

Paper Type: Original Article



Generalization of Stochastic Mortality Models to Improve Mortality Prediction in Life Insurance and Pension Funds

Shirin Shoaee^{1,*} , Mohammad Mehdi Gholi Keshmarzi¹

¹ Department of Actuarial Science, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran; sh_shoaee@sbu.ac.ir; m.gholikeshtarzi@mail.sbu.ac.ir.

Citation:



Shoaee, Sh., & Gholi Keshmarzi, M. M. (2023). Generalization of stochastic mortality models to improve mortality prediction in life insurance and pension funds. *Journal of decisions and operations research*, 8(2), 352-369.

Received: 29/10/2021

Reviewed: 02/11/2021

Revised: 16/01/2022

Accepted: 24/02/2022

Abstract

Purpose: Mortality is a dynamic process that completes over time and is a fundamental issue in life insurance, pension fund, health insurance, and in general any issue related to financial planning that deals with the longevity of individuals. Therefore, the accuracy of mathematical models in predicting mortality rates is an important challenge. The purpose of this study is to generalize static stochastic mortality models to dynamic stochastic mortality models and to predict mortality rates based on the generalization of stochastic mortality models by the Cox-Ingersoll-Ross (CIR) process and to compare the results with each other.

Methodology: In this research, two suggestions are presented: the first idea is to provide a dynamic correction method to increase the prediction accuracy using the CIR process and the second idea is to examine the out-of-sample validation method.

Findings: In this study, using the out-of-sample validation method, the force of mortality from the best models selected from the two famous mortality model families (Lee-Carter and Cairns, Blake and Dowd (CBD)) is compared with the results of the generalized model. After estimating the parameters of the studied models and calculating the prediction of the mortality rates, by calculating the mean absolute error and root mean squares error of prediction, it is determined that the generalization of stochastic mortality models by the CIR process performs much better than static mortality models. The Bayesian information criterion also indicates that the use of generalized stochastic mortality models is justified.

Originality/Value: In this study, stochastic mortality index models, which include Lee-Carter and Cairns-Blake-Dowd family models, are used and generalized by the CIR process. In this regard, Human Mortality Database (HMD) data is used. But there is no information about our country in this database. Because the French mortality pattern is very close to the Iranian pattern and the life tables of this country (TD 88-90) are used in Iranian insurance applications, the crude death rate of French men in the years 1900-2018 on the ages of 18, 40 and 65 years is used. Using these data and the backtesting method, static mortality models and generalized models with the CIR process are compared.

Keywords: Life insurance, Mortality prediction, Cox-ingersoll-ross process, Stochastic mortality model.

Corresponding Author: sh_shoaee@sbu.ac.ir

 <http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.2.4.8>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



تعمیم مدل‌های مرگومیر تصادفی برای بهبود پیش‌بینی مرگومیر در بیمه‌های زندگی و صندوق‌های بازنشستگی

شیرین شعاعی^۱، محمد مهدی قلی‌کشمیری^۱

^۱گروه علوم بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: مرگومیر یک فرآیند پویا است که با گذشت زمان تکمیل می‌شود و یک مساله اساسی در بیمه‌های عمر، صندوق بازنشستگی، بیمه‌های درمان و به‌طور کلی هر موضوع مرتبط با برنامه‌ریزی مالی که با طول عمر افراد سروکار دارد، است؛ لذا، دقت مدل‌های ریاضی در پیش‌بینی نرخ مرگومیر یک چالش مهم است. هدف از این پژوهش تعمیم مدل‌های مرگومیر تصادفی ایستا به مدل‌های مرگومیر تصادفی پویا و پیش‌بینی نرخ مرگومیر بر اساس تعمیم مدل‌های مرگومیر تصادفی به‌وسیله فرآیند کاکس-اینگرسول-راس (CIR) و مقایسه نتایج با یکدیگر است.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش، دو پیشنهاد ارایه می‌شود: ایده نخست ارایه یک روش اصلاحی پویا برای بالا بردن دقت پیش‌بینی با استفاده از فرآیند CIR و ایده دوم بررسی روش اعتبارسنجی خارج از نمونه است.

یافته‌ها: در این پژوهش با استفاده از روش اعتبارسنجی خارج از نمونه، شدت مرگومیرهای خروجی از بهترین مدل‌های منتخب از دو خانواده مدل مرگومیر معروف (لی-کارتو و کارینز-بلک-داود (CBD)) با نتایج خروجی از مدل تعمیم‌یافته مقایسه می‌گردد. پس از برآورد پارامترهای مدل‌های تحت بررسی و محاسبه مقادیر پیش‌بینی نرخ مرگومیر، به‌وسیله محاسبه معیارهای قدرمطلق میانگین خطا و ریشه میانگین مربعات خطای^۱ پیش‌بینی مشخص می‌شود که تعمیم مدل‌های مرگومیر تصادفی به‌وسیله فرآیند CIR نسبت به مدل‌های مرگومیر ایستا عملکرد بسیار بهتری دارند. هم‌چنین با استفاده از معیار اطلاع‌بیزی^۲ مشخص می‌شود که استفاده از مدل‌های مرگومیر تصادفی تعمیم‌یافته توجیه‌پذیر است.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: در این پژوهش از مدل‌های شاخص مرگومیر تصادفی که شامل مدل‌های خانواده‌های لی-کارتو و کارینز-بلک-داود است، استفاده و به‌وسیله فرآیند CIR تعمیم داده می‌شوند. در این راستا، از داده‌های پایگاه اطلاعات مرگومیر انسانی (HMD) استفاده می‌شود؛ اما اطلاعات مربوط به کشور ما در این پایگاه وجود ندارد. از آن‌جا که الگوی مرگومیر فرانسه به الگوی ایران بسیار نزدیک است و از جدول‌های عمر این کشور (TD 88-90) در کاربردهای بیمه ایران استفاده می‌شود، از نرخ فوت خام مردان فرانسه در سال‌های ۲۰۱۸-۲۰۲۰ بر روی سنین ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سال استفاده می‌شود. با استفاده از این داده‌ها و روش آزمون برگشت‌پذیر مدل‌های مرگومیر ایستا و مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR باهم مقایسه می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: بیمه عمر، پیش‌بینی مرگومیر، فرآیند کاکس-اینگرسول-راس، مدل مرگومیر تصادفی.

۱- مقدمه

دقت مدل‌های ریاضی در پیش‌بینی مرگومیر یک چالش مهم است و پیش‌بینی هرچه دقیق‌تر امید به زندگی تاثیر چشم‌گیری بر سیاست‌گذاری بخش عمده‌ای از اجتماع دارد. یکی از این جنبه‌ها، که باعث ایجاد الگو برای چنین پدیده تصادفی می‌شود، به‌روز سیستماتیک طول عمر در صندوق‌های بیمه عمر و مستمری به‌ویژه در کشورهای صنعتی است. با توجه به پدیده‌های ترکیبی و سیستماتیک

¹ Root Mean Square Error (RMSE)

² The Bayesian Information Criterion (BIC)

* نویسنده مسئول

sh_shoae@sbu.ac.ir

<http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.2.4.8>



و هم چنین افزایش تدریجی امید به زندگی، همراه با کاهش نرخ تولد در کشورهای صنعتی، ثبات و سازگاری سیستم‌های رفاه اجتماعی در سراسر جهان به خطر می‌افتد.

عواقب این دو معضل در چندین حوزه، به‌ویژه در محیط‌های مالی و موثر اقتصادی خردوکلان، موضوعاتی است که بیش از دو دهه موردبررسی قرار گرفته است، خصوصاً در مرحله کنونی و رکود اقتصادی که اقتصاد جهانی به‌شدت کاهش یافته و منابع برای تامین نیازهای افراد در سن بزرگسالی و پیری که به آرامی در حال تبدیل شدن به بخش وسیعی از جمعیت هستند، بسیار تقلیل پیدا کرده است [1].

در این زمینه پیشرفت‌های جدیدی در حوزه مالی و بیمه صورت گرفته است که یکی از راه‌کارهای مقابله با این پدیده افزایش بازارهای انتقال ریسک‌های طول عمر به‌منظور بهتر شدن گسترش این ریسک‌ها است [2]. در این مفهوم بدون شک مدل‌های پیش‌بینی که شامل تغییرات جمعیت‌شناختی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارند. هم‌چنین به‌دلیل پیچیدگی برنامه، ساخت، اجرا و تاثیر سیستم‌های توصیفی تکامل میزان مرگ‌ومیر و نرخ بقا، نیازمند رویکرد دقیق و درعین حال ساده و موثر است.

مدل‌بندی نرخ مرگ‌ومیر پیشینه‌ای طولانی دارد و جدول‌های مرگ‌ومیر برای بیم‌سنگان، یکی از متداول‌ترین و قدیمی‌ترین روش‌های بررسی میزان مرگ‌ومیر و ابزار اصلی توصیف الگوی مرگ‌ومیر تلقی می‌شوند؛ لذا می‌توان گفت که تدوین مدل‌های مرگ‌ومیر از ساختن جدول‌های مرگ‌ومیر آغاز و اولین دستاورد در این زمینه در سال ۱۶۹۳ به‌وسیله ستاره‌شناس مشهور، ادموند هالی که یک جدول عمر براساس تعداد فوتی‌های مشاهده‌شده به‌دست آورد، انجام شده است و هم‌چنین اولین جدول عمر به تفکیک مردان و زنان توسط استرویک در سال ۱۷۴۰ منتشر شده است.

رویکرد جدول مرگ‌ومیر بر این اساس است که آزمایش گذشته بدون هیچ دگرگونی در آینده تکرار شود؛ لذا تلاش‌های بسیاری برای دستیابی به مدلی که بتواند این جدول‌های را تبیین کند، صورت گرفته است. یافتن مدل ریاضی برای احتمال مرگ‌ومیر از نظر کاربردی مفیدتر است. روشن است که استفاده از تابعی که پارامتر کمی دارد و از نظر هندسی دارای منحنی هموارتری است به‌مراتب آسان‌تر از کار کردن با جدول عمری است که پارامترهای فراوانی داشته و در موارد بسیاری نیز احتیاج به درون‌یابی، برون‌یابی، هموارسازی و تعدیل‌های متعدد آماری دیگر، در جهت یافتن احتمال‌های فوت دارد که در محاسبه حق‌بیمه فنی استفاده می‌شوند؛ لذا بیم‌سنگ‌ها علاقه‌مند هستند که مدل مرگ‌ومیری را ارائه دهند که بتواند برای سن‌ها و طول‌عمرهای متفاوت و هم‌چنین اطلاعات متفاوتی که برای افراد در طرح‌های بازنشستگی موجود است، شدت مرگ‌ومیر را محاسبه نماید. اولین مدل تحلیلی مرگ‌ومیر که احتمال بقا را به‌صورت یک تابع افزایشی از سن کنونی فرد در نظر گرفت، توسط دمورآور [3] معرفی شده است؛ اما پس‌از آن گامپرتز [4] در سال ۱۸۲۵ مدل کامل‌تری از مدل دمورآور را ارائه نمود که در این مدل عمده‌تای رابطه مرگ با سن نشان داده می‌شود. از آن‌جا که فرض گامپرتز، در این مدل بدین‌صورت بود که قوای جسمانی انسان با بالا رفتن سن در مقابله با مرگ کاهش می‌یابد، این مدل به‌صورت یک تابع‌نمایی ارائه شده است، به‌طوری‌که نتیجه کار او، بهترین مدل مرگ‌ومیر پارامتری بیان‌شده تا سال ۱۸۶۰ است. در سال ۱۸۶۰ مکهام [5] مدل گامپرتز که برای سنین بالاتر مناسب نبود را اصلاح و مدل کامل‌تری را ارائه نمود. مدل‌های گامپرتز و مکهام ازجمله مدل‌های رایج مرگ‌ومیر باقی ماندند تا این‌که در اوایل قرن بیستم، اقتصاددان و جامعه‌شناس ایتالیایی پارتو نظریات خود را که بر مبنای مطالعه مشکلات جامعه بود در مدل‌بندی مرگ‌ومیر دخیل نمود. پس‌از آن، در اواخر قرن بیستم، مدل‌های مرگ‌ومیر پیچیده‌ای مورد مطالعه قرار گرفتند که اکثر آن‌ها تعدیل‌شده یا تعمیم‌یافته مدل‌های مرگ‌ومیر گامپرتز و مکهام بودند.

