




Paper Type: Original Article



A New Approach based on Gaussian Degree of Closeness for Solving Multi-Objective Optimization Problem

Elham Zahiri¹, Aghileh Heydari¹, Hamid Reza Yousefzadeh^{1,*} 

¹ Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran; phd.zahiri.e@pnum.ac.ir; a_heidari@pnu.ac.ir; usefzadeh.math@pnu.ac.ir.

Citation:



Zahiri, E., Heydari, A., & Yousefzadeh, H. R. (2022). A new approach based on gaussian degree of closeness for solving multi-objective optimization problem. *Journal of decisions and operations research*, 7(Spec. Issue), 1-24.

Received: 19/10/2021

Reviewed: 22/11/2021

Revised: 20/12/2021

Accepted: 01/02/2022

Abstract

Purpose: Improving the quality of Pareto frontier in multi-objective optimization issues and prioritizing fronts resulting from different approaches.

Methodology: This research solves the problems of multi-objective optimization inspired by the multi-objective evolutionary algorithm based on analysis. Gaussian decomposition algorithm is implemented on a set of different test functions. In order to evaluate the improvement of the front quality obtained from the percentage of relative deviation of the quality criteria, the distance to the reference point and IGD have been used.

Findings: By approximating the Pareto frontiers, the test problems showed that the Gaussian decomposition approach has the lowest relative deviation and has a higher quality compared to other similar evaluation criteria compared to other expressed evaluation criteria. Also, due to some disadvantages of evaluation criteria to measure the performance of multi-objective algorithms, a new evaluation criterion was introduced. Then, this evaluation criterion was applied to the category of test problems, problems that have fronts with uniform distribution or fronts with multiple local optimal points or non-uniform distribution, and the numerical results indicate the optimal performance of this new evaluation criterion.

Originality/Value: The proposed Gaussian decomposition approach is a completely new approach in approximating the Pareto front and prioritizing the different Pareto fronts, which has not been used in any article so far.

Keywords: Multi-objective optimization, Domination, Fuzzy domination, Approximation, Pareto frontier.

Corresponding Author: phd.zahiri.e@pnum.ac.ir

<http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.5.3.6>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



ارایه رویکرد جدید مبتنی بر درجه نزدیکی گوسی در حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه

الهام ظهیری^۱، عقیله حیدری^۱، حمیدرضا یوسف‌زاده^{۱*}
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: بهبود کیفیت مرز پارتو تقریبی (مرز عدم چیرگی) در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه و رتبه‌بندی مرزهای پارتو تقریبی حاصل از رویکردهای مختلف می‌باشد.

روش‌شناسی پژوهش: این پژوهش با الهام از الگوریتم تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه (MOEA/D)، به ارایه رویکردی جدید مبتنی بر تجزیه گوسی می‌پردازد. الگوریتم MOEA/D با فراخوانی رویکردهای تجزیه مختلف از جمله رویکرد تجزیه پیشنهادی بر روی دسته توابع آزمون استاندارد، پیاده‌سازی و نتایج حاصل با معیارهای ارزیابی مختلف مقایسه و تجزیه و تحلیل شده است.

یافته‌ها: با تقریب‌سازی مرزهای بهینه پارتو مسایل آزمون استاندارد، نشان داده شد که رویکرد تجزیه گوسی در مقایسه با رویکردهای تجزیه مختلف با در نظر گرفتن معیارهای ارزیابی بیان شده دارای کمترین انحراف نسبت به مرز بهینه پارتو می‌باشد و لذا از کیفیت بالاتری برخوردار است. همچنین با توجه به عدم توانایی معیارهای ارزیابی در سنجش دقیق عملکرد الگوریتم‌های چندهدفه و رتبه‌بندی مرزهای پارتو تقریبی، یک معیار ارزیابی جدید معرفی شد. در ادامه، این معیار ارزیابی پیشنهادی برای دسته مسایل آزمون، مسایلی که دارای مرزهایی با توزیع یکنواخت و یا مرزهایی با تعدد نقاط بهینه محلی و یا توزیع غیریکنواخت مورد استفاده قرار گرفت که نتایج عددی حاکی از عملکرد مطلوب این معیار ارزیابی جدید است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی یک رویکرد کاملا جدید در تقریب‌سازی مرز بهینه پارتو و رتبه‌بندی مرزهای مختلف پارتو است که تاکنون در هیچ مقاله‌ای به کار نرفته است.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی چندهدفه^۱، چیرگی، چیرگی فازی، تقریب‌سازی، مرز پارتو.

۱- مقدمه

امروزه وجود مطالعات گسترده صورت گرفته یا در حال انجام در زمینه مسایل بهینه‌سازی چندهدفه^۲ و لحاظ کردن محدودیت‌های متنوع جهت تطابق بیشتر این مسایل با دنیای واقعی، می‌تواند نشان از اهمیت این‌گونه مسایل در علوم مختلف مانند علوم پایه و علوم مهندسی

¹ Multi-Objective Optimization (MOO)

² Multi-Objective Optimization Problems (MOOPs)

* نویسنده مسئول





باشد (زیتسلر و همکاران^۱، ۲۰۰۱؛ دب و همکاران^۲، ۲۰۰۲؛ لو و همکاران^۳، ۲۰۰۳). از نظر کلاسیک، حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه اغلب با استفاده از رویکردهای توابع مقیاس‌پذیر^۴ صورت می‌پذیرند. ماینتین^۵ (۲۰۱۲) که رویکرد تجزیه نقش مهمی را در تحلیل تئوری و جواب بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی مقیاس‌پذیر دارد. الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه^۶ یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه را به تعدادی زیرمساله بهینه‌سازی تک‌هدفه تبدیل می‌کند، سپس زیرمساله‌های تولیدشده با استفاده از روش‌های کلاسیک شناخته‌شده حل می‌شوند. اکثر این الگوریتم‌ها برای حفظ تنوع از نقاط مرجع و بردارهای وزنی استفاده می‌نمایند (لین و همکاران^۷، ۲۰۱۹؛ وانگ و همکاران^۸، ۲۰۱۹). با وجود برتری عملکرد الگوریتم‌های تکاملی مبتنی بر تجزیه نسبت به سایر الگوریتم‌ها در حل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه، وابستگی این الگوریتم‌ها به پارامترهای کلیدی در تقریب‌سازی مرز پارتو مانند؛ نحوه تولید بردارهای وزنی، وجود رویکردهای تجزیه مختلف، شیوه‌های مختلف جستجوی محلی برای ایجاد جواب‌های شدنی در هر مرحله و غیره، می‌تواند کارایی و عملکرد این نوع الگوریتم‌ها را تحت تاثیر قرار دهند.

نخستین بار *MOEA/D* توسط ژانگ و همکاران^۹ (۲۰۰۷) مطرح شد. در سال ۲۰۰۹ نسخه دیگری از این الگوریتم به نام *MOEA/D-DE* که از تکامل تفاضلی^{۱۰} برای به‌دست آوردن اطلاعات همسایگی‌های هر زیرمساله برای تولید جواب‌های جدید و کارآمدی استفاده می‌کند، معرفی شد (لی و ژانگ^{۱۱}، ۲۰۰۸). الگوریتم *MOEA/D-DRA*^{۱۲} توسط ژانگ و همکاران (۲۰۰۹) مطرح شد که در آن برای تعیین میزان محاسبات هر زیرمساله از نوعی اولویت‌بندی استفاده می‌شود و بر اساس اولویت هر زیرمساله، حجم محاسباتی روی آن‌ها توزیع می‌شود. با معرفی *MOEA/D-GM*^{۱۳} توسط خان و ژانگ^{۱۴} (۲۰۱۰) و ارایه دو عملگر، عملکرد *MOEA/D* بهبود داده شد. در این الگوریتم، ابتدا با استفاده از اطلاعات هر زیرمساله، عملگر جهش که از اطلاعات سراسری و محلی استفاده می‌کند به کار گرفته شد، سپس در مرحله به‌روزرسانی با توجه به عدم دسترسی به توزیع یکنواخت از زیرمساله‌ها، با استفاده از نوعی اولویت‌بندی، به‌روزرسانی اعمال می‌شود. مشوانی^{۱۵} (۲۰۱۱) به بررسی ترکیب دو الگوریتم *NSGA-II* و *MOEA/D-DE* برای تقریب‌سازی مرز پارتو پرداخت، اما در این روش ترکیبی با تمام زیرمساله‌ها به‌صورت یکسان برخورد شده است. رویکرد *iMOEA/D*^{۱۶} توسط گنگ و همکاران^{۱۷} (۲۰۱۱) پیشنهاد شد. در این الگوریتم در هر تعاملی که با تصمیم‌گیرنده صورت می‌گیرد، مجموعه‌ای از جواب‌ها پیشنهاد می‌شود و از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود تا بهترین جواب‌ها را انتخاب کند و سپس جستجو به سمت همسایه‌ای از جواب‌های انتخاب‌شده هدایت می‌شود. نصیر و همکاران^{۱۸} (۲۰۱۳) یک الگوریتم چندهدفه تکاملی مبتنی بر تجزیه با استفاده از مفهوم چیرگی فازی تحت عنوان *MOEA/DFD*^{۱۹} ارایه نمودند. در این تحقیق آن‌ها مفهوم چیرگی پارتوی فازی را برای مقایسه دو جواب پارتو چیره نشده معرفی کردند. تفاوت اساسی آن با *MOEA/D* در به‌روزرسانی جمعیت جواب‌های چیره نشده می‌باشد. بر این اساس، در این الگوریتم پس از تولید جواب جدید، اختلاف جواب جدید با هر یک از جواب‌های جمعیت جاری به‌صورت اختصاص درجه عضویت فازی متناظر با تمام اهداف مساله محاسبه و جواب‌ها رتبه‌بندی می‌شوند. هرچه اختلاف فاصله مقادیر تابع هدف دو جواب، بیشتر باشد درجه عضویت متناظر با آن تابع هدف کمتر خواهد بود. از تابع چیبیشف برای حالتی که در آن درجه عضویت مقادیر تابع هدف دو جواب برابر باشد، استفاده خواهد شد. هی و همکاران^{۲۰} (۲۰۱۳) به بررسی عملکرد الگوریتم‌های تکاملی در مسایل بهینه‌سازی با تعداد اهداف زیاد پرداختند و نشان دادند الگوریتم‌های تکاملی اولیه بدون اعمال تغییرات در ارزیابی زیرمساله‌ها، عملکرد موثری در حل *MOP* با اهداف زیاد ندارند. برادفورد و همکاران^{۲۱} (۲۰۱۸) الگوریتم *TSEMO* پیشنهاد کردند که از فرآیندهای گوسی به‌عنوان جایگزین استفاده می‌کند. در این روش ابتدا از فرآیندهای گوسی برای استفاده از نمونه‌گیری تامپسون در ارتباط با شاخص کیفیت استفاده می‌گردد سپس از *NSGA-II* برای انتخاب یک نقطه ارزیابی جدید در هر تکرار استفاده می‌شود. لین و همکاران (۲۰۱۹) یک روش جستجوی تکاملی با چندین نقطه مرجع در *MOEA/D* را پیشنهاد کردند. این الگوریتم مشابه *MOEA/D* عمل می‌کند. وو و همکاران^{۲۲} (۲۰۲۰) یک بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه با مدل‌های فرآیند گوسی

¹ Zitzler et al.

² Deb et al.

³ Lu et al.

⁴ Scalarizing functions

⁵ Miettinen

⁶ Multi-Objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition (MOEA/D)

⁷ Lin et al.

⁸ Wang et al.

⁹ Zhang et al.

¹⁰ Differential Evolutionary (DE)

¹¹ Li and Zhang

¹² Dynamic Resource Allocation (DRA)

¹³ Graphical models in MOEA/D (MOEA/D-GM)

¹⁴ Khan and Zhang

¹⁵ Mashwani

¹⁶ Interactive version of the MOEA/D (iMOEA/D)

¹⁷ Gong et al.

¹⁸ Nasir et al.

¹⁹ (MOEA/D), with fuzzy dominance (MOEA/DFD)

²⁰ He et al.

²¹ Bradford et al.

²² Wu et al.



