاده نمودند. محمودی راد و همکاران [11] مساله حمل و نقل سه‌بعدی را با هزینه ثابت و با اعداد فازی نوع دوم معرفی کردند. کومار و همکاران [12] مساله حمل و نقل با اعداد فازی فیثاغورثی را در نظر گرفته و در مرحله اول جواب اساسی اولیه را برای مدل موردنظر محاسبه و سپس هزینه بهینه حمل و نقل را محاسبه نمود. ماتوکومار و همکاران [13] مساله حمل و نقل با تمامی پارامترهای اعداد فازی هشت‌ضلعی نامتوازن را در نظر گرفت و با رویکرد توابع رتبه‌بندی، اعداد فازی موجود را به صورت دقیق تبدیل نموده و بدون تبدیل آن به مساله حمل و نقل متوازن، مساله را حل نمود. ناصری و خبیری [14] مساله حمل و نقل را با ضرایب تابع هدف خاکستری و مقادیر حمل و نقل فازی در نظر گرفته و مدل را با سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی سازی اعداد فازی به صورت قطعی نوشته و جواب بهینه را یافتند. خلیفا و همکاران [15] مساله حمل و نقل کلاسیک با هزینه و عرضه و تقاضا اعداد فازی شش ضلعی پیشنهاد داده‌اند. ابتدا با استفاده از رویکرد رتبه‌بندی، عرضه و تقاضا را به صورت دقیق نوشته و با استفاده از آلفا برش، مساله را به صورت مساله خطی بازه‌ای تبدیل نموده و سپس مساله چندهدفه حاصل شده را حل کردند. سرینواسان و همکاران [16] مساله حمل و نقل با عرضه و تقاضا و هزینه فازی مثلثی را در نظر گرفته و با تابع رتبه‌بندی تعریف شده، مقدار دقیق عرضه و تقاضا را محاسبه و سپس مساله را حل نمود. سمان و فرخین [17] مساله حمل و نقل کاملاً فازی با اعداد دوزنقه‌ای غیرنرمال را در نظر گرفته و با رتبه‌بندی جدید مبتنی بر انتگرال‌گیری از توابع معکوس اعداد فازی به حل مساله پرداخت. ساهو [18] مساله حمل و نقل را با عرضه و تقاضا و هزینه حمل و نقل با پارامترهای فازی فرماتن در نظر گرفته و با استفاده از عملیات حسابی جواب بهینه را به دست آورد. پراتیهر و همکاران [19] از روش ووگل برای مساله حمل و نقل فازی بازه‌ای نوع ۲ استفاده نمودند. در این مقاله مدل حمل و نقل با اعداد فازی انعطاف‌پذیر پیشنهاد شده است که برای یافتن جواب بهینه از رویکرد پارامتری استفاده می‌کنیم که این رویکرد توسط عطاری و ناصری [20] در برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه جواب‌های شدنی و کارا در برنامه ریاضی فازی انعطاف‌پذیر استفاده شد. اخیراً نیز چند مدل برنامه‌ریزی خطی با رویکرد انعطاف‌پذیر توسط ناصری و همکاران [14]، [21]، [22] و گودرزیان و همکاران [23] ارائه شد. در جدول ۱، پژوهش‌های پیشین با پژوهش حاضر مقایسه شده است.

Table 1- Comparison of previous researches with the present study.

| نویسندگان                | معیارهای مورد استفاده  | روش مورد استفاده   |
|--------------------------|--|--|
| کومار و همکاران [12]     | حمل و نقل با اعداد فازی مثلثی فیناغورثی                            | مرحله اول جواب اساسی اولیه و سپس هزینه بهینه حمل و نقل را محاسبه نمود.   |
| ماتوکومار و همکاران [13] | حمل و نقل با تمامی پارامترهای اعداد فازی هشت ضلعی نامتوازن         | رویکرد توابع رتبه‌بندی اعداد فازی موجود را به صورت دقیق تبدیل نموده و بدون تبدیل آن به مساله حمل و نقل متوازن، به حل آن پرداخت.  |
| ناصری و خبیری [14]       | حمل و نقل با ضرایب هدف فازی خاکستری                                | سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی‌سازی اعداد فازی   |
| خلیفا و همکاران [15]     | حمل و نقل با ضرایب هدف و عرضه و تقاضای فازی شش ضلعی                | ابتدا با تابع رتبه‌بندی، عرضه و تقاضا را به صورت اعداد دقیق نوشته و سپس با آلفا برش، مساله را به صورت مساله خطی بازه‌ای تبدیل نموده و مساله چند هدفه حاصل شده را حل کردند. |
| سرنواسن و همکاران [16]   | حمل و نقل عرضه و تقاضا و هزینه فازی                                | رویکرد رتبه‌بندی   |
| سمان و فرخین [17]        | حمل و نقل کاملاً فازی با اعداد دوزنقه‌ای غیر نرمال                 | رتبه‌بندی جدید مبتنی بر انتگرال‌گیری از توابع معکوس اعداد فازی   |
| ساهو [18]                | حمل و نقل با عرضه و تقاضا و هزینه حمل و نقل پارامترهای فازی فرماتن | عملیات حسابی   |
| پراتیهر و همکاران [19]   | حمل و نقل فازی بازه‌ای نوع ۲                                       | روش ووگل   |
| ناصری و همکاران [21]     | برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای با محدودیت انعطاف‌پذیر چندهدفه             | با تابع عضویت تعریف شده قیود را به صورت پارامتری نوشته و با حل دو زیر مساله و رویکرد پارامتری حل نمودند.   |



در این مقاله، با بهره‌گیری از رویکرد انعطاف‌پذیری در قیود مدل حمل و نقل ضمن توسعه مدل کلاسیک به فازی انعطاف‌پذیر، رویه‌ای دو مرحله‌ای برای حل مدل پیشنهاد می‌شود. برای این منظور، از یک رویکرد چند پارامتری با توجه به تابع عضویت تعریف شده برای حل مدل حمل و نقل با محدودیت عرضه انعطاف‌پذیر استفاده می‌کنیم. رابطه‌ای معادل بین جواب بهینه مدل پیشنهادی و جواب‌های زیر مساله ایجاد می‌کنیم. برای راه حل پیشنهاد شده نیز یک الگوریتم ارایه می‌دهیم که با توجه به انعطاف‌پذیر بودن قیود فازی با رویکرد پارامتری پیشنهاد شده، سطوح رضایتمندی بیشینه می‌گردد. مزیت این روش بر این اصل است که امکان انتخاب بیش‌تری به تصمیم‌گیرنده داده می‌شود تا با توجه به شرایط موجود و بهره‌مندی بهینه‌تری از منابع موجود، جواب بهتری را با شرایط صدق‌پذیری بیش‌تری در محدودیت‌ها انتخاب کند. مطالب این مقاله در شش بخش تهیه شده است. در بخش ۲ بعضی از تعاریف و مفاهیم پایه مدل حمل و نقل مورد نظر و ابزارهای تبدیل مدل ارایه شده به شکل پارامتری می‌پردازیم. در بخش ۳ مدل پارامتری مساله و الگوریتم آن را پیشنهاد می‌کنیم. برای توصیف فرآیند حل، در بخش ۴ پیشنهاد فرآیند حل، بخش ۵ یک مثال ارایه می‌شود و در نهایت بخش ۶ به نتیجه‌گیری از مطالعه انجام شده اختصاص می‌یابد.

## ۲- مدل ریاضی مساله حمل و نقل

در دنیای واقعی دسترسی به اطلاعات دقیق دشوار بوده و می‌توان برای این اطلاعات از مفاهیم توصیفی یا تقریبی هم‌چون پارامترهای فازی استفاده کرد که از نظر تصمیم‌گیرندگان مورد پذیرش است. یکی از مهم‌ترین مسایل بهینه‌سازی که به مدل برنامه‌ریزی خطی مرتبط می‌شود مساله حمل و نقل است که در این مقاله به آن می‌پردازیم.

اساساً در مدل حمل و نقل کلاسیک فرض می‌شود که هر یک از تامین‌کنندگان، دارای میزان عرضه مشخص به مقدار  $s_i$  و مشتریان دارای تقاضا به مقدار مشخص  $d_j$  می‌باشند در حالی که هزینه ارسال هر واحد کالا ارسالی از تامین‌کننده  $i = 1, 2, \dots, m$  به مشتری  $j = 1, 2, \dots, n$  است و  $x_{ij}$  متغیر تصمیم می‌باشد [1]، [24].

در حال حاضر، وضعیت فعلی بازار همیشه پر از آب است؛ یعنی به دلیل بازار رقابتی، ناپایدار بوده و از این رو شرایط عرضه کاملاً غیر قابل پیش‌بینی است. به همین دلیل می‌توان با استفاده از مفهوم عدم قطعیت، مساله را به صورت زیر برای محدودیت عرضه در نظر گرفته



و مدل‌سازی نمود. اکنون شرایطی را در نظر بگیرید که یکی از اجزای مدل، هم‌چون قید عرضه به صورت قطعی تعریف نشده باشد و باتوجه به قیمت بازار و افزایش نیروی کار بتوان عرضه را افزایش داد. در این صورت لازم است تا مدل ریاضی مناسب که بیانگر شرایط واقعی مسأله باشد طراحی شود. یکی از مدل‌های ریاضی که امکان مدل‌سازی ریاضی مسأله یادشده را در شرایط نادقیق فراهم می‌آورد مدل حمل و نقل با قیود انعطاف‌پذیر است. در این مدل فرض شده است که قیود مربوط به عرضه به صورت فازی انعطاف‌پذیر مدل‌سازی شده‌اند که در آن نماد  $\lesssim$  به معنی "تقریباً کوچک‌تر از یا مساوی با" است که برای داده‌های نادقیق به کار می‌رود [1].