اما از سوی دیگر، پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر پیشینه کوتاه‌تری دارد. لازمه پیش‌بینی مرگ‌ومیر، ساخت یک مدل پایه از داده‌ها و گسترش مدل برای پیش‌بینی است. این مدل‌ها ممکن است مجزا از هم باشند یا در یک چهارچوب منفرد یکپارچه شوند. سه عامل سن، دوره و گروه برای طبقه‌بندی مدل پایه به‌صورت صفر، یک، دو یا سه عاملی به‌کار می‌رود. مدل‌های صفر عاملی شامل یک اندازه کلی و یا یک نرخ ویژه سنی است. مدل‌های یک عاملی، نرخ مرگ‌ومیر را به‌عنوان تابعی از سن در نظر می‌گیرند و این مزیت را دارند که الگوهای سنی در طول زمان پایدار می‌مانند. اغلب روش‌های جدید پیش‌بینی مرگ‌ومیر از مدل‌های دو عاملی با دو عامل سن و دوره و یا سن و گروه استفاده می‌کنند. مدل‌های سه عاملی نرخ مرگ‌ومیر را به‌عنوان تابعی از سن، دوره و گروه در نظر می‌گیرند.





انتخاب مدل پایه، ارتباط نزدیکی با تعیین رویکرد و روش خاص پیش‌بینی دارد. این انتخاب به معیارهای متعددی از قبیل دسترس بودن داده‌ها، هدف پیش‌بینی و افق پیش‌بینی بستگی دارد. به‌طورکلی، پیش‌بینی مرگ‌ومیر مبتنی بر سه رویکرد است: رویکرد مبتنی بر تجربه (ذهنی)، رویکرد مبتنی بر برون‌یابی و رویکرد مبتنی بر علت. رویکرد اغلب روش‌های پیش‌بینی مرگ‌ومیر ارائه شده، براساس برون‌یابی است. این روش‌ها از نظم موجود در الگوهای سنی و روندها در طول زمان استفاده می‌کنند. در رویکرد مبتنی بر علت از مدل‌های مرگ‌ومیر ساختاری یا همه‌گیر ناشی از علت‌های مرگ مشخص استفاده می‌شود و متغیرهای برون‌زای کلیدی، شناخته‌شده و قابل اندازه‌گیری هستند. در رویکرد مبتنی بر تجربه، پیش‌بینی صورت گرفته مبتنی بر دیدگاه‌های ذهنی خبرگان است و در نتیجه از درجات مختلف رسمیت برخوردار خواهد بود. روش‌های جدید پیش‌بینی از برون‌یابی سری‌های زمانی استفاده می‌کنند که با توجه به این‌که کم‌ترین قضاوت ذهنی در آن وارد می‌شود، در بیان الگوی داده‌ها دقت بالاتری دارد [6].

روش‌هایی که در گذشته به‌منظور پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر مورد استفاده قرار می‌گرفتند نسبتاً ساده و تا حدودی مبتنی بر سلیقه فردی بودند؛ اما اخیراً روش‌های پیشرفته‌تری در این حوزه ارائه شده است. از آنجایی‌که مرگ‌ومیر انسان‌ها در قرن پیش‌رو بستگی به پیشرفت‌های پزشکی آینده، بیماری‌های عفونی جدید و حتی بلاای طبیعی و انسانی دارد. دقت مدل‌های ریاضی در پیش‌بینی مرگ‌ومیر یک چالش مهم است و پیش‌بینی هرچه دقیق‌تر امید به زندگی تاثیر چشم‌گیری بر سیاست‌گذاری بخش عمده‌ای از اجتماع دارد. یکی از این جنبه‌ها که باعث ایجاد الگوی، چنین پدیده‌ای تصادفی می‌شود، بروز سیستماتیک ریسک طول عمر در صندوق‌های بیمه‌عمر و مستمری به‌ویژه در کشورهای صنعتی است.

روش‌های بسیاری در حوزه پیش‌بینی هموار مرگ‌ومیر ارائه شده است. یکی از مدل‌های مهم برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر، مدل لی-کارتر^۱ است [7]. گرچه این روش براساس داده‌های مرگ‌ومیر ایالات متحده آمریکا و براساس داده‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۸۷ طراحی شده بود اما عملکرد بسیار خوبی در مدل‌بندی و پیش‌بینی بلندمدت نرخ مرگ‌ومیر در بسیاری از کشورهای توسعه‌یافته داشته است. این روش یکی از مدل‌های دوعاملی برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر است و به‌عنوان یک روش برون‌یابی، ترکیبی از یک مدل جمعیت‌شناسی غنی (با کم‌ترین پارامتر) و روش‌های سری زمانی شناخته می‌شود. اگرچه در این روش همانند سایر روش‌های برون‌یابی، اطلاعات پیرامون تاثیرات حاصل از پیشرفت‌های پزشکی، رفتاری یا اجتماعی روی نرخ مرگ‌ومیر لحاظ نمی‌شود، اما به‌دلایل مختلف استفاده از آن بر سایر روش‌های برون‌یابی برتری دارد. شایان‌ذکر است، مدل لی-کارتر علاوه بر نرخ مرگ‌ومیر، برای نرخ شیوع بیماری‌ها نیز به‌کار برده شده است و با استفاده از این ایده متوسط هزینه‌های بیمارستانی-پزشکی مدل‌بندی شده است [8]، [9].

یکی از توسعه‌های مدل لی-کارتر مدل رینشو-هابرمن [10] است. این مدل توسط رینشو و هابرمن [10] ارائه گردید که در حقیقت یک تعمیم برای مدل ارائه‌شده توسط لی و کارتر بود که با اضافه کردن یک اثر هم‌گروهی به آن، مدل جدیدی ارائه شده است. به‌عبارت دیگر، مدل لی-کارتر به یک کلاس گسترده‌تر از مدل‌های عمومی پارامتری، غیرخطی گسترش یافته است و این امکان را فراهم می‌نماید تا مدل‌سازی و برون‌یابی از اثرات گروهی در دوره خاص سن انجام شود [10]. از تعمیم‌های دیگر مدل لی-کارتر مدل کوری [11] است که یک مدل ساده‌تری برای اعمال اثرات مرتبط به یک گروه خاص (هم‌گروهی) از داده‌ها را ارائه می‌دهد. این مدل توسط کوری [12] ارائه شده است و کاربرد بیشتر آن در آمار زیستی می‌باشد و حالت خاصی از مدل رینشو-هابرمن است [10].

ازجمله مدل‌های دیگر برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر مدل کارینز، بلک و داود است. این مدل توسط کارینز و همکاران [12] ارائه شده است. در حقیقت این مدل تعمیمی از مدل ارائه شده توسط پرکز [13] در سال ۱۹۸۲ است. این مدل در متون با عنوان مدل CBD^2 شناخته می‌شود. لازم به‌ذکر است که در این مدل به‌جای نرخ فوت از نرخ مرگ‌ومیر استفاده می‌شود.

از تعمیم‌های مدل CBD مدل وونگ-فوپوی و هابرمن [14] است براساس ایده ارائه‌شده توسط وونگ-فوپوی و هابرمن [14] در سال ۲۰۰۴، حاصل شده است. ویژگی مهم این مدل این است که اثر گروه‌های سنی برای سنین خاص نیز در آن در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین مدل پلت تعمیم دیگری از مدل CBD است که توسط ریچارد پلت [15] در سال ۲۰۰۹ ارائه شده است. مدل تحقیقات مستمر مرگ‌ومیر

¹ Lee-Carter

² Cairns, Blake and Dowd (CBD)



CMI^۱ که توسط مرکز تحقیقات مستمر مرگ‌ومیر CMI که کمیته‌ای از موسسه و فلوشیپ بیم‌سنجان در انگلستان است، در سال ۲۰۰۹ ارائه شده است، تعمیم دیگری از مدل CBD است و در حقیقت در این مدل یک عبارت درجه دوم به اثرات سن اضافه شده است.

اما نکته مهم و قابل تامل این است که پدیده مرگ‌ومیر به شدت تحت تاثیر متغیرهای پویا قرار دارد، در واقع می‌توان این عوامل را به دودسته اقتصادی و بیولوژیکی تقسیم نمود. مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی ایستا ضمن در نظر گرفتن آن‌ها، این نکته را نیز در نظر می‌گیرد که این تاثیرات در طول زمان پایدار هستند. بدین معنا که عوامل فعل و انفعال ریسک‌های زیست‌شناختی و اقتصادی با پدیده مرگ‌ومیر در طول زمان تغییری در ساختار آن‌ها ایجاد نمی‌کند؛ اما تجزیه و تحلیل داده‌های تاریخی نشان می‌دهد که چنین تعاملاتی با گذشت زمان به صورت پویا تکامل می‌یابد. این مورد با مقایسه انحراف‌های داده‌های واقعی با مدل‌های ارائه‌شده نمایش داده شده است و مطالعات زیادی انجام شده که نشان می‌دهد مدل‌های بقا کلاسیک برای نمایش تکامل زندگی در حال حاضر مناسب نیستند، خصوصاً زمانی که در سن‌های پیری و سالمندی مورد استفاده قرار می‌گیرند، برای مشاهده جزئیات بیشتر می‌توان به رویکرد ارائه شده توسط بوث و تیکل [16] مراجعه نمود؛ لذا معرفی و گسترش مدل‌های بقا که اخیراً مطرح می‌شوند و روزبه‌روز در حال گسترش هستند، سهم زیادی در ادبیات جمعیت‌شناختی و بیم‌سنجی دارند [17].

ایده کلیدی و اصلی در این پژوهش استفاده از این انحرافات با در نظر گرفتن اطلاعات اضافی مفید دیگر برای پیش‌بینی پویایی مدل و به تبع آن افزایش دقت در پیش‌بینی مرگ‌ومیر است. هم‌چنین همان‌طور که اشاره شد در حوزه مرگ‌ومیر مقاله‌های زیادی ارائه شده است که هر یک روش خاصی را برای داده‌های خاصی مورد بررسی قرار می‌دهند. در پژوهش حاضر سعی شده است ابتدا با اعمال پویایی در مدل و سپس با استفاده از روش اعتبارسنجی خارج از نمونه در مدل‌های مرگ‌ومیر که ابتدا توسط کارینز و همکاران [12] ارائه گردید به بررسی برتری الگوی مدل جدید با مدل‌های تصادفی مرگ‌ومیر ایستا که این رویکرد را مدنظر قرار نمی‌دهد، پرداخته شود. به عبارتی دیگر، در این پژوهش مدل‌های ایستا به مدل‌های پویا تعمیم داده می‌شوند. برای این منظور ابتدا یک روش جدید ارائه می‌شود که دقت مدل‌های پیش‌بینی مرگ‌ومیر را افزایش دهد. همان‌طور که اشاره شد، هدف این پژوهش افزایش اعتبار مدل‌های مرگ‌ومیر برای به دست آوردن داده‌های واقعی و استخراج اطلاعات و برون‌یابی درست آن‌ها است. در این روش برای بهبود ساختار و تصحیح خطای پیش‌بینی توسط مدل‌های اولیه، مدل‌های معمول ایستا را با فرآیند CIR که در سال ۱۹۸۵ توسط کاکس و همکاران [18] ارائه شده است، ادغام می‌نماییم.