چند تطبیقی، با هدف ارایه جستجوی تکاملی موثرتر برای انواع $MOPs$ معرفی کردند. برای انتخاب مدل گوسی مناسب، آن‌ها با استفاده از میزان بهبود عملکرد در تعدادی از زیرمسائل تجزیه‌شده، یک رویکرد انتخاب تطبیقی جهت حفظ تنوع بیشتر پیشنهاد کردند. لئونگ و ان جی^۱ (۲۰۲۰) یک الگوریتم ترکیبی برای بهینه‌سازی چندهدفه معرفی نمودند. الگوریتم پیشنهادی شامل الگوریتم تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه ($MOEA/D$) و شبکه عصبی است که در آن از $MOEA/D$ برای جستجوی سراسری و از شبکه عصبی برای جستجوی محلی استفاده می‌شود. ژانگ و همکاران (۲۰۲۰) یک الگوریتم $MOEA/D$ را بر اساس مدل بازخورد اطلاعاتی به نام $MOEA/D-IFM$ پیشنهاد کردند. آن‌ها با توجه به مدل‌های مختلف بازخورد اطلاعاتی، این الگوریتم را با توجه به نحوه انتخاب افراد به دودسته تصادفی و ثابت تقسیم نموده‌اند. زاپوتکاس مارتینز و پونسیچ^۲ (۲۰۲۰) یک رویکرد انتخاب جدید با الهام از روش اسپیلون محدودیت معرفی کردند که یک مساله دوهدفه را با در نظر گرفتن تابع مقیاس‌پذیر و درجه نقض محدودیت به‌عنوان یک تابع هدف تعریف کردند. در مرحله فراخوان $MOEA/D$ ، تابع مقیاس‌پذیر برای انتخاب بهترین جواب‌ها برای $CMOOP$ در نظر گرفته شد. چن و همکاران^۳ (۲۰۲۱) یک الگوریتم تکاملی چندهدفه به نام $iDMOEA-εC$ را پیشنهاد نمودند که از ترجیحات تصمیم‌گیرنده برای فشرده‌سازی فضای هدف استفاده می‌کند. الگوریتم $DMOEA-εC$ یک $MOOP$ را با استفاده از مجموعه‌ای از بردارهای کران بالا که به‌طور مساوی توزیع شده‌اند برای تقریب کل مرز پارتو به‌صورت مجموعه‌ای از زیرمساله‌های اسکالر مقید تجزیه می‌کند. علاوه بر این، الگوریتم پیشنهادی شامل یک روش انتخاب دومرحله‌ای است که امکان استخراج اولویت‌های تصمیم‌گیرنده (DM) را تا حد امکان دقیق فراهم می‌کند. مورالس-هرناندز و همکاران^۴ (۲۰۲۱) با تکنیک‌های خاص، یادگیری ماشین (رگرسیون فرآیند گاوس و رگرسیون لجستیک) را برای کاهش توابع هدف و محدودیت بر اساس مقدار محدودی از داده‌های تجربی به کار بردند. این تکنیک‌ها در یک الگوریتم بهینه‌سازی تعبیه‌شده‌اند که تنظیمات فرآیند تعیین مرز پارتو بهینه را به روشی کارآمد تشخیص می‌دهد. یو و همکاران^۵ (۲۰۲۱) یک روش بهینه‌سازی چندهدفه را برای بهینه‌سازی عملکرد موتورهای دیزل پیشنهاد کردند. فرآیندهای گاوسی (GPS) با استفاده از داده‌های جمع‌آوری شده از موتور دیزل برای تقریب توابع هدف واقعی ساخته می‌شوند. در الگوریتم ژنتیک $NSGA-II$ از فرآیند گوسی برای تولید جواب‌های بهینه پارتو استفاده می‌کند. فرآیند گوسی به‌طور مکرر توسط اطلاعات به‌روز می‌شود که قابلیت اطمینان مدل‌ها را افزایش می‌دهد. تیلور و همکاران^۶ (۲۰۲۱) یک روش بهینه‌سازی با رویکرد فرآیند گوسی را برای استفاده از ترجیحات DM در فضای جستجوی یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه (MOP) پیشنهاد نمودند. به‌صورت مرحله‌ای DM در طول بهینه‌سازی مساله مورد مشورت قرار می‌گیرد و از آن‌ها خواسته می‌شود اولویت خود را نسبت به یک سری از مقایسه‌های زوجی از جواب‌های نامزد ارایه دهد. پس از هر مشاوره، ترجیح داده شده‌ترین جواب به‌عنوان نقطه مرجع در الگوریتم تکاملی بهینه‌سازی چند هدفه مناسب ($MOEA$) استفاده می‌شود. در سال ۲۰۲۱ رویکرد RWV ^۷ برای تنظیم مجدد بردارهای وزنی در $MOEA/D$ پیشنهاد شد (خو و همکاران^۸، ۲۰۲۱). در RWV از الگوریتم خوشه‌بندی $DBSCAN$ ^۹ برای دسته‌بندی جواب‌های جاری استفاده شده است.

هدف اصلی این مقاله، معرفی یک رویکرد تجزیه مبتنی بر مفهوم درجه نزدیکی گوسی (به‌اختصار رویکرد تجزیه گوسی عنوان می‌کنیم) است که به کمک آن به تقریب‌سازی مرز بهینه پارتو با کیفیت مطلوب‌تر نسبت به سایر رویکردهای تجزیه می‌پردازیم.

در رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی، با الهام از مفهوم چیرگی فازی مرجع نصیر و همکاران (۲۰۱۳)، از مفهوم درجه نزدیکی گوسی جهت تجزیه یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه به چند مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه بهره خواهیم جست. به عبارت دقیق‌تر، در این رویکرد پیشنهادی با استفاده از بردارهای وزنی مختلف و همچنین بهره‌گیری از نقطه مرجع (ابده‌آل) که در طی حل زیرمساله‌های مختلف مدام به‌روز می‌شود، به تولید جواب‌های جدید با کیفیت بر اساس میزان نزدیکی یک جواب به نقطه مرجع می‌پردازیم. همچنین، در ادامه با در نظر گرفتن معیارهای ارزیابی شناخته‌شده، از یک معیار ارزیابی جدید برای مقایسه مرزهای مختلف حاصل از رویکردهای مختلف بهره خواهیم جست.

ساختار کلی این مقاله به شرح زیر ساماندهی شده است. در بخش ۲، به بیان مساله و همچنین به شرح مختصری از رویکردهای تجزیه مختلف مورد استفاده در $MOEA/D$ و نیز معیارهای ارزیابی و توابع آزمون استاندارد پرداخته می‌شود. در بخش ۳، رویکرد تجزیه گوسی

¹ Leung and Ng

² Zapotecas-Martínez and Ponsich

³ Chen et al.

⁴ Morales-Hernández et al.

⁵ Yu et al.

⁶ Taylor et al.

⁷ Resetting Weight Vectors (RWV)

⁸ Xu et al.

⁹ Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN)



پیشنهادی شرح داده می‌شود و عملکرد این رویکرد با رویکردهای تجزیه دیگر مقایسه و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ با معرفی یک معیار ارزیابی جدید، به تجزیه و تحلیل نتایج پرداخته می‌شود و در پایان، بخش ۵ به بیان نتیجه‌گیری کلی اختصاص داده می‌شود.

۲- بیان مساله

همان‌طور که اشاره شد، هدف اصلی این مقاله معرفی یک رویکرد تجزیه جهت تقریب‌سازی مرز پارتو و ارایه یک معیار ارزیابی جدید برای مقایسه مرزهای تقریبی پارتو می‌باشد؛ بنابراین ضروری است برای درک بهتر چگونگی عملکرد این رویکرد و معیار ارزیابی پیشنهادی، ابتدا به صورت مختصر به توصیف ساختار عملکردی $MOEA/D$ و رویکردهای تجزیه مورد استفاده و همچنین معیارهای ارزیابی موجود پرداخته شود.

تعریف ۱- ژانگ و همکاران (۲۰۰۹) یک مساله $MOOP$ را می‌توان در قالب مدل ریاضی (۱) بیان کرد.

$$\text{Min } F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)) \quad \text{s.t. } X \in \Omega. \quad (1)$$

که در آن Ω فضای جواب و $F: \Omega \rightarrow R^m$ یک تابع برداری در R^m است. اگر اهداف مساله، توابعی پیوسته باشند و همچنین اگر $\Omega = \{X \in R^n \mid h_j(X) \geq 0, j=1, \dots, p\}$ در نظر گرفته شود که در آن $h_j(X)$ s توابعی پیوسته هستند، آنگاه رابطه (۱) یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه پیوسته نامیده می‌شود. از آن‌جاکه اهداف رابطه (۱) غالباً در تضاد با یکدیگرند، لذا معمولاً نقطه‌ای در Ω نمی‌توان یافت که به‌طور هم‌زمان همه اهداف مساله را کمینه نماید.

۲-۱- رویکرد تجزیه در حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه

مایتینن (۲۰۰۱) برخی رویکردهای بهینه‌سازی مقیاس‌پذیر را ارایه نمود و مایتینن (۲۰۱۲) به بررسی $MOOP$ غیرخطی پرداخت و در این روش‌ها تقریب مرز پارتو به کمک مجموعه‌ای از مسایل بهینه‌سازی تک‌هدفه انجام می‌شود که در ادامه با در نظر گرفتن رابطه (۱)، به بررسی چند رویکرد شناخته‌شده در این زمینه می‌پردازیم.

۲-۱-۱- رویکرد چیبیشف^۱

در این رویکرد، مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه به صورت مدل (۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{Min } g^{te}(X \mid \lambda, Z^*) \quad \text{s.t. } X \in \Omega. \quad (2)$$

که در آن $g^{te}(X \mid \lambda, Z^*) = \text{Max} \{ \lambda_i | f_i(X) - z_i^* \mid 1 \leq i \leq m \}$ که $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$ بردار وزنی و بردار $Z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$ یک نقطه مرجع (نقطه ایده‌آل) می‌باشد و به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود.

$$z_i^* = \text{Min} \{ f_i(X) \mid X \in \Omega, i=1, \dots, m \}. \quad (3)$$

با توجه به اینکه برای هر نقطه بهینه پارتو X^* یک بردار وزنی λ وجود دارد به طوری که X^* جواب بهینه (۲) می‌باشد و همچنین هر جواب بهینه (۲) یک جواب بهینه پارتو (۱) است، بنابراین، می‌توان با تغییر بردارهای وزنی، جواب‌های مختلف بهینه پارتو رابطه (۱) را به دست آورد (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

۲-۱-۲- رویکرد تقاطع مرز^۲

رویکردهای مختلف تجزیه در حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه مانند رویکرد تقاطع نرمال مرزی^۳ داس و دنیس^۴ (۱۹۹۸) و رویکرد محدودیت نرمال شده^۵ مساک و مکاران (۲۰۰۳) را می‌توان در قالب رویکرد BI طبقه‌بندی کرد. این رویکردها برای حل یک $MOOP$ پیوسته طراحی شده‌اند. مرز پارتو این مساله قسمتی از مرز پایینی مجموعه اهداف ممکن آن است. در این رویکرد، مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه به صورت مدل ریاضی (۴) در نظر گرفته می‌شود.

¹ Miettinen

² Boundary Intersection (BI), (Source: Messac et al.)

³ Normal-boundary intersection

⁴ Das and Dennis

⁵ Normalized normal constraint

$$\text{Min } g^{bi}(X | \lambda, Z^*) = d \quad \text{s.t. } F(X) - Z^* = d\lambda, \quad X \in \Omega. \quad (4)$$

که در آن Z^* نقطه مرجع تعریف شده در رابطه (۳) و λ بردار وزنی و d فاصله Z^* تا $F(X)$ است. هدف این است که $F(X)$ تا حد امکان به مرز بهینه مجموعه اهداف ممکن، نزدیک شود.

۳-۱-۲- رویکرد تقاطع مرزی مبتنی بر جریمه^۱

یکی از اشکالات رویکرد BI را این گونه می توان مطرح کرد که در تعیین مرز پارتو، ممکن است حالتی پیش آید که $F(X)$ در محدودیت تساوی مدل (۴) صدق نکند؛ بنابراین می توان از روش جریمه برای رفع این مشکل استفاده نمود و سپس مساله بهینه سازی تک هدفه حاصل را حل نمود. برای این منظور مدل (۵) را در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} \text{Min } g^{bip}(X | \lambda, Z^*) &= d_1 + \theta d_2, \\ \text{s.t.} \\ d_1 &= \frac{\| (F(X) - Z^*)^T \lambda \|}{\| \lambda \|}, \\ d_2 &= \| F(X) - (Z^* + d_1 \lambda) \|, \\ X &\in \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $\theta > 0$ پارامتر جریمه از پیش تعیین شده است. این رویکرد را رویکرد تقاطع مرزی مبتنی بر جریمه (PBI) می نامند.