مسأله ۱ -

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

که در آن قید فازی  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$  با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود [21]:

$$\mu(t_i) = \begin{cases} 1, & t_i - s_i \leq 0, \\ 1 - \frac{t_i - s_i}{p_i}, & 0 \leq t_i - s_i \leq p_i, \\ 0, & t_i - s_i \geq p_i. \end{cases} \quad (5)$$

به طوری که  $t_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$ .

به وضوح قید داده شده در رابطه (۲)، در مفهوم برنامه‌ریزی خطی خوش تعریف نیست (فضای جواب مشخص برای این دسته از قیود ایجاد نمی‌شود). برای رفع این نقیصه، در این مقاله با رویکرد پارامتری یک مدل معادل ساخته می‌شود که براساس آن یک فرآیند حل نیز ارائه می‌گردد [21].

اصل موضوعه ۱- قید انعطاف‌پذیر  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$  با قید پارامتری  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + \theta p_i$  که در آن  $\theta \in [0, 1]$  معادل است.

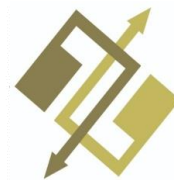
اثبات: هر جواب  $x$  که در قید انعطاف‌پذیر  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$  صدق می‌کند عملاً یک مجموعه فازی با تابع عضویت (۵) است. براین اساس سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- اگر  $\sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \leq 0$ ، یعنی  $i$ th قید برقرار باشد، آن‌گاه مقدار تابع عضویت آن یک است و رضایتمندی حداکثر مقدار ممکن است.

- اگر  $0 \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \leq p_i$ ، آن‌گاه تابع عضویت به صورت یک‌نوا غیرزولی بوده که به علت کمبود امکانات، خدمات‌رسانی را دچار مشکل کرده و رضایتمندی مشتری را کاهش داده است.

- اگر  $\sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \geq p_i$ ، یعنی حد مجاز تخطی بیش‌ازحد مجازی است که تصمیم‌گیرنده مشخص کرده است. پس قید  $i$  به طور کامل نقض شده و تابع عضویت آن صفر است؛ یعنی شرایط و نوع خدمات‌رسانی موردپذیرش مشتریان قرار نگرفته است.

ازاین‌رو، باتوجه به پیوسته بودن تابع عضویت یادشده، مقادیر سمت راست قیود انعطاف‌پذیر از مقدار  $s_i$  تا  $s_i + p_i$  براساس مقادیر پیوسته  $\theta$  به ترتیب از  $\theta = 0$  تا  $\theta = 1$  ایجاد می‌شود. در نتیجه می‌توان رابطه فازی انعطاف‌پذیر را به صورت پارامتری معادل  $s_i(\theta) = s_i + \theta p_i$  که در آن  $\theta \in [0, 1]$  نمایش داد.



باتوجه به تعریف مدل، فرض می‌شود برای هر قید انعطاف‌پذیر عرضه، مقدار حد مجاز تخطی قید  $i$ th عرضه، مقدار  $p_i$  (یک عدد حقیقی نامنفی) از پیش تعیین شده است. اکنون باتوجه به مفهوم انعطاف‌پذیر بودن قیود عرضه، قید  $i$ th؛ یعنی  $i = 1, 2, \dots, m$   $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$  با قید پارامتری زیر معادل خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + \theta p_i. \quad (6)$$

که در آن  $\theta \in [0, 1]$  است.

لم بعدی معادل بودن قید فازی (۲) و قید پارامتری (۶) را بیان می‌کند.

اصل موضوعه ۲- مساله ۱، معادل مساله زیر است:

مساله ۲-

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (7)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + \theta p_i, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

اثبات: براساس لم ۱ واضح است.

نتیجه ۱: باتوجه به لم ۱، خوش تعریفی مساله ۲ نتیجه می‌شود.

به‌وضوح از رابطه (۶)، شکل پارامتری قید معادل آن به‌دست می‌آید که همان رابطه (۸) است. توجه داریم که صحت معادل بودن رابطه (۲) و رابطه (۶)، براساس تابع عضویت تعریف‌شده در رابطه (۵)، برای قید (۶) بدیهی است [21]، [22].

اکنون با معادل شدن مساله اصلی با یک مدل برنامه‌ریزی خطی پارامتری، امکان تعریف فضای جواب‌های شدنی میسر می‌شود.

اصل موضوعه ۳- باتوجه به تعریف تابع عضویت (۵) که توابع پیوسته و یک‌نوا هستند، آن‌گاه مسایلی با قیدهایی به‌صورت  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$  و  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \tilde{s}_i$  (که در آن  $\tilde{s}_i$  عدد فازی تعریف‌شده در شکل ۱ می‌باشد)، عملاً مسایل معادلی خواهند بود؛ بنابراین، مساله اصلی با مساله زیر معادل خواهد بود:

مساله ۳-

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (11)$$

s.t.

$$X \in X_\alpha, \quad (12)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

که در آن  $X_\alpha$  فضای جواب‌های شدنی مساله اصلی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

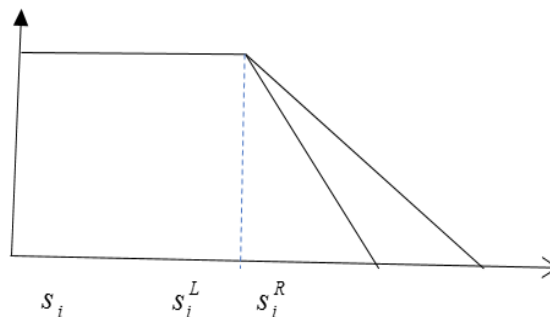
تعریف ۱- فرض کنید  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in [0, 1]^m$  و

$$X_\alpha = \left\{ x_{ij} \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1-\alpha_i)p_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n. \end{array} \right. \right\}. \quad (14)$$

به طوری که برای  $X = (x_{ij}) \in X_\alpha, x_{ij} \in \mathbb{R}$  یک جواب  $\alpha$ -شدنی مساله (۳) را تعریف می کند.

### ۳- مدل پارامتری مساله

در این بخش، با استفاده از تابع عضویت تعریف شده در رابطه (۵)، مدل حمل و نقل پیشنهاد شده را از حالت فازی انعطاف پذیر به حالت پارامتری تبدیل می کنیم تا بتوانیم یک فرآیند حل مبتنی بر برنامه ریزی ریاضی پارامتری به دست آوریم. با توجه به این که حد مجاز تخطی  $p_i$  برای قید  $i$ th به صورت یک داده مشخص در مدل فرض می شود، ممکن است بر حسب نظر خیره یا کارشناسان به جای یک عدد قطعی در قالب یک کران بالا و پایین از تولرانس مورد نظر یاد شود. از این رو، در این بخش قصد داریم با تعمیم رویکرد ارایه شده در توسعه مدل (۱)، حالتی را مطالعه کنیم که مقدار حد مجاز تخطی در بازه ای مشخص داده شده باشد. به ویژه وقتی در نظر خبرگان اتفاق نظر وجود ندارد سازگاری بهتری با شرایط واقعی دارد. تابع عضویت داده شده در رابطه (۵) امکان توصیف حد مجاز تخطی بازه ای را همان گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، فراهم می آورد.



شکل ۱- توصیف قید فازی انعطاف پذیر با حد مجاز تخطی بازه ای.

Figure 1- Description of flexible fuzzy constrain with interval tolerance.

با توجه به تعریف بالا داریم:

$$p_i^L = s_i^L - s_i,$$

$$p_i^R = s_i^R - s_i.$$

به طوری که  $s_i < s_i^L \leq s_i^R$  در این صورت حد مجاز تخطی قابل قبول برای قید  $i$ th به صورت زیر خواهد بود:

$$p_i \in [p_i^L, p_i^R].$$

بدیهی است این تعریف، گستره پذیرش انعطاف پذیری در قیود عرضه را از سطح پذیرش  $s_i^L = s_i + p_i^L$  به  $s_i^R = s_i + p_i^R$  گسترش می دهد. در حالت بالا، جهت افزایش سطح رضایتمندی تصمیم گیرنده، می توان دو مدل برای حالت خوش بینانه و حالت بدبینانه به صورت زیر تعریف کرد:

- حالت خوش بینانه قید عرضه:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1-\alpha_i)p_i^R, \quad i=1,2,\dots,m,. \quad (15)$$

که در این حالت مساله خوش بینانه به صورت زیر مدل سازی می شود:

### مساله ۴-

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (16)$$

s.t.





