

Paper Type: Original Article



The Robust Path Centdian Problem with Interval Vertex Weights on Tree Networks

Fahimeh Baroughi^{1,*} , Soudabeh Seyyedi Ghomi¹

¹ Department of Applied Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran; baroughi@sut.ac.ir; s.seyyedighomi@gmail.com.

Citation:



Baroughi, F., & Seyyedi Ghomi, S. (2022). The robust path centdian problem with interval vertex weights on tree networks. *Journal of decisions and operations research*, 7(Spec. Issue), 1-14.

Received: 26/05/2021

Reviewed: 26/06/2021

Revised: 09/08/2021

Accepted: 01/09/2021

Abstract

Purpose: In this paper, the robust path centdian problem is investigated on tree networks with the same interval vertex weights for the both path center and path median problems. The used objective function in this paper is the simple sum of path median and path center problems. In the past research works, the vertex weights for the both path median and path center location problems are disjoint.

Methodology: The used approach to compute the robust solution is the minmax regret criterion. In this method, for any selected path on the tree, the maximum value of regret is minimized for all possible events of vertex weights.

Findings: Using the minmax regret criterion, an algorithm with $O(n^5)$ time complexity is presented to obtain a robust solution of the robust path centdian problem on tree networks.

Originality/Value: In this paper, using the worst case scenarios for the path median and path center we obtain the worst case scenarios of robust centdian problem. Then we obtain a robust solution for this problem.

Keywords: Centdian problem, Minmax regret criterion, Path location, Robust optimization.



Corresponding Author: baroughi@sut.ac.ir

 <http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.5.8.1>

Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی



مساله مکان‌یابی مرکز-میانه مسیر استوار با وزن‌های راسی بازه‌ای روی شبکه‌های درختی

فهمیمه باروقی^۱، سودابه سیدی قمی^۱

اگره ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه مهندسی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله، مساله مکان‌یابی مرکز-میانه مسیر استوار روی شبکه‌های درختی با وزن‌های راسی یکسان برای هر دو مساله میانه مسیر و مرکز مسیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. تابع هدف استفاده‌شده در این مقاله، جمع ساده تابع هدف مساله میانه مسیر و مرکز مسیر است. در کارهایی که در ادبیات تحقیقی صورت گرفته است، وزن ریوس برای هر دو مساله مکان‌یابی میانه مسیر و مرکز مسیر مجزا در نظر گرفته شده است.

روش‌شناسی پژوهش: رویکرد استفاده‌شده برای محاسبه جواب استوار، رویکرد مینیماکس پشیمانی است. در این رویکرد، بیشترین مقدار پشیمانی برای هر مسیر انتخاب‌شده روی شبکه‌ی درختی، به ازای تمامی رخدادهای ممکن برای وزن‌های راسی گراف‌های درختی مینیمم می‌شود.

یافته‌ها: با استفاده از رویکرد مینیماکس پشیمانی، یک الگوریتم ترکیباتی با زمان اجرای $O(n^5)$ برای محاسبه جواب استوار مساله مرکز-میانه مسیر استوار روی شبکه‌های درختی ارائه می‌شود.

اصالت/ارزش افزوده علمی: در این مقاله، با استفاده از سناریوهای بدترین حالت مسایل مرکز مسیر و میانه مسیر، سناریوهای بدترین حالت مساله مرکز-میانه مسیر استوار پیدا شده و با استفاده از آن، یک جواب استوار برای مساله موردنظر محاسبه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی استوار، مساله مرکز-میانه، مکان‌یابی مسیر، معیار مینیماکس پشیمانی.

۱- مقدمه

مسایل مکان‌یابی سرویس‌دهنده‌ها جزو مدل‌های پایه‌ای در بهینه‌سازی ترکیباتی می‌باشند که با توجه به کاربردهای متعددی که در عمل و تئوری دارند، همواره مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. در یک مدل مکان‌یابی روی یک سیستم، هدف یافتن بهترین مکان‌ها از بین مجموعه مکان‌های کاندید برای تاسیس سرویس‌دهنده‌ها با توجه به معیارهای ارزیابی موردنظر می‌باشد به طوری که مجموعه مشتریان موجود بر روی سیستم به بهترین نحو سرویس‌دهی شوند. سیستم تحت مطالعه می‌تواند شبکه یا فضای اقلیدسی باشد. مکان‌های کاندید برای تاسیس سرویس‌دهنده‌ها روی شبکه‌ها، می‌توانند به صورت نقطه، مسیر، درخت و یا زیرگراف‌های خاص مانند ستاره، کاکتوس و غیره باشند. مسایلی که شامل مکان‌های کاندید به فرم مسیر، درخت و زیرگراف‌های خاص باشند، مسایل مکان‌یابی جامع نامیده می‌شوند. از کاربردهای این نوع مسایل می‌توان به مسیر یابی خط لوله آب، گاز و جاده‌ها در یک شبکه شهری اشاره کرد. سرویس‌دهنده‌ها در مسایل مکان‌یابی جامع به دو صورت پیوسته و گسسته هستند. اگر دو نقطه انتهایی یک سرویس‌دهنده روی شبکه، راس‌هایی از شبکه باشند، آن‌گاه سرویس‌دهنده موردنظر گسسته و اگر حداقل یک نقطه انتهایی آن راس نباشد، پیوسته نامیده می‌شود. در ادبیات تحقیقی، مسایل مکان‌یابی

* نویسنده مسئول

baroughi@sut.ac.ir

<http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.5.8.1>





مرکز مسیر/درخت، میانه مسیر/درخت و مرکز-میانه مسیر/درخت مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. این مسایل، اغلب به دو صورت با طول محدود و نامحدود بررسی شده‌اند.

فرض کنید $G=(V, E)$ یک شبکه با مجموعه راسی V و مجموعه یالی E باشد. فرض کنید S_c مجموعه مشتریان موجود روی شبکه باشد به طوری که به هر مشتری $s_c \in S_c$ وزن $w(s_c)$ اختصاص داده شده است. همچنین، فرض کنید Γ مجموعه همه مسیرها روی شبکه G باشد. در مساله مرکز-میانه مسیر هدف پیدا کردن یک عضو $p \in \Gamma$ است به طوری که یک جواب بهینه برای مساله زیر باشد:

$$\min_{p \in \Gamma} ((\max_{s_c \in S_c} w(s_c)d(s_c, p)) + \sum_{s_c \in S_c} w(s_c)d(s_c, p)), \quad (1)$$

که در آن $d(s_c, p) = \min_{x \in p} d(s_c, x)$

در حالت کلی، موقعیت‌های تصمیم‌گیری به طور متناوب به سه دسته قطعی، ریسک و غیرقطعی تقسیم می‌شوند. در موقعیت‌های قطعی از بهینه‌سازی قطعی برای انتخاب تصمیم بهینه برحسب تابع ارزیابی مشخص استفاده می‌شود. در وضعیت‌های ریسک از بهینه‌سازی احتمالی و در محیط‌های غیرقطعی از رویکردهای غیرقطعی بسته به نوع عدم قطعیت استفاده می‌شود. در بسیاری از مسایل مطرح در دنیای واقعی که به صورت مدل‌های بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌شوند، اغلب با وضعیتی روبرو هستیم که پارامترها و داده‌های ورودی مساله تحت تاثیر عوامل مختلفی مثل شرایط جاده‌ای، تصادف، زلزله، شرایط آب‌وهوا، تورم و غیره از عدم قطعیت برخوردار می‌باشند.

بهینه‌سازی استوار یکی از گسترده‌ترین انواع بهینه‌سازی غیرقطعی است که شامل مسایلی هستند که دارای داده‌های ورودی از نوع بازه‌ای، مجموعه سناریوهای گسسته، کروی، چندوجهی، مخروطی و بیضوی باشند. این نوع مسایل، اولین بار توسط سوایستر^۱ (۱۹۷۳) مورد بررسی قرار گرفتند. سپس توسط بن‌تال و نمیروفسکی^۲ (۲۰۰۰)، مولوی و همکاران^۳ (۱۹۹۵) و برتسیماس و سیم^۴ (۲۰۰۴) گسترش داده شدند. در سال‌های اخیر مسایل بهینه‌سازی زیادی در حوزه عدم قطعیت استوار بررسی شده است که برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به مقاله‌ها (رادسار و همکاران^۵، ۲۰۲۱؛ کوچکی و همکاران^۶، آماده انتشار؛ حسین‌پور و فاکرزاده جهرمی^۷، ۲۰۱۹؛ قهرمانی نهر و بطحانی^۸، ۲۰۲۱؛ یوسفی هنومروئ و همکاران^۹، ۲۰۲۱) مراجعه کنید.