۲-۲- الگوریتم تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه $MOEA/D$

الگوریتم $MOEA/D$ ، رابطه (۱) را به N زیرمساله بهینه سازی تک هدفه تجزیه و این زیرمساله ها را به طور هم زمان حل می کند. این الگوریتم در هر نسل، جمعیتی از بهترین جواب های یافت شده را برای هر زیرمساله تشکیل می دهد. روابط همسایگی در میان این زیرمساله ها بر اساس فاصله بین بردارهای وزنی آن ها تعریف می شود. از آن جاکه جواب های بهینه زیرمساله های همسایه با توجه به پیوسته بودن مساله نزدیک به هم می باشند، لذا هر زیرمساله در $MOEA/D$ فقط با استفاده از اطلاعات زیرمساله های همسایه خود بهینه سازی می شود (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹). در ادامه برای بیان $MOEA/D$ ، فرض می کنیم که رویکرد تجزیه مورد استفاده در این الگوریتم رویکرد چیبیشف باشد. همچنین فرض کنید $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$ مجموعه ای از بردارهای وزنی باشند که به صورت یکنواخت توزیع شده باشند و Z^* نقطه مرجع مورد استفاده باشد که از حل مدل (۳) به دست آمده است. تقریب مرز بهینه پارتو رابطه (۱) با حل N زیرمساله بهینه سازی تک هدفه با استفاده از رویکرد تجزیه چیبیشف (رابطه ۲) ملاحظه شود) محاسبه می گردد که تابع هدف j th زیرمساله به صورت رابطه (۶) می باشد.

$$g^{te}(X | \lambda^j, Z^*) = \text{Max}\{\lambda_i^j | f_i(X) - z_i^* | \mid 1 \leq i \leq m\} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (6)$$

که در آن الگوریتم $MOEA/D$ به دنبال کمینه سازی N توابع هدف به طور هم زمان در یک اجرا می باشد. شایان ذکر است که چون تابع g^{te} نسبت به λ پیوسته است، بنابراین، می توان گفت جواب تقریبی $g^{te}(X | \lambda^j, Z^*)$ به جواب تقریبی $g^{te}(X | \lambda^k, Z^*)$ نزدیک می شود هرگاه بردار وزنی λ^j به بردار وزنی λ^k نزدیک شود؛ بنابراین هرگونه اطلاعات درباره g^{te} با بردارهای وزنی نزدیک به λ^j برای بهینه کردن رابطه (۱) مفید است. در $MOEA/D$ ، یک همسایگی از بردار وزنی λ^j به صورت مجموعه ای از بردارهای وزنی $\{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N\}$ که کمترین فاصله اقلیدسی را نسبت به λ^j دارند، تعریف می شود. همسایگی زیرمساله j th شامل تمامی زیرمساله های متناظر با بردارهای وزنی همسایه λ^j می باشد. مرز تقریبی پارتوی حاصل شامل بهترین جواب یافت شده در بین تمام زیرمساله ها می باشد. برای بهینه کردن یک زیرمساله در $MOEA/D$ فقط جواب های جاری زیرمساله های همسایه بررسی می شود. برای مطالعه بیشتر مراحل الگوریتم به مرجع ژانگ و همکاران (۲۰۰۹) مراجعه شود.

¹ Penalty-Based BI (PBI) (Source: Farina and Amato)





مفهوم چیرگی پارتو و بهینه پارتو نقش مهمی در توسعه MOEA داشته‌اند. باین حال، در تعاریف اولیه چیرگی پارتو تفاوتی بین دو جواب که هیچ‌یک بر دیگری چیرگی ندارد، قائل نمی‌شود. همچنین هیچ معیاری برای محاسبه میزان چیرگی یک جواب بر دیگری در نظر گرفته نشده است. از این رو تعریف چیرگی فازی، با بیان یک مجموعه فازی برای تعیین میزان کمیت درجات چیرگی و استفاده از عملگر مجموعه‌ها برای ترکیب چندین مجموعه فازی و فراهم کردن شرایط لازم برای مقایسه دو جواب که هیچ‌یک بر دیگری چیرگی ندارند، مطرح می‌شود (نصیر و همکاران، ۲۰۱۳؛ هی و همکاران، ۲۰۱۳). در این بخش، با در نظر گرفتن مساله کمینه‌سازی (۱) به تعریف چیرگی فازی می‌پردازیم.

تعریف ۲ (چیرگی فازی نسبت به تابع i th)- نصیر و همکاران (۲۰۱۳) به ازای هر جواب موجه $U, V \in \Omega$ جواب U بر جواب V نسبت به تابع i th چیره فازی است اگر به ازای هر $i = 1, \dots, m$ داشته باشیم $f_i(U) < f_i(V)$ و با $U \prec_i^F V$ نمایش داده می‌شود. همچنین درجه چیرگی فازی نسبت به تابع i th به صورت رابطه (۷) محاسبه می‌گردد.

$$\mu_i^{dom}(U \prec_i^F V) = \mu_i^{dom}(f_i(U) - f_i(V)). \quad (7)$$

تعریف ۳ (چیرگی فازی کل)- نصیر و همکاران (۲۰۱۳) فرض کنید دو جواب $U, V \in \Omega$. در این صورت U بر V چیره فازی است اگر و تنها اگر برای هر $i = 1, \dots, m$ داشته باشیم $U \prec_i^F V$. چیرگی فازی کل با نماد $U \prec^F V$ نمایش داده می‌شود و همچنین درجه چیرگی فازی $\mu^{dom}(U \prec^F V)$ با استفاده از تابع عضویت (۷) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mu^{dom}(U \prec^F V) = \prod_{i=1}^m \mu_i^{dom}(U \prec_i^F V). \quad (8)$$

در بخش بعدی، با توجه به تعاریف چیرگی فازی، به بیان مفهوم درجه نزدیکی گوسی که بیانگر میزان نزدیکی یک جواب پارتو به نقطه مرجع است، می‌پردازیم و به کمک آن کیفیت جواب‌های پارتو را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. برای بررسی میزان تاثیرپذیری این رویکرد پیشنهادی، در بخش ۴-۲ از این مفهوم برای تعریف یک رویکرد تجزیه جدید تحت عنوان رویکرد تجزیه گوسی در MOEA/D بهره خواهیم جست و به تجزیه و تحلیل و ارزیابی نتایج حاصل از این رویکرد پیشنهادی با نتایج حاصل از رویکردهای تجزیه شناخته‌شده دیگر خواهیم پرداخت.

۲-۴- رویکرد تجزیه گوسی

در این رویکرد، مدل مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه مورد استفاده در MOEA/D، به صورت رابطه (۹) بیان می‌گردد:

$$\text{Max } g^{Ga}(X | \lambda, Z^*) \quad \text{s.t. } X \in \Omega. \quad (9)$$

که در آن

$$g^{Ga}(X | \lambda, Z^*) = \prod_{i=1}^m q_i(X | \lambda, Z^*). \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) مقادیر گوسی q_i که متناظر با تابع f_i از توابع هدف مساله (۱) هستند را به کمک تابع گوسی (۱۱) محاسبه می‌کنیم.

$$q_i(X | \lambda, Z^*) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda f_i(X) - z_i^*}{\sigma}\right)^2\right). \quad (11)$$

که در آن λ بردار وزنی و بردار $Z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$ نقطه مرجع تعریف شده در رابطه (۳) می‌باشند.

خروجی مدل (۹) که یک کمیت در بازه $[0, 1]$ است، به عنوان درجه نزدیکی بردار $F(X)$ به بردار Z^* تعریف می‌شود. واضح است که هرچه مقدار خروجی مدل (۹) به یک نزدیک‌تر باشد، میزان نزدیکی بردار $F(X)$ به بردار Z^* بیشتر می‌باشد.

قضیه ۱- فرض X^* جواب بهینه متناظر با رویکرد تجزیه گوسی باشد. در این صورت X^* جواب بهینه MOOP است.

$$\begin{aligned} \text{Min } F(X) &= (f_1(X), \dots, f_m(X)) \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (12)$$

$$X \in \Omega.$$

اثبات: فرض کنید $X^* \in \Omega$ وجود داشته باشد که در رابطه تجزیه گوسی زیر صدق کند. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌کنیم $\lambda = \bar{1} \in R^n$ ، در این صورت با توجه به تعریف g^{Ga} داریم:

$$\begin{aligned} \exists X^* \in \Omega \quad \text{s.t.} \quad g^{Ga}(X^* | \bar{1}, Z^*) &= \text{Max} \{ g^{Ga}(X | \bar{1}, Z^*) | X \in \Omega \} \\ &= \text{Max} \left(\prod_{i=1}^m \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{f_i(X) - z_i^*}{\delta} \right)^2 \right) \right) \quad X \in \Omega, \end{aligned} \quad (13)$$

که بیشینه فوق به ازای هر i در $\{ (f_i(X) - z_i^*) | X \in \Omega \}$ اتفاق می‌افتد. از طرفی واضح است که کمینه رابطه $\{ (f_i(X) - z_i^*) | X \in \Omega \}$ در Z_i^* اتفاق می‌افتد. در این صورت:

$$\text{Arg} \left(\min_{X \in \Omega} (F(X) - Z^*) \right) = \text{Arg} \left(\min_{X \in \Omega} F(X) \right) = X^*. \quad (14)$$

نکته حایز اهمیت اینکه در رابطه (۱۰) می‌توان به جای $\prod_{i=1}^m q_i(X | \lambda, Z^*)$ از عبارت‌های $\sum_{i=1}^m q_i(X | \lambda, Z^*)$ یا $\sum_{i=1}^m q_i(X | \lambda, Z^*)$ نیز استفاده کرد که به ترتیب می‌توان از آن‌ها به عنوان حالت‌های خوش بینانه و بدبینانه در الگوریتم تجزیه گوسی اشاره کرد.

اکنون در الگوریتم ۱، به نحوه فراخوانی رویکرد تجزیه گوسی در رابطه (۹) در $MOEA/D$ می‌پردازیم. برای این منظور، در مرحله ۴- (۲) از الگوریتم $MOEA/D$ معرفی شده در ژانگ و همکاران (۲۰۰۹)، از رویکرد تجزیه گوسی جهت محاسبه میزان نزدیکی یک جواب به جواب مرجع به منظور مقایسه مرزهای پارتو بهره خواهیم برد.

الگوریتم ۱- الگوریتم تکاملی مبتنی بر تجزیه گوسی $MOEA/GD$.

ورودی‌ها: تعداد زیرمساله‌ها (N)، عدد اصلی هر همسایگی (T)، بردارهای وزنی $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$ با توزیع یکنواخت، معیار توقف.

خروجی: مرز تقریبی پارتو EP .

مرحله ۱- مقداردهی اولیه.

$$1. \quad EP := \{ \}$$

۲. با در نظر گرفتن فاصله اقلیدسی به ازای هر بردار وزن λ^i ، $EP := \{ \}$ ، بردار وزنی نزدیک به T را محاسبه کنید و فرض کنید $B(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}$ مجموعه اندیس بردارهای $\lambda^{i_1}, \lambda^{i_2}, \dots, \lambda^{i_T}$ ، نزدیک‌ترین بردارهای وزنی به λ^i باشد.

۳. یک جمعیت اولیه از جواب‌های X^1, X^2, \dots, X^N را به‌طور تصادفی تولید کرده و با توجه به مساله (۱)، مقادیر هدف $FV^i = F(X^i)$ را برای هر X^i محاسبه کنید.

مرحله ۲- به‌روزرسانی.

برای هر $i = 1, \dots, N$ مراحل ۱ تا ۵ را انجام دهید.

۱. بازتولید: به کمک دو جواب تصادفی X^k و X^l که $k, l \in B(i)$ با استفاده از یک عملگر ترکیب جواب جدید Y را تولید کنید.

۲. بهبود: یک روش جستجوی محلی برای بهبود Y اعمال و جواب بهبودیافته Y' را تولید کنید.

¹ MOEA/Gaussian Decomposition (MOEA/GD)





۳. بروز رسانی بردار Z^* : برای هر $j = 1, \dots, m$ اگر $z_j^* > f_j(Y')$ آنگاه z_j^* را در $f_j(Y')$ قرار دهید.

۴. بروز رسانی در همسایگی: برای هر $j \in B(i)$ اگر $g^{Ca}(Y' | \lambda^j, Z^*) \geq g^{Ca}(X^j | \lambda^j, Z^*)$ در این صورت قرار دهید: $X^j := Y'$ و $FV^j := F(Y')$.

۵. بروز رسانی EP : اگر عناصر EP بر $F(Y')$ چیرگی نداشته باشند، قرار دهید $EP := EP \cup F(Y')$. سپس تمام عناصر EP که بردار $F(Y')$ بر آن‌ها چیرگی دارد را حذف کنید.

مرحله ۳- معیارهای توقف.

در صورت برقراری معیار (های) توقف، جمعیت EP به عنوان تقریبی مطلوب از مرز بهینه پارتو مطلوب در نظر گرفته شود. در غیر این صورت، به مرحله ۲ باز گردید.

شایان ذکر است که عملگرهای استفاده شده در مراحل (۱-۲) و (۲-۲) به ترتیب عملگر ترکیب یک نقطه‌ای و عملگر جهش مرسوم با احتمال $0.1/0.9$ هستند (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹). همچنین مقادیر پارامتر N و T بر اساس ژانگ و همکاران (۲۰۰۹) لحاظ شده‌اند. در مرحله (۴) از الگوریتم ۱، با توجه به مفهوم درجه نزدیکی گوسی، جواب‌های جدید تولید شده در صورتی به مجموعه جواب پارتو اضافه می‌شوند که درجه نزدیکی بردار توابع هدف نظیر آن‌ها از نقطه مرجع Z^* نسبت به تمام نقاط همسایگی آن جواب‌ها بیشتر باشد.

