


Paper Type: Original Article



## A New Approach to the Geometric Modeling of Iranian Domes

Akbar Dehghan Nezhad<sup>1,\*</sup> , Nassim Daryani<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran; dehghannezhad@iust.ac.ir; nasim\_daryani@mathdep.iust.ac.ir.

**Citation:**



Dehghan Nezhad, A., & Daryani, N. (2023). A new approach to the geometric modeling of Iranian domes. *Journal of decisions and operations research*, 8(2), 403-423.

Received: 25/09/2021

Reviewed: 27/10/2021

Revised: 14/12/2021

Accepted: 18/01/2022

### Abstract

**Purpose:** In Islamic architecture, using arches to build dome-shaped buildings has been very common. So, the research on building the domes of shrines and mosques is undoubtedly directed at studying the arches of those buildings. In this article, we will investigate and geometrically model the domes from the perspective of differential geometry and as a rotating surface. We try to present the scientific connection between the art of architecture and differential geometry in a way that interests experts in both architectural and mathematical trends.

**Methodology:** In architecture, the dome is the product of a productive cycle around the vertical axis. This interpretation is equivalent to the definition of the rotating procedure (generating curve) in the subject of differential geometry. Special methods can obtain the generator curve. At first, according to the drawing method, we parametrize half of the arch in the Euclidean  $xoz$  plane according to the length of the dome opening and then rotate the resulting curve (or the generating curve) around the vertical  $z$ -axis. The method of conducting this research is quantitative and includes calculations related to the types of domes, and its type can be considered descriptive research.

**Findings:** We found a significant link between the mathematics that governs domed buildings and the productive arch.

**Originality/Value:** Considering the multitude of types of arches in architecture, in this article, after stating some necessary definitions of differential geometry, in addition to presenting the method of drawing each arch, we will only bring the calculations related to the types of arches with legs, horned goats, five-o-seven and shamrocks. Ultimately, we will implement our calculations on the dome of Juma Mosque in Ardabil.

**Keywords:** Arch, Dome, Surface of revolution, Generating curve, Differential geometry.

Corresponding Author: dehghannezhad@iust.ac.ir

 <http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1402.8.2.7.1>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## رویکردی نوین بر مدل‌سازی هندسه گنبد‌های ایرانی

اکبر دهقان‌نژاد<sup>۱</sup>، نسیم دریانی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

### چکیده

**هدف:** در معماری اسلامی استفاده از چفدها برای ساخت بناهای گنبدی شکل بسیار مرسوم بوده است. به طوری که تحقیق در زمینه نحوه ساخت گنبد زیارتگاه‌ها و مساجد بدون شک به مطالعه چفد مولد آن بنا هدایت می‌شود. در این مقاله قصد داریم گنبد‌ها را از منظر هندسه ديفرانسیل و به‌عنوان رویه دوار بررسی و مدل‌سازی هندسی کنیم. در واقع تلاش می‌شود پیوند علمی بین هنر معماری و هندسه ديفرانسیل را به طریقی که برای صاحب‌نظران در هر دو گرایش معماری و ریاضی مورد توجه باشد، مطرح نماییم.

**روش‌شناسی پژوهش:** در معماری، گنبد محصول دوران یک چفد مولد حول محور عمودی است. این تعبیر معادل تعریف رویه دوار (منحنی مولد) در مبحث هندسه ديفرانسیل است. به روش‌های ویژه‌ای می‌توان منحنی مولد (ضابطه چفد) را به دست آورد. در ابتدا باتوجه به نحوه ترسیم، نیمی از چفد را در صفحه اقلیدسی  $xOz$  برحسب طول دهانه گنبد پارامتری می‌کنیم و سپس منحنی حاصل (همان منحنی مولد) را حول محور عمودی  $z$  دوران می‌دهیم. روش انجام این پژوهش به صورت کمی و شامل محاسبات مربوط به انواع گنبد‌ها بوده و نوع آن را می‌توان پژوهشی توصیفی دانست.