در این پژوهش برای پیاده‌سازی و بررسی اهداف بعد از بیان مقدمه در بخش ۲ چارچوب ریاضی این مدل شرح داده می‌شود. در بخش ۳ ابتدا به مرور کلی و مختصر از فرآیند CIR و ویژگی‌ها و خواص آن، نحوه شبیه‌سازی فرآیند و نحوه برآورد پارامترهای آن پرداخته می‌شود. در بخش ۴ روش تجربی پیاده‌سازی در این مطالعه، یعنی تکنیک‌های به‌کار رفته برای کالیبراسیون و آزمون برگشت مدل‌ها ارائه و مورد بحث قرار داده می‌شوند و هم‌چنین داده‌های مورد استفاده در مطالعه عددی توصیف می‌شوند. معیارهای ارزیابی و مقایسه مدل‌ها در بخش ۵ و تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی در بخش ۶ ارائه می‌شود و به وسیله ارزیابی آماری و گرافیکی مدل‌های تصادفی ایستا و مدل‌های تصادفی پویا (مدل‌های تصادفی ایستا که با فرآیند CIR ادغام شده‌اند) با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در نهایت در بخش ۷ نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲- چارچوب ریاضی

۲-۱- علایم

نرخ فوت آنی به‌عنوان شدت مرگ‌ومیر^۲ در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین، بیانگر احتمال این است که یک فرد x ساله در زمان t قبل از $x + \Delta x$ فوت نماید؛ لذا شدت مرگ‌ومیر $\mu_{x,t}$ مربوط به این فرد را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود [19]:

$$\mu_{x,t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x q_{x,t}}{\Delta x} \quad (1)$$

حال اگر Δx بسیار کوچک باشد، تساوی بالا را می‌توان به فرم زیر بازنویسی نمود:

¹ Continuous Mortality Investigation (CMI)
² Force of mortality



$$\Delta x q_{x,t} \cong \mu_{x,t} \Delta x, \quad (2)$$

سمت راست رابطه فوق را می‌توان به‌عنوان یک احتمال تفسیر نمود. معمولاً فرض بر این است که در هر سال و سن، مقدار $\mu_{x,t}$ ثابت است، بدین مفهوم که دو مقدار k و h به‌گونه‌ای لحاظ می‌شوند که $x+k$ و $t+h$ اعداد غیر صحیح^۱ شوند، و شدت مرگ‌ومیر به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{x+k,t+h} = \mu_{x,t}, \quad t, h \in (0,1). \quad (3)$$

داده‌های ماتریس مربوط به افراد زنده و فوت‌شده (ماتریس در معرض ریسک) از دو نماد تشکیل می‌شود: اولین نماد تعداد افراد فوت‌شده در سن x در زمان t که توسط $d_{x,t}$ نمایش داده می‌شود و دومین نماد تشکیل‌دهنده ریسک در معرض خطر^۲ $E_{x,t}^c$ است و دامنه تغییرات x از صفر تا سنین حدی و t بیانگر زمان تقویمی است [11]. فرض می‌شود که ریسک در معرض خطر به‌صورت ریسک در معرض خطر مرکزی^۳ یعنی متوسط تعداد افراد زنده در سن x و در زمان t باشد. تحت فرض رابطه (۳) برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\mu_{x,t}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\mu}_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}^c} = \hat{m}_{x,t}, \quad (4)$$

که $\hat{m}_{x,t}$ بیانگر نرخ مرگ‌ومیر خام در سن x در سال تقویمی t است [19].

۲-۲- ایده کلیدی

پدیده مرگ‌ومیر به‌شدت تحت تاثیر متغیرهای پویا قرار دارد، در واقع می‌توان این عوامل را به دو دسته اقتصادی و بیولوژیکی تقسیم نمود. مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی ضمن در نظر گرفتن آن‌ها، این نکته را نیز در نظر می‌گیرد که این تاثیرات در طول زمان پایدار هستند. بدین معنا که عوامل فعل‌وانفعال ریسک‌های زیست‌شناختی و اقتصادی با پدیده مرگ‌ومیر در طول زمان تغییری در ساختار آن‌ها ایجاد نمی‌کند.

تجزیه و تحلیل داده‌های تاریخی نشان می‌دهد که چنین تعاملاتی با گذشت زمان به‌صورت پویا تکامل می‌یابد. این مورد با مقایسه انحراف‌های داده‌های واقعی با مدل‌های ارایه‌شده نمایش داده شده است. ایده کلیدی استفاده از این انحرافات با در نظر گرفتن اطلاعات اضافی مفید دیگر برای پیش‌بینی پویای مدل است؛ لذا نرخ دقیقی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Y_{x,t} = \frac{B_{x,t}}{\mu_{x,t}}, \quad (5)$$

که $B_{x,t}$ نرخ فوت مرکزی مشاهده‌شده و $\mu_{x,t}$ شدت مرگ‌ومیر پایه ارایه‌شده توسط مدل مرگ‌ومیر انتخابی است، دقیقاً همانند مطلبی که در مقاله دی لورنزو و همکاران [20] معرفی شده است. در ادامه نرخ $Y_{x,t}$ را به‌عنوان متغیر هدف در فرآیند تصادفی CIR تعریف می‌کنیم و براساس آن پارامترهای فرآیند تصادفی CIR برآورد می‌شوند. براساس پارامترهای برآورد شده برای هر سن و سال $\gamma_{x,t}$ آینده پیش‌بینی می‌شوند و در نهایت $\gamma_{x,t}$ S پیش‌بینی شده در شدت مرگ‌ومیرهای آینده ضرب و مقادیر جدید محاسبه می‌شوند. هم‌چنین بایستی مفاهیم پایه و ویژگی‌های زیر مدنظر قرار داده شوند:

۱. شدت مرگ‌ومیر و نرخ فوت مرکزی تصادفی به‌صورت $\mu_{x,t} = m_{x,t}$ در نظر گرفته می‌شوند.
۲. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\mu}_{x,t}$ برای شدت مرگ‌ومیر $\mu_{x,t}$ برابر با نرخ فوت خام $\hat{m}_{x,t}$ در سن x و سال تقویمی t است [19].
۳. نرخ مرگ‌ومیر از رابطه $q_{x,t} = [1 - \exp(-\mu_{x,t})] = [1 - \exp(-m_{x,t})]$ برآورد می‌شود.

۳- فرآیند تصادفی CIR

در این بخش ابتدا به‌مرور کلی و مختصر فرآیند CIR پرداخته می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، یک مدل زمان پیوسته معمولاً به یک یا چند فرآیند انتشار^۴ ثابت $X_t, t > 0$ بستگی دارد که رابطه پویا زیر را می‌توان به‌صورت کلی برای تمامی فرآیندهای مشابه بیان نمود [18]:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

¹ Non-integer

⁴ Diffusion

² Exposed to risk

³ Central exposed to risk

که $\{W_t, t > 0\}$ حرکت براونی^۱ استاندارد و توابع μ و σ به ترتیب به عنوان رانش و توابع انتشار فرآیند هستند. فرآیند ریشه مربعات توسط معادله دیفرانسیل زیر بیان می شود:

$$dY_t = \alpha(\beta - Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t}dW_t,$$

که Y_t نرخ و $\theta \equiv (\alpha, \beta, \sigma)$ پارامترهای مدل هستند. تابع رانش $\beta(r_t, \theta) = \alpha(\beta - r_t)$ مانند یک مدل خطی که دارای یک خاصیت بازگشت به میانگین است، می باشد، بدین معنی که نرخ Y_t در جهت میانگین β با سرعت α کشیده می شود. هم چنین تابع انتشار $\sigma^2(r_t, \theta) = r_t\sigma^2$ متناسب با نرخ است و تضمین می کند روند در یک حوزه مثبت باقی بماند.

۳-۱- فرآیند CIR مورد استفاده برای مدل سازی مرگ و میر

در این ادامه، تئوری ساختار نرخ بهره که توسط کاکس و همکاران [21] در سال ۱۹۸۵ ارائه شده است، در این قسمت در مورد متغیر $Y_{x^f, t}$ ، به کار گرفته می شود. برای یک سن ثابت x^f ، ایده پویایی در طول زمان برای $Y_{x^f, t}$ به عنوان یک فرآیند CIR مدل سازی می گردد، که توسط معادله دیفرانسیل زیر نمایش داده می شود:

$$dY_{x^f, t} = \alpha(\beta - Y_{x^f, t})dt + \sigma\sqrt{Y_{x^f, t}}dW_t. \quad (6)$$

که α و β مرتبط با یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول پیوسته (زمانی که متغیر وابسته با مقدارهایی از خودش (با در نظر گرفتن مقدار تاخیر مناسب) تشکیل یک مدل خطی دهد، مدل را اتورگرسیون (Autoregressive) می نامند) می باشند که متغیر تصادفی $Y_{x^f, t}$ به سمت میانگین بلندمدت β با سرعت α کشیده می شود. اگر نقطه شروع $Y_{x^f, t}$ غیر منفی باشد و ضرایب دارای شرط زیر باشند:

$$2\alpha\beta \geq \sigma^2. \quad (7)$$

در این صورت $Y_{x^f, t}$ هرگز منفی نمی شود. با توجه به تابع چگالی احتمال $Y(x)$ در زمان t مشروط به مقدار آن در زمان فعلی s که $s < t$ است، مقدار مورد انتظار آن به صورت زیر حاصل می شود (به رابطه (۱۹) در مقاله [18] مراجعه شود):

$$(Y_{x, t} | Y_{x, s}) = Y_{x, s} \exp(-\alpha(t-s)) + \beta(1 - \exp(-\alpha(t-s))). \quad (8)$$

۳-۲- قانون انتقال $Y_{x^f, t}$

حال اگر α, β, σ همگی مثبت در نظر گرفته شوند و نیز شرط $2\alpha\beta \geq \sigma^2$ در این فرآیند برقرار باشد به آن حالت پایدار^۲ می گویند و تابع چگالی حاشیه ای^۳ آن به صورت توزیع گاما است. برآورد ماکسیمم درست نمایی برای بردار پارامتر $\theta \equiv (\alpha, \beta, \sigma)$ نیازمند لحاظ کردن یک سری پارامتر انتقال است. فرآیند CIR یکی از موارد محدود در بین فرآیندهای انتشار است، که در آن تابع چگالی انتقال دارای یک فرم بسته است. بر اساس رابطه (۳) در مقاله [22]، تابع چگالی Y_{x^f} در زمان t مشروط به مقدار آن در زمان s به صورت زیر است:

$$(Y_{x, t} | Y_{x, s}) = Y_{x, s} \exp(-\alpha(t-s)) + \beta(1 - \exp(-\alpha(t-s))), \quad (9)$$

که در رابطه فوق:

$$c = \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-s)}), \quad u = cY_{x^f, s}e^{-\alpha(t-s)}, \quad v = cY_{x^f, t}, \quad q = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} - 1.$$

و $I_q(0)$ تابع بسل اصلاح شده از نوع اول با مرتبه q است. بر اساس رویکرد ارائه شده در مقاله [23]، قانون انتقال $Y_{x^f, t}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Y_{x^f, t} = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-s)})}{4\alpha} \chi_d'^2 \left(\frac{4\alpha e^{-\alpha(t-s)}}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-s)})} Y_{x^f, s} \right). \quad (10)$$

که $\chi_d'^2$ بیانگر توزیع کای-دو غیر مرکزی^۴ با درجه آزادی^۵ $d = 2q + 2$ و پارامتر غیر مرکزی λ است. حال با تعریف $w = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-s)})}{4\alpha}$ به شرط $Y_{x^f, s}$ ، متغیر $Y_{x^f, t}$ به صورت w برابر یک متغیر تصادفی کای-دو غیر مرکزی توزیع می شود.