در رویکردهای تجزیه ارائه شده در ادبیات موضوع، تمام نقاط با هر نوع کیفیتی دارای وزن مشترکی. به عبارتی، اهمیت یکسان در محاسبه میزان نزدیکی آن نقاط به بردار بهینه دارند؛ اما در رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی سعی شده است با دیدگاهی متفاوت در محاسبه میزان نزدیکی یک بردار (نقطه) به بردار بهینه (بردار مرجع)، از برخی از ویژگی‌های تابع گوسی جهت انجام تحقیقات استفاده گردد. برای توضیح بیشتر، با توجه به دارا بودن شکل زنگوله‌ای توزیع گوسی، فارغ از اینکه پارامترها چگونه تنظیم می‌شوند، اهمیت تعداد نقاط و همچنین میزان نزدیکی مجموعه‌ای از نقاط به نقطه‌ای خاص (نقطه میانه که در اینجا از بردار مرجع استفاده شده است) به صورت صریح در محاسبه کیفیت مجموعه‌ی نقاط نمود پیدا می‌کند، ویژگی مهمی که عملاً منجر به حذف نقاط دور از بردار مرجع که از آن‌ها می‌توان به عنوان نویز یاد کرد، خواهد شد. خاصیتی که در رویکردهای تجزیه موجود کمتر مورد توجه قرار گرفته است. نقش این خاصیت را به عنوان یکی از عوامل برتری رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی نسبت به رویکردهای تجزیه دیگر، می‌توان در بخش نتایج عددی (بخش ۳) مشاهده کرد. از سوی دیگر، وابستگی این رویکرد پیشنهادی به پارامتر سیگما (انحراف معیار) در این تابع، می‌تواند به عنوان یک پارامتر تأثیرگذار در افزایش انعطاف‌پذیری این رویکرد در تقریب‌سازی بهتر مرز بهینه‌ی دسته بزرگ‌تری از مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با فراخوانی یک الگوریتم فراابتکاری، مورد استفاده قرار داد.

در ادامه ضروری است به صورت مختصر به معرفی چند معیار ارزیابی شناخته شده و پرکاربرد که در مراجع ژانگ و همکاران (۲۰۰۹) و فرینا و آماتو (۲۰۰۴) معرفی و بیان شده‌اند، بپردازیم. معیارهای ارزیابی مختلفی برای مقایسه عملکرد الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه وجود دارد که به بررسی و مقایسه کیفیت مرزهای پارتو حاصل از روش‌های حل $MOOP$ می‌پردازند.

معیار فاصله از نقطه مرجع (معیار M_1)

در این معیار، یک نقطه مرجع در مساله در نظر گرفته می‌شود و فاصله (اقلیدسی) نقاط روی مرز پارتو تا نقطه مرجع محاسبه می‌گردد. مرزی که متوسط فاصله نقاط آن تا نقطه مرجع کمترین باشد، از کیفیت بالاتری برخوردار است.

معیار کیفیت (معیار M_2)

دو مرز پارتو مانند A و B که از دو رویکرد مختلف تولید شده‌اند را در نظر بگیرید که هرکدام در یک منطقه بهتر از دیگری است. در این رویکرد این‌که چه کسری از یک مرز پارتوی بر مرز پارتوی دیگر چیرگی دارد، به عنوان ملاک برتری یک رویکرد تعریف می‌شود؛ به عبارت دیگر، با محاسبه $C_{A,B}$ به ازای هر دو مرز پارتو A و B به صورت زیر:



$$C_{A,B} = \frac{|\{a \in A \mid \exists b \in B, \text{ a بر b چیرگی دارد}\}|}{|A|} \quad (15)$$

که در آن $| \cdot |$ عدد اصلی یک مجموعه تعریف می‌شود، کمیت $Q_{A,B}$ با جابجایی A و B در رابطه (۱۵) به صورت مشابه تعیین می‌شود.

حال اگر $Q_{A,B} > Q_{B,A}$ آنگاه جواب‌های واقع بر مرز پارتو A در مقایسه با جواب‌های مرز پارتوی B از کیفیت بالاتری برخوردار است.

معیار $GDI (M_3)$

فرض کنید P^* مجموعه‌ای از نقاط مرز بهینه پارتو با توزیع یکنواخت باشد و مرز پارتو A تقریبی از P^* باشد، میانگین فاصله A از P^* به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$D(A, P^*) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v, A)}{|P^*|} \quad (16)$$

که در آن $d(v, A)$ کمینه فاصله اقلیدسی بین v و نقاط A است. اگر A به گونه‌ای باشد که بتوان آن را به عنوان یک تقریب خوب از P^* در نظر گرفت، کمیت $D(A, P^*)$ می‌تواند تنوع و همگرایی را هم‌زمان ارزیابی کند (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹). در مسایل عملی که مرز بهینه P^* در دسترس نیست، می‌توان با کران پایین P^* کار کرد. با توجه به محاسبه هم‌زمان میزان تنوع و همگرایی یک مرز پارتو، این معیار یک معیار پرکاربرد در ارزیابی سطح کیفی مرزهای مختلف پارتو به شمار می‌رود. برای نمونه می‌توان به مراجع زیتسلر و همکاران (۲۰۰۱)، دب و همکاران (۲۰۰۲)، زیتسلر و همکاران (۲۰۰۰) و جینا^۱ (۲۰۱۳) مراجعه کرد.

۳- پیاده‌سازی الگوریتم MOEA/GD

یکی از راه‌های درک بهتر نقاط قوت و ضعف عملکرد یک الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه استفاده از یک مجموعه مناسب مسایل کتابخانه‌ای (آزمون) استاندارد است. زیتسلر و همکاران (۲۰۰۰) نخستین بار مسایل آزمون دوهدفه به نام ZDT را معرفی کردند. این مسایل از نوع مسایل کمینه‌سازی بوده و هرکدام دربرگیرنده ویژگی‌های خاصی مانند مرزهای پارتو محدب و یا معقر و همچنین مرزهای بهینه محلی متنوعی می‌باشند که بر اساس آن‌ها می‌توان عملکرد رویکردهای مختلف را با توجه به معیارهای ارزیابی مختلف موردسنجش قرار داد. در ضمیمه ۱، نوع و ویژگی‌های ساختاری مربوط به این نوع مسایل آزمون آورده شده است. همچنین در این مقاله به منظور سنجش عملکرد رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی، در جدول ۱، تحلیل حساسیت انجام شده بر روی پارامتر σ که در مرحله ۴ الگوریتم ۱ استفاده می‌شود، آورده شده است. در این تحلیل، عملکرد الگوریتم ۱ با توجه به مقادیر مختلف $\sigma \in (0,1)$ و با در نظر گرفتن میانگین مقادیر معیار ارزیابی M_3 بر روی توابع آزمون استاندارد مورد مطالعه قرار گرفته است. بر این اساس، σ متناظر با کمترین مقدار معیار M_3 ، یعنی $\sigma = 0.5$ به عنوان بهترین انتخاب σ برای ادامه روند مطالعه، در نظر گرفته می‌شود. محاسبات مربوط به این مقاله بر روی سیستمی با مشخصات $Cpu E5_2650v3 @ 2.3GHz intel(R) Xeon(R) RAM 32GB$ انجام شده است که جهت کدنویسی الگوریتم $MOEA/D$ از نرم‌افزار $Matlab$ استفاده شده است.

جدول ۱- تحلیل حساسیت عملکرد الگوریتم ۱ با σ مختلف.

مقادیر σ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
معیار M_3	0.0184	0.0198	0.78	0.0172	0.0171	0.0190	0.0508	0.0265	0.0185

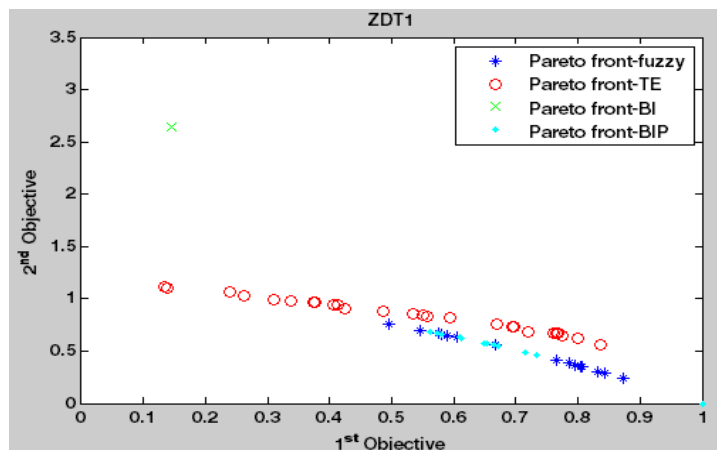
¹ Jena



در این بخش به منظور ارزیابی دقیق‌تر عملکرد رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی (D_{Ga})، به بررسی کیفیت مرز پارتوی حاصل از این رویکرد پیشنهادی و مرزهای پارتو تولیدشده توسط رویکردهای تجزیه چیبیشف (D_{Te})، تجزیه تقاطع مرزی (D_{BI}) و تجزیه تقاطع مرزی مبتنی بر جریمه (D_{PBI}) می‌پردازیم. در این بررسی، از سه معیار M_1 ، M_2 و M_3 جهت ارزیابی کیفیت جواب‌ها استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است که با توجه به تعدد تکرارها، در جدول نتایج، میانگین مقادیر M_3 برای هر رویکرد تجزیه، لحاظ شده است. برای درک بهتر جدول نتایج مربوط به مقایسه رویکردهای تجزیه، از مفهوم درصد انحراف نسبی^۲ نسبت به بهترین جواب به‌دست‌آمده، یعنی

$$RDP(X) = \left| \frac{X_{best} - X}{X_{best}} \right| \times 100. \quad (17)$$

استفاده شده است. همچنین، نتایج عددی از اعمال رویکردهای تجزیه بر روی توابع آزمون دوهدفه ZDT با توابع هدف کمینه‌سازی حاصل شده است که در آن ابعاد مساله، تعداد تکرارها و تعداد جمعیت اولیه به ترتیب برابر با ۳، ۱۰۰ و ۵۰ در نظر گرفته شده است. با توجه به مشابه بودن نتایج برای ابعاد $n=2,3,\dots,100$ و به منظور پرهیز از اطاله کلام، در این بخش صرفاً نتایج مربوط به مسایل با بعد $n=3$ آورده شده است (در ضمیمه ۱، نتایج مربوط به مسایل با بعد $n=10$ آورده شده است). به منظور مقایسه دقیق‌تر نتایج، در تقریب مرزهای پارتوی متناظر با رویکردهای تجزیه مورد استفاده، از بردارهای وزنی و جمعیت اولیه یکسان استفاده شده است. در شکل ۱، مرزهای پارتوی حاصل از اعمال الگوریتم ۱ حاصل از فراخوانی رویکردهای مختلف تجزیه اشاره‌شده در بخش ۲، بر روی تابع آزمون ZDT1 نشان داده شده است. همچنین عملکرد رویکرد پیشنهادی D_{Ga} با رویکردهای D_{PBI} ، D_{BI} و D_{Te} با توجه به معیار ارزیابی M_2 در جدول ۲ و نیز با معیارهای M_1 و M_3 در جدول ۳ مقایسه شده‌اند.



شکل ۱- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT1 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 1- Pareto frontier approximation of ZDT1 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.

با توجه به شکل ۱، مشاهده می‌شود که مرزهای پارتوی متناظر با دو رویکرد D_{BIP} و D_{Ga} نسبت به دو رویکرد دیگر، یعنی D_{Te} و D_{BI} از کیفیت بهتری برخوردار هستند. به بیان دقیق‌تر، بر اساس نتایج جدول ۲، با توجه به معیار M_2 ، جواب‌های مرز پارتو متناظر با رویکرد D_{Ga} نسبت به جواب‌های تقریبی پارتوی رویکردهای دیگر از نظر میزان چیرگی برتری دارد و فقط دو رویکرد D_{BIP} و D_{Ga} دارای عملکرد مشابه هستند که در آن‌ها کیفیت جواب‌ها واقع بر مرزهای پارتوی نظیر، یکسان می‌باشد. شایان‌ذکر است در جداول متناظر با معیار M_2 ، علامت (\equiv) بیانگر این است که هیچ‌یک از مرزهای پارتوی مربوطه نسبت به هم برتری (یا چیرگی) ندارند.

^۱ در معیار M_3 ، مرز بهینه پارتو برای هر یک از توابع آزمون یعنی P^* ، از سایت <https://www.cs.cinvestav.mx/emooobook/appendix-e/appendix-e.html> قابل دسترسی است.

^۲ Relative Deviation Percentage (RDP)

جدول ۲- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT1.