**یافته‌ها:** ما میان ریاضیات حاکم بر ساختمان‌های گنبدی شکل چفد مولد ارتباط معناداری پیدا کردیم.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** باتوجه به تعدد انواع چفدها در معماری، در این مقاله بعد از بیان برخی تعاریف لازم از هندسه ديفرانسیل، علاوه بر ارائه روش ترسیم هر چفد، تنها محاسبات مربوط به انواع چفدهای پاتوپا، شاخ‌بزی، پنج‌اوهفت و شبدری را خواهیم آورد. در انتها به پیاده‌سازی محاسبات خود روی گنبد مسجد جمعه اردبیل خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها: چفد، رویه دوار، گنبد، منحنی مولد، هندسه ديفرانسیل.

### ۱- مقدمه

معماری در اصل هنر سازمان‌دهی به فضا به وسیله ساخت مایه‌های فیزیکی است؛ یعنی اثری که معمار ارایه می‌دهد، شکلی سه‌بعدی است که دارای هندسه‌ای معین و نظم مشخص است. در واقع معمار با استفاده از ذهن خلاق خود به نوعی به فضا جان می‌بخشد. بنای خلق شده در صورتی که اثر دست معماری زبردست باشد، روح آدمی را نوازش می‌کند. این مطلب را می‌توان به وضوح در بناهای اسلامی ایرانی مشاهده نمود. عنصر گنبد، نمونه‌ای از این بناهاست که به گفته پیرنیا [1] ارمغان ایران به جهان معماری است.

مطالعه نظم، ویژگی‌ها و خواص این بناها به زبان ریاضی و کشف اسرارشان می‌تواند ابزاری برای برقراری رابطه‌ای ملموس و دوطرفه بین بنا و مشاهده‌گر باشد. در عصر حاضر بسیاری از اندیشمندان به تحقیق درباره هندسه حاکم بر اجرام فیزیکی روی آورده‌اند، زیرا مطالعه





این اجرام مستلزم شناخت دقیق و بررسی رفتار آن‌هاست. این امر نگارندگان را بر آن داشت تا از منظر متفاوت هندسه حاکم بر بخشی ویژه‌ای از گنبدها را مورد مطالعه قرار دهند.

توجه به نحوه ارتباط قسمت‌های آسیب‌پذیر یک گنبد، با استفاده از ابرازهای نوین ریاضی و هندسه حاکم بر آن، امکان پیش‌بینی و جلوگیری از خرابی‌های احتمالی و ریزش سطح گنبدها را فراهم می‌آورد. نتایجی با این موضوعیت می‌تواند اطلاعات مورد نیاز متخصصان آسیب‌شناسی این بناها را در اختیار آنان قرار دهد.

اگر بخواهیم به عنصر گنبد با دید ریاضی و تخصصی‌تر نگاه کنیم، می‌توان گفت در هنر معماری یک گنبد به صورت یک رویه حاصل از دوران یک منحنی (چفد) مسطح، حول محور عمودی در آن سطح حاصل می‌شود. این تعبیر از گنبد معادل بخشی از تعریف مفهوم رویه دوار و منحنی مولد آن در نظریه هندسه دیفرانسیل ریاضی است. به گونه‌ای که منحنی مولد همان چفد اولیه بوده و گنبد حاصل رویه دوار خواهد بود. هرگاه با این نگرش به بناهای ایرانی دارای گنبد بنگریم، قادر خواهیم بود دسته‌بندی تازه‌ای برای این‌گونه مظاهر هنر معماری ایرانی ارائه دهیم. مطالعه چگونگی ساختار هندسی و شکل این چفدها با بهره‌گیری از مفاهیم نظریه هندسه دیفرانسیل (از قبیل انحناهای اصلی، گوسی و خطوط ژئودزیک) انگیزه اساسی این پژوهش است. با استفاده از روش‌های عددی (مانند درون‌یابی) و حتی پردازش تصویر، می‌توان منحنی مولد (چفد) را شناسایی کرده و با استفاده از فرمول‌هایی که برای رویه‌های دوار تعریف شده‌اند، گنبد مورد نظر را تحلیل نمود [2].