¹ Brownie motion

² Steady state

³ The marginal density

⁴ Modified bessel function of the first kind of order q

⁵ Noncentral chi-square distribution

⁶ Degrees of freedom



تابع درست‌نمایی برای سری زمانی با N مشاهده با فاصله‌های مساوی $\{Y_{x^f,t_i}; i = 1, \dots, N\}$ با گام زمانی Δt ، به صورت زیر است [22]:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{N-1} f(Y_{x^f,t_{i+1}} | Y_{x^f,t_i}; \theta, \Delta t). \quad (11)$$

و لذا تابع لگاریتم درست‌نمایی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln f(Y_{x^f,t_{i+1}} | Y_{x^f,t_i}; \theta, \Delta t). \quad (12)$$

با توجه به رابطه (۹) تابع لگاریتم درست‌نمایی برای تابع چگالی فرآیند CIR با توجه به رابطه بالا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ln L(\theta) = (N-1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} \left[-u_{t_i} - v_{t_{i+1}} + 0.5q \ln \frac{v_{t_{i+1}}}{u_{t_i}} + \ln I_q \left(2\sqrt{u_{t_i} v_{t_{i+1}}} \right) \right]. \quad (13)$$

در این رابطه $v_{t_{i+1}} = cY_{x^f,t_{i+1}}$ و $u_{t_i} = cY_{x^f,t_i} e^{-\alpha \Delta t}$ است.

۳-۴- کالیبره کردن^۱ فرآیند CIR

بعد از ساختن تابع لگاریتم درست‌نمایی مطابق با رابطه (۱۳)، باید پارامترهای مدل که با بردار $\theta \equiv (\alpha, \beta, \sigma)$ مشخص می‌شوند برآورد شوند، به صورتی که تابع درست‌نمایی در ماکسیم‌ترین حالت خود قرار گیرد. ذکر این نکته حایز اهمیت است که باید چند تابع هدف ایجاد شود و ماکسیم آن‌ها را به صورت زیر محاسبه شود [22]:

$$\hat{\theta} \equiv (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{\theta} L(\theta), \quad (14)$$

که معادل مینیم کردن منفی تابع لگاریتم درست‌نمایی است، در این صورت خواهیم داشت:

$$\hat{\theta} \equiv (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}) = \arg \min_{\theta} -\ln L(\theta). \quad (15)$$

شایان ذکر است که پارامترهای برآورد شده باید شرایطی را داشته باشند که در بخش‌های قبل به آن‌ها اشاره شد. این بهینه‌سازی با استفاده از تابع $fminsearch$ در نرم‌افزار *MATLAB* و جستجوی مینیمم تابع هدف بدون محدودیت، انجام می‌شود و تایید می‌گردد که پارامترهای ارائه شده توسط کالیبراسیون همگی مثبت هستند و شرط رابطه (۷) همیشه باید برآورده شود؛ لذا، ابتدا با روشی که در مقاله [22] پیشنهاد شده است برآورد اولیه θ را پیدا نموده و به عنوان نقطه شروع بهینه‌سازی استفاده می‌شود. برای هر سن مورد مطالعه، ورودی‌های بهینه‌سازی به صورت زیر خواهند بود:

۱. سری زمانی $Y_{x^f,t}$ بر روی پنجره پسر، که فرآیند CIR تولیدی از آن باید کالیبره شود.
۲. گام زمانی برابر با یک تنظیم شده است؛ زیرا، سری زمانی $Y_{x^f,t}$ با نرخ مرگ و میر مرکزی سالانه لحاظ می‌شود.

۳-۵- شبیه‌سازی توسط فرآیند CIR

برای شبیه‌سازی فرآیند CIR، باید با استفاده از رابطه (۱۰) و نمونه‌گیری از یک توزیع کای-دو غیرمرکزی با درجه آزادی d و پارامتر غیرمرکزی λ صورت گیرد. به طور خاص، با توجه به رویکرد ارائه شده در مقاله [23]، زمانی که $d > 1$ نمونه‌گیری از یک توزیع کای-دو غیرمرکزی می‌تواند از طریق نمونه‌گیری از یک توزیع کای-دو معمولی با توزیع χ_{d-1}^2 و یک متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد با متغیر Z از طریق رابطه زیر انجام شود:

$$\chi_d^2 = (Z + \sqrt{\lambda})^2 + \chi_{d-1}^2. \quad (16)$$

در روش تجربی مورد مطالعه در این پژوهش d همیشه بزرگ‌تر از یک است؛ بنابراین، برای تمام حالت‌ها، شبیه‌سازی حالت انتشار با استفاده از رابطه (۱۰) و رابطه (۱۶) انجام می‌شود [23].



¹ Calibration

دلیل انتخاب فرآیند CIR برای مدل سازی $Y_{x,t}$ ، خصوصیات تجربی این فرآیند و قابلیت انعطاف پذیری محاسباتی آن است. در واقع در صورت تحقق شرط ارایه شده در رابطه (۷)، نکته نخست این است که این مقادیر هرگز منفی نمی شوند و اگر مقادیر به سمت صفر بروند متعاقباً مثبت می شوند (این ویژگی خوبی برای مقادیر $Y_{x,t}$ است چون طبق تعریف مقادیر نرخ مرگ و میر هیچ گاه منفی نمی شوند) و دوم یک تابع چگالی پایدار برای $Y_{x,t}$ خواهیم داشت. دو معنای متفاوت از فرآیند $Y_{x,t}$ در این پژوهش به شرح زیر است:

به عنوان یک عامل تصحیح: در این رویکرد به ضرب زیر منجر می شود:

$$\bar{B}_{x,t} = \bar{Y}_{x,t} \bar{\mu}_{x,t} \quad (17)$$

که $\bar{Y}_{x,t}$ مقادیر فرآیند CIR و $\bar{\mu}_{x,t}$ شدت مرگ و میر است. برای ساخت مقادیر پیش بینی شده $\bar{B}_{x,t}$ ، از مدل مرگ و میر انتخابی استفاده می شود. خروجی های $\mu_{x,t}$ به سادگی با ضرب کردن در فرآیند CIR که در رابطه (۶) بیان شده اند، اصلاح می شوند و نتیجه آن ضرایب اصلاح شده است؛ بنابراین، می توان خطاهای درون نمونه ای^۱ را برای مدل های بقا احتمالی که بیش برآوردی یا کم برآوردی دارند، با این روش مدل سازی اصلاح نمود. برای انجام این کار، لازم است که $Y_{x,t}$ از طریق یک روند مثبت و بازگشت به میانگین، مدل شود. این دو ویژگی را فرآیند CIR دارد، بر خلاف مدل های دیگر که از روند منفی جلوگیری نمی کند. میانگین بهینه بلندمدت β و سرعت α ، حاصل کالیبره شدن فرآیند CIR، اطلاعات مفیدی درباره پویایی $Y_{x,t}$ در افق زمانی مشاهده را ارایه می دهد. علاوه بر این، مبنای اصلی برای تنظیم افق زمان پیش بینی، از طریق ضریب تصحیح $\bar{Y}_{x,t}$ صورت می گیرد و همان طور که قبلاً بیان شد فرم بسته ای برای تابع چگالی احتمال در زمان t مشروط به مقدار آن در زمان فعلی S ، برای برخی $t < S$ ، و برای مقادیر امید ریاضی و واریانس وجود دارد؛ لذا، این امکان فراهم است که با توجه به فرآیند CIR بهترین برآورد برای $\bar{Y}_{x,t}$ در هر سن x و زمان t به وسیله امید ریاضی شرطی برای $Y_{x,t}$ همانند رابطه (۸) به دست آورده شود.

به عنوان یک معیار مدل مرگ و میر: به طور خلاصه، وقتی کالیبره شدن فرآیند CIR در رابطه (۶) مقدار بهینه میانگین بلندمدت β را نزدیک به ۱ ارایه می دهد، با اطمینان از کالیبره شدن تجربی، می توان بلافاصله استنباط نمود که مدل مرگ و میر انتخاب شده دارای عملکرد برازش بسیار خوبی است؛ بنابراین، اختلاف کمی در میزان مرگ و میر برازش داده شده و مقدار فوت واقعی وجود دارد که باید در آینده اصلاح شود. در حقیقت، دقت پیش بینی به دست آمده در ازای اعمال نمودن تعداد اضافی پارامترها کافی نیست.

۷-۳- مدل های مرگ و میر مورد بررسی

در این مقاله برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی از بهترین مدل ها از مجموعه مدل های مرگ و میر تصادفی معروف که شامل خانواده مدل های لی-کارت (شامل مدل لی-کارت، رینشو و هابرمن و کوری) و خانواده مدل های کارینز، بلک و داود (شامل: مدل کارینز، بلک و داود (CBD))، مدل پلت، مدل تحقیقات مستمر مرگ و میر CMI و مدل وونگ-فوپوی و هابرمن) است، استفاده می شود. شایان ذکر است ارزیابی و انتخاب مدل های بهینه در این دو خانواده از مدل های مرگ و میر تصادفی به طور گسترده در مقاله [24] بررسی و به طور گسترده شرح داده شده است. هم چنین در این بررسی فقط از شدت مرگ و میر به دست آمده توسط مدل های رینشو و هابرمن و پلت برای سه سن ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سالگی استفاده شده است (زیرا در مقاله [24] مشاهده شده است که این دو مدل عملکرد بهتری در پیش بینی شدت مرگ و میر در این سنین داشته اند). در حقیقت هدف از استفاده این مدل ها، کم کردن خطاهای موجود در این مدل ها با استفاده از فرآیند CIR است.

¹ In-sample errors





در این پژوهش به صورت تجربی عملکرد مدل‌ها در پیش‌بینی نرخ فوت مرکزی آزمون می‌شوند. در این قسمت هریک از مدل‌ها به تنهایی و هم‌چنین زمانی که این مدل‌ها توسط فرآیند CIR اصلاح شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای این منظور پیش‌بینی‌های مدل مرگ‌ومیر تعمیم‌یافته پیشنهادی با موارد واقعی مقایسه و از روش آزمون برگشت‌پذیر^۱ استفاده می‌شود. در ادامه تحلیل داده‌ها ابتدا نمونه داده‌های قابل اطمینان مرگ‌ومیر به دو بازه زمانی تقسیم می‌شود و از مجموعه داده‌های مربوطه به صورت زیر استفاده می‌گردد:

۱. در ابتدا $\mu_{x,t}$ را از مدل مرگ‌ومیر انتخاب و سپس پارامترهای فرآیند CIR تولیدی از ضرایب $\gamma_{x,t}$ کالیبره می‌شوند. (پنجره پسرو^۲).
 ۲. برای تخمین میزان دقیق پیش‌بینی تولیدشده توسط مدل، از روش اعتبارسنجی خارج از نمونه با یا بدون تصحیح استفاده می‌گردد. (پنجره پیشرو^۳).
- استفاده از این روش این امکان را فراهم می‌سازد که مدل با داده‌هایی که قبلاً هرگز مشاهده نشده بودند، آزمایش شوند. همان‌طور که اشاره شد از چنین مدل‌هایی برای پیش‌بینی پیشرفت مرگ‌ومیر در آینده استفاده خواهد شد. نرخ مرگ‌ومیر مرکزی تاریخی را به‌عنوان متغیر هدف انتخاب کرده تا در پیش‌بینی‌ها برازش داده شده و آزمایش شوند. در بخش‌های بعدی جداگانه طی دو بازه زمانی مختلف، عملیات کالیبره کردن مدل و آزمون‌های برگشت‌پذیر انجام می‌پذیرد.
- هدف از این رویکرد افزایش عملکرد مدل‌های مرگ‌ومیر و نزدیک کردن رفتار آن‌ها به روند واقعی پدیده مرگ‌ومیر است. برای نایل شدن به این رویکرد سه مورد زیر را انجام می‌پذیرد:

۱. از طریق داده‌هایی که در یک افق زمانی مشاهده شده‌اند، ضریب بین نرخ فوت مرکزی مشاهده شده و مقادیر برازش داده شده به دست آمده به‌عنوان خروجی مدل مرگ‌ومیر انتخاب می‌شود و مدل به صورت پویا، با استفاده از فرآیند تصادفی CIR که بازگشت به میانگین پویا را برای این کمیت فراهم می‌کند، ایجاد می‌شود.
۲. در افق زمانی پیش‌بینی، این روش منجر به راه‌حل کلی برای اصلاح کردن مدل انتخابی از طریق روش ضرب می‌شود.
۳. برای بررسی آزمون تجربی این روش، روش‌های آزمون برگشت‌پذیر طراحی می‌شوند که هر دو تجزیه و تحلیل ایستا و پویا را ترکیب می‌کند. کاربرد کلی و اعتبار این رویکرد عددی را می‌توان بر روی هر مدل مرگ‌ومیر آزمایش نمود، به شرط آن‌که بتوان خطاها را به‌عنوان یک فرآیند CIR مدل‌سازی نمود.