سازمان‌دهی مقاله به صورت زیر می‌باشد: در بخش ۲، پیشینه‌ای از تحقیقات انجام‌شده آورده شده است. در بخش ۳، نتایج مهم به دست آمده در مورد مساله مرکز-میانه مسیر قطعی، تعاریف و مفاهیم بهینه‌سازی استوار آورده می‌شود. مساله مکان‌یابی مرکز-میانه مسیر استوار تحت معیار مینیماکس پشیمانی در بخش ۴ معرفی می‌شود. سپس رویکرد جوابی برای حل این مساله در زمان چندجمله‌ای ارائه می‌گردد. در پایان یک نتیجه‌گیری مختصر از کل مقاله ارائه می‌شود.

۲- پیشینه پژوهش

حوزه مکان‌یابی به خاطر وجود توابع ارزیابی متفاوت، شامل مسایل گسترده و متنوع است که مسایل مکان‌یابی میانه، مرکز و مرکز-میانه از مهم‌ترین و پرکاربردترین مسایل این حوزه هستند. این مسایل ابتدا روی شبکه‌هایی با مکان‌های کاندید نقطه‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با توجه به این‌که اغلب مسایل دنیای واقعی دارای سرویس‌دهنده‌های مسیری شکل (درختی شکل و گراف‌های خاص) هستند، مسایل مکان‌یابی با مکان‌های کاندید مسیری شکل نیز به طور گسترده مورد توجه قرار گرفتند. مساله میانه مسیر برای اولین بار توسط اسلیتر^{۱۰} (۱۹۸۲) روی شبکه‌های درختی در زمان خطی حل شد؛ اما این مساله درحالتی که طول مسیر محدود بود تا سال ۱۹۹۶ بدون حل بود. ریچی^{۱۱} (۱۹۹۰) نشان داد که مساله p -میانه مسیر گسسته روی گراف‌های غیرهموار NP -کامل است. حکیمی و همکاران^{۱۲} (۱۹۹۳) نشان دادند که این مساله هم در حالت گسسته و هم در حالت پیوسته روی گراف‌های هموار نیز جزء مسایل NP -سخت است. سپس آن‌ها نشان دادند که اگر p یک عدد ثابت باشد،

¹ Soyster

² Ben-Tal and Nemirofski

³ Mulvey et al.

⁴ Bertsimas and Sim

⁵ Radsar et al.

⁶ Kouchaki Tajani et al.

⁷ Hoseinpour and Fakharzadeh Jahromi

⁸ Ghahramani nahr and Bathaeh

⁹ Yousefi Hanoomarvar et al.

¹⁰ Slater

¹¹ Richey

¹² Hakimi et al.



آن‌گاه این مساله روی گراف‌های درختی در زمان چندجمله‌ای قابل حل است و یک رویکرد جواب بازمان اجرای $O(n^{2p+1})$ برای آن معرفی کردند. چند سال بعد نوک^۱ (۱۹۹۶) نیز این مساله را روی درخت‌ها در زمان $O(pn^2)$ حل کرد. پنگ و لو^۲ (۱۹۹۶) اولین الگوریتم را برای حل مساله میانه مسیر گسسته با طولی برابر با عدد ثابت L ارایه دادند. در این روش، طول یال‌های درخت مثبت و وزن راس‌های آن یک در نظر گرفته شده است. زمان اجرای روش ارایه شده توسط آن‌ها $O(n \log n)$ است. الگوریتم‌های کارای دیگری که برای حل مساله فوق با طول مسیر کران‌دار ارایه شدند، الگوریتم‌های آلستراپ^۳ و همکاران^۳ (۱۹۹۷) هستند (وانگ و لین، ۲۰۰۰). وانگ و لین^۴ (۲۰۰۰) و وانگ^۵ (۱۹۹۸) مساله p -میانه مسیر را در زمان $O(n^{p-1})$ حل کردند. بیکر و همکاران^۶ (۲۰۰۲a، ۲۰۰۲b) این مساله را روی شبکه‌های درختی غیر وزن‌دار در زمان $O(nL)$ حل کردند. روی درخت‌های وزن‌دار این زمان اجرا به $O(n(\log n)^2)$ تغییر کرد. هم‌چنین، آن‌ها نشان دادند که مقدار بهینه‌ی این مساله کمتر مساوی مقدار بهینه‌ی مساله ارایه شده توسط پنگ است. به‌علاوه، بیکر و همکاران (۲۰۰۷) این مساله را روی گراف‌های توری غیر جهت‌دار $M \times N$ مستطیلی با وزن‌های راسی نامنفی و طول‌های یالی مثبت در نظر گرفتند به طوری که، طول مسیر یا تعداد یال‌های آن از بالا کران‌دار بود. بالاسوب رامنیان و همکاران^۷ (۲۰۰۹) مساله موردنظر را روی گراف‌های دوبخشی، گراف‌های آستانه و گراف‌های بازای حقیقی در نظر گرفتند. در این مقاله، طول همه‌ی یال‌ها یک در نظر گرفته شده است. زمان اجرای الگوریتم ارایه شده روی گراف‌های بالا به ترتیب برابر با $O(L|E|)$ ، $O(|V||E|)$ و $O(L|E|)$ است. لاری و همکاران^۸ (۲۰۰۸) نشان دادند که گراف موردنظر در مقاله‌ی ریچی می‌تواند کاکتوس گراف نیز باشد. هم‌چنین، آن‌ها نشان دادند که NP -سخت بودن مساله حتی روی کاکتوس گراف‌های ساده‌تر نیز برقرار است (لاری و همکاران، ۲۰۱۱). وی مساله میانه مسیر را بدون هیچ محدودیتی روی طول مسیر، روی گراف‌های غیر هموار همبند با وزن‌های راسی نامنفی و طول‌های یالی یک در نظر گرفت. پورتو و همکاران^۹ (۲۰۱۴) نتیجه به‌دست‌آمده توسط حکیمی را دوباره بررسی کردند و نشان دادند که مساله p -میانه مسیر گسسته به ازای $p=2$ روی کاکتوس گراف‌ها با وزن‌های راسی نامنفی و طول‌های یالی مثبت NP -کامل است، اگر مجموع طول‌های یالی این مسیرها حداکثر برابر با L باشد. هم‌چنین، با ازای $p=2$ ، با شرط محدود بودن مجموع طول هر دو مسیر همچنان مساله NP -کامل خواهد بود. هدتیمی و همکاران^{۱۰} (۱۹۸۱)، مساله مرکز مسیر را روی گراف‌های کلی تحت عنوان کوتاه‌ترین مسیری که ماکزیم فاصله‌ی وزن‌دار هر راس از آن را مینیمم می‌کند، در نظر گرفت و یک الگوریتم طمع کارانه برای حل این مساله روی گراف‌های درختی بازمان اجرای خطی معرفی کرد. حکیمی و پورتو به همراه همکاران نشان دادند که مساله p -مرکز با مکان‌های کاندید مسیری (درختی) شکل روی گراف‌های هموار با درجه‌ی راسی حداکثر پنج، روی گراف‌های دوبخشی، گراف‌های توری و کاکتوس گراف‌ها به ازای $p \neq 2$ جزء مسایل NP -سخت هستند. تامیر و لاو^{۱۱} (۲۰۰۵)، نشان دادند که اگر $p \neq 2$ به‌عنوان داده‌ی ورودی مساله در نظر گرفته شود، این مساله در زمان $O(p^2 n^3)$ قابل حل است. باتاچاریا و همکاران^{۱۲} (۲۰۰۶)، الگوریتم‌های خطی برای حل این مساله با محدودیت طول و بدون محدودیت طول برای هر دو حالت گسسته و پیوسته روی گراف‌های درختی با وزن‌های راسی و طول‌های یالی مثبت ارایه دادند.