$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^R, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (19)$$

$$0 \leq \alpha_i < 1. \quad (20)$$

– حالت بدبینانه قید عرضه:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

در این حالت نیز مساله بدبینانه زیر مدل‌سازی می‌شود:

مساله ۵-

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (22)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (24)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

$$0 \leq \alpha_i < 1. \quad (26)$$

رویکرد یادشده در بالا با دو دیدگاه طرح شده‌اند:

۱. رفع مشکل ناخوش تعریفی قیود انعطاف‌پذیر.

۲. توسعه حالت تولرانس‌های قیود انعطاف‌پذیر به صورت حد مجاز تخطی‌های بازه‌ای (توسیع رویکرد چند انتخابی به حالت پیوسته).

بنابراین، مساله حمل‌ونقل فازی انعطاف‌پذیر داده‌شده را با جایگزینی توابع عضویت می‌توان معادل دو مساله پارامتری بالا نوشت. لازم به ذکر است پارامترهای  $\alpha_i$  توسط تصمیم‌گیرنده (خبیره) برای هر قید به صورت مستقل تعیین می‌شود.

در بخش بعدی، براساس پایه نظری بنا نهاده‌شده در بالا و به‌ویژه با بهره‌گیری از مفهوم حالت خوش‌بینانه و بدبینانه که عملاً با میزان رضایت تصمیم‌گیرنده مرتبط است یک فرآیند حل پیشنهاد می‌شود.

#### ۴- پیشنهاد فرآیند حل مدل

این بخش به تشریح یک رویکرد حل مبتنی بر مدل‌های ایجادشده در بخش ۲ اختصاص دارد.

##### ۴-۱- پایه‌های نظری مدل پیشنهادی

در بخش‌های قبل تاکید شد که به دلیل خوش تعریف نبودن مدل اصلی وقتی که فرض انعطاف‌پذیری قیود در آن وجود دارد، فضای جواب شدنی مساله به‌طور مشخص قابل تعریف نیست و حل مساله با شکل اولیه خود ماهیت واقعی سیستم تصمیم‌گیری را انعکاس نمی‌دهد. ازاین‌رو برای حل، ابتدا مساله را از حالت فازی انعطاف‌پذیر به حالت پارامتری تبدیل و سپس برای به‌دست آوردن جواب بهینه از بیشینه کردن سطوح رضایتمندی استفاده می‌کنیم.



در این راستا برخی تعاریف و مفاهیم اساسی موردنیاز است که در زیر آورده می‌شود:

**تعریف ۳-** فرض کنید رابطه  $\lesssim$  یک نمایش فازی از رابطه نابرابری  $\leq$  در مساله ۱ باشد. بردار  $x \in \mathbb{R}$  یک جواب  $\alpha$ -کارا با تابع هدف کمینه‌سازی است، اگر هیچ  $x' \in X_\alpha$  نباشد که  $z'(x) > z'(x')$ .

هم‌چنین هر جواب  $\alpha$ -کارا برای مساله (۴) یک جواب  $\alpha$ -شدنی برای آن نیز است.

گزاره ۱- فرض کنید  $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m)$  و  $\alpha'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_m)$  که در آن  $\alpha'_i \leq \alpha''_i$  برای همه  $i$  باشد. آن‌گاه هر جواب  $\alpha''$  شدنی، یک جواب  $\alpha'$  شدنی می‌باشد.

**قضیه ۱-** فرض کنید  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in [0, 1]^m$  و  $x^* \in X_\alpha$  و  $x_{ij}^* \geq 0, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ . یک جواب  $\alpha$ -شدنی مساله ۴ باشد. آن‌گاه بردار  $x^* \in \mathbb{R}^{mn}$  یک جواب  $\alpha$ -کارای مساله ۴ با تابع هدف کمینه‌سازی می‌باشد، اگر و تنها اگر  $x^*$  یک جواب بهینه مساله ۴ باشد.

**اثبات:** فرض کنید  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in [0, 1]^m$  و  $x_{ij}^* \geq 0, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$  یک جواب  $\alpha$ -کارا مساله ۴ با تابع هدف کمینه‌سازی باشد. باتوجه به مساله ۱ و تابع عضویت تعریف‌شده برای  $i=1, 2, \dots, m$  داریم:  $\mu_i \left\{ \sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i \right\} \geq \alpha_i$  یا  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i$ ؛ بنابراین،  $x^*$  یک جواب شدنی برای مساله ۳ است. هم‌چنین باتوجه به تعریف ۳ هیچ  $x' \in X_\alpha$  وجود ندارد که  $z(x^*) > z'(x')$ . این بدین معناست که  $x^*$  یک جواب بهینه مساله ۳ است. از سوی دیگر، اگر  $x^*$  جواب بهینه مساله ۴ باشد به‌وضوح  $x^*$  یک جواب  $\alpha$ -شدنی مساله ۴ است؛ بنابراین، باتوجه به تعریف بهینگی  $x^*$ ، بر  $\alpha$ -کارا بودن  $x^*$  اشاره دارد.

اکنون با حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی مساله ۴ و با تعیین  $\alpha_i$  توسط تصمیم‌گیرنده و جایگزین کردن آن در محدودیت متناظرش در مساله ۶ و سپس با حل مساله به‌دست آمده از این جایگزینی، جواب  $\alpha$ -کارا مساله ۴ محاسبه می‌شود.

جواب  $\alpha$ -کارا مساله ۴ دو ویژگی اساسی دارد:

۱. جواب دارای درجه رضایتمندی متناسب با هر محدودیت است.
۲. جواب به‌دست‌آمده بهینه است.

این جواب تصمیم‌گیرنده را قادر می‌سازد تا با تعیین اولویت مطلوب و باتوجه به شرایط محیطی یک جواب با درجه شدنی و کارایی مطلوب‌تر به‌دست آورد. بدین‌منظور ابتدا مساله ۵ را حل می‌کنیم. فرض کنید  $(x_R^*, \alpha_R^*)$  و  $(x_L^*, \alpha_L^*)$  به‌ترتیب جواب بهینه و مقدار بهینه تابع هدف مرحله اول با درجه کارایی  $\alpha_R^*$  برای مساله خوش‌بینانه و  $(x_L^*, \alpha_L^*)$  و  $(x_L^*, \alpha_L^*)$  به‌ترتیب جواب بهینه و مقدار بهینه تابع هدف مرحله اول با درجه کارایی  $\alpha_L^*$  برای مساله بدبینانه می‌باشد.

سپس یک جریمه  $p_0$  را برای هزینه حمل‌ونقل در نظر می‌گیریم و تابع هدف مساله مرحله اول را به‌صورت قید با جریمه  $p_0$  در مرحله دوم می‌نویسیم. در ادامه با انتخاب جواب بهینه مطلوب توسط تصمیم‌گیرنده، برای یافتن جواب بهتر که دارای رضایتمندی بیش‌تر می‌باشد، مساله ۶ را حل می‌کنیم.



$$\text{Max} \sum_{i=0}^m \alpha_i, \quad (27)$$

s.t.

$$z \leq z_R^* + (1 - \alpha_0) p_0, \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^R, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (30)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (31)$$

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \alpha_i^* \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (32)$$

بدهی است این مدل یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند پارامتری است و با حل آن می‌توان جواب بهینه  $(x_R^{**}, \alpha_R^{**})$  و مقدار بهینه تابع هدف  $z_R^{**}$  با درجه رضایتمندی  $\alpha_R^{**}$  را به دست آورد.

باتوجه به این که با کوچک شدن ناحیه جواب، جواب بهینه بهتر نخواهد شد و تصمیم‌گیرنده می‌خواهد مقدار بهینه تابع هدف را فقط حداکثر به اندازه  $(1 - \alpha_0)P_0$  با رعایت شرط حداقل رضایتمندی موردپذیرش قیود، در جواب بهینه افزایش دهد. به‌وضوح مدل بالا، یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد که امکان دستیابی به یک جواب بهینه با رضایتمندی بیش‌تر حاصل شود و با این شرایط از حل مساله ۶ جواب بهینه مساله اصلی به دست می‌آید. قضیه زیر برای پوشش نظری بحث در این خصوص آورده شده است.

**قضیه ۲-** جواب بهینه  $x^{**}$  مساله ۶، یک جواب  $\alpha$ -کارای مساله ۶ است.

اثبات: با رویکرد فرض خلف قصد داریم اثبات را ارایه کنیم. از این‌رو، فرض کنیم  $x^{**}$  جواب بهینه کارا مساله ۱ نباشد، آن‌گاه  $\bar{x}$  وجود دارد به طوری که  $\mu_i(x^{**}) \leq \mu_i(\bar{x})$  برای بعضی از  $k$ ،  $\mu_k(x^{**}) \leq \mu_k(\bar{x})$ . حال از آن‌جا که  $(x^{**}, \alpha^{**})$  جواب بهینه است و ضرایب در تابع هدف مرحله دوم مثبت هستند، داریم:

$$\mu_i(x^{**}) = \alpha_i^{**}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

حال با انتخاب  $\mu_i(\bar{x}) = \bar{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, m$ ، جواب  $(\bar{x}, \bar{\alpha})$  برای مساله مرحله دوم شدنی است. از این‌رو

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^{**} = \sum_{i=1}^m \mu_i(x^{**}) < \sum_{i=1}^m \mu_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \mu_i(x) + \alpha_k$$

بنابراین، نتیجه می‌شود  $(x^{**}, \alpha^{**})$  یک جواب بهینه مرحله دوم نیست که به‌وضوح یک تناقض است.