۴-۲- تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی

در تمامی کشورها سرشماری هر چند سال یک‌بار صورت می‌گیرد اما برای تهیه جدول، این نوع از داده به دلیل مداوم نبودن مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. گام اول برای تهیه داده‌ها، استفاده از روش دقیق و کارآمد در جمع‌آوری این اطلاعات است. بانک اطلاعاتی مرگ‌ومیر^۴ با همکاری موسسه برکلی در دانشگاه کالیفرنیا در کشور ایالات متحده و موسسه تحقیقاتی دموگرافیک در آلمان تاسیس شده است [25]. این موسسه با استفاده از روش ویلموث که در سال ۲۰۰۲ ارایه شد، شروع به جمع‌آوری داده‌های مرگ‌ومیر نموده است. این بانک اطلاعاتی شامل داده‌های مرگ‌ومیر کشورهایی است که توانایی ثبت فوت و داده‌های سرشماری را دارند و اکثر کشورهای توسعه‌یافته در این بانک اطلاعاتی سهیم هستند و تاکنون اطلاعات مربوط به ۵۱ کشور در این بانک اطلاعاتی بارگذاری شده است. متأسفانه داده‌های مربوط به کشور ایران در این بانک اطلاعاتی بارگذاری نشده است و داده‌های سازمان ثبت احوال کشور با وجود ثبت تعداد افراد فوت شده به تفکیک هر سن و سال، در گزارش دقیق اطلاع‌ها با مشکلاتی مواجه است به‌صورتی که در بسیار از شهرهای کوچک و روستاها به علت نبود سیستم نظارتی، فوت کودکان زیر یک سال به‌طور دقیق ثبت نمی‌شود؛ بنابراین، با توجه به اطلاعات در دسترس، امکان مدل‌بندی و پیش‌بینی دقیق نرخ مرگ‌ومیر در ایران وجود ندارد و این امر نیازمند به تعریف یک بانک اطلاعاتی قوی و جامع در ایران است؛ بنابراین، چون در بین تمامی کشورها، الگوی مرگ‌ومیر فرانسه به الگوی ایران بسیار نزدیک است و امروزه از جدول‌های عمر این کشور در کاربردهای بیمه ایران استفاده

¹ Backtesting procedure

³ Look-forward window

² Look-back window

⁴ Human Mortality Database (HMD)



می‌شود (جدول توصیه‌شده بیمه مرکزی ایران-موضوع بند الف ماده آیین‌نامه بیمه‌های زندگی و مستمری)؛ لذا، در این پژوهش با استفاده از بانک اطلاعاتی مرگ‌ومیر از نرخ فوت خام مردان فرانسه در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۲۰۱۸ بر روی سنین ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سال جهت برآزش و پیش‌بینی استفاده می‌کنیم. مطالعات و بررسی‌های بسیاری بر مبنای نرخ‌های مرگ‌ومیر ارائه شده در این جدول (جدول TD 88-90 کشور فرانسه) صورت گرفته و یا نرخ‌های محاسبه‌شده با سایر رویکردها و روش‌های پیشنهادشده با این جدول مقایسه شده‌اند. برای مشاهده جزئیات بیشتر به [26]، [27] می‌توان مراجعه نمود.

برای کار با داده‌ها، ابتدا داده‌های مرگ‌ومیر را به دو پنجره پیش‌رو و پس‌رو تقسیم نموده که پنجره پس‌رو شامل سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۸۰ است و پنجره پیش‌رو شامل سال‌های ۱۹۸۰ تا ۲۰۱۸ است. ابتدا مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی موردنظر روی پنجره پس‌رو داده‌ها پیاده‌سازی شده، به‌صورتی که بهترین برآزش با استفاده از مدل روی این پنجره از داده‌ها اتفاق افتد و سپس به پیش‌بینی با استفاده از پنجره پیش‌رو پرداخته می‌شود که آیا این پیش‌بینی‌ها عملکرد مناسبی را با توجه به نرخ فوت خام مشاهده‌شده دارند یا خیر؟

۴-۳- پنجره پس‌رو: کالیبره کردن مدل

در پنجره پس‌رو مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی بر روی داده‌ها برآزش داده می‌شوند. با توجه به این که مدل‌های موردبررسی متعلق به خانواده مدل‌های سن، دوره و هم‌گروهی هستند، با تمرکز روی نرخ مرگ‌ومیر یک‌ساله $q_{x,t}$ برای برآورد پارامترها، از روش ماکسیمم‌سازی تابع لگاریتم درست‌نمایی پایه با فرض این که تعداد تصادفی فوتی‌ها $D_{x,t}$ ، مستقل از هم و دارای توزیع دو جمله‌ای به صورت رابطه (۱۸) هستند، استفاده می‌شود.

$$D_{x,t} \sim B(E_{x,t}^0, q_{x,t}). \quad (18)$$

در این راستا، با ورودی‌های اولیه $d_{x,t}$ و $E_{x,t}^0$ و با $x = 18, \dots, 90$ و $t = 1900, \dots, 1980$ کار شروع می‌شود [۱۹]. با توجه به گزینه‌های زیر در مورد ویژگی‌های مدل که شامل ۱- یک تابع پیوند لجیت، ۲- دستورالعمل پیش‌بینی در مدل‌ها، و ۳- یک مجموعه خالی از محدودیت‌های پارامترها، هستند، نرخ‌های مرگ‌ومیر برآزش داده‌شده $\hat{q}_{x,t}$ در ازای مقادیر $x = 18, \dots, 90$ و $t = 1900, \dots, 1980$ به‌عنوان خروجی‌ها به‌دست آمده آورده می‌شوند که به‌وسیله آن‌ها می‌توان $\hat{m}_{x,t}$ را به‌دست آورد. همان‌طور که اشاره شد، تمرکز بر روی سه سن اصلی ۱۸، ۴۰ و ۶۵ ساله است، زیرا این محدوده سنی در هنگام قیمت‌گذاری محصولات بیمه بلندمدت مانند سنوات عمر و اوراق قرضه بلندمدت بسیار موردعلاقه شرکت‌های بیمه‌ای و صندوق‌های بازنشستگی هستند. پس از تعیین سن x^f ، با محاسبه نسبت‌های بین نرخ مرگ‌ومیر خام مشاهده‌شده $B_{x^f,t}$ ، موارد برآزش داده‌شده $\hat{m}_{x^f,t}$ ، سری زمانی $Y_{x^f,t}$ برطبق رابطه (۵) به‌دست آورده می‌شود. بردار پارامترهای فرآیند CIR توسط ماکسیمم کردن تابع لگاریتم درست‌نمایی $\ln L(\theta)$ صورت می‌گیرد، براساس ساختار تابع چگالی احتمال فرآیند CIR، از تابع $fminsearch$ در نرم‌افزار متلب برای مینیمم کردن $-\ln L(\theta)$ استفاده می‌شود.

۴-۴- پنجره پیش‌رو: پیش‌بینی

در این قسمت به بررسی روش‌های پیش‌بینی پرداخته می‌شود. با بهره‌گیری از نتایج برآزش مدل که در بخش قبل توضیح داده شد، تابع پیش‌بینی، یک ماتریس با پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر مرکزی $(\hat{q}_{x,t})$ با تاریخ $t = 1980, \dots, 2018$ را نمایش می‌دهد که از آن برای پیش‌بینی مربوط به نرخ فوت $(\hat{m}_{x,t})$ استفاده می‌شود. راحت‌ترین روش برای به‌دست آوردن "بهترین برآورد" (شایان ذکر است که نرخ مرگ‌ومیر مصوب بیمه مرکزی جمهوری اسلامی ایران بر مبنای جدول TD 88-90 کشور فرانسه است) استفاده از ضریب تصحیح $\hat{Y}_{x^f,t}$ است که برای هر سن x^f و سال تقویمی آینده t ، شامل محاسبه مقدار امید ریاضی شرطی فرآیند CIR همان‌طور که در رابطه (۸) بیان شده است، می‌باشد. روش دیگری برای به‌دست آوردن نتایج مشابه استفاده از رویکرد شبیه‌سازی است.

در مقاله ارائه‌شده توسط کاکس، اینگرسول و راس در سال ۱۹۸۵ اشاره شده است که توزیع متغیر حالت در زمان t به‌شرط مقدار فعلی آن در زمان S ، برای برخی از $t < S$ ، با یک عامل مقیاس، یک توزیع کای-دو غیر مرکزی است. همان‌طور که در مقاله [23] بحث شده است، می‌توان از چنین ویژگی برای شبیه‌سازی فرآیند CIR دقیقاً روی یک شبکه زمانی گسسته استفاده نمود، تا از خطای گسسته‌سازی ناشی از فرآیند گسسته‌سازی اویلر جلوگیری شود؛ بنابراین، ما مجاز به شبیه‌سازی مقادیر مثبت $Y_{x^f,t}$ برای هر سال تقویمی در پنجره پیش‌رو هستیم، که با توزیع سالانه داده‌های مرگ‌ومیر مطابقت دارد. با استفاده از رابطه (۸)، از پارامترهای بهینه کالیبره‌شده برای به‌دست آوردن پیش‌بینی‌های مقادیر مورد انتظار استفاده می‌شود، به‌طوری‌که مقادیر $\hat{Y}_{x^f,1980}, \hat{Y}_{x^f,1981}, \dots, \hat{Y}_{x^f,2018}$ به معنی بهترین



برآورد از $Y_{x,t}$ برای هر سال تقویمی از پنجره پیشرو است. براساس پنجره پیشرو بدون تغییر، پیش‌بینی مدل‌های رینشووهابرمن و پلت انجام می‌شود و "بهترین برآورد" فرآیند CIR برای ۵ و ۱۰ سال قبل، با توجه به آرایش انتخاب‌شده از مجموعه داده‌ها، محاسبه می‌شود. چنین تجزیه و تحلیل با رویکرد پنجره‌های پیشرو و پسرو، که با بهره‌گیری از مجموعه داده‌های کشور فرانسه انجام می‌شود، این امکان را می‌دهد تا برای بررسی عملکرد پیش‌بینی این مدل در ۳۶ افق زمانی مختلف برای هر ترتیب از مجموعه داده‌ها، آزمون برگشت‌پذیر انجام شود.