آورباخ و برمن^{۱۳} (۱۹۹۹) مساله پیدا کردن مکان کاندید مسیری شکل روی گراف‌های درختی را با در نظر گرفتن هر دو تابع هدف میانه و مرکز بررسی کردند. در این مقاله، وزن راس‌ها نامنفی و طول یال‌های درخت مثبت در نظر گرفته شده است. وی سه مساله زیر را در نظر گرفته است:

- مساله پیدا کردن مسیری که مجموع فاصله‌های وزن‌دار راس‌ها از آن مینیمم شود به طوری که ماکزیم فاصله‌ی وزن‌دار آن از همه‌ی راس‌ها از یک مقدار ثابت بیشتر نشود.
- مساله پیدا کردن مسیری که ماکزیم فاصله‌ی وزن‌دار همه‌ی راس‌ها از آن مینیمم شود به طوری که مجموع فاصله‌ی وزن‌دار آن از همه‌ی راس‌ها از یک مقدار ثابت بیشتر نشود.
- مساله پیدا کردن مجموعه‌ی مسیرهای پارتو-بهینه برای مساله دو هدف با توابع هدف میانه و مرکز.

¹ Novik

² Peng and Lo

³ Alstrup et al.

⁴ Wang and Lin

⁵ Wang

⁶ Becker et al.

⁷ Balasubramanian et al.

⁸ Lari et al.

⁹ Puerto et al.

¹⁰ Hedetniemi

¹¹ Tamir and Lowe

¹² Bhattacharya et al.

¹³ Averbakh and Berman



برای این سه مساله ذکر شده الگوریتم‌های پویا با زمان‌های اجرای $O(n \log n)$ ارایه شده است. بیکر دو مساله اول را با محدودیت اضافی روی کران بالای مسیرها در زمان $O(n \log^2 n)$ حل کرد. پورتو مسایل اول و دوم را به همراه مساله مرکز-میانه وزن‌دار دوگانه با طول مسیر محدود روی گراف‌های درختی بررسی کرد. در این مقاله، هر سه مساله در زمان $O(n \log n)$ حل شده است. تامیر و همکاران^۱ (۲۰۰۲)، مجموعه‌ی مکان‌های کاندید را برای مساله مرکز-میانه به صورت زیر درخت‌هایی با محدودیت طول در نظر گرفت. وی دو نوع متفاوت از این مساله را به صورت زیر بررسی کرد:

- زیردرخت به دست آمده برای جواب مساله بالا باید شامل نقطه‌ی از پیش تعیین شده باشد.
- هیچ محدودیتی روی زیردرخت به دست آمده به جز محدودیت طول وجود نداشته باشد.

هم‌چنین، وی نشان داد که زیردرخت بهینه با طول محدود برای مساله مرکز-میانه باید شامل مکان مرکز-میانه مطلق روی درخت باشد. بنابراین، ابتدا مساله حالت اول را با در نظر گرفتن مکان مرکز-میانه به عنوان نقطه‌ی از پیش تعیین شده حل کرده و جواب بهینه‌ی آن را به عنوان جواب مساله حالت دوم در نظر گرفته است. این فرایند در زمان $O(n \log n)$ اجرا شده است. دیور و سگال^۲ (۲۰۰۸)، زیردرختی شامل k برگ با تعداد یال‌های l تحت معیار مرکز-میانه را روی گراف‌های درختی جستجو کردند. زمان اجرای پیدا کردن چنین زیردرختی $O(n^2)$ است.

کوالیس و یو^۳ (۱۹۹۷) برای حل مسایل استوار سه رویکرد معرفی کرد و تصمیم‌های استوار به دست آمده با استفاده از این رویکردها را به سه گروه دسته‌بندی کرد: ۱- تصمیم استوار مطلق، ۲- تصمیم انحراف استوار و ۳- تصمیم استوار نسبی. دقیق‌ترین تصمیم از بین این سه تصمیم، تصمیم انحراف استوار است که از حل معیار مینیماکس پشیمانی به دست می‌آید.

مسایل مرکز، میانه و مرکز-میانه مسیر استوار با استفاده از معیار مینیماکس پشیمانی بررسی شده‌اند. پورتو و همکاران (۲۰۱۱)، این سه مساله را به طور هم‌زمان روی گراف‌های درختی با وزن‌های راسی بازه‌ای حل کرد. زمان اجرای الگوریتم‌های ارایه شده برای این سه مساله به ترتیب برابر با $O(n^2)$ ، $O(n^4)$ و $O(n^5 \log n)$ است. یه و همکاران^۴ (۲۰۱۸) زمان اجرای مساله مرکز-میانه مسیر را به $O(n^4)$ و زمان اجرای مساله میانه مسیر را به کاهش $O(n^2)$ داد. در این دو مقاله، برای حل مساله مرکز-میانه مسیر، وزن ریوس برای هر دو مساله مرکز-میانه مسیر مجزا در نظر گرفته شده است. وانگ و همکاران^۵ (۲۰۲۰) مساله مرکز مسیر استوار را روی گراف‌های درختی در نظر گرفتند و زمان اجرای آن را به $O(n \log n)$ کاهش دادند. در تمامی این مقالاتی که در مورد مساله مرکز-میانه مسیر استوار ارایه شده است، وزن راس‌ها برای مساله میانه مسیر و مرکز مسیر جدا در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر، برای مساله مرکز-میانه مسیر استوار، برای هر راس از گراف مورد نظر دو وزن در نظر گرفته شده است. در این مقاله، ما وزن راس‌های گراف مورد نظر را که یک گراف درختی است، برای هر دو مساله میانه مسیر و مرکز مسیر یکسان در نظر گرفتیم. در این حالت مساله بسیار پیچیده‌تر از حالت قبل است.

۳- تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این قسمت به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در حوزه بهینه‌سازی استوار و مساله مکان‌یابی مسیر می‌پردازیم. همچنین، به نتایج اولیه به دست آمده در این دو حوزه نیز اشاره می‌کنیم. نمادهایی که در طول مقاله استفاده شده‌اند، به طور مختصر در جدول ۱ توضیح داده شده‌اند.

تعریف ۱- فرض کنید E یک مجموعه شامل n عضو باشد به طوری که مقدار هر عضو $i \in E$ ، متعلق به یک مجموعه دلخواه و داده شده S_i است (اورباخ^۱، ۲۰۰۱). در این صورت S یک سناریو نامیده می‌شود اگر به صورت زیر تعریف شود:

$$S = \{ (w_1^s, w_2^s, \dots, w_n^s) : w_i^s \in S_i, i=1, \dots, n \}. \quad (2)$$

تعریف ۲- مجموعه تمامی رخدادهای ممکن برای مقدار داده‌های ورودی غیرقطعی را مجموعه سناریوها می‌نامند (اورباخ، ۲۰۰۱).

جدول ۱ - نمادهای استفاده شده.

¹ Tamir et al.

² Dvir and Segal

³ Kouvelis and Yu

⁴ Ye et al.

⁵ Wang et al.

⁶ Averbakh

Table 1- The used symbols.

کاربرد	نماد	کاربرد	نماد
مجموعه راسی گراف	V	گراف (گراف درختی)	G (T)
مجموعه مشتریان روی گراف	S _c	مجموعه پالی گراف	E
یک مشتری دلخواه روی گراف	s _c	مجموعه مسیرهای روی گراف	Γ
راس ith	v _i	مسیر دلخواه روی گراف	P
کران پایین وزن راس v _i	w _i ⁻	فاصله مشتری s _c از مسیر P	d(s _c , P)
کران بالای وزن راس v _i	w _i ⁺	تعداد راس‌های گراف	n
سناریوی دلخواه	s	مجموعه سناریوها	S
تابع هدف مساله میانه مسیر در مسیر A روی سناریوی s	f _m (A, s)	تابع هدف مساله مرکز مسیر در مسیر A روی سناریوی s	f _c (A, s)
سناریویی با کمترین وزن برای همه راس‌ها	s ⁻	سناریویی با بیشترین وزن برای همه راس‌ها	s ⁺
		سناریوی بدترین حالت جفت مسیرهای A و B	S(A, B)

تعریف ۳- یک مدل بهینه‌سازی از نوع مینیمم‌سازی با تابع هدف $f(x)$ را در نظر بگیرید به طوری که داده‌های ورودی آن مقداری غیرقطعی از نوع استوار داشته باشند. فرض کنید S مجموعه تمامی رخدادهای ممکن داده‌های ورودی این مساله و $f(x, s)$ متناظر با تابع هدف این مدل روی سناریوی $s \in S$ باشد. همچنین، فرض کنید X برابر با اشتراک نواحی شدنی مساله روی تمامی سناریوها باشد (کوالیس و یو، ۱۹۹۷). در این صورت، معیار مینیماکس پشیمانی به صورت زیر فرمول‌بندی خواهد شد:

$$\min_{x \in X} \max_{s \in S} f(x, s) - f(x^*, s). \quad (۳)$$

که در آن x^* جواب بهینه مساله روی سناریوی s است. این مدل برای محیط‌هایی مناسب است که کیفیت تصمیم‌ها از قبل مشخص شده است. اگرچه تصمیم‌گیرنده قبل از زمان تصمیم‌گیری با عدم قطعیت داده‌های قابل توجهی روبروست، اما تصمیم‌گیرنده زمانی تصمیم قطعی می‌گیرد که از کیفیت واقعی آن‌ها با استفاده از داده‌هایی که به طور قطعی به وقوع پیوسته‌اند، مطمئن شود. در چنین مواردی، انحراف از عملکرد تصمیم بهینه برای سناریوی داده‌های محقق شده، یک معیار کیفیت تصمیم‌گیری محتمل است. برای محیط‌های بازار رقابتی، در مواردی که عملکرد شرکت در هر یک از سناریوهای محقق شده رضایت‌بخش باشد، استفاده از مدل (۳) رایج است.