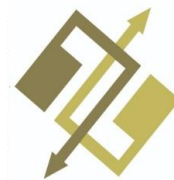
**اصل موضوعه ۴-** مساله ۶ همواره شدنی است؛ زیرا برای  $\alpha_i = 0$  یک جواب بهینه  $(z^*, x^*)$  وجود دارد.

**اصل موضوعه ۵-** مساله ۶ هیچ‌گاه بی‌کران نیست.

اثبات: از آن‌جا که حداکثر مقدار هر  $\alpha_i$ ، یک می‌باشد و در نتیجه حداکثر مقدار مجموع  $\alpha_i$ s یعنی برابر  $m$  است.

**قضیه ۳-** جواب به دست آمده از مساله ۶ بهتر از جواب مساله ۴ نخواهد بود.

اثبات: فرض کنید  $x^*$  جواب بهینه مساله ۴ با سطح رضایتمندی  $\alpha$  باشد. در مساله ۶ با افزایش سطح  $\alpha$  ناحیه شدنی را کوچک‌تر کرده و واضح است که با کوچک شدن ناحیه شدنی جواب به دست آمده از حل مساله ۶ (باتوجه به مساله مینی‌م‌سازی) بهتر نمی‌شود (یعنی یا برابر مساله ۶ بوده یا بدتر از آن می‌باشد).



حال مساله ۶ را در حالت بدبینانه حل می‌کنیم، یعنی در یک بازه انعطاف‌پذیر، آن را به حالت پارامتری تبدیل کرده‌ایم و در قسمت بازه‌ای، کران پایین را در نظر می‌گیریم. با تعریف تابع عضویت از حالت انعطاف‌پذیر به پارامتری دقیق تبدیل کرده و با کران پایین مساله را حل می‌کنیم.

هم‌اکنون فرض کنید  $(x_L^*, \alpha_L^*)$  و  $z_L^*$  به ترتیب جواب بهینه و مقدار بهینه تابع هدف مرحله اول با درجه کارایی  $\alpha_L^*$  برای مساله بدبینانه می‌باشد. حال برای امکان رسیدن به جواب مطلوب‌تر مساله زیر را حل می‌کنیم.

مساله ۷-

$$\text{Max} \sum_{i=0}^m \alpha_i, \quad (33)$$

s.t.

$$z \leq z_L^* + (1 - \alpha_0) p_0, \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (36)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (37)$$

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \alpha_i^* \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (38)$$

به‌وضوح مدل بالا یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند پارامتری است که یک جواب بهینه قطعی را نتیجه می‌دهد؛ بنابراین، مقدار بهینه تابع هدف  $z_L^{**}$  و جواب بهینه  $(x_L^{**}, \alpha_L^{**})$  بنا به قضیه ۲ جواب بهینه مساله ۷ می‌باشد.

قضیه ۴- اگر مقدار بهینه تابع هدف مساله ۱،  $z^{**}$  باشد و جواب بهینه مساله ۶  $z_L^{**}$  جواب بهینه مساله ۷ باشد، آن‌گاه جواب مساله ۱، در بازه  $[z_R^{**}, z_L^{**}]$  قرار دارد.

اثبات: فرض کنید  $p_i \in [p_i^L, p_i^R]$  باشد، ثابت می‌کنیم مقدار بهینه تابع هدف مساله زیر در بازه  $[z_R^{**}, z_L^{**}]$  می‌باشد:

مساله ۳-

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (39)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (41)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (42)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (43)$$

به‌وضوح وقتی  $p_i = p_i^L$  مساله اخیر، معادل مساله ۶ است و جواب بهینه آن یعنی  $x^*$  در قیود مساله اخیر صدق می‌کند. پس داریم:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^* \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^R \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (44)$$

باتوجه به این‌که ناحیه جواب مسایل یادشده براساس رابطه (۴۴)، سه ناحیه تودرتورا می‌سازند؛ بنابراین، به‌وضوح  $[z_R^{**}, z_L^{**}]$  و حکم به اثبات می‌رسد.





اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم بعد از معرفی مدل ارایه شده و پایه‌گذاری فرآیند حل مبتنی بر قضیه‌ها و نتایج مورد نیاز، گام‌های اساسی حل را برای مدل یاد شده ارایه دهیم.

## ۲-۴- الگوریتم حل

پیش فرض: یک مساله حمل و نقل را با قید فازی انعطاف پذیر بازه‌ای مساله ۱ در نظر بگیرید. به طوری که پارامترهای داده شده آن شامل  $s_i, d_j, s_i^L, s_i^R$  باشد.

گام ۱- مساله ۱ را با توجه به بازه  $[s_i, s_i^L]$  و تعریف تابع عضویت انعطاف پذیر مساله ۳ به مساله ۵ تبدیل کنید.

گام ۲- مساله ۵ را در بازه  $[s_i, s_i^L]$  بر اساس  $\alpha_i$  مختلف حل کنید تا جواب بهینه  $(x_L^*, \alpha_L^*)$  با مقدار بهینه تابع هدف  $z_L^*$  برای مساله بدینانه به دست آید.

گام ۳- مساله ۷ را برای  $\alpha_L^*$  انتخاب شده (توسط تصمیم گیرنده/کارشناس خبره) از مرحله اول، بر حسب حداقل سطح رضایتمندیشان حل کنید تا جواب بهینه  $(x_L^{**}, \alpha_L^{**})$  با مقدار بهینه تابع هدف  $z_L^{**}$  را به دست آورید  $(x_R^*, \alpha_R^*)$  و  $(z_R^*)$ .

گام ۴- مساله ۴ را در بازه  $[s_i, s_i^R]$  بر اساس  $\alpha_i$  انتخاب شده (توسط تصمیم گیرنده/کارشناس خبره) حل کنید تا جواب بهینه  $(x_R^*, \alpha_R^*)$  با مقدار بهینه تابع هدف  $z_R^*$  برای مساله خوش بینانه به دست آید.

گام ۵- مساله ۶ را بر اساس  $\alpha_R^*$  انتخاب شده (توسط تصمیم گیرنده/کارشناس خبره) از مرحله اول حل کنید تا جواب بهینه  $(x_R^{**}, \alpha_R^{**})$  با مقدار بهینه تابع هدف  $z_R^{**}$  برای مساله خوش بینانه به دست آید.

گام ۶- جواب مساله ۱ در بازه  $[z_R^{**}, z_L^{**}]$  می باشد و متوقف شوید.

در بخش بعدی یک مثال کاربردی ارایه شده که در آن فرآیند حل به صورت کامل بیان شده است.

## ۵- مثال عددی

در این مثال سه انبار و سه فروشگاه در نظر گرفته شده است که با توجه به فاصله مکانی بین انبارها و فروشگاهها می خواهیم هزینه نهایی مربوط به حمل و نقل کالاها را کمینه کنیم، با توجه به این که هزینه حمل هر واحد کالا به ازای هر کیلومتر ۱۰۰ تومان است. در جدول ۲ میزان موجودی انبارها و تقاضای فروشگاهها ثبت شده است. در ضمن تصمیم گیرنده حداکثر خطای عرضه برای قید اول را ۱۵ و برای قید دوم ۲۰ و برای قید سوم ۲۵ در نظر گرفته است که در محدودیت اول شرایط امکان تهیه آن تا ۱۰ واحد آسان بوده ولی در بازه  $[10, 15]$  شرایط مشکل می باشد. برای محدودیت دوم بازه  $[15, 25]$  و برای محدودیت سوم بازه  $[13, 20]$  در نظر گرفته شده است.

جدول ۲- داده‌های انبار و فروشگاه.

Table 2- Warehouse and store data.

| موجودی | فروشگاه ۱ | فروشگاه ۲ | فروشگاه ۳ | فروشگاه ۱ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ۱۰۰    | ۵۹۰۰      | ۶۷۰۰      | ۳۶۰۰      | انبار ۱   |
| ۱۵۰    | ۶۷۰۰      | ۵۳۰۰      | ۴۸۰۰      | انبار ۲   |
| ۱۰۰    | ۸۱۰۰      | ۴۰۰۰      | ۷۳۰۰      | انبار ۳   |
| ۴۵۰    | ۹۰        | ۱۲۰       | ۱۴۰       | تقاضا     |

باتوجه به مجموع عرضه و تقاضا ملاحظه می کنیم که جدول حمل و نقل متوازن است. حال مساله را به صورت زیر فرموله می کنیم:

هدف کمینه کردن کل هزینه حمل و نقل برای برآورده کردن تقاضای فروشگاهها با توجه به موجودی انبارها می باشد.

- انبارها:  $i = 1, 2, 3$
- فروشگاهها:  $j = 1, 2, 3$

متغیرهای تصمیم:  $x_{ij}$  تعداد واحد کالایی که باید از انبار  $i$  به فروشگاه  $j$  ارسال شود.

$$\text{Min } 3600x_{11} + 6700x_{12} + 5900x_{13} + 4800x_{21} + 5300x_{22} + 6700x_{23} + 7300x_{31} + 4000x_{32} + 8100x_{33},$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\lesssim 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\lesssim 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\lesssim 100, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 140, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 90, \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

که در آن  $p_3 \in [13, 20]$  و  $p_2 \in [15, 25]$ ،  $p_1 \in [10, 15]$  می باشد.