به نظر می‌رسد مطالعه هندسی گنبدهای ایرانی، با ابزار علمی ریاضیات نوین پیشرفته، کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است. بر طبق این برداشت، می‌توان گفت مقاله حاضر جز پژوهش‌ها در این راستا است.

در این گذار تلاش شده است تا به منظور روان بودن متن، ضابطه منحنی‌های اولیه را از چفدهای شناخته شده استخراج کنیم. از آنجایی که انواع چفدها مطرح شده در منابع موجود به صورت فرینه ترسیم می‌شوند، پس می‌توان با نیمی از شکل موجود ضابطه و رابطه اصلی (منحنی پارامتری) آن چفدها را نوشت.

محاسبه‌های موجود در متن این پژوهش برای انواع چفدها (چفدهای شبدری ساده، شبدری تند و شبدری کند، شاخ بزی تند و شاخ بزی کند، پنج او هفت تند، پنج او هفت کند و پنج او هفت خوابیده و چفد پاتوپای ساده) به صورت تحلیلی و توسط خود نگارندگان صورت پذیرفته است.

در حالت کلی، این پژوهش درصدد است با تحلیل داده‌های به دست آمده، بیان تازه‌ای از این دسته‌بندی مدل‌سازی ریاضی برای انواع بناهای گنبدهای ایرانی ارائه نماید. در الگوهای مطرح شده می‌توان ویژگی‌های ساختاری قسمت‌های مختلف بنای مورد نظر را با توجه به تغییرات و اندازه انحنا مشخص نمود. به بیانی دیگر، هدف اصلی، بررسی مدل‌های هندسی گنبدهای ایرانی مختلف (با توجه به خواص و ویژگی‌های آن‌ها) به عنوان یک رویه دوار است.

## ۲- پیشینه پژوهش

جمشیدی کاشانی [3] در کتاب *مفتاح الحساب* گنبد را به صورت طاقی تعریف کرده است که حول محور قائم (عمود منصف دهانه) دوران یافته باشد. با توجه به این تعریف، درمی‌یابیم که با استفاده از چفدهای مختلف می‌توان گنبدهای متنوعی بنا کرد. در این حالت محاسبه فرمول منحنی مولد با استفاده از ترسیم آن حاصل می‌شود و امکان محاسبه سایر مولفه‌های گنبد فراهم می‌آید. در کتاب مذکور، نحوه محاسبه حجم گنبد یا مساحت رویه آن، علی‌رغم هوشمندانه بودن در زمان مطرح شدن، به سختی و با امکان خطای بالا انجام پذیرفته است. این مشکل با توجه به پیشرفت ریاضیات و با استفاده از مفهوم رویه‌های دوار به راحتی قابل حل است و در واقع هدف اصلی این مقاله را تشکیل می‌دهد. گنبدی که جمشیدی کاشانی [3] در کتاب خود معرفی می‌کند به صورتی است که چفد مولد مربوط به قسمت زیرین گنبد است و قسمت بالایی با استفاده از ضخامت گنبد قابل حصول است.

پیرنیا [4] در این زمینه نظر دیگری دارد. او برای گنبد مذکور از اصطلاح دوپسته‌ای استفاده کرده است؛ یعنی سازه‌ای که از روی هم قرار گرفتن دو گنبد حاصل می‌شود. در این حالت پسته‌ی زیرین باربر و پسته‌ی بالایی جهت تزیین نما و هم‌چنین مقاومت در برابر تغییرات