تعریف ۴- فرض کنید y یک عضو دلخواه از مجموعه X باشد (کوالیس و یو، ۱۹۹۷). سناریوی s_y را سناریوی بدترین حالت متناظر با y می‌نامند اگر به ازای سناریوی دلخواه $s \in S$ رابطه (۴) برقرار باشد:

$$f(y, s) - f(x^*, s) \leq f(y, s_y) - f(x^*, s_y). \quad (۴)$$

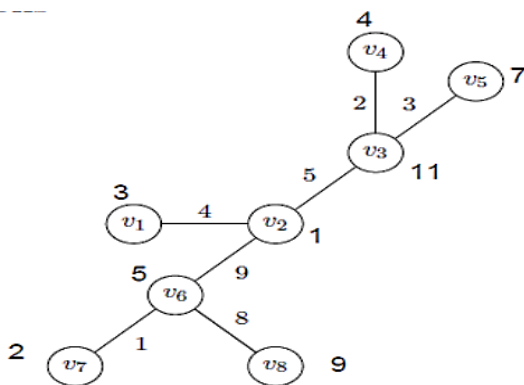
تعریف ۵- یک مسیر روی یک شبکه را پیوسته گویند هرگاه حداقل یکی از دو نقطه انتهایی مسیر یک راس از شبکه نباشد (پورتو و همکاران، ۲۰۱۱).

تعریف ۶- یک مسیر روی یک شبکه را گسسته گویند هرگاه هر دو نقطه انتهایی آن مسیر راس‌هایی روی شبکه باشند (پورتو و همکاران، ۲۰۱۱).

تعریف ۷- برای هر x روی درخت T ، y را راس بحرانی x می‌نامند هرگاه فاصله وزن دار y از x بیشتر از راس‌های دیگر باشد (آورباخ و همکاران، ۲۰۰۰)، به‌عنوان مثال اگر گراف درختی شکل ۱ را در نظر بگیرید، آن‌گاه با طول یال‌ها و وزن راس‌های داده شده، راس v_3 راس بحرانی $x = v_1$ خواهد بود؛ زیرا:

$$\max_{v \in V} w(v)d(v, v_1) = \max\{4, 220, 44, 84, 65, 42, 98\} = 220.$$

$$w(y)d(y, x) = \max_{v \in V} w(v)d(v, x).$$



شکل ۱- گراف درختی مربوط به توضیح تعریف ۷.
Figure 1- The tree networks related to explanation of definition 7.

۴- بیان و فرمول‌بندی مساله مکان‌یابی مرکز-میانه مسیر استوار

در این قسمت، مساله مکان‌یابی مرکز-میانه مسیر استوار روی شبکه‌های درختی با وزن‌های راسی بازه‌ای تحت معیار مینیماکس پشیمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد و برخی نتایج اولیه مربوط به این مساله ارائه می‌شود. از جمله کاربردهای این مساله می‌توان به احداث بزرگراه‌ها اشاره کرد. یک گراف شهری را در نظر بگیرید که هدف تاسیس بزرگراهی در آن هست به طوری که دسترسی تمام افراد ساکن هر یک از شهرک‌های آن شهر به بقیه نقاط شهر راحت شود. اگر هر شهرک از این شهر را یک مشتری و وزن هر مشتری را برابر با بازه‌ای بگیریم که کران پایین آن و بالای آن به ترتیب برابر با حداقل و حداکثر خانواده ساکن در آن شهرک باشد. در این صورت می‌توان بزرگراه را طوری ساخت که هم مجموع فاصله وزن‌دار این مشتریان و هم ماکزیمم فاصله وزن‌دار این مشتریان از این بزرگراه بهینه باشد. اگر معیار مینیماکس پشیمانی ارائه شده در رابطه (۳) را برای مساله مرکز-میانه مسیر به کار ببریم، مدل‌بندی مساله به فرم زیر خواهد بود:

فرض کنید $T=(V, E)$ یک درخت با مجموعه راسی V و مجموعه یالی E باشد. فرض کنید وزن هر راس v_i روی درخت برای هر دو مساله میانه و مرکز متناظر با یک بازه $[w_i^-, w_i^+]$ باشد. همچنین، قرار دهید: $S = \prod_{1 \leq i \leq n} [w_i^-, w_i^+]$ که نشان‌دهنده‌ی مجموعه تمامی سناریوها می‌باشد. فرض کنید Γ مجموعه همه مسیرهای موجود روی درخت T باشد. اگر معیار مینیماکس پشیمانی برای حل این مساله به کار برده شود، مساله به فرم زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\min_{A \in \Gamma} \max_{B \in \Gamma} \max_{s \in S} (f_c(A, s) + f_m(A, s) - f_c(B, s) - f_m(B, s)), \quad (5)$$

که در آن

$$f_c(A, s) = \max_{1 \leq i \leq n} w_i^s d(v_i, A),$$

$$f_m(A, s) = \sum_{i=1}^n w_i^s d(v_i, A).$$

لم ۱- فرض کنید A و B دو مسیر دلخواه از مجموعه Γ باشند. اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه به ازای هر راس v روی درخت رابطه $d(v, A) \geq d(v, B)$ برقرار است دهید (په و همکاران، ۲۰۱۸).

با استفاده از این نکته پورتو و همکاران نشان دادند که به‌جای حل مساله با استفاده از معیار مینیماکس پشیمانی روی تمامی مسیرهای متعلق به مجموعه Γ کافی است معیار مینیماکس پشیمانی را روی مسیرهای گسسته‌ی این مجموعه حل کنیم (پورتو و همکاران، ۲۰۱۱). فرض کنید P مجموعه همه مسیرهای گسسته روی درخت T باشد. در این صورت $|P| = O(n^2)$ ؛ بنابراین می‌توان گفت:

لم ۲- مجموعه P یک مجموعه جواب غالب برای مساله مکان‌یابی میانه مسیر، مرکز مسیر و مرکز-میانه مسیر تحت معیار مینیماکس پشیمانی است (پورتو و همکاران، ۲۰۱۱).

در نتیجه، به‌جای حل مساله (۳) کافی است مساله زیر را حل کنیم:

(۶)

$$\min_{A \in P} \max_{B \in P} \max_{s \in S} f_c(A, s) + f_m(A, s) - f_c(B, s) - f_c(B, s).$$

برای حل این مساله باید تعداد متناهی سناریوی بدترین حالت پیدا کنیم. برای این منظور به ازای هر جفت مسیر A و B متعلق به مجموعه P یک سناریوی بدترین حالت برحسب این که مقدار تابع هدف معیار در این دو مسیر، در بدترین حالت منفی یا نامنفی است، به دست می آوریم. برای این منظور، ابتدا سناریوهای بدترین حالت متناظر با مسایل میانه مسیر و مرکز مسیر را تحت معیار مینیماکس پیشمانی بررسی می کنیم؛ زیرا مساله مرکز-میانه مسیر ترکیب مساله میانه مسیر و مرکز مسیر است. پورتو و همکاران (۲۰۱۱)، این سناریوها را برای مساله میانه مسیر استوار و مرکز مسیر استوار به صورت زیر به دست آوردند:

لم ۳- سناریوی بدترین حالت متناظر با جفت مسیر A و B متعلق به مجموعه P برای مساله مکان یابی میانه سناریوی مانند s است (پورتو و همکاران، ۲۰۱۱).

به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

- وزن راس $v \in V$ که در شرط $d(v, A) - d(v, B) > 0$ صدق می کند، برابر با کران بالای بازه ی متناظرش قرار می گیرد.
- وزن راس $v \in V$ که در شرط $d(v, A) - d(v, B) < 0$ صدق می کند، برابر با کران پایین بازه ی متناظرش قرار می گیرد.
- وزن راس $v \in V$ که در شرط $d(v, A) - d(v, B) = 0$ صدق می کند، به دلخواه از بازه ی متناظرش انتخاب می شود.