Table 2- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT1.

نام رویکرد	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ca}	\equiv	D_{Ca}		
D_{Te}			D_{Ca}	
D_{BI}		D_{Te}	D_{Ca}	
D_{BIP}		D_{BIP}	\equiv	

جدول ۳- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_1, M_3 در مساله ZDT1 (برحسب درصد).
Table 3- The RDP of different decomposition approaches regarding M_1, M_3 on ZDT1 (in percent).

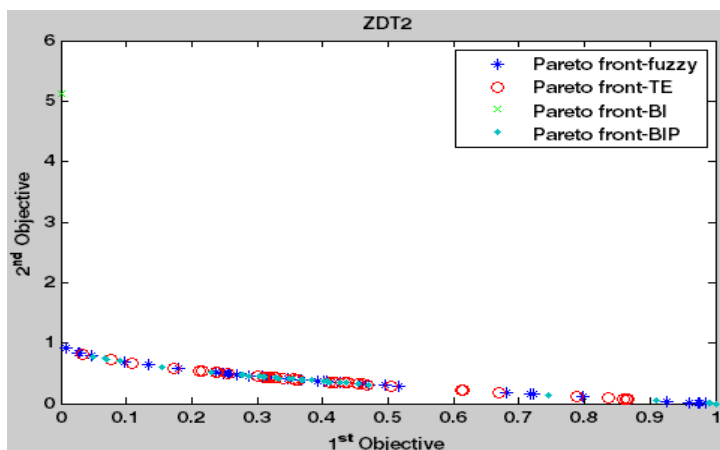
نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_1
D_{Ca}	0	0
D_{Te}	66.37	13.65
D_{BI}	794.61	295.44
D_{BIP}	0	12.72

همچنین بر اساس نتایج جدول ۳، با توجه به میزان RDP متناظر با رویکرد D_{Ca} با هر دو معیار M_1 و M_3 ، می توان گفت که جوابهای واقع بر مرز پارتوی تولیدشده توسط این رویکرد در مقایسه با مرز پارتوی تولیدشده توسط سه رویکرد دیگر از کیفیت بالاتری برخوردار است. هرچند با توجه به معیار M_3 ، عملکرد رویکردهای D_{Ca} و D_{BIP} یکسان است، ولی در مجموع با در نظر گرفتن معیار M_1 نشان از برتری کیفیت جوابهای تولیدشده رویکرد پیشنهادی D_{Ca} دارد.

شکل ۲، مرزهای پارتوی تقریبی حاصل از اعمال الگوریتم ۱ متناظر با فراخوانی چهار رویکرد D_{Ca} ، D_{Te} ، D_{BI} و D_{BIP} بر روی تابع آزمون ZDT2 می باشد که حاکی از یکسان بودن کیفیت جوابها می باشد.

در جدولهای ۴ و ۵ که به ترتیب متناظر با معیار ارزیابی M_2 و معیارهای M_1 و M_3 می باشند، مرزهای پارتوی تولیدشده توسط الگوریتم ۱ (با در نظر گرفتن چهار رویکرد تجزیه اشاره شده در مقاله) بر روی تابع آزمون ZDT2 مورد ارزیابی قرار گرفته اند.

نتایج جدول ۴ نشان می دهد که تقریباً کیفیت جوابهای تولید شده توسط رویکردهای تجزیه مختلف نسبت به معیار M_2 یکسان است و هیچ رویکردی نسبت به رویکرد دیگر برتری ندارد. ولی بر اساس نتایج مربوط به دو معیار M_1 و M_3 (جدول ۵) مشابه قبل، در حالت کلی می توان گفت که مرز پارتوی تولیدشده توسط رویکرد D_{Ca} نسبت به سه رویکرد دیگر از کیفیت بالاتری برخوردار است. هرچند عملکرد رویکردهای D_{Ca} و D_{BIP} با توجه به معیار M_1 مشابه یکدیگر است، ولی رویکرد پیشنهادی در مقایسه با رویکرد D_{BIP} ، کیفیت جوابها را به میزان ۲۸٪/۱۵ بهبود داده است.



شکل ۲- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT2 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 2- Pareto frontier approximation of ZDT2 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.



جدول ۴- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT1.

Table 4- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT2.

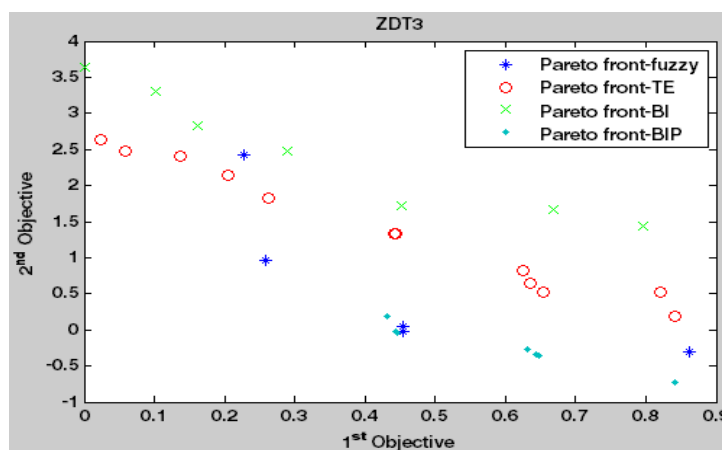
نام رویکرد	D_{Ga}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ga}	≡	≡	≡	≡
D_{Te}	≡	D_{Te}	≡	≡
D_{BI}	≡	D_{Te}	≡	≡
D_{BIP}	≡	≡	≡	≡



جدول ۵- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_1 ، M_3 در مساله ZDT2 (برحسب درصد).

Table 5- The RDP of different decomposition approaches regarding M_1 , M_3 on ZDT2 (in percent).

نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_1
D_{Ga}	0	0
D_{Te}	12.07	12.80
D_{BI}	1919.7	828.15
D_{BIP}	15.28	0



شکل ۳- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT3 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 3- Pareto frontier approximation of ZDT3 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.

نتایج مربوط به پیاده‌سازی الگوریتم ۱ بر روی تابع آزمون ZDT3 در جدول‌های ۶ و ۷ آورده شده‌اند. نکته حایز اهمیت در نتایج این تابع این است که با توجه به ماهیت تابع ZDT3 که دارای پنج مرز پارتوی محلی است، جواب‌های واقع بر مرزهای حاصل از دو رویکرد D_{Ga} و D_{BIP} نیز در پنج نقطه نزدیک بهینه‌های محلی متمرکز شده‌اند (شکل ۳ ملاحظه گردد). نتایج ارایه شده در جدول‌های ۶ و ۷ نشان می‌دهد که دو رویکرد D_{Ga} و D_{BIP} نیز نسبت به دو رویکرد دیگر از عملکرد بهتری برخوردارند. هرچند کیفیت مرز پارتوی تقریبی رویکرد D_{BIP} نسبت به دو معیار ارزیابی M_1 و M_2 نسبت به سه رویکرد دیگر بیشتر است (جدول ۶)، ولی با در نظر گرفتن معیار ارزیابی M_3 ، مشاهده می‌شود که رویکرد D_{Ga} کیفیت جواب‌ها را به میزان ۲۲/۱۵٪ نسبت به رویکرد D_{BIP} بهبود داده است (جدول ۷ ملاحظه شود).

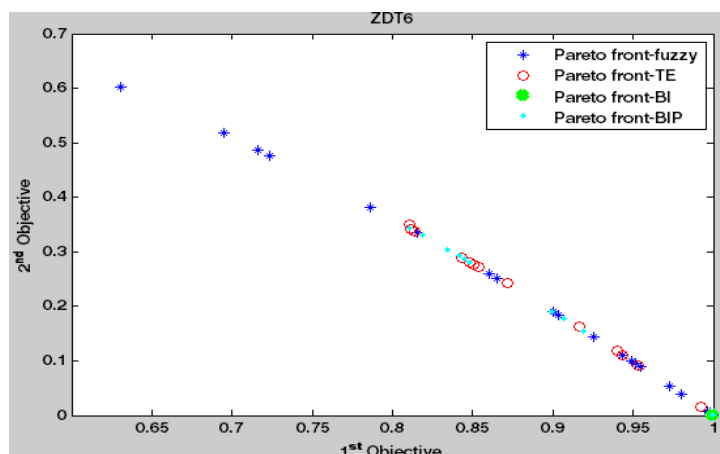
جدول ۶- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_1 در مساله ZDT3.

Table 6- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT3.

نام رویکرد	D_{Ga}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ga}	D_{Ga}	D_{Ga}	D_{Ga}	D_{Ga}
D_{Te}	D_{Ga}	D_{Te}	D_{Te}	D_{Te}
D_{BI}	D_{Ga}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BI}
D_{BIP}	D_{BIP}	D_{BIP}	D_{BIP}	D_{BIP}

جدول ۷- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_1 ، M_3 در مساله ZDT3 (برحسب درصد).
Table 7- The RDP of different decomposition approaches regarding M_1 , M_3 on ZDT3 (in percent).

نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_1
D_{Ca}	0	28.40
D_{Te}	102.31	330.44
D_{BI}	395.20	770.38
D_{BIP}	22.15	0



شکل ۴- تقریب مرز بهینه پارتوی تابع ZDT6 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 4- Pareto frontier approximation of ZDT6 by using Algorithm 1 with the four decomposition approach.

نتایج مربوط به فراخوانی الگوریتم ۱ بر روی تابع آزمون ZDT6 نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن معیار کیفی M_2 ، مرزهای پارتو تقریبی تولیدشده توسط چهار رویکرد تجزیه، تقریباً از کیفیت یکسانی برخوردار هستند (جدول ۸) که این نتایج را می‌توان به‌وضوح در شکل ۴ مشاهده کرد. بررسی بیشتر حاکی از آن است که مرز پارتوی حاصل از اعمال رویکرد D_{Ca} نسبت به هر دو معیار ارزیابی M_1 و M_3 دارای کیفیت بهتری نسبت به سه رویکرد تجزیه دیگر دارد (جدول ۹).

جدول ۸- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT6.

Table 8- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT6.

نام رویکرد	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ca}	≡	≡	≡	≡
D_{Te}	≡	≡	≡	≡
D_{BI}	≡	≡	≡	≡
D_{BIP}	≡	≡	≡	≡

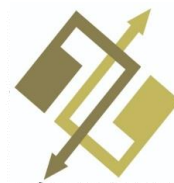
جدول ۹- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_1 ، M_3 در مساله ZDT6 (برحسب درصد).

Table 9- The RDP of different decomposition approaches regarding M_1 , M_3 on ZDT6 (in percent).

نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_1
D_{Ca}	0	0
D_{Te}	140.03	0
D_{BI}	398.63	11.83
D_{BIP}	145.43	11.83

بر اساس نتایج عددی به‌دست‌آمده، بیان این نکته ضروری است که پراکندگی و تنوع جواب‌های واقع بر مرز تقریبی پارتوی حاصل از اعمال رویکرد D_{BI} به دلیل محدودیت‌های تساوی مدل و لذا کوچک‌تر بودن فضای جواب، از وضعیت مطلوبی برخوردار نیست که





این پراکندگی نامناسب و عدم تنوع جواب‌ها در دو رویکرد D_{Te} و D_{BP} در مقایسه با رویکرد D_{Ca} در برخی حالات بیشتر نمود پیدا می‌کند (نتایج مربوط به RDP رویکردهای تجزیه مختلف با معیار کیفی M_3 و همچنین شکل‌های ۱ تا ۴ ملاحظه شود).

۳-۲- بررسی زمان محاسباتی

در این بخش، به منظور ارزیابی دقیق‌تر عملکرد رویکرد D_{Ca} زمان محاسباتی چهار رویکرد تجزیه اشاره‌شده در بخش ۱-۳ را بر روی توابع آزمون ZDT مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه نتایج مربوط به زمان‌های محاسباتی حاصل از اجرای الگوریتم ۱ بر روی توابع آزمون، تقریباً مشابه یکدیگر هستند، لذا در این بخش، فقط به تحلیل زمان‌های محاسباتی پیاده‌سازی الگوریتم ۱ با فراخوانی رویکردهای تجزیه مختلف بر روی تابع آزمون $ZDT6$ می‌پردازیم (جدول ۱۰ ملاحظه گردد).

جدول ۱۰- زمان محاسباتی متناظر با فراخوانی چهار رویکرد تجزیه بر روی تابع $ZDT6$ (برحسب ثانیه).

Table 10- Computational time corresponding to embedding four decomposition approaches on $ZDT6$ (in seconds).