جوی طراحی شده‌اند. نکته قابل توجه دیگری که پیرنیا به آن اشاره می‌کند، بررسی بناهای گنبدی شکل از جمله مساجد از نقطه نظر معماری شهری است. وی معتقد است از آنجایی که نحوه طراحی مساجد بر اساس قابل مشاهده بودن آن‌ها از نقاط مختلف شهر است، لذا گنبد فوقانی باید با ارتفاع بیش‌تر ساخته شود و البته پوسته‌ی زیرین نسبت به آن در ارتفاع کم‌تری قرار بگیرد؛ هم‌چنین باید توجه داشت که در طراحی گنبد‌های دوپوسته‌ای، ضخامت گنبد زیرین با نزدیک شدن به نوک گنبد کم‌تر می‌شود تا وزن گنبد زیاد نشود. برای این منظور گنبد‌ها به صورت پله‌ای ساخته می‌شوند. در واقع یکی دیگر از ویژگی‌های گنبد بالایی پوشاندن این ناهمواری‌هاست.

پیرنیا [5] در کتاب سبک‌شناسی معماری ایرانی به بیان تاریخچه مختصری از چرایی پیدایش گنبد‌ها می‌پردازد. او معتقد است یکی از انگیزه‌های بنیادی در ساخت آسمانه‌های خمیده گنبدی و بهره‌گیری گسترده از آن‌ها عدم وجود چوب مناسب برای ساختمان‌سازی بوده؛ درحالی‌که فراهم آوردن خشت و آجر ساده‌تر است. لذا معماران دست به نوآوری زده و تلاش کردند دهانه‌های بزرگ را با خشت و آجر پوشانند. ویژگی دیگر بناهای گنبدی قابلیت ساخته شدن با ساختمایه‌های ناپایدار و درعین حال مقاوم بودن آن‌ها است. در واقع پیرنیا دلیل اصلی پیدایش طاق و گنبد در معماری ایرانی را به خودبسندگی در ساختمان‌سازی نسبت می‌دهد.

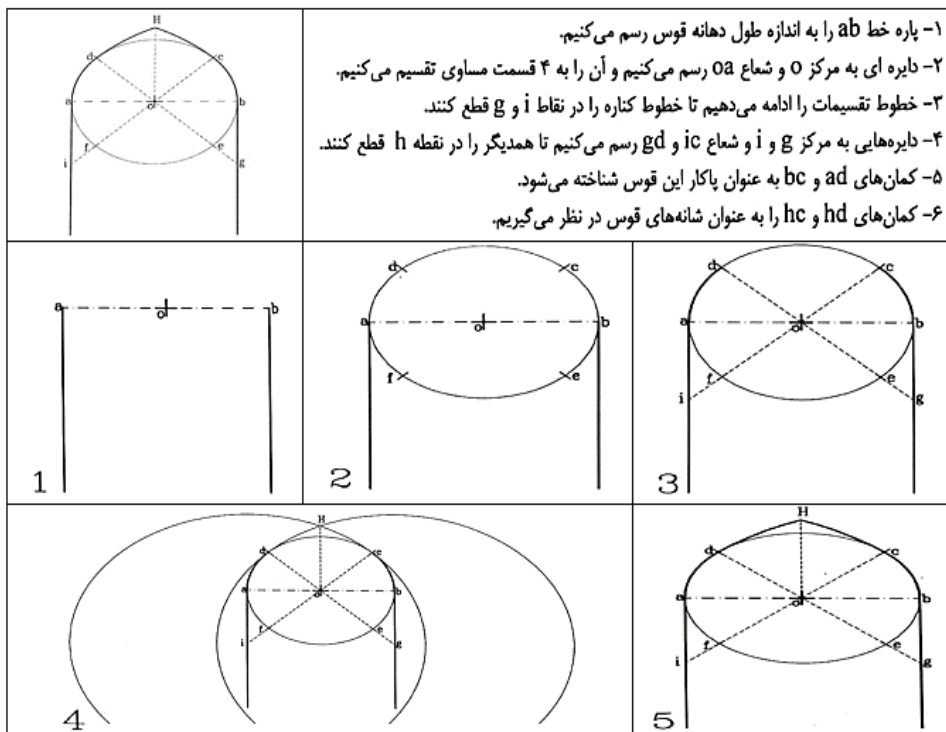
در راستای پیدا کردن ارتباط بین بناهای گنبدی شکل و مسایل زیبایی‌شناختی و علوم دیگر، پژوهش‌های بسیاری انجام پذیرفته است که از جمله آن می‌توان به مقاله صفایی پور و همکاران [6] درباره بررسی تاثیر مفهوم درخت طوبی در شکل‌گیری گنبد‌های شاخص صفوی و مقاله تخم‌چیان و همکاران [7] در باب پیوند مفهومی موسیقی، ریاضی و معماری اشاره کرد. البته مورد دوم بیش‌تر شامل ریاضیات مقدماتی و ارتباط عددی موجود در بناهاست و بامنتور این مقاله که شامل ریاضیاتی تا حدودی پیشرفته‌تر است، تفاوت دارد؛ هم‌چنین در زمینه یافتن فرمول‌های مربوط به هر چفد، می‌توان به یک مرجع اولیه موثر، تحت عنوان ویژگی‌های هندسی و ریاضی در ساختار چفد پنج او هفت در پوشش تاق‌آهنگ ایرانی اشاره نمود [8].