۴-۵- پیش‌بینی‌های تعدیل‌شده: مدل جدید

براساس رابطه (۵) از فرم زیر برای اصلاح پیش‌بینی مدل‌های رینشووهابرمن و پلت استفاده می‌گردد:

$$\hat{m}_{x,t} = \bar{Y}_{x,t} \hat{m}_{x,t} \quad (19)$$

که تعدیلی از نرخ فوت $m_{x,t}$ در سال‌های $t = 1980, \dots, 2018$ است. چنین پیش‌بینی‌هایی با $\hat{m}_{x,t}$ نشان داده می‌شود. شایان‌ذکر است که " $\bar{Y}_{x,t}$ بهترین برآورد" از تحقق متغیر تصادفی $Y_{x,t}$ برای یک سن معین x^f و در یک سال معین t در پنجره پیشرو است، درحالی‌که $\hat{m}_{x,t}$ نشان‌دهنده پیش‌بینی نرخ فوت برای سن و سال استفاده شده از مدل‌های رینشووهابرمن و پلت است. مطابق با آنچه در بخش‌های قبلی توضیح داده شد، از پنجره پیشرو، نرخ فوت پیش‌بینی شده ارایه شده بررسی می‌گردد. بدین صورت که:

۱. از مدل‌های رینشووهابرمن و پلت، $\hat{m}_{x,t}$ در نظر گرفته می‌شود.

۲. پیش‌بینی $\hat{m}_{x,t}$ از مدل‌های رینشووهابرمن و پلت، با مقادیر شرطی تولیدشده از فرآیند CIR که در رابطه (۶) ارایه شده است را به صورت $\hat{m}_{x,t}$ از طریق رابطه (۱۹) تبدیل نموده و فرمت جدید تعمیم مدل‌های رینشووهابرمن و پلت حاصل می‌گردد.

۵- معیارهای ارزیابی و مقایسه مدل‌ها

در این بخش به بررسی کیفیت پیش‌بینی‌های به‌دست‌آمده براساس داده‌های تحت مطالعه از نظر نموداری و آماری پرداخته می‌شود. تجزیه و تحلیل نموداری، یک بینش کلی از پویایی پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر و خطاهای مربوط را ارایه می‌نماید. درحالی‌که روش‌های آماری برآوردی از میزان این خطاها ارایه می‌دهند؛ لذا در این قسمت به معرفی معیارهای مقایسه مدل‌ها نیز پرداخته می‌شود به طوری که به وسیله آن‌ها بتوان معین نمود کدام‌یک از مدل‌های رینشووهابرمن و پلت و هم‌چنین تعمیم هر یک از آن‌ها دارای خطای برازش کم‌تری است.

۵-۱- نمودار پیش‌بینی

همان‌طور که در قسمت‌های قبل بیان شد، پنجره پیشرو که مربوط به پیش‌بینی هرکدام از مدل‌های است، با نمودار شدت مرگ‌ومیر واقعی برای سه سن ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سالگی مقایسه می‌گردد. برای این منظور هرکدام از پیش‌بینی مدل‌ها با مقدار واقعی در یک نمودار نمایش داده و مقایسه می‌گردد و مشخص می‌شود که پیش‌بینی صورت گرفته در کدام نمودار به مقدار واقعی آن نزدیک‌تر است.

۵-۲- معیار ارزیابی خطاها

پس از برآورد پارامترهای موجود در هر یک از مدل‌ها باید میزان دقت پیش‌بینی این مدل‌ها را با محاسبه میزان خطای پیش‌بینی بررسی نمود. برای سنجش این نوع خطا در این مقاله از دو معیار میانگین قدر مطلق خطا^۱ و ریشه میانگین مربعات خطا استفاده می‌شود. این معیارها را با استفاده از روابط زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |e_i|}{n}, \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}}$$

که در آن n تعداد پیش‌بینی‌ها و e_i خطای پیش‌بینی هستند که از تفاوت مقدار پیش‌بینی و مقدار واقعی به‌دست می‌آیند [28].

¹ Mean Absolute Error (MAE)

معمولا با افزایش پارامترهای مدل و پیچیده‌تر شدن آن می‌توان مقدار تابع درست‌نمایی را افزایش داد که به معنی برازش بهتر داده‌ها و تاییدی بر مدل ارایه شده است. ولی با این کار ممکن است دچار مشکل بیش برازش شده و اعتبار مدل مخدوش شود؛ بنابراین، استفاده از معیارهایی مانند معیار اطلاع آکائیکه^۱ و معیار اطلاع بیزی که علاوه بر میزان درست‌نمایی به تعداد پارامترها و تعداد مشاهدات نیز توجه دارند، امری مهم تلقی می‌شود. به این ترتیب با توجه به تاثیر تعداد پارامترها و مشاهدات، به همراه تابع درست‌نمایی، معیار ارزیابی مانند معیار اطلاع بیزی از جمله شاخص‌هایی است که به هر دو وجه برای مناسب بودن مدل یعنی تعداد پارامترها و میزان برازش مدل، توجه داشته و بخصوص در تئوری اطلاع نیز مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. فرض کنید که حداکثر تابع درست‌نمایی را برای یک مدل آماری با L ، تعداد پارامترها را با k و تعداد مشاهدات را با n نشان دهیم. در این صورت معیار اطلاع بیزی برای این مدل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$BIC = 2k \ln(n) - 2 \ln(L).$$

معیار اطلاع بیزی، میزان کارایی مدل را با توجه به تعداد پارامترها و قدرت پیش‌بینی داده‌ها را ارزیابی می‌کند [29].

۶- تجزیه و تحلیل داده‌ها

همان‌طور که در قسمت‌های قبل اشاره شد مدل‌های خانواده لی-کارتز و کارینز، بلک و داود در مقاله [24] به صورت کامل معرفی و مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته‌اند. این بررسی‌ها شامل برآورد پارامترها، برازش مدل بر روی داده‌های پنجره پسترو و پیش‌بینی بر روی داده‌های پنجره پیشرو می‌شود. حال در این پژوهش قصد داریم فرآیند CIR را بر روی داده‌های به دست آمده از اختلاف میان برازش مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی و داده‌های واقعی برازش دهیم و پارامترهای مربوط به این فرآیند را برآورد کنیم و در ادامه با استفاده از این پارامترها شروع به شبیه‌سازی فرآیند CIR بر روی بازه پنجره پیشرو نماییم و در انتها این مقادیر شبیه‌سازی شده را در مقادیر پیش‌بینی شده از بهترین مدل‌ها از خانواده‌های لی-کارتز و کارینز بلک و داود (رینشو و هابرمن و پلت) ضرب می‌نماییم و با مدل خام مرگ‌ومیر با استفاده از معیارهای خطا و معیار اطلاع بیزی مقایسه می‌کنیم.

۱-۶- برآورد پارامترهای فرآیند CIR

با توجه به مقادیر $Y_{x,t}$ از رابطه (۵) در این قسمت به برآورد بردار پارامترهای فرآیند CIR و محاسبه مقادیر تابع درست‌نمایی برای سه سن ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سالگی پرداخته می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود در جدول ۱ برآورد پارامترها و منفی لگاریتم تابع درست‌نمایی برای مدل‌های رینشو و هابرمن و پلت نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود براساس لگاریتم درست‌نمایی در تمامی سنین لگاریتم درست‌نمایی مدل پلت بیشتر است.

جدول ۱- برآورد پارامترها و ماکسیمم درست‌نمایی فرآیند CIR.

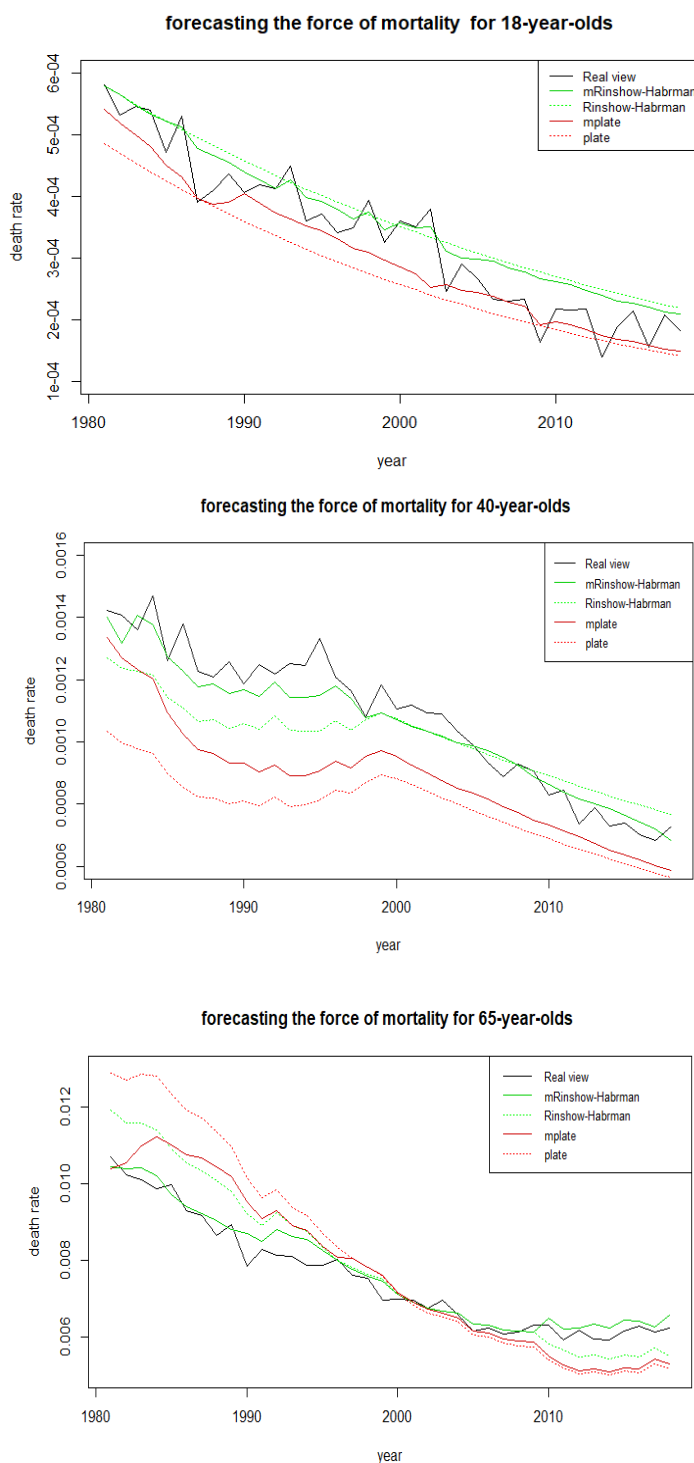
Table 1- Planned programs and maximum detailed planning CIR.

مدل	سن	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$-\ln L(\hat{\theta})$
	18	0.2697	0.9646	0.1149	-59.15
	40	0.4964	1.0036	0.0511	-119.34
	65	0.5863	0.9966	0.0371	-141.76
	18	0.2135	1.0170	0.1031	-69.01
	40	0.0944	1.0442	0.0486	-132.23
	65	0.1512	0.9831	0.0321	-167.06

¹ The Akaike Information Criterion (AIC)

۶-۲- نمودارهای پیش‌بینی با استفاده از مدل‌های رینشو و هابرمن و پلت و تعمیم آن‌ها با فرآیند CIR

در این قسمت نمودار پیش‌بینی مدل‌های مرگ و میر خام تصادفی (رینشو و هابرمن و پلت) با تعمیم این مدل‌ها توسط فرآیند CIR برای سه سن مورد بررسی در این مقاله با یکدیگر مقایسه می‌شود. در این راستا، نمودارهای مربوط به پیش‌بینی شدت مرگ و میر توسط مدل‌های رینشو و هابرمن و پلت و تعمیم آن‌ها با فرآیند CIR برای سه سن ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سالگی رسم و در شکل ۱ نمایش داده شده است. همان‌طور که از سه نمودار پیش‌بینی در مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR (خطوط سبز پررنگ و قرمز پررنگ) مشخص است، در اکثر موارد به مقادیر واقعی نزدیک‌تر است که نشان‌دهنده عملکرد خوب مدل‌های تعمیم‌یافته است.