لم ۴- فرض کنید A و B دو مسیر دلخواه از مجموعه P باشد. سناریوی بدترین حالت متناظر با این دو مسیر برای مساله مکان یابی مرکز سناریوی مانند s است به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

- وزن راس v برابر با کران بالای بازه ی متناظرش است.
- وزن بقیه راس ها برابر با کران پایین بازه ی متناظرشان هستند.
- راس بحرانی مسیر A است.

حال با استفاده از این دو لم، سناریوهای بدترین حالت متناظر با مساله مرکز-میانه مسیر را محاسبه می کنیم. فرض کنید $s(A, B)$ نشان دهنده سناریوی بدترین حالت متناظر با جفت مسیر A و B متعلق به مجموعه P باشد. برای این منظور، اول مشخص می کنیم که $f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) \geq 0$ است یا $f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) < 0$. بعد از مشخص شدن علامت $f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B))$ ، به طور مجزا برای هر دو حالت $s(A, B)$ را محاسبه می کنیم. فرض کنید s^+ و s^- سناریوهایی باشند که روی این سناریوها، وزن راس های درخت به ترتیب برابر با کران های بالا و پایین بازه ی متناظرشان هستند.

لم ۵- اگر به ازای هر جفت مسیر A و B ، $f_c(A, s^-) - f_c(B, s^+) \geq 0$ ، آن گاه رابطه زیر برقرار است:

$$f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) \geq 0.$$

لم ۶- اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه:

$$f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) \geq 0.$$

با توجه به این که، وزن همه راس ها روی سناریوی $s(A, B)$ بزرگتر مساوی وزن این راس ها روی سناریوی s است، پس $f_c(A, s^-) \leq f_c(A, s(A, B))$. همچنین، وزن همه راس های درخت روی سناریوی $s(A, B)$ کمتر مساوی وزن این راس ها روی سناریوی s است. در نتیجه، $f_c(B, s^+) \geq f_c(B, s(A, B))$ ؛ بنابراین، حکم مورد نظر به دست می آید.

از لم ۱ نتیجه می شود. به طور مشابه، می توان نتیجه گرفت که:

۱. اگر به ازای هر جفت مسیر A و B ، رابطه $f_c(A, s^+) - f_c(B, s^-) < 0$ برقرار باشد، آن گاه رابطه $f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) < 0$ برقرار است.

۲. اگر $B \subseteq A$ ، آن گاه $f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) < 0$.

حال به ازای هر جفت مسیر A و B ، فرض کنید:



۷



$$\begin{aligned} V_1(A,B) &= \{v \in V: d(v,A) > d(v,B)\}, \\ V_2(A,B) &= \{v \in V: d(v,A) < d(v,B)\}, \\ V_3(A,B) &= \{v \in V: d(v,A) = d(v,B)\}. \end{aligned} \quad (۷)$$

لم ۷- اگر $V_2(A,B) = \emptyset$ ، آن‌گاه روی هر سناریوی دلخواه و در نتیجه، روی سناریوی بدترین حالت $s(A,B)$ - رابطه $f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)) \geq 0$ همواره برقرار است.

برهان: با توجه به فرض، به ازای هر راس v روی درخت T ، $d(v,A) \geq d(v,B)$ در نتیجه،

$$w_v^{s(A,B)} d(v,A) \geq w_v^{s(A,B)} d(v,B).$$

با استفاده از این لم، نتایج زیر حاصل می‌شود. اثبات درستی این نتایج، مشابه اثبات لم ۴ هست؛ بنابراین، از نوشتن آن چشم‌پوشی می‌کنیم.

۳. اگر $V_1(A,B) \cup V_3(A,B) = \emptyset$ ، آن‌گاه روی هر سناریوی دلخواه و به‌ویژه سناریوی بدترین حالت $s(A,B)$ ، رابطه $f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)) < 0$ برقرار است.

۴. اگر حداقل یک سناریو مانند s وجود داشته باشد به طوری که روی این سناریو $f_c(A, s) - f_c(B, s) \geq 0$ ، آن‌گاه روی سناریوی بدترین حالت $s(A,B)$ نیز رابطه زیر برقرار است:

$$f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)) \geq 0.$$

حال فرض کنید به ازای جفت مسیر A و B از مجموعه P ، هیچ‌کدام از مفروضات لم ۵ تا لم ۸ برقرار نباشد. در این حالت، از مورد ۴ استفاده کرده و علامت $(f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)))$ را مشخص می‌کنیم؛ به عبارت دیگر، یا یک سناریوی مانند s پیدا می‌کنیم که روی این سناریو

$$f_c(A, s) - f_c(B, s) \geq 0,$$

یا نتیجه می‌گیریم که چنین سناریویی وجود ندارد و در نتیجه، روی هر سناریو و به‌ویژه سناریوی بدترین حالت $s(A,B)$ ،

$$f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)) < 0.$$

برای این که بتوانیم به این نتیجه برسیم، به این صورت عمل می‌کنیم. می‌دانیم که اگر بر روی یک سناریوی s ، رابطه

$$f_c(A, s^-) - f_c(B, s) \geq 0.$$

برقرار باشد، آن‌گاه سناریوی مورد نظر لم ۹ همان سناریوی s خواهد بود؛ بنابراین، وزن راس v روی درخت را تحت سناریوی s از رابطه $w_v^s = \frac{f_c(A, s^-)}{d(v, B)}$ محاسبه می‌کنیم. وزن همه ریوس متعلق به بازه متناظرشان بودند، آن‌گاه این سناریو، همان سناریوی مورد نظر لم ۷ است. توجه کنید که طبق رابطه زیر:

$$w_v^s d(v, B) \leq f_c(B, s) = \max_{v \in V} w_v^s d(v, B) \leq f_c(A, s^-),$$

اگر این مقادیر در بازه متناظرشان صدق نکنند، نتیجه می‌گیریم که چنین سناریویی موجود نیست و $f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)) < 0$ حال فرض کنید با استفاده از لم‌های قبلی، مشخص شود که برای جفت مسیر A و B ،

$$f_c(A, s(A,B)) - f_c(B, s(A,B)) \geq 0.$$

فرض کنید $f_c(B, s(A,B)) = w_y^{s(A,B)} d(y, B)$ و $f_c(A, s(A,B)) = w_x^{s(A,B)} d(x, A)$

در این صورت، $x \in V_1(A,B) \cup V_3(A,B)$ و سناریوی $s(A,B)$ به صورت زیر مشخص می‌شود:

– وزن همه راس‌های موجود در مجموعه $V_2(A,B)$ را برابر با کران پایین بازه متناظرشان قرار دهید.

– وزن همه راس‌های $V_1(A,B) \cup V_3(A,B)$ که روی مسیر B قرار دارند و یا در شرط،

$$w_v^+ d(v, B) \leq f_c(B, s^-),$$

صدق می‌کنند را برابر با کران بالای بازه متناظرشان قرار دهید؛ زیرا افزایش وزن این راس‌ها مقدار تابع هدف مساله میانه را افزایش می‌دهد اما مقدار تابع هدف مساله مرکز را کاهش نمی‌دهد.

فرض کنید:

$$V_1(B) = \{v \in V_1(A, B) \cup V_3(A, B) : w_v^+ d(v, B) > f_c(B, s^-) \text{ or } v \notin B\}.$$

وزن راس‌های مجموعه $V_1(B)$ برابر با کران بالای بازه متناظرشان قرار می‌گیرد؛ زیرا افزایش وزن این ریوس، مقدار تابع هدف متناظر با مساله میانه را افزایش می‌دهد و با توجه به ویژگی این دو مجموعه، مقدار تابع هدف متناظر با مرکز نیز با افزایش وزن این ریوس افزایش می‌یابد.

اکنون فرض کنید A و B جفت مسیرهایی باشند که در آن

$$f_c(A, s(A, B)) - f_c(B, s(A, B)) < 0.$$

در این صورت، سناریوی بدترین حالت $s(A, B)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

۱. به ازای هر راس $v \in V_1(A, B)$ که در شرط $w_v^+ d(v, B) \leq f_c(B, s^-)$ صدق می‌کند و یا روی مسیر B قرار دارد وزن آن را برابر با کران بالای بازه متناظرش قرار دهید.