ابتدا برای حالت بدبینانه مساله را در نظر می گیریم.

$$\text{Min } 3600x_{11} + 6700x_{12} + 5900x_{13} + 4800x_{21} + 5300x_{22} + 6700x_{23} + 7300x_{31} + 4000x_{32} + 8100x_{33},$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 110 - 10\alpha_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 165 - 15\alpha_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 113 - 13\alpha_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 140, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 90, \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1.$$

جواب بهینه مساله برای مقادیر مختلف  $\alpha_i$  در جدول ۳ آورده شده است.

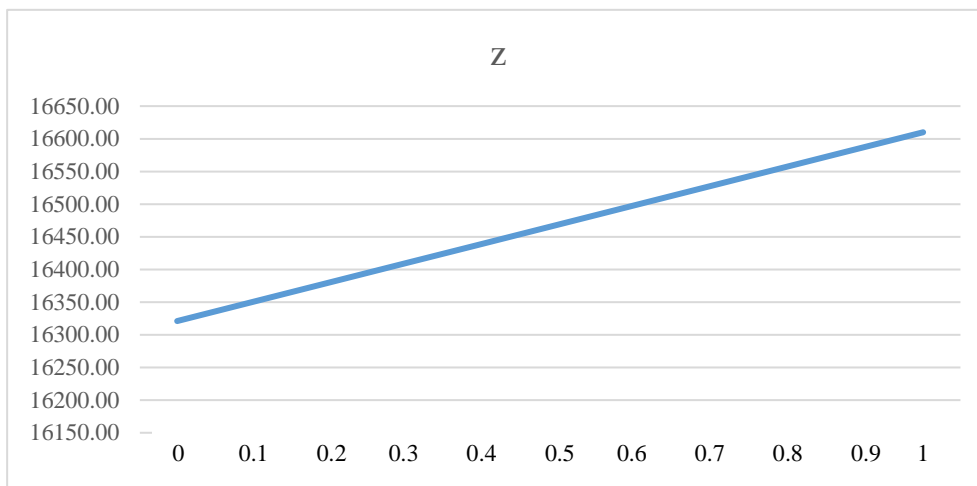
جدول ۳- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_i$ .

Table 3- objective function value based on different values  $\alpha_i$ .

| $\alpha_i$      | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| z               | 1632100 | 1634990 | 1637880 | 1640770 | 1643660 | 1646550 | 1649440 | 1652330 | 1655220 | 1658110 | 1661000 |
| X <sub>11</sub> | 110     | 109     | 108     | 107     | 106     | 105     | 104     | 103     | 102     | 101     | 100     |
| X <sub>12</sub> | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| X <sub>13</sub> | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| X <sub>21</sub> | 30      | 31      | 32      | 33      | 34      | 35      | 36      | 37      | 38      | 39      | 40      |
| X <sub>22</sub> | 7       | 8       | 9.6     | 10.9    | 12.2    | 13.5    | 14.8    | 16.1    | 17.4    | 18.7    | 20      |
| X <sub>23</sub> | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      |
| X <sub>31</sub> | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| X <sub>32</sub> | 113     | 111.7   | 110.4   | 109.1   | 107.8   | 106.5   | 105.2   | 103.9   | 102.6   | 101.3   | 100     |
| X <sub>33</sub> | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |

نمودار پایین نشان دهنده این است که با افزایش سطح رضایتمندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می یابد.





شکل ۲- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_i$ .  
 Figure 2- Objective function value based on different values  $\alpha_i$ .

در حالتی که  $\alpha_L^* = (0.5, 0.5, 0.5)$  جواب بهینه تابع هدف  $z_L^* = 1646550$  می باشد که برای یافتن جواب کارا مساله زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

s.t.

$$3600x_{11} + 6700x_{12} + 5900x_{13} + 4800x_{21} + 5300x_{22} + 6700x_{23} + 7300x_{31} + 4000x_{32} + 8100x_{33} \leq z_L^*$$

$$+ (1 - \alpha_0)p_0,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 110 - 10\alpha_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 165 - 15\alpha_2,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 113 - 13\alpha_3,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 140,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 120,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 90,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3,$$

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, \alpha^* \leq \alpha_i \leq 1, \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3.$$

جواب بهینه عبارتست از  $\alpha_L^{**} = (1, 0.5, 1, 0.5)$  و  $x_L^{**} = (105, 0, 0, 35, 13 / 5, 90, 0, 106 / 5, 0)$  مقدار بهینه تابع هدف  $z_L^{**} = 1646550$  برای حالت بدبینانه می باشد.

حال مساله را در حالت خوش بینانه حل می کنیم.

$$\text{Min } 3600x_{11} + 6700x_{12} + 5900x_{13} + 4800x_{21} + 5300x_{22} + 6700x_{23} + 7300x_{31} + 4000x_{32} + 8100x_{33},$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 115 - 15\alpha_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 175 - 25\alpha_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 120 - 20\alpha_3$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 140,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 120,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 90,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3,$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3.$$

که دارای جواب  $(z_R^*, x_R^*)$  می باشد.

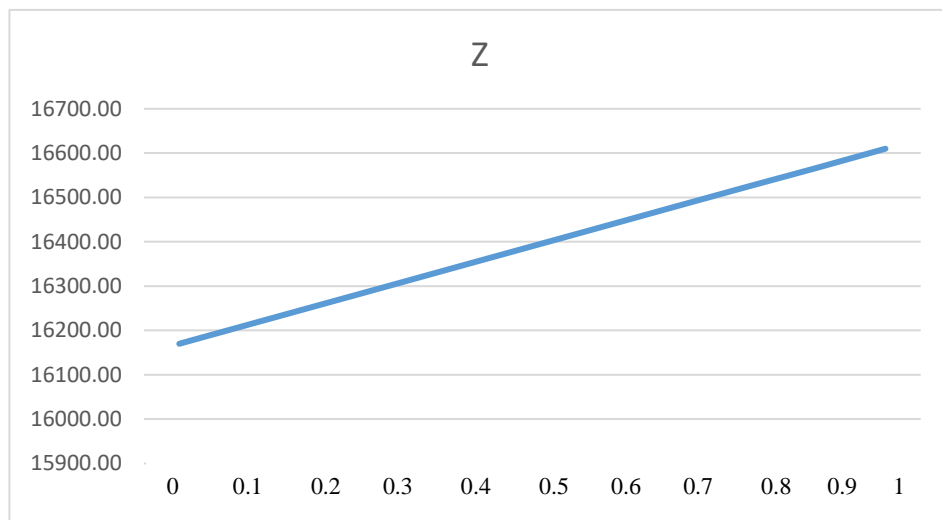
حال مدل بالا را به ازای  $\alpha_i$  های مختلف با استفاده از لینگو به دست آورده که مقادیر آن در جدول زیر آورده شد.

جدول ۴- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_i$ .

Table 4- objective function value based on different values  $\alpha_i$ .

| $\alpha_i$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Z          | 1617000 | 1621400 | 1625800 | 1630200 | 1634600 | 1639000 | 1643400 | 1647800 | 1652200 | 1656600 | 1661000 |
| $X_{11}$   | 115     | 113.5   | 112     | 110.5   | 109     | 107.5   | 106     | 104.5   | 103     | 101.5   | 100     |
| $X_{12}$   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $X_{13}$   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $X_{21}$   | 25      | 26.5    | 28      | 29.5    | 31      | 32.5    | 34      | 35.5    | 37      | 38.5    | 40      |
| $X_{22}$   | 0       | 2       | 4       | 6       | 8       | 10      | 12      | 14      | 16      | 18      | 20      |
| $X_{23}$   | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      | 90      |
| $X_{31}$   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $X_{32}$   | 120     | 118     | 116     | 114     | 112     | 110     | 108     | 106     | 104     | 102     | 100     |
| $X_{33}$   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |

نمودار پایین نشان دهنده این است که با افزایش سطح رضایتمندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می یابد.



شکل ۳- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_i$ .

Figure 3- objective function value based on different values  $\alpha_i$ .

در حالتی که  $\alpha_R^* = (0.5, 0.5, 0.5)$  جواب  $z_R^* = 1639000$  می باشد که برای یافتن جواب کارا مساله زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

s.t.

$$3600x_{11} + 6700x_{12} + 5900x_{13} + 4800x_{21} + 5300x_{22} + 6700x_{23} + 7300x_{31} + 4000x_{32} + 8100x_{33} \leq z^*$$

$$+ (1 - \alpha_0)p_0,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 115 - 15\alpha_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 175 - 25\alpha_2,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 120 - 20\alpha_3,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 140,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 120,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 90,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3,$$

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, \alpha^* \leq \alpha_i \leq 1, \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3.$$

از این رو جواب بهینه عبارت است از  $\alpha_R^{**} = (1, 0.5, 1, 0.5)$  و  $x_R^{**} = (107.5, 0, 0, 32.5, 10, 90, 0, 110, 0)$  و مقدار بهینه تابع هدف

با توجه به حل دو مساله خوش بینانه و بدبینانه به وضوح جواب بهینه در بازه  $[z_R^{**}, z_L^{**}]$  می باشد.

باتوجه به حل دو مساله خوش بینانه و بدبینانه به وضوح جواب بهینه در بازه  $[z_R^{**}, z_L^{**}]$  می باشد.