پژوهش‌های بسیاری برای بررسی و آنالیز سازه‌ای گنبد‌های مختلف، به صورت موردی، صورت پذیرفته است؛ از جمله مقاله ابوالحسنی زاده [9] در باب گنبد جبلیه در کرمان و مقاله حجازی و نصری [10] در مورد گنبد قابوس؛ هم‌چنین، شینی غلام پور [11] در مقاله گنبد به روایت سازه‌ی ایرانی، به بررسی گنبد‌ها و ساختمایه‌های به‌کاررفته در ساخت آن‌ها پرداخته و روش‌های مقاوم‌سازی این بناها را مورد مطالعه قرار داده است. در مقاله‌ای دیگر، شمسی پور دهکردی و همکاران [12] ایستایی گنبد و قوس با مصالح پایدار در معماری سنتی ایران را مورد تحقیق قرار داده است. تمامی مقالات ذکر شده مقاوم‌سازی را از دید یک معمار مورد توجه قرار داده‌اند.

لازم به ذکر است که دیدگاه مقاله پیش رو در نوع خود کم‌نظیر بوده و به ظن نویسندگان تاثیر بسزایی در مطالعه اصولی بناهای گنبدی شکل خواهند داشت.

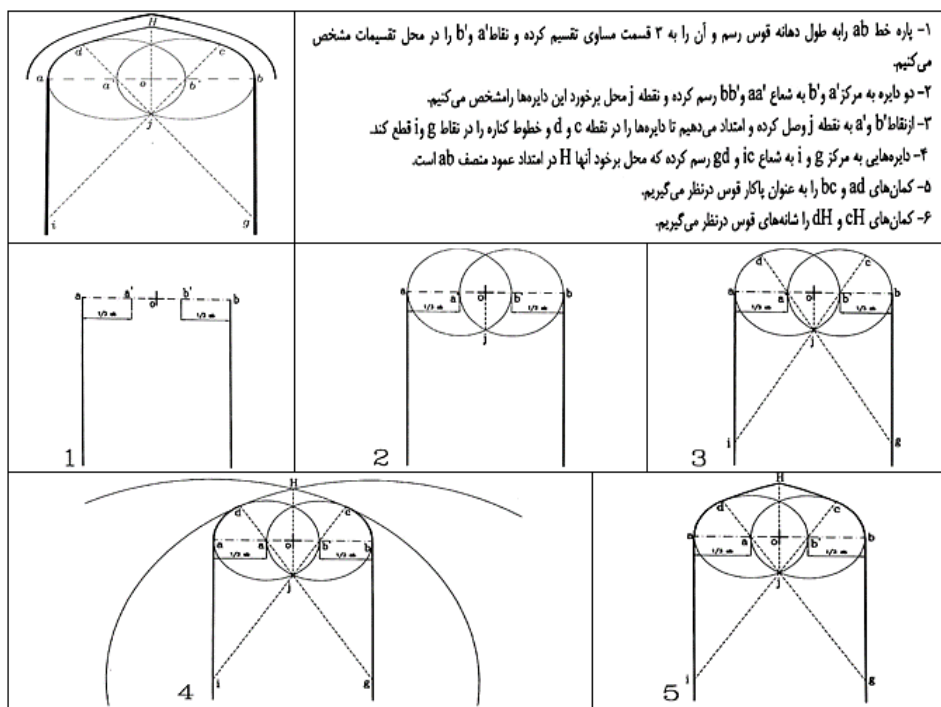