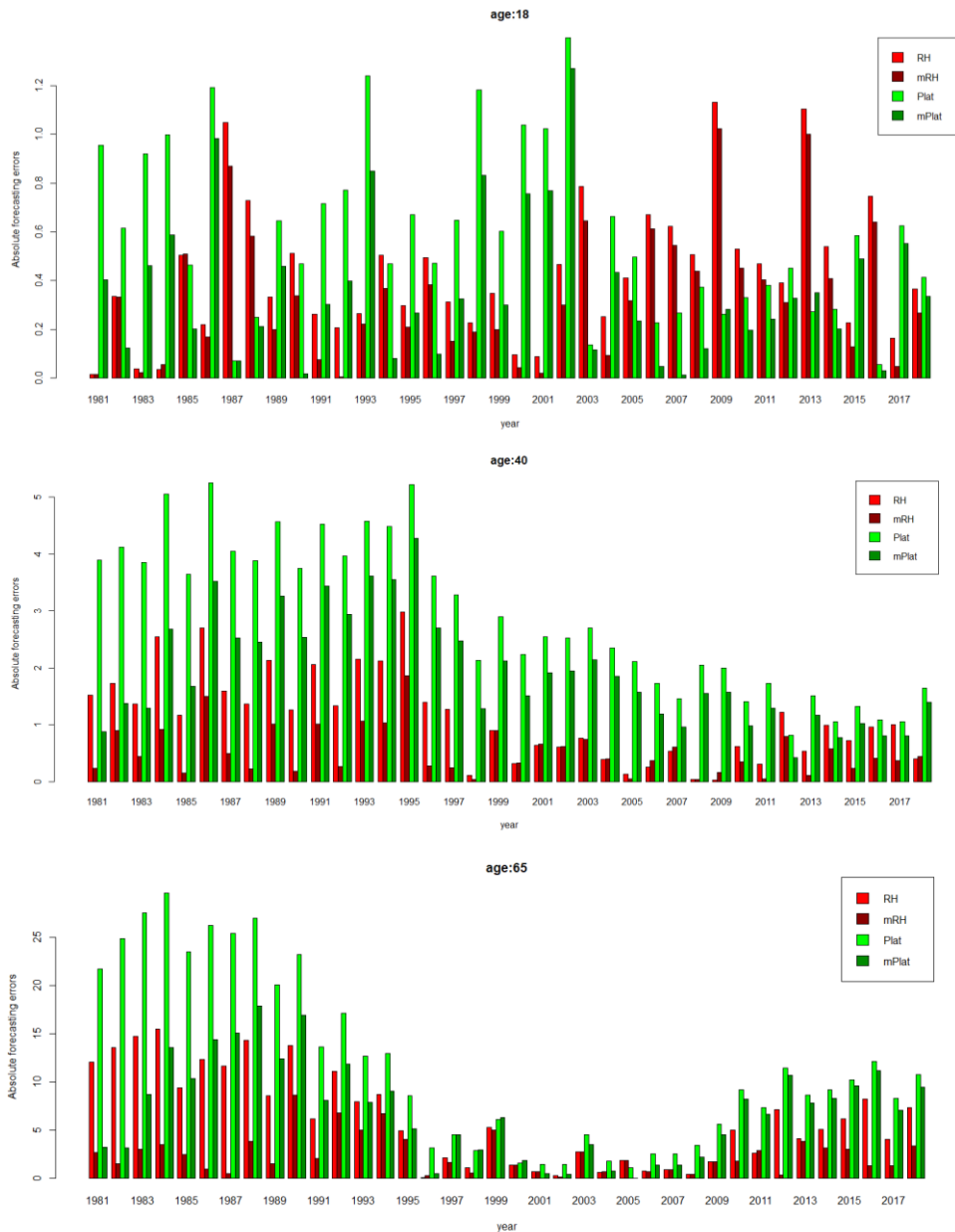


شکل ۱- پیش‌بینی مدل‌های رینشو و هابرمن، پلت و تعمیم آن‌ها (شکل بالا ۱۸ سالگی، نمودار وسط ۴۰ سالگی و نمودار پایین ۶۵ سالگی).

Figure 1- Prediction of Rinshaw-Haberman, Pellet models and their extrapolation (upper graph at 18 years old, middle graph at 40 years old and lower graph at 65 years old).



برای بررسی بهتر این که آیا مدل‌های تعمیم‌یافته بهتر از مدل‌های ایستا (رینشوهرمن و پلت) عمل کرده‌اند از قدر مطلق اختلاف بین مقادیر پیش‌بینی توسط مدل‌های خام و مقادیر واقعی (نرخ فوت خام مشاهده‌شده) و اختلاف بین مقادیر پیش‌بینی مدل‌های تعمیم‌یافته و مقادیر واقعی استفاده می‌شود که آن‌ها را در شکل ۲ نمایش داده شده است. براساس این نمودارها می‌توان مشاهده نمود که در اکثر سال‌ها میله‌های با رنگ سبز پررنگ و قرمز پررنگ برای هر سه سن مورد بررسی کم‌تر از میله‌های با رنگ کم سبز و قرمز کم رنگ هستند که نشان‌دهنده قدر مطلق خطای پیش‌بینی کم‌تر مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR در مقایسه با مدل‌های خام رینشوهرمن و پلت است.



شکل ۲- قدر مطلق خطا برای مدل‌های رینشوهرمن، پلت و تعمیم آن‌ها (نمودار بالا سن ۱۸ سالگی، نمودار وسط سن ۴۰ سالگی و نمودار پایین سن ۶۵ سالگی).

Figure 2- The absolute value of the error for Rinshaw-Haberman, Pellet and their generalization models (top chart at age 18, middle chart at age 40, and bottom chart at age 65).

۳-۶- مقایسه میانگین قدر خطا و ریشه میانگین مربعات خطا

حال در ادامه ارزیابی به بررسی میزان خطاهای ناشی از دو مدل خام و مدل تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود. برای هر سن مورد مطالعه، معیار ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین قدر مطلق خطا برای مدل خام به ترتیب با نمادهای ψ^* و $\bar{\psi}$ و برای مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR به ترتیب با نمادهای $\bar{\psi}^*$ و ψ^{*} نمایش داده شده‌اند و مقدار $IR^* = ((\bar{\psi}^* - \psi^*)/\psi^*)$ و $\bar{IR} = ((\bar{\psi} - \bar{\psi}^*)/\bar{\psi}^*)$ به ترتیب نشان‌دهنده مقدار درصد کاهش ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین قدر مطلق خطا مدل تعمیم‌یافته در مقایسه با خام است.



با توجه به مقادیر جدول ۲ معیار ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین قدر مطلق خطا برای مدل‌های تعمیم‌یافته کم‌تر از مدل‌های خام است. هم‌چنین مدل‌های تعمیم‌یافته در پیش‌بینی میزان فوت در آینده برای هر سن مورد مطالعه بسیار دقیق‌تر هستند. با توجه به این که IR^* و \bar{IR} در هر سن مورد مطالعه مقادیر منفی را گرفته‌اند، نتایج خروجی از این بررسی بیانگر نتیجه بسیار مناسب برای ارزیابی توانایی پیش‌بینی مدل‌های تعمیم‌یافته است و پیامدهای خوبی برای سیستم‌های بازنشستگی دارد. با توجه به این که مدل‌های تعمیم‌یافته برای داده‌های فرانسه نسبت به مدل‌های ایستا عملکرد بهتری دارد، این نتیجه‌گیری که مدل‌های جدید بهتر از مدل‌های خام عمل کرده‌اند که نشان‌دهنده قدرت پیش‌بینی مدل جدید است. بالاترین نرخ‌های بهبود برای در مدل‌ها در سن ۶۵ سالگی رخ داده است که این سن برای صندوق بازنشستگی استراتژیک‌ترین سن است با توجه به این که اکثر شرکت‌ها این سن را برای بازنشستگی افراد انتخاب می‌کنند.

جدول ۲- معیارهای ریشه میانگین مربعات خطا، میانگین قدر مطلق خطا و درصد بهبود خطاها برای مدل‌های رینشووهابرم، پلت و تعمیم.

Table 2- The measures of root mean square of error, mean absolute value of error and error improvement percentage for Rinshaw-Haberman, Pellet and generalization models.

مدل	سن	RMSE			درصد بهبود خطا			درصد بهبود خطا		
		ψ^*	ζ^*	IR^*	$\bar{\psi}$	$\bar{\zeta}$	\bar{IR}			
	18	0.51	0.42	-16.95	0.42	0.33	-22.52			
	40	1.35	0.67	-50.37	1.10	0.52	-52.52			
	65	7.80	3.14	-59.69	6.17	2.45	-60.22			
	18	0.68	0.46	-32.53	0.59	0.36	-39.26			
	40	3.18	2.15	-32.31	2.89	1.93	-33.32			
	65	14.68	8.56	-41.66	11.69	7.04	-39.74			

۴-۶- مقایسه مدل‌ها بر اساس معیار اطلاع بیزی

به‌عنوان گام بعدی، برای ارزیابی کیفیت بهبود در پیش‌بینی از معیار اطلاع بیزی استفاده می‌شود. استفاده از مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR به معنای افزایش تعداد پارامترهای مورد استفاده برای پیش‌بینی نرخ فوت است، به دلیل این که سه پارامتر فرآیند تصادفی CIR به پارامترهای مدل‌های خام (رینشووهابرم و پلت) اضافه شده است. در جدول ۳ معیار اطلاع بیزی برای هرکدام از مدل‌های رینشووهابرم، پلت و تعمیم هرکدام از مدل‌ها نمایش داده شده است که در این جدول معیار اطلاع بیزی برای مدل‌های خام رینشووهابرم و پلیت با استفاده از نماد BIC و معیار اطلاع بیزی برای مدل‌های تعمیم‌یافته با نماد BIC_m نمایش داده شده است، هم‌چنین با در نظر گرفتن $\Delta BIC = BIC_m - BIC$ نرخ تغییر با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{نرخ تغییر} = \frac{\Delta BIC}{BIC} \times 100.$$

جدول ۳ مقادیر معیار اطلاع بیزی برای مدل رینشووهابرم و پلت (BIC) و تعمیم آن‌ها (BIC_m) را نشان می‌دهد. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود به‌طور کلی در سن ۱۸ سالگی مدل‌های رینشووهابرم نسبت به مدل پلت عملکرد بهتری دارند. هم‌چنین مشاهده می‌شود که مقادیر معیار اطلاع بیزی در حالت مدل رینشووهابرم تعمیم‌یافته افزایش داشته است که با توجه به این که این مقدار افزایش ناچیز است قابل چشم‌پوشی می‌باشد؛ زیرا نتایج نمودار پیش‌بینی و مقادیر خطا در مجموع عملکرد بهتری را برای مدل رینشووهابرم تعمیم‌یافته نشان می‌دهد و لذا شواهد قوی به نفع مدل تعمیم‌یافته وجود دارد. در بررسی سن ۴۰ سالگی مدل‌های رینشووهابرم نسبت به مدل پلت عملکرد بهتری دارند و برای این سن مدل رینشووهابرم تعمیم‌یافته مناسب‌تر است.