نام رویکرد	تعداد تکرار	100	150	200	250	400	1000
D_{Ca}		6.1829	9.8742	12.2194	15.0715	24.8968	62.2602
D_{Te}		6.4408	9.9081	13.256	15.3682	23.5762	64.9482
D_{Bl}		5.2447	10.2985	7.9073	8.7203	27.2372	61.6853
D_{BP}		5.4821	8.3168	10.9285	13.163	21.3975	52.8847

در جدول ۱۰ زمان‌های محاسباتی متناظر با فراخوانی چهار رویکرد تجزیه مختلف در الگوریتم ۱ با تکرارهای مختلف آورده شده است. با توجه به نتایج جدول ۹، علی‌رغم عملکرد موثر رویکرد D_{Ca} در افزایش کیفیت جواب‌ها نسبت به سه رویکرد تجزیه دیگر، مشاهده می‌شود که زمان محاسباتی رویکردهای تجزیه اختلاف‌چندانی با یکدیگر ندارند که می‌توان از این اختلاف چشم‌پوشی کرد. نتایج ارایه شده در ضمیمه ۳، در خصوص میزان پیچیدگی محاسباتی مربوط به رویکردهای تجزیه (برای نمونه پیچیدگی دو رویکرد D_{Ca} و D_{Te} که در مجموع از نتایج بهتری نسبت به دو رویکرد دیگر برخوردار هستند، آورده شده است) می‌تواند تأییدی بر صحت نتایج عددی جدول ۱۰ باشد.

۳-۳- بررسی اجمالی معیارهای ارزیابی

هرچند معیارهای ارزیابی مختلفی برای بررسی عملکرد یک روش بهینه‌سازی چندهدفه می‌توان یافت، ولی با توجه به ساختار این معیارها، استفاده از تنها یک معیار ارزیابی خاص برای سنجش میزان کیفی مرزهای پارتوی تقریبی مسایل با ساختار مختلف ناکافی به نظر می‌رسد. برای توضیح بیشتر، با توجه به تعریف معیار M_1 ، این معیار صرفاً دوری یا نزدیکی جواب‌ها را نسبت به یک نقطه مرجع ملاک قرار می‌دهد و حساسیت کمتری به پراکندگی و تنوع جواب‌های واقع بر مرز پارتو دارد. در خصوص معیار ارزیابی M_2 ، همان‌طور که در نتایج به‌دست‌آمده بخش ۲-۳ نیز مشاهده شد، این معیار در برخی از مسایل (به‌عنوان نمونه، تابع آزمون $ZDT6$ را در نظر بگیرید) توانایی سنجش میزان کیفیت مرزهای پارتو مختلف را از نظر تعداد جواب‌های چیره نشده، ندارد. همچنین با توجه به ماهیت معیار M_3 ، این معیار برای مرزهای پارتویی که دارای توزیع یکنواخت نباشند و یا میزان تنوع در جواب‌های یک مرز ناکافی باشد، کارآیی مناسبی نخواهد داشت؛ بنابراین در بخش ۴، به دلیل عدم وجود یک معیار ارزیابی جامع، معیاری جدید مبتنی بر مفهوم درجه گوسی معرفی خواهیم کرد.

۴- معیار ارزیابی پیشنهادی در سنجش کیفیت مرزهای پارتو

همان‌طور که بیان شد، به دلیل خلاء ناشی از عدم وجود یک معیار جامع، در این بخش، با در نظر گرفتن ماهیت ساختاری معیار شناخته‌شده M_1 و همچنین با استفاده از درجه نزدیکی گوسی، معیار ارزیابی جدیدی معرفی خواهیم کرد تا علاوه بر حفظ مزایای معیار M_1 ، میزان چیرگی یک مرز پارتو بر مرز دیگر را نیز مورد بررسی قرار دهد.



در این معیار ارزیابی پیشنهادی که با GEM^1 نمایش می‌دهیم، با بهره جستن از مدل (۸)، برای هر مرز پارتو یک مقدار کمی که هم دربرگیرنده مفهوم چیرگی پارتو و هم بیانگر میزان درجه نزدیکی جواب‌های آن مرز پارتو تا نقطه مرجع متناظر است، محاسبه می‌شود و با توجه به این مقادیر کمی، به رتبه‌بندی و مقایسه مرزهای پارتو تقریب‌زده شده پرداخته می‌شود.

برای این منظور، فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_K مرزهای پارتوی تقریبی حاصل از اعمال K رویکرد تجزیه مختلف باشند. در الگوریتم ۲، مراحل معیار ارزیابی پیشنهادی GEM بیان شده است. در این الگوریتم پس از محاسبه مقادیر درجه نزدیکی گوسی هر مرز پارتوی A_j ($j=1, \dots, K$) نسبت به بردار Z^* نظیر (مرحله ۳)، مرزها بر اساس ترتیب نزولی g_j^{Ga} ($j=1, \dots, K$) رتبه‌بندی می‌شوند. به عبارت دیگر، مرزی که دارای بیشینه مقدار g^{Ga} باشد، به عنوان بهترین رویکرد انتخاب می‌شود (مرحله ۵).

الگوریتم ۲- معیار ارزیابی GEM .

ورودی: مرزهای پارتوی تقریبی حاصل از رویکردهای مختلف تجزیه..

خروجی: اولویت‌بندی رویکردها از نظر معیار ارزیابی GEM .

۱. مجموعه جواب‌های مرز پارتو متناظر با مرز A_j حاصل از رویکرد j را به صورت $A_j = \{X_j^1, X_j^2, \dots, X_j^{N_j}\}$ در نظر بگیرید ($j=1, \dots, K$).
۲. برای هر $X_j^i \in A_j$ بردار هدف $F(X_j^i) = (f_1(X_j^i), \dots, f_m(X_j^i))$ که در آن $i=1, \dots, N_j$ و $j=1, \dots, K$ را محاسبه کنید.
۳. برای Z^* و λ متناظر با آن در هر رویکرد $j=1, \dots, K$ ، مقدار $g^{Ga}(X_j^i | \lambda, Z^*)$ را برای هر $X_j^i \in A_j$ ($i=1, \dots, N_j$) به کمک رابطه (۸) محاسبه کنید.
۴. برای هر رویکرد $j=1, \dots, K$ مقدار $g_j^{Ga} = \max g^{Ga}(X_j^i | \lambda, Z^*)$ را محاسبه کنید.
۵. مقدار $g_L^{Ga} = \max g_j^{Ga}$ را محاسبه و L th رویکرد را به عنوان بهترین رویکرد انتخاب کنید.
۶. شایان توجه اینکه در مرحله ۵ از الگوریتم ۲، بسته به نوع تصمیم‌گیر، می‌توان به جای رابطه $\max g_j^{Ga}$ از رابطه $\frac{1}{N_j} \sum_j g_j^{Ga}$ (حالت خوش‌بینانه) و یا از رابطه $\prod_j g_j^{Ga}$ (حالت بدبینانه) بهره جست.

۴-۱- نتایج عددی

در این بخش با در نظر گرفتن معیار ارزیابی پیشنهادی GEM ، به بررسی و مقایسه مجدد سطح کیفی مرزهای پارتو تقریبی حاصل از پیاده‌سازی چهار رویکرد تجزیه D_{Ca} ، D_{Te} ، D_{Bi} و D_{BIP} که در بخش ۳ اشاره شد، می‌پردازیم و به منظور تأیید رفتار این معیار پیشنهادی، نتایج به دست آمده از ملاک قرار دادن این معیار را با نتایج ارزیابی حاصل از معیارهای M_1 و M_3 مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم. به علت عدم کارایی مناسب معیار کیفیت M_2 در تحلیل نتایج بخش ۳، در ادامه از این معیار ارزیابی صرف نظر می‌کنیم. در جدول ۱۱، مرزهای پارتوی متناظر با تابع آزمون $ZDT1$ که توسط چهار رویکرد تجزیه تولید شده‌اند (شکل ۱)، با معیار ارزیابی GEM و همچنین معیارهای ارزیابی M_1 و M_3 مقایسه شده‌اند.

جدول ۱۱- تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون $ZDT1$ بر اساس معیار پیشنهادی GEM .

Table 11- Quality analysis of Pareto frontier of $ZDT1$ based on the proposed GEM .

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_1 (درصد)
D_{Ca}	0.2228	0	0
D_{Te}	0.1174	66.37	13.65
D_{Bi}	0.0117	794.61	295.44
D_{BIP}	0.2221	0	12.72

¹ Gaussian Evaluation Measure (GEM)



بر اساس نتایج این جدول، مشاهده می‌گردد که چون مقدار g_L^{Ga} متناظر با رویکرد D_{Ga} نسبت به سه رویکرد دیگر بیشتر است، لذا رویکرد D_{Ga} از عملکرد بهتری برخوردار است. همچنین مشاهده می‌شود که رویکرد D_{Ga} با توجه به دو معیار ارزیابی دیگر، یعنی معیارهای M_1 و M_3 نیز به‌عنوان رویکرد برتر معرفی شده است. نکته قابل توجه این است که رویکرد D_{BIP} که از نظر معیار M_3 مشابه با رویکرد D_{Ga} در جایگاه نخست و از نظر معیار M_1 در جایگاه دوم قرار دارد، معیار GEM نیز این رویکرد را در جایگاه دوم از نظر عملکرد قرار می‌دهد. رویکردهای D_{BI} و D_{Te} نیز از نظر معیار GEM به ترتیب در جایگاه‌های سوم و چهارم قرار می‌گیرند، نتیجه‌ای که تایید کننده نتایج حاصل از ارزیابی دو معیار M_1 و M_3 است.

عملکرد نحوه ارزیابی معیار GEM بر روی مرزهای پارتوی تقریبی متناظر با تابع آزمون $ZDT2$ که توسط چهار رویکرد تجزیه تولید شده‌اند (شکل ۲)، در جدول ۱۲ آورده شده است. برای بررسی دقیق‌تر، نتایج حاصل از در نظر گرفتن معیارهای ارزیابی M_1 و M_3 که قبلاً در جدول ۵ بیان شده بود، نیز در این جدول آورده شده‌اند.

بر اساس نتایج جدول ۱۲، معیار پیشنهادی GEM رویکرد تجزیه D_{Ga} را در رتبه اول، رویکردهای D_{Te} و D_{BIP} به‌طور مشترک در رتبه دوم و رویکرد D_{BI} در رتبه سوم قرار می‌دهد که مشابه قبل می‌توان گفت این نتایج با توجه به مقادیر RDP متناظر با معیارهای ارزیابی M_1 و M_3 هم‌راستا با نتایج حاصل از در نظر گرفتن هم‌زمان این معیارها است.

جدول ۱۲ - تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون $ZDT2$ بر اساس معیار پیشنهادی GEM .
Table 12- Quality analysis of Pareto frontier of $ZDT2$ based on the proposed GEM .

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_1 (درصد)
D_{Ca}	0.5617	0	0
D_{Te}	0.5606	12.07	12.80
D_{BI}	0.4960	1919.7	828.15
D_{BIP}	0.5606	15.28	0

با بررسی نتایج مربوط به توابع آزمون دیگر، یعنی توابع $ZDT3$ و $ZDT6$ می‌توان نتیجه گفته‌شده در مورد توابع آزمون قبلی را مجدداً برای این توابع نیز تکرار کرد. لذا از تحلیل نتایج متناظر این توابع صرف نظر کرده و صرفاً به بیان نتایج آن‌ها که در جدول‌های ۱۳ و ۱۴ آورده شده‌اند، بسنده می‌کنیم.

جدول ۱۳ - تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون $ZDT3$ بر اساس معیار پیشنهادی GEM .
Table 13- Quality analysis of Pareto frontier of $ZDT3$ based on the proposed GEM .

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_1 (درصد)
D_{Ca}	0.2884	0	28.40
D_{Te}	0.1047	102.31	330.44
D_{BI}	0.0747	395.20	770.38
D_{BIP}	0.3704	22.15	0

جدول ۱۴ - تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون $ZDT6$ بر اساس معیار پیشنهادی GEM .
Table 14- Quality analysis of Pareto frontier of $ZDT6$ based on the proposed GEM .

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_1 (درصد)
D_{Ca}	0.3231	0	0
D_{Te}	0.2424	140.03	0
D_{BI}	0.1304	398.63	11.83
D_{BIP}	0.2124	145.43	11.83

بر اساس نتایج عددی حاصل از اعمال رویکرد تجزیه D_{Ga} و همچنین معرفی معیار ارزیابی GEM به‌منظور سنجش میزان کیفیت مرزهای پارتوی تقریبی حاصل از رویکردهای تجزیه مختلف می‌توان انعطاف‌پذیری این بحث پیشنهادی (یعنی استفاده از مفهوم درجه نزدیکی

گوسی در بررسی میزان چیرگی بردارها) را در مواجهه با جواب‌های پارتو از منظر میزان چیرگی جواب‌ها و همچنین میزان نزدیکی آن‌ها تا نقطه مرجع، مورد توجه قرار داد.