### ۳- مبانی نظری

چفد چیست؟ چفد، سازه‌ای است منحنی شکل که از ترکیب چند کمان ساده حاصل شده است. همان‌طور که در بالا به آن اشاره شد، نوع چفد، شکل گنبد حاصل و ویژگی‌های آن را مشخص می‌کند و در واقع تعیین رفتار سازه‌ای گنبد با تعیین نوع چفد مولد آن ممکن است. لازم به ذکر است که در معماری، تعیین نوع چفد در بناهای مختلف به روش‌های مستقیم و دستی و روش‌های غیرمستقیم و با استفاده از ابزارآلات مختلف امکان‌پذیر است. به این صورت که بعد از به دست آوردن داده‌ها با روش‌های موجود به مطالعه و تشخیص نوع چفد می‌پردازند [2]. از آنجایی که بیان اجزای این فرآیند از هدف اصلی این مقاله به دور است، در نتیجه با فرض دانستن نوع چفد بناهای مورد نظر، به بررسی آن‌ها از لحاظ هندسی خواهیم پرداخت. پس لازم است در ابتدا یک شرح کوتاهی در مورد نحوه ترسیم برخی چفدهای مورد استفاده در این مقاله داشته باشیم.



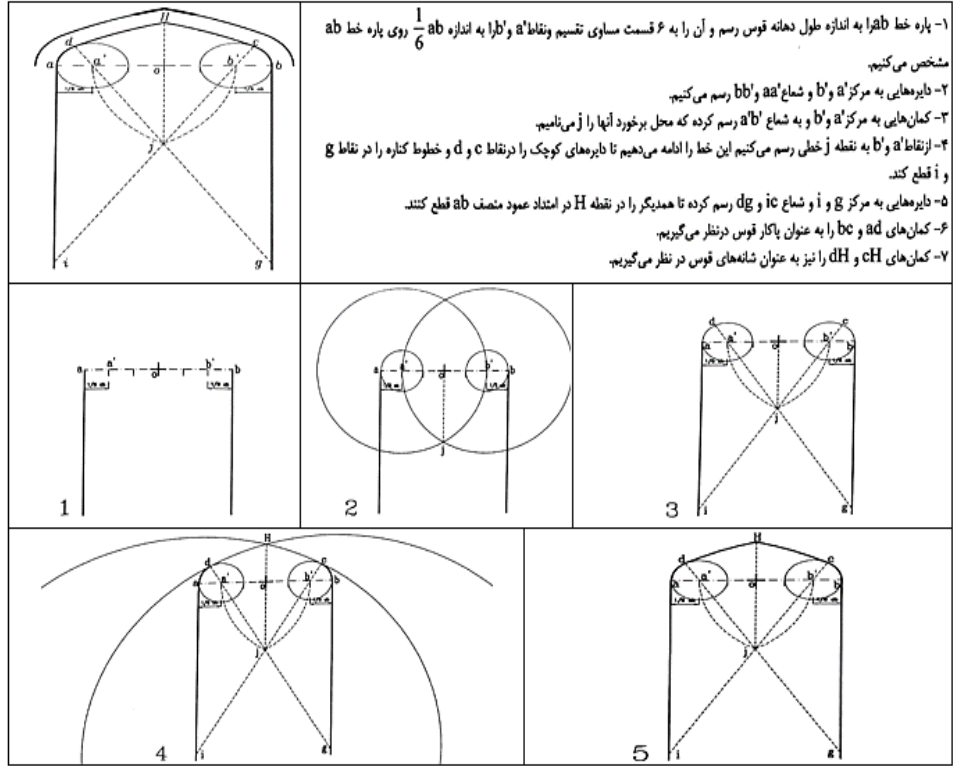
شکل ۱- ترسیم چفد پاتوپا [13].