۲. به ازای هر راس $v \in V_1(A, B)$ که در شرط $w_v^+ d(v, B) > f_c(B, s^-)$ صدق می‌کند و روی مسیر B قرار ندارد، وزن آن را برابر با کران بالای بازه متناظرش قرار دهید.

علت این است که چون $f_c(A, s(A, B)) < f_c(B, s(A, B))$ بنابراین y متعلق به $V_2(A, B)$ خواهد بود و وزن راس‌های $V_1(A, B)$ مقدار تابع هدف مساله مرکز-میانه را کاهش نمی‌دهند ولی ممکن است باعث افزایش آن شوند.

هر راس $v \in V_2(A, B)$ که در شرط

$$w_v^+ d(v, B) \leq f_c(B, s^-),$$

صدق می‌کند را در نظر بگیرید. در این حالت، $x \in V_2(A, B)$ و

$$y \in \{v \in V_2(A, B) : w_v^+ d(v, B) > f_c(B, s(A, B))\}.$$

تعریف کنید:

$$\bar{V} = \{v \in V_2(A, B) : w_v^+ d(v, B) \leq f_c(B, s(A, B)), 2d(v, A) - d(v, B) \geq 0\}.$$

بنابراین، وزن ریوس در این حالت به فرم زیر محاسبه می‌شود:

فرض کنید s سناریویی باشد که وزن ریوس با ویژگی‌های ذکر شده در این بخش، برابر با کران پایین بازه متناظرشان و وزن بقیه ریوس مشابه دو حالت قبلی مشخص شده باشند، قرار دهید

$$f_c(B, s) = w_{v_2(s)}^s d(v_2(s), B), \quad f_c(A, s) = w_{v_1(s)}^s d(v_1(s), A).$$

فرض کنید وزن راس $v_1(s)$ به اندازه $\alpha_{v_1(s)}$ افزایش داده شود؛ بنابراین

$$f_c(A, s) = (w_{v_1(s)}^s + \alpha_v) d(v_1(s), A).$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f_c(A, s) - f_c(B, s) + f_m(A, s) - f_m(B, s) &= (w_{v_1(s)}^s + \alpha_v) d(v_1(s), A), \\ -w_{v_2(s)}^s d(v_2(s), B) + \sum_{v_i \in V} w_i^s (d(v_i, A) - d(v_i, B)) &+ \alpha_{v_1(s)} (d(v, A) - d(v, B)) + \\ \sum_{v_i \in V} w_i^s d(v_i, A) - d(v_i, B) &+ \alpha_{v_1(s)} (2d(v_i, A) - d(v_i, B)). \end{aligned}$$

حال اگر $2d(v_i, A) - d(v_i, B) \leq 0$ ، آن‌گاه افزایش وزن این راس تاثیری در افزایش مقدار تابع هدف مساله مرکز-میانه تحت معیار مینیمکس پشیمانی ندارد. فرض کنید وزن راس $v \neq v_1(s)$ به اندازه α_v افزایش یابد. فرض کنید بعد از افزایش وزن این راس $f_c(A, s) = (w_v^s + \alpha_v) d(v, A)$ ، در این حالت نیز داریم:





حال اگر $2d(v,A)-d(v,B) \leq 0$ ، آن‌گاه افزایش وزن این راس تاثیری در افزایش مقدار تابع هدف مساله مرکز-میانه تحت معیار مینیماکس

پشیمانی ندارد. پس برای حالتی که $v \notin \bar{V}$ ، قرار دهید $w_v^{s(A,B)} = w_v^-$. اگر $v_1(s) \in \bar{V}$ ، آن‌گاه راس v^* را طوری پیدا کنید که به ازای هر راس $v \in \bar{V}$ ،

$$w_v^+ d(v,A) \leq w_{v^*}^+ d(v^*,A).$$

به ازای هر راس $v \in \bar{V}$ ، قرار دهید: $w_v^{s(A,B)} = w_v^+ - \alpha_v$ که در آن α_v از رابطه

$$w_{v_1(s)}^+ d(v_1(s),A) = (w_v^+ - \alpha_v) d(v,A).$$

به‌دست آمده می‌آید. البته به شرطی که

$$\sum_{v \in \bar{V}} w_v^{s(A,B)} (2d(v,A) - d(v,B)) > w_{v^*}^+ d(v^*,A),$$

و $\alpha_v \geq 0$. اگر این شرط‌ها برقرار نباشد، آن‌گاه $w_v^{s(A,B)} = w_v^-$ و $w_{v^*}^{s(A,B)} = w_{v^*}^+$. در حالتی که $v_1(s) \notin \bar{V}$ ، نیز می‌توانیم این روند را تکرار کنیم.

فرض کنید $v \in V_2(A,B)$ که در شرط $w_v^+ d(v,B) > f_c(B,S^-)$ صدق می‌کند. در این حالت، وزن تمامی راس‌های با این ویژگی را برابر با کران پایین بازه متناظرش قرار دهید؛ زیرا اگر s سناریویی باشد که روی آن، وزن راس‌هایی با این ویژگی برابر با کران پایین بازه متناظرشان باشند، آن‌گاه میزان تغییر تابع هدف بعد از افزایش وزن حداقل یک راس، منفی خواهد بود؛ زیرا $x \in V_2(A,B)$.

فرض کنید $v \in V_3(A,B)$ باشد. تغییر وزن این ریوس تغییری در مقدار تابع هدف متناظر با مساله میانه ایجاد نمی‌کند؛ اما مقدار تابع هدف متناظر با مساله مرکز را تغییر می‌دهد. اگر این راس‌ها روی مسیر B قرار داشته باشند، مقدار تابع هدف مساله مرکز مسیر را کاهش نمی‌دهند. همچنین، در این حالت، وزن راس $v \in V_3(A,B)$ که در شرط $w_v^+ d(v,B) \leq f_c(B,S^-)$ صدق می‌کند و روی مسیر B قرار ندارد، نیز مقدار تابع هدف مساله مرکز مسیر را کاهش نمی‌دهد؛ بنابراین وزن این راس‌ها را برابر با کران بالای بازه متناظرش قرار دهید؛ اگر روی این مسیر قرار نداشته باشند و در این شرط صدق نمی‌کنند، برابر با $\frac{f_c(B,S^-)}{d(v,B)}$ قرار دهید (یه و همکاران، ۲۰۱۸). نتایج به‌دست آمده در این بخش را به‌طور خلاصه در الگوریتم ۱ جمع‌بندی می‌کنیم.

الگوریتم ۱ - محاسبه سناریوی بدترین حالت $s(A,B)$ متناظر با جفت مسیرهای داده شده A و B .

۱. اگر $0 \leq f_c(A,s) - f_c(B,s)$ ، آن‌گاه:

- وزن همه راس‌های موجود در مجموعه $V_2(A,B)$ را برابر با کران پایین بازه متناظرشان قرار دهید.
- وزن همه راس‌های $v \in V_1(A,B) \cup V_3(A,B)$ که در شرط $w_v^+ d(v,B) \leq f_c(B,S^-)$ صدق می‌کنند و یا روی مسیر B قرار دارند را برابر با کران بالای بازه متناظرشان قرار دهید.
- وزن راس‌های موجود در مجموعه $V_1(B)$ را برابر با کران بالای بازه متناظرشان قرار دهید.

۲. اگر $0 < f_c(A,s) - f_c(B,s)$ ، آن‌گاه:

- به ازای هر راس $v \in V_1(A,B)$ ، وزن آن را برابر با کران بالای بازه متناظرش قرار دهید.
- وزن هر راس $v \in V_2(A,B)$ که در شرط $w_v^+ d(v,B) \leq f_c(B,S^-)$ صدق می‌کند را برای حالتی که $v \notin \bar{V}$ ، قرار دهید $w_v^{s(A,B)} = w_v^-$.
- وزن هر راس $v \in V_2(A,B)$ که در شرط $w_v^+ d(v,B) \leq f_c(B,S^-)$ صدق می‌کند را برای حالتی که $v \in \bar{V}$ ، قرار دهید $w_v^{s(A,B)} = w_v^+$.
- فرض کنید $v \in V_2(A,B)$ که در شرط $w_v^+ d(v,B) > f_c(B,S^-)$ صدق می‌کند. در این حالت، وزن تمامی راس‌های با این ویژگی را برابر با کران پایین بازه متناظرش قرار دهید.
- فرض کنید $v \in V_3(A,B)$ باشد. در این حالت، وزن راس $v \in V_3(A,B)$ که روی مسیر B قرار دارد یا در شرط $w_v^+ d(v,B) \leq f_c(B,S^-)$ صدق می‌کند را برابر با کران بالای بازه متناظرش قرار دهید. وزن راس‌هایی که در این شرط‌ها صدق نمی‌کنند، برابر با $\frac{f_c(B,S^-)}{d(v,B)}$ قرار دهید به شرطی که در بازه موردنظر قرار داشته باشند. در غیر این صورت، برابر با کران بالا یا پایین قرار دهید.