در حل این مساله دو هدف کمینه کردن مقدار تابع هدف و بیشینه کردن حداقل درجه عضویت هر قید فازی انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شد.

باتوجه به مقادیر مختلفی که برای  $\alpha_i$  در نظر می‌گیریم می‌توانیم تحلیل حساسیت داشته باشیم. با تغییرات  $\alpha_i$  در قید اول، دوم و سوم مقادیر تابع هدف را بررسی می‌کنیم.

برای مدل بدینانه، تابع هدف مساله را باتوجه به در نظر گرفتن عدم انعطاف‌پذیری قید سوم توسط نقطه نظر تصمیم‌گیرنده بررسی کرده و وضعیت رفتار بین مقدار تابع هدف و مقادیر  $\alpha_i$  را بر اساس  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1$  در جدول ۴ نمایش می‌دهیم.

جدول ۵- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1$ .

Table 5- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1$ .

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0          | 0          | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.1        | 0.1        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.2        | 0.2        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.3        | 0.3        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.4        | 0.4        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.5        | 0.5        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.6        | 0.6        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.7        | 0.7        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.8        | 0.8        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 0.9        | 0.9        | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |
| 1          | 1          | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |

جدول ۶ تابع هدف مساله را باتوجه به در نظر گرفتن عدم انعطاف‌پذیری قید دوم توسط نقطه نظر تصمیم‌گیرنده نمایش می‌دهد.

جدول ۶- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2 = 1, \alpha_3$ .

Table 6- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2 = 1, \alpha_3$ .

| $\alpha_1$ | $\alpha_3$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0          | 0          | 1632100 | 1633300 | 1634500 | 1635700 | 1636900 | 1638100 | 1639300 | 1640500 | 1641700 | 1642900 | 1644100 |
| 0.1        | 0.1        | 1633790 | 1634990 | 1636190 | 1637390 | 1638590 | 1639790 | 1640990 | 1642190 | 1643390 | 1644590 | 1645790 |
| 0.2        | 0.2        | 1635480 | 1636680 | 1637880 | 1639080 | 1640280 | 1641480 | 1642680 | 1643880 | 1645080 | 1646280 | 1647480 |
| 0.3        | 0.3        | 1637170 | 1638370 | 1639570 | 1640770 | 1641970 | 1643170 | 1644370 | 1645570 | 1646770 | 1647970 | 1649170 |
| 0.4        | 0.4        | 1638860 | 1640060 | 1641260 | 1642460 | 1643660 | 1644860 | 1646060 | 1647260 | 1648460 | 1649660 | 1650860 |
| 0.5        | 0.5        | 1640550 | 1641750 | 1642950 | 1644150 | 1645350 | 1646550 | 1647750 | 1648950 | 1650150 | 1651350 | 1652550 |
| 0.6        | 0.6        | 1642240 | 1643440 | 1644640 | 1645840 | 1647040 | 1648240 | 1649440 | 1650640 | 1651840 | 1653040 | 1654240 |
| 0.7        | 0.7        | 1643930 | 1645130 | 1646330 | 1647530 | 1648730 | 1649930 | 1651130 | 1652330 | 1653530 | 1654730 | 1655930 |
| 0.8        | 0.8        | 1645930 | 1648820 | 1648020 | 1649220 | 1650420 | 1651620 | 1652820 | 1654020 | 1655220 | 1656420 | 1657620 |
| 0.9        | 0.9        | 1647310 | 1648510 | 1649710 | 1650910 | 1652110 | 1653310 | 1654510 | 1655710 | 1656910 | 1658110 | 1659310 |
| 1          | 1          | 1649000 | 1650200 | 1651400 | 1652600 | 1653800 | 1655000 | 1656200 | 1657400 | 1658600 | 1659800 | 1661000 |

جدول ۷ تابع هدف مساله را باتوجه به در نظر گرفتن عدم انعطاف‌پذیری قید اول توسط نقطه نظر تصمیم‌گیرنده نمایش می‌دهد.

جدول ۷- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3$ .

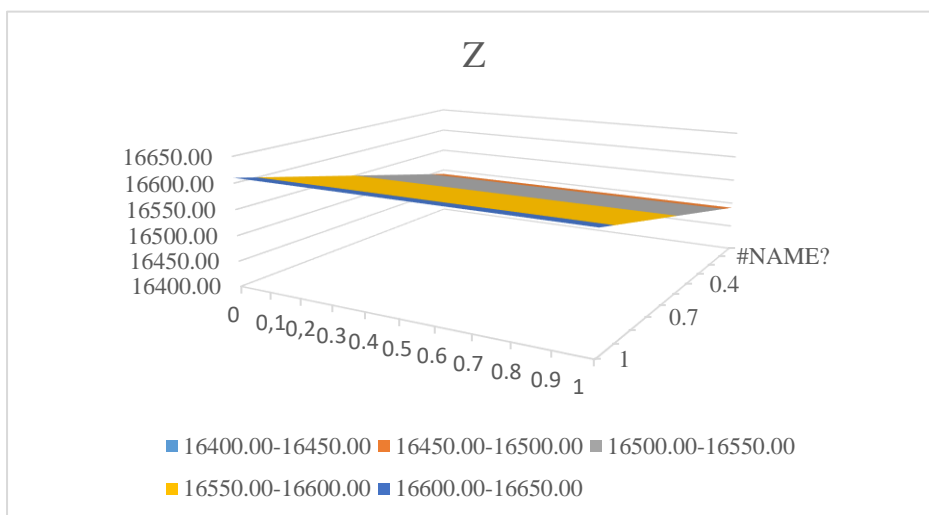
Table 7- Objective function value based on different values  $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3$ .

| $\alpha_3$ | $\alpha_2$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0          | 0          | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 | 1644100 |
| 0.1        | 0.1        | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 | 1645790 |
| 0.2        | 0.2        | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 | 1647480 |
| 0.3        | 0.3        | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 | 1649170 |
| 0.4        | 0.4        | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 | 1650860 |
| 0.5        | 0.5        | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 | 1652550 |
| 0.6        | 0.6        | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 | 1654240 |
| 0.7        | 0.7        | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 | 1655930 |
| 0.8        | 0.8        | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 | 1657620 |
| 0.9        | 0.9        | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 | 1659310 |
| 1          | 1          | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 |

باتوجه به شکل ۴، افزایش  $\alpha_2, \alpha_3$  باعث افزایش مقدار تابع هدف می‌شود. در شکل ۵، با افزایش  $\alpha_1, \alpha_3$  مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد ولی نسبت به حالت قبلی مقدار تابع هدف افزایش بیش‌تری می‌یابد. شکل ۶، نیز بیانگر آن است که افزایش  $\alpha_1, \alpha_2$  باعث افزایش مقدار تابع هدف می‌شود.

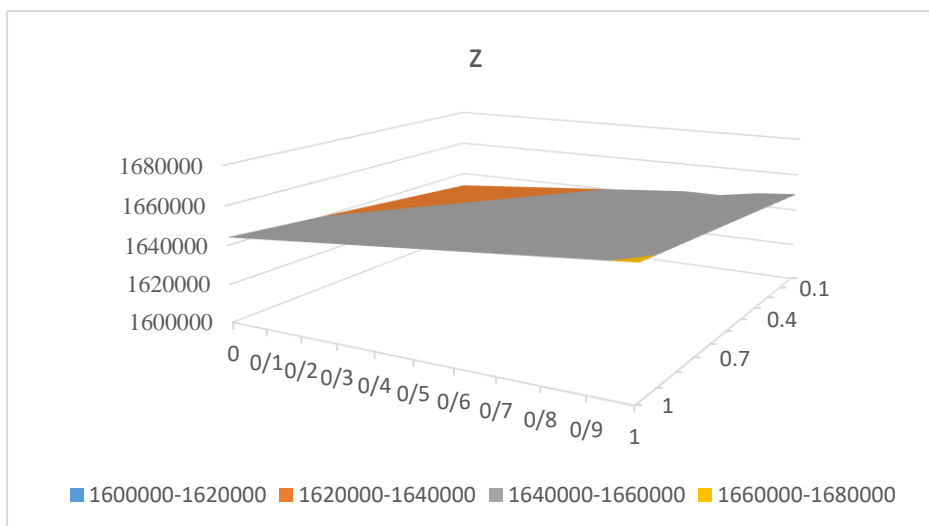


نمودار پایین نشان دهنده این است که با افزایش سطح رضایتمندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می یابد. شایان ذکر است در این جا روند تحلیل همانند بررسی تغییرات مقادیر تابع هدف یک مساله دوهدفه است که هدف غالب سطح رضایتمندی (درجه صدق پذیری) است. از این رو، دو تابع هدف در جهت متفاوت تغییر می کنند و به همین دلیل برخلاف تصور، تابع هدف با افزایش سطح رضایتمندی کاهش نخواهد یافت.