Figure 1- Drawing of chafed Patupa [13].



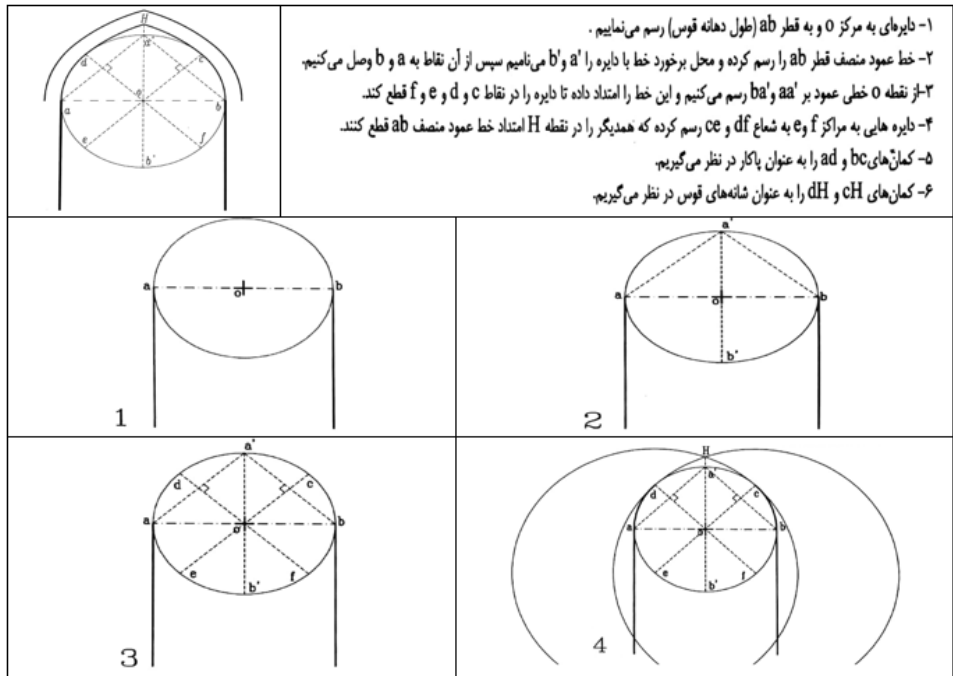
شکل ۲- ترسیم چفد شاخ بزی تند [3].

Figure 2- Drawing of chafed horned goat [3].