لم ۸- سناریوی بدترین حالت $s(A, B)$ برای جفت مسیر داده A و B در زمان خطی محاسبه می‌شود. همچنین، مقدار تابع هدف مساله مرکز-میانه مسیر روی این سناریو و در روی جفت مسیر داده شده، در زمان خطی محاسبه می‌شود.

برهان: به ازای هر راس از درخت، یک عمل مقایسه و یک عمل جای‌گذاری انجام می‌شود. پس تعداد عملیات ریاضی انجام‌شده متناسب با تعداد راس‌ها است. محاسبه مقدار تابع هدف مساله میانه و مرکز در زمان خطی انجام می‌شود؛ بنابراین، محاسبه مقدار تابع هدف مساله مرکز-میانه نیز در زمان خطی محاسبه می‌گردد.

لم ۹- اگر $A' \subseteq A$ و $f_c(A, s) - f_c(B, s) \geq 0$ آن‌گاه $f_c(A', s) - f_c(B, s) \geq 0$. همچنین اگر $B \subseteq B'$ و $f_c(A, s) - f_c(B, s) \geq 0$ آن‌گاه $f_c(A, s) - f_c(B', s) \geq 0$

برهان: اگر $A' \subseteq A$ ، آن‌گاه

$$f_c(A, s) \leq f_c(A', s).$$

از طرفی، $f_c(A, s) - f_c(B, s) \geq 0$ ، بنابراین

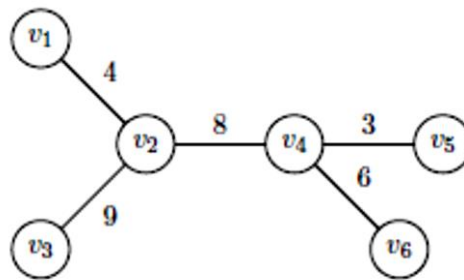
$$f_c(A', s) - f_c(B, s) \geq 0.$$

بنابراین، لازم نیست به ازای هر جفت مسیر A و B ، علامت $f_c(A, s) - f_c(B, s)$ را بررسی کنیم. فقط کافی است A و B را مسیرهایی در نظر بگیریم که هر دو راس انتهایی آن برگ‌های درخت هستند.

لم ۱۰- یک جواب استوار برای مساله مرکز-میانه مسیر با استفاده از معیار مینیماکس پشیمانی روی گراف‌های درختی با وزن‌های راسی بازه‌ای و طول‌های یالی قطعی در زمان اجرای $O(n^5)$ به دست می‌آید.

برهان: به ازای هر جفت مسیر، یک سناریوی بدترین حالت در زمان خطی محاسبه می‌شود. با توجه به این‌که، تعداد جفت راس‌ها برابر با $O(n^4)$ است، زمان اجرای کلی برابر با $O(n^5)$ خواهد بود. بعد از محاسبه سناریوی بدترین حالت، برای هر جفت مسیر، مقدار تابع هدف را محاسبه کرده و مسیر استوار را مسیری با کمترین مقدار تابع هدف در نظر می‌گیریم.

مثال ۱: گراف درختی شکل ۲ را در نظر بگیرید که در آن وزن راس v_1 برابر با بازه $[1,3]$ ، وزن راس v_2 برابر با $[2,4]$ ، وزن راس v_3 برابر با $[4,5]$ و وزن راس v_4 برابر با بازه $[1,2]$ است. همچنین، وزن راس‌های پنجم و ششم به ترتیب برابر با ۳ و ۱ است.



شکل ۲- گراف درختی مثال ۱.

Figure 2- The tree graph of the example 1.

فرض کنید $p_8 = p_7 = [v_1, v_5]$ ، $p_6 = [v_3, v_4]$ ، $p_5 = [v_2, v_4]$ ، $p_4 = [v_2, v_3]$ ، $p_3 = [v_1, v_4]$ ، $p_2 = [v_1, v_3]$ ، $p_1 = [v_1, v_2]$ روی درخت شکل ۲ باشند. گام اول پیدا کردن جواب استوار مساله این است که علامت $f_c(A, s) - f_c(B, s)$ مشخص شود. جدول ۲ علامت این تابع را به ازای تمامی انتخاب‌های ممکن برای جفت مسیرها مشخص می‌کند. برای هر جفت مسیر انتخاب شده، اگر اختلاف تابع هدف متناظر با مساله مرکز روی سناریوی بدترین حالت بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی در جدول ۲ نشان داده شده است. به‌عنوان مثال فرض کنید $A = p_1$ و $B = p_{12}$ باشد. در این صورت، علامت موجود در خانه متناظر با این جفت مسیر در جدول ۲ مثبت خواهد بود. زیرا طبق قضایای ارایه شده؛ خواهیم داشت:

$$f_c(A, s^-) - f_c(B, s^+) = 36 - 12 \geq 0.$$

جدول ۳- سناریوی بدترین حالت متناظر با جفت مسیره‌ها.

Table 3-The worst case scenario according to all pair of paths.

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁₁	P ₁₂	P ₁₃	P ₁₄
P ₁	—	3452	3452	3452	3452	3452	3452	1452	1452	1452	1452	1452	1242	1242
P ₂	3442	—	3442	1452	1442	1452	3442	3442	1442	1442	1452	1452	1242	1242
P ₃	3442	3451	—	1451	1442	1452	3452	3452	1452	1452	1452	1452	1242	1242
P ₄	3442	1451	3441	—	3442	1452	3442	3442	3442	3442	3452	3452	1242	1242
P ₅	3441	3451	3442	1451	—	1452	3452	3452	3452	3452	3452	3452	1242	1242
P ₆	3441	3451	3442	2451	3442	—	3442	3442	3442	3442	3452	3442	1242	1242
P ₇	3451	3451	3452	1452	1452	1452	—	3452	1452	1452	1452	1452	1242	1242
P ₈	3451	3451	3452	1451	1452	1452	3452	—	1452	1452	1452	1452	1242	1242
P ₉	3451	3451	3452	3451	3452	3452	3452	3452	—	3452	3452	3452	1242	1242
P ₁₀	3451	3451	3452	3451	3452	3452	3452	3452	3452	—	3452	3452	1242	1242
P ₁₁	3441	3451	3442	3451	3442	3452	3442	3442	3442	3442	—	3452	1242	1242
P ₁₂	3441	3451	3442	3451	3442	3452	3442	3442	3442	3442	3452	—	1242	1242
P ₁₃	3441	3451	3452	3451	3452	3452	3452	3452	3452	3452	3452	3452	—	3452
P ₁₄	3451	3451	3451	3451			3452	3452	3452	3452	3452	3452	3452	3452
P ₇	3451	3451	3452	1452	1452	1452	—	3452	1452	1452	1452	1452	1242	1242

جدول ۴- مقدار تابع هدف مساله روی سناریوی بدترین حالت متناظر با جفت مسیره‌ها.

Table 4- The value of objective function under the worst case scenario corresponding to all pair of paths.

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁₁	P ₁₂	P ₁₃	P ₁₄
P ₁	—	57	60	45	48	113	57	54	53	44	133*	128	-35	-38
P ₂	-39	—	25	-4	5	68	18	15	14	11	80*	47	-74	-77
P ₃	-32	17	—	13	-4	77	9	6	5	2	89*	86	-83	-86
P ₄	-27	12	21	—	9	72	21	21	8	5	84*	72	-38	-41
P ₅	-28	25	12	16	—	81	21	18	9	6	93*	87	-63	-66
P ₆	-88	-49	-48	-61	-60	—	-39	-42	-51	-54	9*	6	-142	-145
P ₇	-49	8	9	4	-13	68	—	-3	-4	-7	80*	74	-92	-95
P ₈	-46	11	-6	2	-10	71	3	—	-1	-4	83*	77	-89	-92
P ₉	-37	20	3	8	-9	72	12	9	—	-3	84*	78	-88	-91
P ₁₀	-34	31	6	11	-6	75	15	12	3	—	87*	81	-85	-88
P ₁₁	-97	-48	-57	-38	-69	-9	-48	-51	-60	-63	—	-3*	-154	-157
P ₁₂	-94	-55	-54	-67	-66	-6	-45	-48	-57	-60	3*	—	-115	-118
P ₁₃	99	156	149	144	127	205	148	145	142	133	214*	211	—	-3
P ₁₄	112	159	142	179	130	208	236*	233	139	136	217	214	3	—

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مساله مکان‌یابی مرکز-میانه مسیر استوار روی شبکه‌های درختی با وزن‌های راسی غیرقطعی مورد بررسی قرار گرفت. عدم قطعیت استفاده‌شده در این مقاله از نوع بازه‌ای است؛ یعنی وزن هر راس از شبکه درختی متناظر با یک بازه نامنفی از اعداد حقیقی است. روش استفاده‌شده برای محاسبه مسیر استوار معیار مینیماکس پیشمانی است. در این مقاله، یک الگوریتم بازمان اجرای $O(n^5)$ برای محاسبه مسیر استوار ارائه شد.