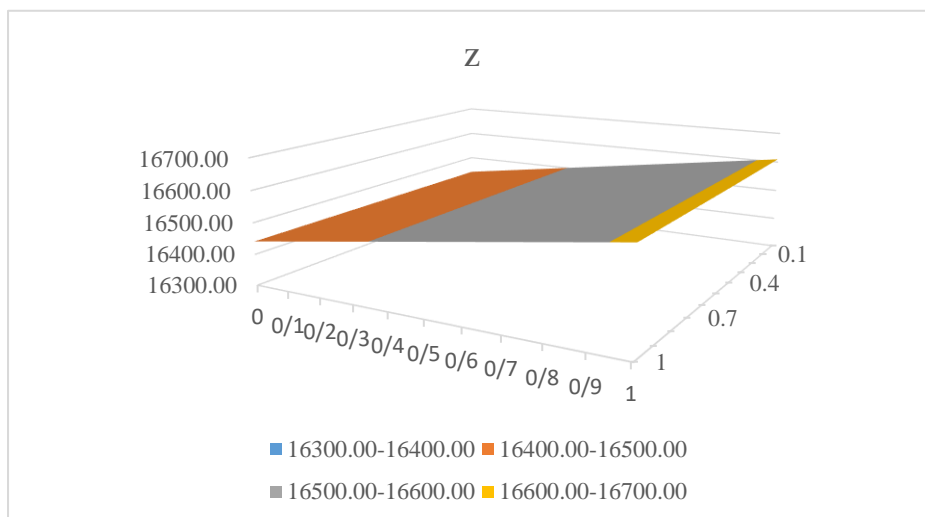
شکل ۴- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1$ .

Figure 4- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1$ .



شکل ۵- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2=1, \alpha_3$ .

Figure 5- objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2=1, \alpha_3$ .



شکل ۶- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Figure 6- Objective function value based on different values  $\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3$ .

برای مدل خوش بینانه، با تغییرات  $\alpha_i$  در قید اول، دوم و سوم مقادیر تابع هدف مساله را بررسی می کنیم.

برای مساله خوش بینانه، تابع هدف مساله را با توجه به در نظر گرفتن عدم انعطاف پذیری قید سوم توسط نقطه نظر تصمیم گیرنده بررسی کرده و وضعیت رفتار بین مقدار تابع هدف و مقادیر  $\alpha_i$  را بر اساس  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1$  در جدول ۷ نمایش می دهیم.

جدول ۸- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1$ .

Table 8- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1$ .

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0          | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.1        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.2        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.3        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.4        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.5        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.6        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.7        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.8        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 0.9        | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |
| 1          | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |

جدول ۹ تابع هدف مساله را با توجه به در نظر گرفتن عدم انعطاف پذیری قید دوم توسط نقطه نظر تصمیم گیرنده نمایش می دهد.

جدول ۹- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2=1, \alpha_3$ .

Table 9- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2=1, \alpha_3$ .

| $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0          | 0          | 1617000 | 1618800 | 1620600 | 1622400 | 1624200 | 1626000 | 1627800 | 1629600 | 1631400 | 1633200 | 1635000 |
| 0.1        | 0          | 1619600 | 1621400 | 1623200 | 1625000 | 1626800 | 1628600 | 1630400 | 1632200 | 1634000 | 1635800 | 1637600 |
| 0.2        | 0          | 1622200 | 1624000 | 1625800 | 1627600 | 1629400 | 1631200 | 1633000 | 1634800 | 1636600 | 1638400 | 1640200 |
| 0.3        | 0          | 1624800 | 1626600 | 1628400 | 1630200 | 1632000 | 1633800 | 1635600 | 1637400 | 1639200 | 1641000 | 1642800 |
| 0.4        | 0          | 1627400 | 1629200 | 1631000 | 1632800 | 1634600 | 1636400 | 1638200 | 1640000 | 1641800 | 1643600 | 1645400 |
| 0.5        | 0          | 1630000 | 1631800 | 1633600 | 1635400 | 1637200 | 1639000 | 1640800 | 1642600 | 1644400 | 1646200 | 1648000 |
| 0.6        | 0          | 1632600 | 1634400 | 1636200 | 1638000 | 1639800 | 1641600 | 1643400 | 1645200 | 1647000 | 1648800 | 1650600 |
| 0.7        | 0          | 1635200 | 1637000 | 1638800 | 1640600 | 1642400 | 1644200 | 1646000 | 1647800 | 1649600 | 1651400 | 1653200 |
| 0.8        | 0          | 1637800 | 1639600 | 1641400 | 1643200 | 1645000 | 1646800 | 1648600 | 1650400 | 1652200 | 1654000 | 1655800 |
| 0.9        | 0          | 1640400 | 1642200 | 1644000 | 1645800 | 1647600 | 1649400 | 1651200 | 1653000 | 1654800 | 1656600 | 1658400 |
| 1          | 0          | 1643000 | 1644800 | 1646600 | 1648400 | 1650200 | 1652000 | 1653800 | 1655600 | 1657400 | 1659200 | 1661000 |

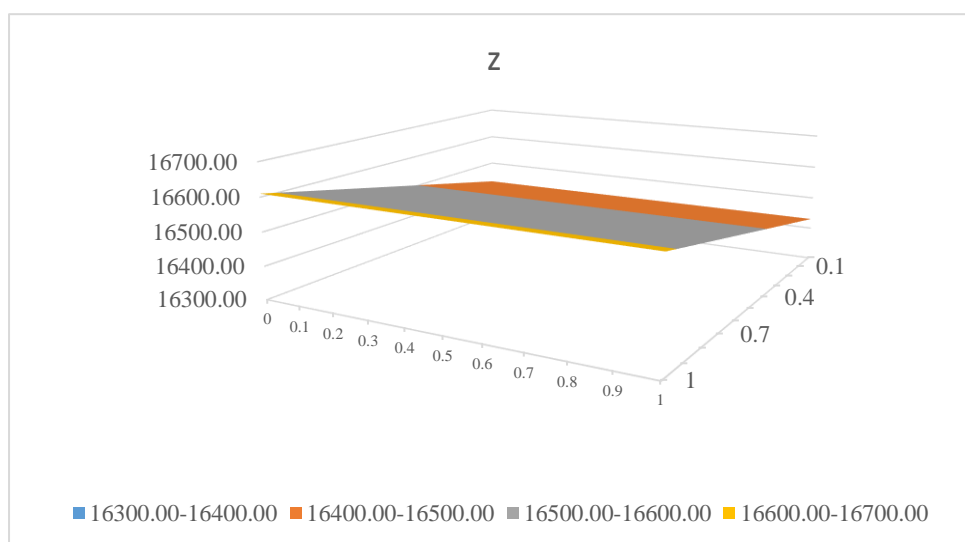
جدول ۱۰ تابع هدف مساله را با توجه به در نظر گرفتن عدم انعطاف پذیری قید اول توسط نقطه نظر تصمیم گیرنده نمایش می دهد.

جدول ۱۰ - مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Table 10- Objective function value based on different values  $\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3$ .

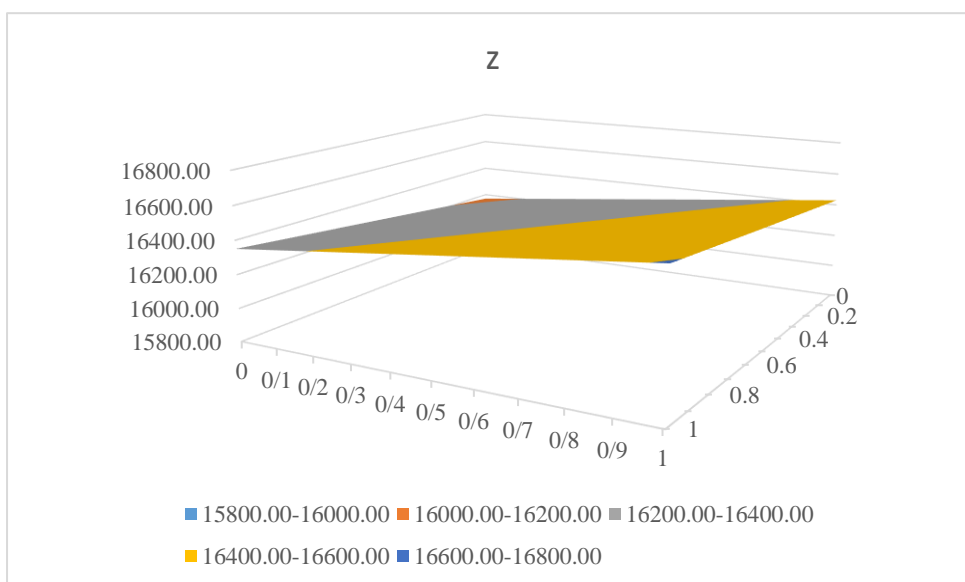
| $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | 0       | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     | 0.5     | 0.6     | 0.7     | 0.8     | 0.9     | 1       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0          | 0          | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 | 1635000 |
| 0.1        | 0.1        | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 | 1637600 |
| 0.2        | 0.2        | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 | 1640200 |
| 0.3        | 0.3        | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 | 1642800 |
| 0.4        | 0.4        | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 | 1645400 |
| 0.5        | 0.5        | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 | 1648000 |
| 0.6        | 0.6        | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 | 1650600 |
| 0.7        | 0.7        | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 | 1653200 |
| 0.8        | 0.8        | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 | 1655800 |
| 0.9        | 0.9        | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 | 1658400 |
| 1          | 1          | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 | 1661000 |

باتوجه به شکل ۹، افزایش  $\alpha_2, \alpha_3$  باعث افزایش مقدار تابع هدف می‌شود. در شکل ۸، با افزایش  $\alpha_1, \alpha_3$  مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد ولی نسبت به حالت قبلی مقدار تابع هدف افزایش بیش تری می‌یابد. شکل ۷، بیانگر آن است که افزایش  $\alpha_1, \alpha_2$ ، باعث افزایش مقدار تابع می‌شود و نسبت به حالت اول مقدار تابع هدف افزایش بیش تری می‌یابد.