در نهایت برای سن ۶۵ سالگی مجدد مشاهده می‌شود که مدل رینشووهابرم بهتر از مدل پلت است. اما در این سن مشابه سن ۱۸ سالگی مشاهده می‌شود که مقادیر معیار اطلاع بیزی در حالت مدل رینشووهابرم تعمیم‌یافته نسبت به مدل رینشووهابرم افزایش داشته است که با توجه نتایج نمودار پیش‌بینی و مقادیر خطا می‌توان از آن صرف‌نظر کرد و در مجموع عملکرد بهتری برای مدل رینشووهابرم تعمیم‌یافته مشاهده می‌شود.

Table 3- Bayesian information criterion and change rate percentage for Rinshaw-Haberman, Pellet and their generalizations.

مدل	سن	BIC	BIC _m	ΔBIC	نرخ تغییر
	18	-375	-373	2	-0.53
	40	-339	-356	-17	5.01
	65	-273	-262	11	-4.02
	18	-359	-367	-8	2.22
	40	-299	-303	-4	1.33
	65	-246	-235	11	-4.47

۷- نتیجه‌گیری

هدف از این پژوهش ارایه یک رویکرد جدید است که کاربردهای گسترده در زمینه بیم‌سنجی از جهت توسعه یک روش اصلاحی پویای جدید به جهت افزایش دقت پیش‌بینی در مدل‌های پیش‌بینی مرگ‌ومیر موجود، با استفاده از یک مدل وابسته مانند فرآیند کاکس-اینگرسول-راس و هم‌چنین روش‌های مختلف اعتبارسنجی خارج از نمونه، دارد. به‌طور خاص، عامل CIR وظیفه دارد از طریق پویایی در طول زمان به‌وسیله یک کمیت از خطای برازش داده‌شده، مدل پایه مرگ‌ومیر ارایه‌شده را تعمیم دهد. به‌عبارت‌دیگر نسبت بین نرخ فوت مرکزی مشاهده‌شده و خروجی مقادیر برازش داده‌شده به‌عنوان خروجی مدل مرگ‌ومیر انتخاب‌شده، مقدار بهتری نسبت به مدل پایه در اختیار ما قرار دهد. در حقیقت هدف از این رویکرد ارایه یک مدل جدید برای مدل‌سازی مرگ‌ومیر نیست، بلکه اصلاح مدل‌های موجود است که بهترین پیش‌بینی را دارند. هم‌چنین در این روش علاوه بر روش ایستای معمول، یک روش پویا ایجاد می‌شود که به این امکان را می‌دهد که تغییر رفتار اساسی در داده‌ها به دست آید. طبق نظریه باکس [30] که معتقد است، همه مدل‌ها اشتباه هستند؛ بنابراین، محققین نمی‌توانند با شرح و بسط بیش‌ازحد، یک مدل "صحیح" به‌دست آورند؛ بنابراین، تنها به‌دنبال توصیف مختصر پدیده طبیعی هستند، که در این پژوهش هدف به‌طور خاص پدیده بقاء است؛ بنابراین، رویکرد مطرح‌شده کاملاً کلی است؛ بنابراین، محدود به انتخاب مدل مرگ‌ومیر تصادفی نمی‌شود. کاربرد کلی و اعتبار این رویکرد را می‌توان بر روی هر مدل پیش‌بینی آزمایش کرد، به‌شرط آن‌که خطاهای پیش‌بینی به‌طور متوسط با یک متفاوت بوده و بتوانند به روشی مشابه روند CIR مدل شوند. ثابت شده است که ترکیب مدل‌ها و تکنیک‌های ترکیبی نتایج رضایت‌بخشی را ارایه می‌دهد و پتانسیل شایسته‌ای را برای پیشبرد تحقیقات فراهم می‌کند؛ بنابراین، روش ارایه‌شده در این پژوهش زمینه را برای طیف گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی دیگر در زمینه بیم‌سنجی فراهم می‌کند.

هم‌چنین در این پژوهش برای بررسی عملکردهای مدل‌های پویا از بانک اطلاعاتی مرگ‌ومیر انسانی و نرخ فوت خام مردان فرانسه در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۲۰۱۸ بر روی سنین ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سال جهت برازش و پیش‌بینی استفاده شده است. برای این منظور ابتدا داده‌های مرگ‌ومیر به دو پنجره پسر و که شامل سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۸۰ و پنجره پیشرو که شامل سال‌های ۱۹۸۰ تا ۲۰۱۸ است، تقسیم‌بندی شدند. سپس مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی موردنظر از روی پنجره پسر و داده‌ها پیاده‌سازی شدند و بهترین برازش با استفاده از این مدل بر روی این پنجره از داده‌ها مشخص و سپس به پیش‌بینی با استفاده از پنجره پیشرو پرداخته شد. شایان‌ذکر است که از بهترین مدل‌های خانواده‌های لی-کارتز و کارینز بلک و داود یعنی رینشوهابرمن و پلت استفاده شده است. هم‌چنین برآورد بردار پارامترهای فرآیند CIR و مقادیر تابع لگاریتم درست‌نمایی برای سه سن ۱۸، ۴۰ و ۶۵ سالگی محاسبه شدند. برای ارزیابی خوبی عملکرد مدل‌های ایستا و پویا نمودار پیش‌بینی مدل‌های مرگ‌ومیر تصادفی ایستا (رینشوهابرمن و پلت) با تعمیم این مدل‌ها توسط فرآیند CIR برای سه سن موردبررسی ترسیم و مشاهده شد. پیش‌بینی در مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR در اکثر موارد به مقادیر واقعی نزدیک‌تر است که نشان‌دهنده عملکرد خوب مدل‌های تعمیم‌یافته و پویا است. برای بررسی بهتر این‌که آیا مدل‌های تعمیم‌یافته بهتر از مدل‌های ایستا عمل کرده‌اند، قدرمطلق اختلاف بین مقادیر پیش‌بینی توسط مدل‌های ایستا و پویا و مقادیر واقعی ترسیم و مشاهده شد که مقادیر قدرمطلق خطای پیش‌بینی برای مدل‌های تعمیم‌یافته با فرآیند CIR در مقایسه با مدل‌های خام رینشوهابرمن و پلت کم‌تر است. هم‌چنین در ادامه ارزیابی به بررسی میزان خطاهای ناشی از دو مدل ایستا و مدل تعمیم‌یافته پرداخته شد. برای هر سن مورد مطالعه، معیار ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین قدر مطلق خطا برای مدل ایستا و پویا محاسبه و مشاهده گردید که مدل‌های تعمیم‌یافته عملکرد بهتری دارند. درنهایت، برای ارزیابی کیفیت بهبود در پیش‌بینی از معیار اطلاع بیزی استفاده و مشاهده شد مدل رینشوهابرمن تعمیم‌یافته نسبت به مدل‌های رینشوهابرمن، پلت و پلت تعمیم‌یافته عملکرد بهتری دارد.



نویسندگان مقاله مراتب قدردانی خود را از داوران محترم اعلام می‌دارند. بی‌شک نقطه نظرات ارزشمند ایشان در بهبود کیفیت مقاله نقش به‌سزایی داشته است.

منابع مالی

هیچ‌گونه بودجه یا کمک هزینه تحقیق در طی مطالعه مذکور دریافت نشده است.

تعارض با منافع

هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد و همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلاً چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

- [1] Dacorogna, M. M., & Kratz, M. (2015). *Living in a stochastic world and managing complex risks*. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2668468
- [2] Bis, D. (2013). *Longevity risk transfer markets: market structure, growth drivers and impediments, and potential risks* [presentation]. Joint forum, basel committee on banking supervision, bank for international settlements (pp. 1–35).
- [3] de Moivre, A. (1718). *The doctrine of chances: or, a method of calculating the probabilities of events in play* (Vol. 200). Chelsea Publishing Company.
- [4] Gompertz, B. (1825). XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical transactions of the royal society of london*, (115), 513–583.
- [5] Makeham, W. M. (1860). On the law of mortality and the construction of annuity tables. *Journal of the institute of actuaries*, 8(6), 301–310.
- [6] Tabeau, E. (2001). A review of demographic forecasting models for mortality. In *Forecasting mortality in developed countries: insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective* (pp. 1–32). Springer.
- [7] Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the american statistical association*, 87(419), 659–671. DOI:10.1080/01621459.1992.10475265
- [8] Christiansen, M. C., Denuit, M. M., & Lazar, D. (2012). The solvency II square-root formula for systematic biometric risk. *Insurance: mathematics and economics*, 50(2), 257–265. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.insmathco.2011.11.008>
- [9] Moosavi, S. S., & Payandeh Najafabadi, A. (2020). Modelling the laboratory health costs during 2015 to 2019. *Iranian journal of health insurance*, 3(3), 200–209.
- [10] Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: mathematics and economics*, 38(3), 556–570. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.insmathco.2005.12.001>
- [11] Currie, I. D. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian actuarial journal*, 2016(4), 356–383. DOI:10.1080/03461238.2014.928230
- [12] Currie, I. D., Durban, M., & Eilers, P. H. C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical modelling*, 4(4), 279–298.
- [13] Perkes, A. C. (1982). The development and field testing of an instrument to measure apprehension toward animals. *School science and mathematics*, 82(2), 157–162.
- [14] Wong-Fupuy, C., & Haberman, S. (2004). Projecting mortality trends: recent developments in the United Kingdom and the United States. *North american actuarial journal*, 8(2), 56–83. DOI:10.1080/10920277.2004.10596137
- [15] Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: mathematics and economics*, 45(3), 393–404. DOI:10.1016/j.insmathco.2009.08.006
- [16] Booth, H., & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: a review of methods. *Annals of actuarial science*, 3(1–2), 3–43. DOI:10.1017/S1748499500000440
- [17] Dowd, K., Cairns, A. J. G., Blake, D., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010). Backtesting stochastic mortality models: an ex post evaluation of multiperiod-ahead density forecasts. *North American actuarial journal*, 14(3), 281–298.
- [18] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (2005). A theory of the term structure of interest rates. In *Theory of valuation* (pp. 129–164). World Scientific. DOI: doi:10.1142/9789812701022_0005





- [19] Pitacco, E. (2009). *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*. Oxford University Press.
- [20] Lorenzo, E. Di, Sibillo, M., & Tessitore, G. (2006). A stochastic proportional hazard model for the force of mortality. *Journal of forecasting*, 25(7), 529–536.
- [21] Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: journal of the econometric society*, 363–384.
- [22] Kladrivko, K. (2007). Maximum likelihood estimation of the Cox-Ingersoll-Ross process: the Matlab implementation. *Technical computing prague*, 1(3), 1–9.
- [23] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering* (Vol. 53). Springer.
- [24] Shoaee, S., & Gholi Keshmarzi, M. M. (2021). Analysis of the stochastic mortality models based on lee-carter model in predicting mortality rates in life and health insurance. *Iranian journal of health insurance*, 4(1), 68–79.
- [25] Database, H. M. (2020). *University of California, Berkeley (USA), and Max planck institute for demographic research (Germany)*. <https://www.mortality.org/>
- [26] Zokaei, M., & Maghsoudi, M. (2011). Reconstruction of frailty-based mortality models by a generalisation of gompertz distribution. *Sanaat-e-bimeh*, 25(4), 59–85.
- [27] Hassan Zadeh, A., & Daraee, D. (2020). Mortality rates estimation of active insured members of social insurance fund of farmers, villagers and Tribes in 2016. *Iranian journal of health insurance*, 3(1), 57–66.
- [28] Willmott, C. J., & Matsuura, K. (2005). Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate research*, 30(1), 79–82.
- [29] Kass, R. E., & Raftery, A. E. (1995). Bayes factors. *Journal of the american statistical association*, 90(430), 773–795. DOI:10.1080/01621459.1995.10476572
- [30] Box, G. E. P. (1976). Science and statistics. *Journal of the american statistical association*, 71(356), 791–799.