منابع

- Alstrup, S., Lauridsen, P. W., Sommerlund, P., & Thorup, M. (1997). Finding cores of limited length. *Workshop on algorithms and data structures* (pp. 45-54). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-63307-3_47
- Averbakh, I., & Berman, O. (1999). Algorithms for path medi-centers of a tree. *Computers and operations research*, 26(14), 1395-1409.
- Averbakh, I., & Berman, O. (2000). Algorithms for the robust 1-center problem on a tree. *European journal of operational research*, 123(2), 292-302.
- Averbakh, I., (2001). On the complexity of a class of combinatorial optimization problems with uncertainty. *Mathematical programming*, 90(2), 263-272.
- Balasubramanian, S., Harini, S., & Rangan, C. P. (2009). Core and conditional core path of specified length in special classes of graphs. *International workshop on algorithms and computation* (pp. 262-273). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00202-1_23
- Becker, R. I., Chang, Y. I., & Lari, I. & Scozzari, A. & Storchi, G. (2002a). Finding the 1-core of a tree. *Discrete applied mathematics*, 118(1-2), 25-42. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(85\)80002-0](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(85)80002-0)
- Becker, R. I., Lari, I., Storchi, G., & Scozzari, A. (2002b). Efficient algorithms for finding the (k, l)-core of tree networks. *Networks: an international journal*, 40(4), 208-215.
- Becker, R. I. & Perl, Y. (1985). Finding the two-core of a tree. *Discrete applied mathematics*, 11(2), 103-113. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(85\)80002-0](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(85)80002-0)





- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, 88(3), 411-424. <https://doi.org/10.1007/PL00011380>
- Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1), 35-53. <https://doi.org/10.1287/opre.1030.0065>
- Bhattacharya, B., Hu, Y., Shi, Q., & Tamir, A. (2006). Optimal algorithms for the path, tree-shaped facility location problems in trees. *Algorithmica*, 55(4), 601-618.
- Bhattacharya, B., Shi, Q., & Tamir, A. (2009). Optimal algorithms for the path/tree-shaped facility location problems in trees. *Algorithmica*, 55(4), 601-618.
- Dvir, A., & Segal, M. (2008). The (k, l) coredian tree for ad hoc networks. *2008 the 28th international conference on distributed computing systems workshops* (pp. 267-272). IEEE.
- Ghahremani Nahr, J., & Bathaee, M. (2021). Design of a humanitarian logistics network considering the purchase contract. *Journal of decisions and operations research*, 6(3), 423-444. (In Persian). <https://doi.org/10.22105/dmor.2021.270988.1311>
- Hakimi, S. L., Schmeichel, E. F., & Labbé, M. (1993). On locating path-or tree-shaped facilities on networks. *Networks*, 23(6), 543-555. <https://doi.org/10.1002/net.3230230605>
- Hedetniemi, S. M., Cockayne, E. J., & Hedetniemi, S. T. (1981). Linear algorithms for finding the Jordan center and path center of a tree. *Transportation science*, 15(2), 98-114.
- Hoseinpour, M., & Fakharzadeh Jahromi, A. (2019). The robust optimization model for providing Iranian diet for adjusting optimal glycemic load. *Decisions and operations research*, 4(1), 42-53. (In Persian). DOI: 10.22105/dmor.2019.86128
- Kouchaki Tajani, T., Mohtashami, A., & Amiri, M., & Ehtesham Rasi, R. (In Press). A robust possibilistic programming approach to design a comprehensive blood supply chain based on the ABO-RH index. *Decisions and operations research*. (In Persian). DOI: 10.22105/dmor.2021.254819.1257
- Kouvelis, P., & Yu, G. (1997). *Robust discrete optimization and its applications*. Kluwer academic Publishers, The Netherlands. DOI: 10.1007/97/978-1-4757-2620-6
- Lari, I., Ricca, F., & Scozzari, A. (2008). Comparing different metaheuristic approaches for the median path problem with bounded length. *European journal of operations research*, 190(3), 587-597.
- Lari, I., Ricca, F., Scozzari, A., & Becker, R. I. (2011). Locating median paths on connected outerplanar graphs. *Networks*, 57(3), 294-307.
- Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J., & Zenios, S. A. (1995). Robust optimization of large-scale systems. *Operations research*, 43(2), 264-281. <https://doi.org/10.1287/opre.43.2.264>
- Novik, A. (1996). *Improved algorithms for locating tree or path shaped facilities on a tree network*. Tel-Aviv University.
- Peng, S., & Lo, W. T. (1996). Efficient algorithms for finding a core of a tree with a specified length. *Journal of algorithms*, 20(3), 445-458. <https://doi.org/10.1006/jagm.1996.0022>
- Puerto, J., Ricca, F., & Scozzari, A. (2011). Minimax regret path location on trees. *Networks*, 58(2), 147-158. <https://doi.org/10.1002/net.20453>
- Puerto, J., Ricca, F., & Scozzari, A. (2012). Range minimization problems in path-facility location on trees. *Discrete applied mathematics*, 160(15), 2294-2305.
- Puerto, J., Ricca, F., & Scozzari, A. (2014). Reliability problems in multiple path-shaped facility location on networks. *Discrete optimization*, 12, 61-72.
- Radsar, M., Kazemi, A., & Mehregan, M. (2021). Presenting a robust network data envelopment analysis model with undesirable output to evaluate efficiency in conditions of uncertainty. *Decisions and operations research*. (In Persian). http://www.journal-dmor.ir/article_136612.html
- Richey, M. B. (1990). Optimal location of a path or tree on a network with cycles. *Networks*, 20(4), 391-407. <https://doi.org/10.1002/net.3230200404>
- Slater, P. J. (1982). Locating central paths in a graph. *Transportation science*, 16(1), 1-18. <https://doi.org/10.1287/trsc.16.1.1>
- Soyster, A. L. (1973). Technical note convex programming with set-inclusive constants and applications to inexact linear programming. *Operation research*, 21(5), 1154-1157. <https://doi.org/10.1287/opre.21.5.1154>
- Tamir, A., & Lowe, T. J. (1992). The generalized p-forest problem on a tree network. *Networks*, 22(3), 217-230. <https://doi.org/10.1002/net.3230220302>
- Tamir, A., Puerto, J., Mesa, J. A., & Rodríguez-Chía, A. M. (2005). Conditional location of path and tree shaped facilities on trees. *Journal of algorithms*, 56(1), 50-75.
- Wang, B. F. (1998). Finding a k-tree core and a k-tree center of a tree network in parallel. *IEEE transactions on parallel and distributed systems*, 9(2), 186-191. <https://doi.org/10.1109/71.663884>
- Wang, B. F., & Lin, J. J. (2000). Finding a two-core of a tree in linear time. *International symposium on algorithms and computation* (pp. 467-478). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-40996-3_40
- Wang, B. F., Ye, J. H., & Li, C. Y. (2020). An improved algorithm for the minmax regret path center problem on trees. *Journal of computer and system sciences*, 114, 36-47. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2020.05.002>
- Ye, J. H., Li, C. Y., & Wang, B. F. (2018). An improved algorithm for the minmax regret path centdian problem on trees. *Journal of computer and system sciences*, 97, 94-105. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2018.05.003>
- Yousefi Hanoomarvar, A., Amiri, M., Olfat, L., & Naser Aadrabadi, A. (2021). Designing time-cost-quality trade-off model in multimodal PERT network using simulations and NSGA-II and mopso algorithms. *Journal of decisions and operations research*, 6(2), 146-173. (In Persian). <https://doi.org/10.22105/dmor.2021.265922.1296>