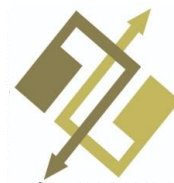
۵- نتیجه‌گیری

وجود دسته جواب‌های بهینه پارتو حاصل از حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه، با توجه به وجود سلاقی و دیدگاه‌های مختلف در یک سیستم، می‌تواند به‌عنوان یک چالش جدی در انتخاب مطلوب‌ترین تقریب مرز پارتو مطرح شود. در این مقاله، در گام نخست با استفاده از مفهوم درجه نزدیکی گوسی و بررسی ماهیت ساختاری و عملکرد الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه به ارایه یک رویکرد تجزیه مبتنی بر این مفهوم جهت تقریب مرز پارتو با کیفیت بالاتر پرداخته شد و با تقریب‌سازی مرزهای پارتوی مسایل آزمون نشان داده شد که رویکرد تجزیه گوسی با توجه به این که مانند تمامی رویکردهای تجزیه به مقدار اولیه بردار وزنی بستگی دارد باین وجود در مقایسه با رویکردهای تجزیه مشابه نسبت به سایر معیارهای ارزیابی بیان‌شده دارای کمترین انحراف نسبی است و از کیفیت بالاتری برخوردار است. در گام دوم، با توجه به برخی از معایب معیارهای ارزیابی جهت سنجش عملکرد الگوریتم‌های چندهدفه، یک معیار ارزیابی جدید، با در نظر گرفتن ماهیت ساختاری معیار M_1 و همچنین با استفاده از درجه نزدیکی گوسی، معرفی شد. سپس، این معیار ارزیابی بر روی دسته مسایل آزمون، مسایلی که دارای مرز پارتوی با توزیع یکنواخت و یا مرزهایی با تعدد نقاط بهینه محلی و یا توزیع غیریکنواخت اعمال شد که نتایج عددی حاکی از عملکرد مطلوب این معیار ارزیابی جدید است. هرچند در معرفی معیار ارزیابی پیشنهادی سعی شده است که از عوامل موثر بر کیفیت مرزهای پارتو جهت ارایه معیار ارزیابی کامل‌تر استفاده شود ولی همچنان فقدان یک معیار ارزیابی جامع که بتواند تمام ویژگی‌های ساختاری یک مرز پارتو رو مورد بررسی قرار دهد، مشهود می‌باشد. در این راستا، نویسندگان این مقاله در حال مطالعه و بررسی بر روی ارایه روشی هستند که تا علاوه بر در نظر گرفتن نقاط قوت معیارهای ارزیابی موجود، ماهیت ساختاری یک مرز پارتو را از زوایای مختلف دیگر نیز مورد بررسی قرار دهد.

منابع

- Bradford, E., Schweidtmann, A. M., & Lapkin, A. (2018). Efficient multiobjective optimization employing Gaussian processes, spectral sampling and a genetic algorithm. *Journal of global optimization*, 71(2), 407-438. <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0609-2>
- Chen, L., Xin, B. & Chen, J. (2021). Interactive multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition and compression. *Science China information sciences*, 64, 201-202. <https://doi.org/10.1007/s11432-020-3092-y>
- Das, I., & Dennis, J. E. (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating Pareto optimal points in multicriteria optimization problems. *SIAM journal on optimization*, 8(3), 631-657. DOI: [10.1137/S1052623496307510](https://doi.org/10.1137/S1052623496307510)
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2), 182-197. DOI: [10.1109/4235.996017](https://doi.org/10.1109/4235.996017)
- Farina, M., & Amato, P. (2004). A fuzzy definition of optimality for many-criteria optimization problems. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics - part A: systems and humans*, 34(3), 315-326. DOI: [10.1109/TSMCA.2004.824873](https://doi.org/10.1109/TSMCA.2004.824873)
- Gong, M., Liu, F., Zhang, W., Jiao, L., & Zhang, Q. (2011). Interactive MOEA/D for multi-objective decision making. *Proceedings of the 13th annual conference on genetic and evolutionary computation* (pp. 721-728). <https://doi.org/10.1145/2001576.2001675>
- He, Z., Yen, G. G., & Zhang, J. (2013). Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 18(2), 269-285. DOI: [10.1109/TEVC.2013.2258025](https://doi.org/10.1109/TEVC.2013.2258025)
- Jena, S. (2013). *Multi-objective optimization of the design parameters of shell and tube type heat exchanger based on economic and size consideration* (Ph.D Thesis, Bachelor of Technology). Retrieved from <http://ethesis.nitrkl.ac.in/5390/>
- Khan, W., & Zhang, Q. (2010). MOEA/D-DRA with two crossover operators. *2010 UK workshop on computational intelligence (UKCI)* (pp. 1-6). IEEE. DOI: [10.1109/UKCI.2010.5625578](https://doi.org/10.1109/UKCI.2010.5625578)
- Leung, M. F., & Ng, S. C. (2020). A hybrid algorithm based on MOEA/D and local search for multiobjective optimization. *2020 IEEE congress on evolutionary computation (CEC)* (pp. 1-8). IEEE. Glasgow, UK Doi: [10.1109/CEC48606.2020.9185741](https://doi.org/10.1109/CEC48606.2020.9185741).
- Li, H., & Zhang, Q. (2008). Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 13(2), 284-302. DOI: [10.1109/TEVC.2008.925798](https://doi.org/10.1109/TEVC.2008.925798)
- Lin, W., Lin, Q., Zhu, Z., Li, J., Chen, J., & Ming, Z. (2019). Evolutionary search with multiple utopian reference points in decomposition-based multiobjective optimization. *Complexity*, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/7436712>





- Lu, H., & Yen, G. G. (2003). Rank-density-based multiobjective genetic algorithm and benchmark test function study. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 7(4), 325–343. DOI: [10.1109/TEVC.2003.812220](https://doi.org/10.1109/TEVC.2003.812220)
- Mashwani, W. K. (2011). Integration of NSGA-II and MOEA/D in multimethod search approach: algorithms. *Proceedings of the 13th annual conference companion on Genetic and evolutionary computation* (pp. 75-76). Association for Computing Machinery. New York, NY, United States. <https://doi.org/10.1145/2001858.2001903>
- Messac, A., Ismail-Yahaya, A., & Mattson, C.A. (2003). The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier. *Structural and multidisciplinary optimization*, 25(2), 86-98. <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0276-1>
- Miettinen, K. (2001). Some methods for nonlinear multi-objective optimization. *International conference on evolutionary multi-criterion optimization* (pp. 1-20). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-44719-9_1
- Miettinen, K. (2012). *Nonlinear multiobjective optimization 12*. Springer Science & Business Media.
- Morales-Hernández, A., Gonzalez, S. R., Van Nieuwenhuysse, I., Jordens, J., Witters, M., & Van Doninck, B. (2021). *Constrained multi-objective optimization of process design parameters in settings with scarce data: an application to adhesive bonding*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2112.08760>
- Nasir, M. D., Mondal, A. K., Sengupta, S., Das, S., & Abraham, A. (2011). An improved multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition with fuzzy dominance. *2011 IEEE congress of evolutionary computation (CEC)* (pp. 765-772). IEEE. DOI: [10.1109/CEC.2011.5949696](https://doi.org/10.1109/CEC.2011.5949696)
- Taylor, K., Ha, H., Li, M., Chan, J., and Li. X. (2021). Bayesian preference learning for interactive multi-objective optimisation. *Proceedings of the genetic and evolutionary computation conference* (pp. 466-475). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. <https://doi.org/10.1145/3449639.3459299>.
- Wang, X., Xing, K., Yan, C., & Zhou, M. (2019). A novel MOEA/D for multiobjective scheduling of flexible manufacturing systems. *Complexity*, 2019, 1-14. <https://doi.org/10.1155/2019/5734149>
- Wu, X., Zhang, S., Gong, Z., Ji, J., Lin, Q., & Chen. J. (2020). Decomposition-based multiobjective evolutionary optimization with adaptive multiple gaussian process models. *Complexity*, 2020, 1-22. DOI:[10.1155/2020/9643273](https://doi.org/10.1155/2020/9643273)
- Xu, M., Zhang, M., Cai, X., & Zhang, G. (2021). Adaptive neighbourhood size adjustment in MOEA/D-DRA. *International journal of bio-inspired computation*, 17(1), 14-23.
- Yu, J., Chen, R., Li, Y., Kang, M., & Yu, S. (2021). A multi-objective optimization algorithm for air-path system of diesel engines. *IFAC-papersonline*, 54(10), 90-95. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.146>
- Zapotecas-Martínez, S., & Ponsich, A. (2020). Constraint handling within MOEA/D through an additional scalarizing function. *Proceedings of the 2020 genetic and evolutionary computation conference (GECCO '20)* (pp. 595-602). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. <https://doi.org/10.1145/3377930.3390240>
- Zhang, Q., & Li, H. (2007). MOEA/D: A multi objective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 11(6), 712-731. DOI: [10.1109/TEVC.2007.892759](https://doi.org/10.1109/TEVC.2007.892759)
- Zhang, Q., Liu, W., & Li, H. (2009). The performance of a new version of MOEA/D on CEC09 unconstrained MOP test instances. *2009 IEEE congress on evolutionary computation* (pp. 203-208). IEEE.
- Zhang, Y., Wang, G. G., Li, K., Yeh, W. C., Jian, M., & Dong, J. (2020). Enhancing MOEA/D with information feedback models for large-scale many-objective optimization. *Information sciences*, 522, 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.02.066>
- Zitzler, E., Deb, K., & Thiele, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary computation*, 8(2), 173-195. DOI: [10.1162/106365600568202](https://doi.org/10.1162/106365600568202)
- Zitzler, E., Laumanns, M., & Thiele, L. (2001). SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. *TIK-report*, 103. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-004284029>

ضمیمه ۱- مسایل آزمون استاندارد ZDT (زیتسلر و همکاران، ۲۰۰۰).

مسایل بهینه‌سازی ZDT به صورت یک مساله بهینه‌سازی دوهدفی

$$\text{Min } F(X) = \text{Min } (f_1(X), f_2(X)).$$

تعریف می‌شوند، که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابع هدف مساله هستند و بسته به اینکه این توابع چگونه تعریف شوند، نوع ZDT را تشکیل می‌دهند.

مسایل ZDT1

این نوع از مسائل دارای مرز پارتوی محدب n بعدی با دو تابع هدف f_1 و f_2 می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= x_1, \\ f_2(X) &= g(X) \cdot \left(1 - \left(\frac{f_1(X)}{g(X)} \right)^2 \right), \\ g(X) &= 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i, \\ X &= (x_1, \dots, x_n), \quad 0 \leq x_i \leq 1. \end{aligned}$$

مسایل ZDT2

این دسته مسائل شامل مسائل بهینه‌سازی دوهدفه با مرز پارتوی معقر n بعدی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= x_1, \\ f_2(X) &= g(X) \cdot \sqrt{\frac{f_1(X)}{g(X)}}, \\ g(X) &= 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i, \\ X &= (x_1, \dots, x_n), \quad 0 \leq x_i \leq 1. \end{aligned}$$

مسایل ZDT3

دسته مسائل آزمون دوهدفه ZDT3، دارای پنج مرز محلی محدب در فضای R^n می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= x_1, \\ f_2(X) &= g(X) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{f_1(X)}{g(X)}} - \frac{f_1(X)}{g(X)} \cdot \sin(10\pi f_1) \right), \\ g(X) &= 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i, \\ X &= (x_1, \dots, x_n), \quad 0 \leq x_i \leq 1. \end{aligned}$$

مسایل ZDT6

دسته مسائل بهینه‌سازی دوهدفه ZDT6، دارای مرز بهینه پارتوی محدب با توزیع غیریکنواخت در فضای n بعدی R^n می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:





$$f_1(X) = 1 - e^{-4x_1} \cdot \sin^6(6\pi x_1),$$

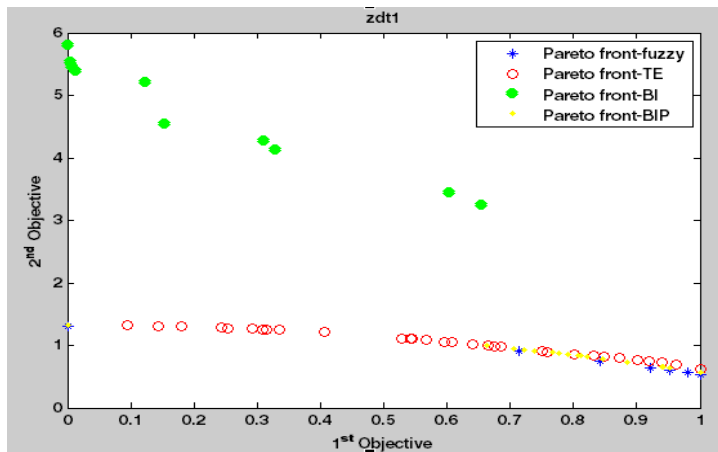
$$f_2(X) = g(X) \cdot \left(1 - \left(\frac{f_1(X)}{g(X)} \right)^2 \right),$$

$$g(X) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i,$$

$$X = (x_1, \dots, x_n), \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

ضمیمه ۲- نتایج مربوط به عملکرد رویکردهای تجزیه با بعد $n = 10$.