شکل ۷- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1$ .

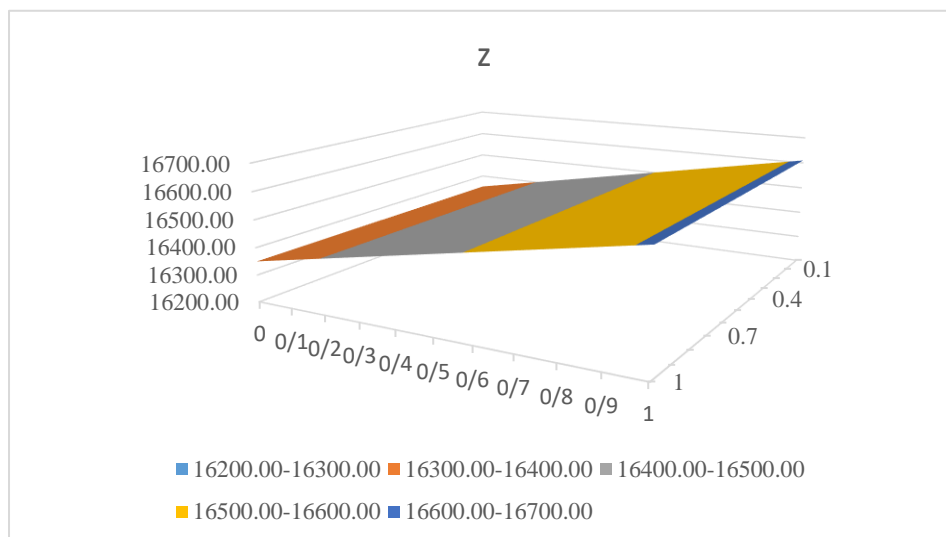
Figure 7- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1$ .



شکل ۸- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1, \alpha_2=1, \alpha_3$ .

Figure 8- Objective function value based on different values  $\alpha_1, \alpha_2=1, \alpha_3$ .





شکل ۹- مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف  $\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3$   
Figure 9- Objective function value based on different values  $\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3$ .

باتوجه به تحلیل حساسیت، تصمیم‌گیرنده قادر می‌باشد که بهترین انتخاب را برای  $\alpha_i$  داشته باشد که مزیت روش پیشنهادی می‌باشد.

## ۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، مدل حمل‌ونقل کلاسیک به یک مدل حمل‌ونقل با قیود فازی انعطاف‌پذیر تعمیم داده شده است؛ به طوری که برای سازگاری با یک شرایط واقعی، به صورت خاص مجموعه قیود عرضه در شرایط یادشده در نظر گرفته شد. مفاهیم و مباحث نظری مرتبط با طراحی یک فرآیند حل شامل قضایا و نتایج پایه‌گذاری و براساس آن یک رویکرد دومرحله‌ای مبتنی بر برنامه‌ریزی پارامتری برای حل مدل ارایه شد. بررسی مطالعه عددی نشان داد که رویه پیشنهادی امکان انعطاف‌پذیری بیشتری در استفاده از منابع در دسترس مبتنی بر درجه صدق‌پذیری جواب در قیود (درجه رضایتمندی) را دارد. به‌ویژه، بهره‌مندی از  $\alpha_i$  متفاوت باتوجه به ماهیت هر قید امکان تحلیل حساسیت هم‌زمان و مستقل تغییرات در قیود عرضه را فراهم می‌آورد. در پایان، پیشنهاد می‌شود رویکرد ارایه شده در مدل‌های کاربردی دیگر هم‌چون مسایل مرتبط با زنجیره‌تامین به کار گرفته شود.

## سپاس‌گزاری

نویسندگان از داوران محترم که با ارسال نقطه‌نظرات خود در بهبود نسخه اصلاحی مقاله همکاری نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی دارند.

## تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلاً چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

## منابع

- [1] Liu, S.-T., & Kao, C. (2004). Solving fuzzy transportation problems based on extension principle. *European journal of operational research*, 153(3), 661–674. DOI:https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00731-2
- [2] Gani, A. N., & Razak, K. A. (2006). Two stage fuzzy transportation problem. *Journal of physical sciences*, 10, 63–69.
- [3] Pandian, P., & Natarajan, G. (2010). A new method for finding an optimal solution for transportation problems. *International journal of mathematical sciences and engineering applications*, 4(2), 59–65.
- [4] Natarajan, P. P. G., & Pandianand, G. (2010). A new method for finding an optimal solution of fully interval integer transportation problems. *Applied mathematical sciences*, 4(37), 1819–1830.
- [5] Kaur, A., & Kumar, A. (2012). A new approach for solving fuzzy transportation problems using generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Applied soft computing*, 12(3), 1201–1213.



- [6] Gabrel, V., Lacroix, M., Murat, C., & Remli, N. (2014). Robust location transportation problems under uncertain demands. *Discrete applied mathematics*, 164, 100–111.
- [7] Guo, H., Wang, X., & Zhou, S. (2015). A transportation problem with uncertain costs and random supplies. *International journal of e-navigation and maritime economy*, 2, 1–11. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enavi.2015.06.001>
- [8] Purushothkumar, M. K., & Ananthanarayanan, M. (2015). A new ranking approach for solving fuzzy transportation problems with trapezoidal fuzzy numbers. *International journal of science and research (IJSR)*, 2430–2433.
- [9] Akilbasha, A., Pandian, P., & Natarajan, G. (2018). An innovative exact method for solving fully interval integer transportation problems. *Informatics in medicine unlocked*, 11, 95–99. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.imu.2018.04.007>
- [10] Dantzig, G. B. (1951). *Application of the simplex method to a transportation problem*. <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571980075507143680>
- [11] Mahmoodirad, A., Salehi-Dareh-Barik, M., & Taghaodi, R. (2018). Fixed-charge Solid transportation problem with type-2 fuzzy variables. *Journal of decisions and operations research*, 2(3), 179–194. DOI: 10.22105/dmor.2018.57823
- [12] Kumar, R., Edalatpanah, S. A., Jha, S., & Singh, R. (2019). A pythagorean fuzzy approach to the transportation problem. *Complex and intelligent systems*, 5(2), 255–263. DOI: 10.1007/s40747-019-0108-1
- [13] Muthukumar, S., Srinivasan, R., & Vijayan, V. (2021). An optimal solution of unbalanced octagonal fuzzy transportation problem. *Materials today: proceedings*, 37, 1218–1220. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.06.375>
- [14] Nasser, H., & Khabiri, B. (2019). A grey transportation problem in fuzzy environment. *Journal of operational research in its applications (applied mathematics)-Lahijan Azad university*, 16(3), 111–122.
- [15] Khalifa, H., Kumar, P., & Alharbi, M. G. (2020). Enhancement of capacitated transportation problem in fuzzy environment. *Advances in fuzzy systems*, 2020, 1–9.
- [16] Srinivasan, R., Karthikeyan, N., Renganathan, K., & Vijayan, D. V. (2020). Method for solving fully fuzzy transportation problem to transform the materials. *Materials today: proceedings*, 37(2), 431–433.
- [17] Sam'an, M., & Farikhin. (2021). A new fuzzy transportation algorithm for finding fuzzy optimal solution. *International journal of mathematical modelling and numerical optimisation*, 11(1), 1–19.
- [18] Sahoo, L. (2021). A new score function based Fermatean fuzzy transportation problem. *Results in control and optimization*, 4, 100040. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rico.2021.100040>
- [19] Pratihari, J., Kumar, R., Edalatpanah, S. A., & Dey, A. (2021). Modified Vogel's approximation method for transportation problem under uncertain environment. *Complex and intelligent systems*, 7(1), 29–40. DOI: 10.1007/s40747-020-00153-4
- [20] Attari, H., & Nasser, S. H. (2014). New concepts of feasibility and efficiency of solutions in fuzzy mathematical programming problems. *Fuzzy information and engineering*, 6(2), 203–221. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fiae.2014.08.005>
- [21] Nasser, S. H., Verdegay, J. L., & Mahmoudi, F. (2021). A New method to solve fuzzy interval flexible linear programming using a multi-objective approach. *Fuzzy information and engineering*, 13(2), 248–265. DOI: 10.1080/16168658.2021.1906154
- [22] Nasser, S. H., Ebrahimnejad, A., Cao, B.-Y., Nasser, S. H., Ebrahimnejad, A., & Cao, B.-Y. (2019). *Fuzzy linear programming*. Springer.
- [23] Goodarzi, F., Shishebori, D., Nasser, H., & Dadvar, F. (2021). A bi-objective production-distribution problem in a supply chain network under grey flexible conditions. *RAIRO-operations research*, 55(3), 1971–2000.
- [24] Hamdy, A. T. (2007). *Operations research: an introduction*. Pearson Education International.