همان طور که در ذیل نشان داده می شود عملکرد رویکرد تجزیه گوسی پیشنهادی برای توابع آزمون استاندارد ZDT با بعدهای مختلف نیز از عملکرد بهتری نسبت به رویکردهای تجزیه دیگر برخوردار است، لذا برای پرهیز از اطاله کلام، در این قسمت صرفاً به بیان نتایج مربوط به مسائل با بعد $n=10$ به صورت مروری بسنده بیان می کنیم.



شکل ۵- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT1 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 5- Pareto frontier approximation of ZDT1 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.

جدول ۱۵- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT1.

Table 15- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT1.

D_{BIP}	D_{BI}	D_{Te}	D_{Ca}	نام رویکرد
D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}		D_{Ca}
D_{BIP}		D_{Te}	D_{Ca}	D_{Te}
D_{BIP}			D_{Ca}	D_{BI}
	D_{BIP}		D_{Ca}	D_{BIP}

جدول ۱۶- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_2 ، M_3 در مساله ZDT1 (برحسب درصد).

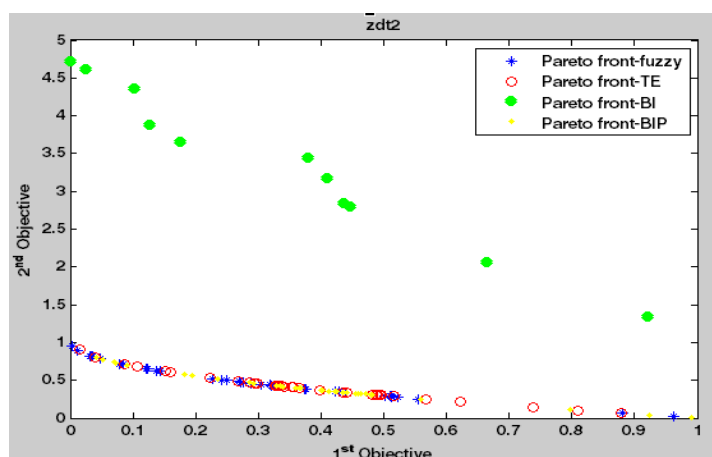
Table 16- The RDP of different decomposition approaches regarding M_2 , M_3 on ZDT1 (in percent).

معیار M_2	معیار M_3	نام رویکرد
0	0	D_{Ca}
15.2	9.42	D_{Te}
392.02	443.4	D_{BI}
0	0	D_{BIP}

جدول ۱۷ - تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون ZDT1 بر اساس معیار پیشنهادی GEM
Table 17- Quality analysis of Pareto frontier of ZDT1 based on the proposed GEM

نام رویکرد	معیار g_L^{Ga} GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_2 (درصد)
D_{Ca}	0.0793	0	0
D_{Te}	0.0642	9.43	15.3
D_{BI}	0.0641	443.4	392.02
D_{BIP}	0.0714	0	0

با توجه به شکل ۵، مشاهده می‌شود که مرزهای پارتوی متناظر با دو رویکرد D_{Ca} ، D_{Te} و D_{BIP} از کیفیت یکسانی برخوردار هستند. به بیان دقیق‌تر، بر اساس نتایج جدول ۱۶، با توجه به معیار M_2 ، جواب‌های مرز پارتو متناظر با رویکرد D_{Ca} نسبت به جواب‌های مرزهای رویکردهای دیگر از نظر میزان چیرگی برتری دارد. با توجه به میزان RDP متناظر با رویکرد D_{Ca} و D_{BIP} در هر دو معیار M_1 و M_3 ، می‌توان گفت که جواب‌های واقع بر مرزهای پارتوی تولیدشده در مقایسه با دو رویکرد دیگر از کیفیت بالاتری برخوردار است. بر اساس جدول ۱۷ نیز رویکرد پیشنهادی بر اساس الگوریتم GEM رویکرد D_{Ca} می‌باشد که دارای بیشترین درجه نزدیکی است.



شکل ۶- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT2 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 6- Pareto frontier approximation of ZDT2 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.

جدول ۱۸ - مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT2.

Table 18- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT2

نام رویکرد	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}		
D_{Te}		D_{Te}	D_{Ca}	
D_{BI}		D_{Te}	D_{Ca}	
D_{BIP}		D_{Te}	D_{Ca}	D_{BIP}

جدول ۱۹ - مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_2 ، M_3 در مساله ZDT2 (برحسب درصد).

Table 19- The RDP of different decomposition approaches regarding M_2 , M_3 on ZDT2 (in percent)

نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_2
D_{Ca}	0	20.93
D_{Te}	0	14.68
D_{BI}	279.03	740.3
D_{BIP}	7.6	0



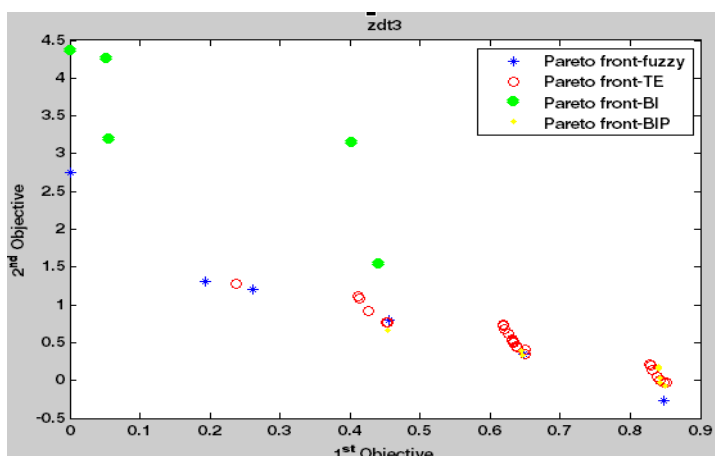
جدول ۲۰- تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون ZDT2 بر اساس معیار پیشنهادی GEM.

Table 20- Quality analysis of Pareto frontier of ZDT2 based on the proposed GEM.

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_2 (درصد)
D_{Ca}	0.5587	0	20.93
D_{Te}	0.5586	0	14.68
D_{BI}	0.5585	279.03	740.3
D_{BIP}	0.5583	7.6	0

مشابه با حالت $n=3$ برای دسته مساله ZDT2 نتایج یکسانی به دست آمده است و حاکی از یکسان بودن کیفیت جواب‌های هر سه رویکرد می‌باشد.

برای اطلاع کلام برای توابع آزمون ZDT3 و ZDT6 به دلیل یکسان بودن نتایج با حالات قبل و برتری رویکرد پیشنهادی تنها به بیان نتایج عددی و نمودارها بسنده می‌کنیم.



شکل ۷- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT3 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.

Figure 7- Pareto frontier approximation of ZDT3 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.

جدول ۲۱- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT3.

Table 21- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT3.

نام رویکرد	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}
D_{Te}	D_{Ca}	D_{Te}	D_{Te}	D_{Te}
D_{BI}	D_{Ca}	D_{Te}	\equiv	D_{BI}
D_{BIP}	D_{Ca}	D_{Te}	\equiv	D_{BIP}

جدول ۲۲- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_2 ، M_3 در مساله ZDT3 (برحسب درصد).

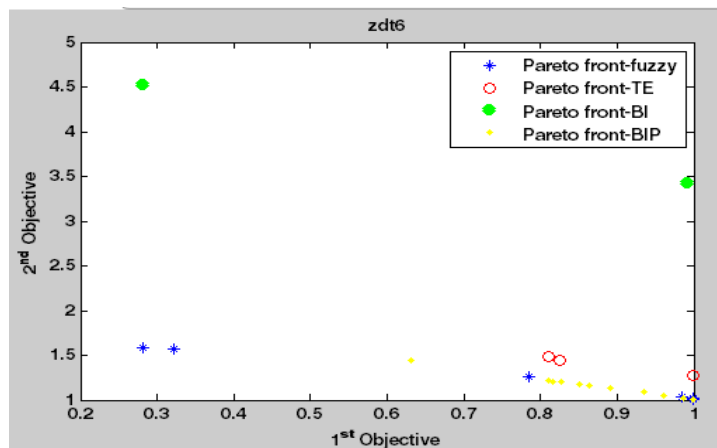
Table 22- The RDP of different decomposition approaches regarding M_2 , M_3 on ZDT3 (in percent.)

نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_2
D_{Ca}	0	0
D_{Te}	8.8	25.78
D_{BI}	251.32	418.75
D_{BIP}	0	0



جدول ۲۳- تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون ZDT3 بر اساس معیار پیشنهادی GEM.
Table 23- Quality analysis of Pareto frontier of ZDT3 based on the proposed GEM.

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_2 (درصد)
D_{Ca}	0.2375	0	0
D_{Te}	0.2106	8.8	25.78
D_{BI}	0.2106	251.32	418.75
D_{BIP}	0.2171	0	0



شکل ۸- تقریب مرز بهینه پارتو تابع ZDT6 با استفاده از الگوریتم ۱ با چهار رویکرد مختلف تجزیه.
Figure 8- Pareto frontier approximation of ZDT6 by using Algorithm 1 with the four decomposition approaches.

جدول ۲۴- مقایسه چیرگی رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیار M_2 در مساله ZDT6.
Table 24- Comparing the domination of different decomposition approaches regarding M_2 on ZDT6.

نام رویکرد	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}
D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}	D_{Ca}
D_{Te}	D_{Ca}	D_{Te}	D_{Te}	D_{Te}
D_{BI}	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BI}
D_{BIP}	D_{Ca}	D_{Te}	D_{BI}	D_{BIP}

جدول ۲۵- مقایسه RDP رویکردهای مختلف تجزیه نسبت به معیارهای M_2 ، M_3 در مساله ZDT6 (برحسب درصد).
Table 25- The RDP of different decomposition approaches regarding M_2 , M_3 on ZDT6 (in percent).

نام رویکرد	معیار M_3	معیار M_2
D_{Ca}	0	10.96
D_{Te}	34.96	12.64
D_{BI}	354.58	147.65
D_{BIP}	0	0

جدول ۲۶- تحلیل کیفیت مرزهای پارتو تابع آزمون ZDT6 بر اساس معیار پیشنهادی GEM.
Table 26- Quality analysis of Pareto frontier of ZDT6 based on the proposed GEM.

نام رویکرد	g_L^{Ga} معیار GEM	میزان RDP متناظر با معیار M_3 (درصد)	میزان RDP متناظر با معیار M_2 (درصد)
D_{Ca}	0.0173	0	10.96
D_{Te}	0.0052	34.96	12.64
D_{BI}	0	354.58	147.65
D_{BIP}	0.0182	0	0



با توجه به مراحل اشاره‌شده در الگوریتم ۱، با توجه به اینکه مرحله (۲-۴) از این الگوریتم فقط به فراخوانی و استفاده از هر یک از رویکردهای تجزیه مرتبط می‌شود، بنابراین برای محاسبه میزان پیچیدگی محاسباتی هر رویکرد کفایت فرمول اصلی هر رویکرد مورد بررسی قرار گیرد. در ذیل به عنوان نمونه به مقایسه دو رویکرد تجزیه چیبیشف و گوسی پیشنهادی می‌پردازیم.

در حالت کلی می‌توان گفت که پیچیدگی رویکرد تجزیه چیبیشف با توجه به رابطه $\{ \lambda_i | f_i(X) - z_i^* | \mid 1 \leq i \leq m \}$ به بررسی چیرگی بردارهای جواب حاصل از الگوریتم MOEA/D می‌پردازد که این رابطه معادل با پیچیدگی رابطه $\{ A_i | i = 1, \dots, m \}$ می‌باشد و لذا برابر با $O(m)$ است.

همچنین رویکرد تجزیه گوسی با توجه به رابطه:

$$\prod_{i=1}^m \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\lambda f_i(X) - z_i^*}{\sigma} \right)^2 \right).$$

چیرگی بردارهای جواب را بررسی می‌کند. به طور مشابه می‌توان گفت پیچیدگی رابطه فوق معادل با پیچیدگی عبارت $\sum_{i=1}^m B_i$ است، زیرا داریم:

$$\prod_{i=1}^m \exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\lambda f_i(X) - z_i^*}{\sigma} \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{e} \right)^{\alpha_i} = K^{\sum_{i=1}^m B_i} \quad \alpha_i \geq 0.$$

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که پیچیدگی رویکرد تجزیه گوسی نیز برابر با $O(m)$ است.

زمان محاسباتی متناظر با نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی رویکردهای تجزیه که در بخش ۳-۲ اشاره شده است نیز تاییدی بر این مطالب است که مشاهده می‌شود تفاوت فاحشی بین زمان محاسباتی مورد نیاز توسط رویکردهای تجزیه اشاره شده وجود ندارد و لذا قابل چشم‌پوشی است.