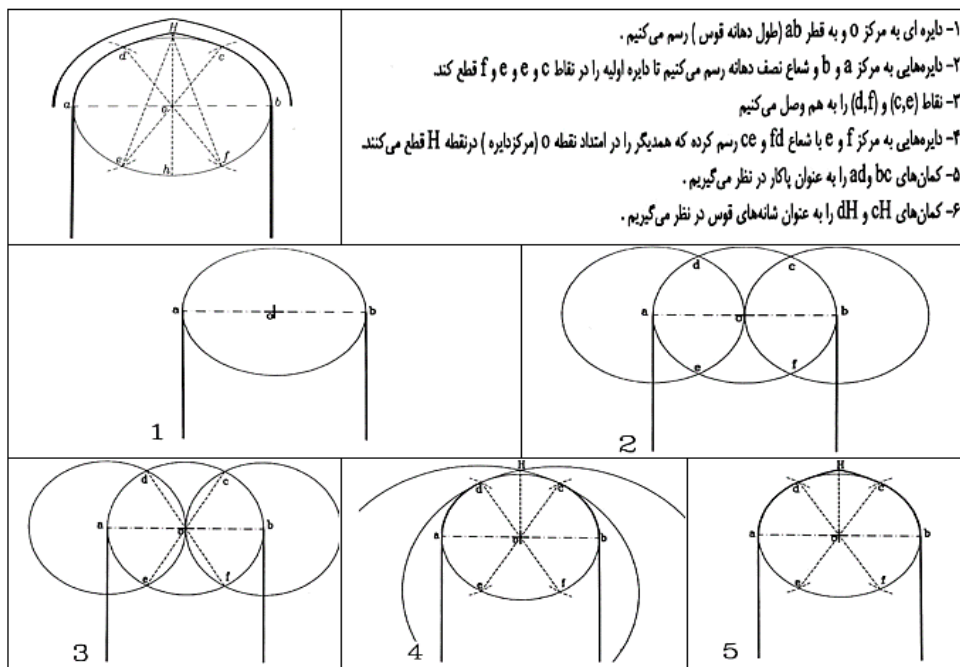
شکل ۳- ترسیم چفد شاخ بزی کند [3].

Figure 3- Drawing of a horned goat [3].



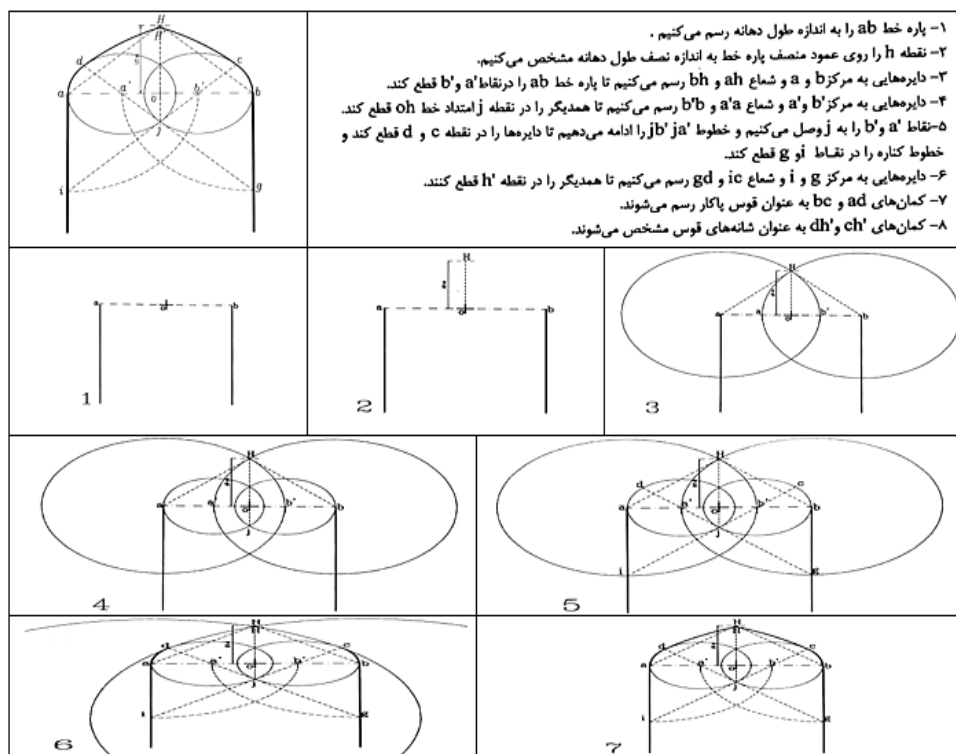
شکل ۴- ترسیم چفد شبدری ساده [3].

Figure 4- Drawing of a simple chafed clover [3].



شکل ۵- ترسیم چفد شبدری تند [3].

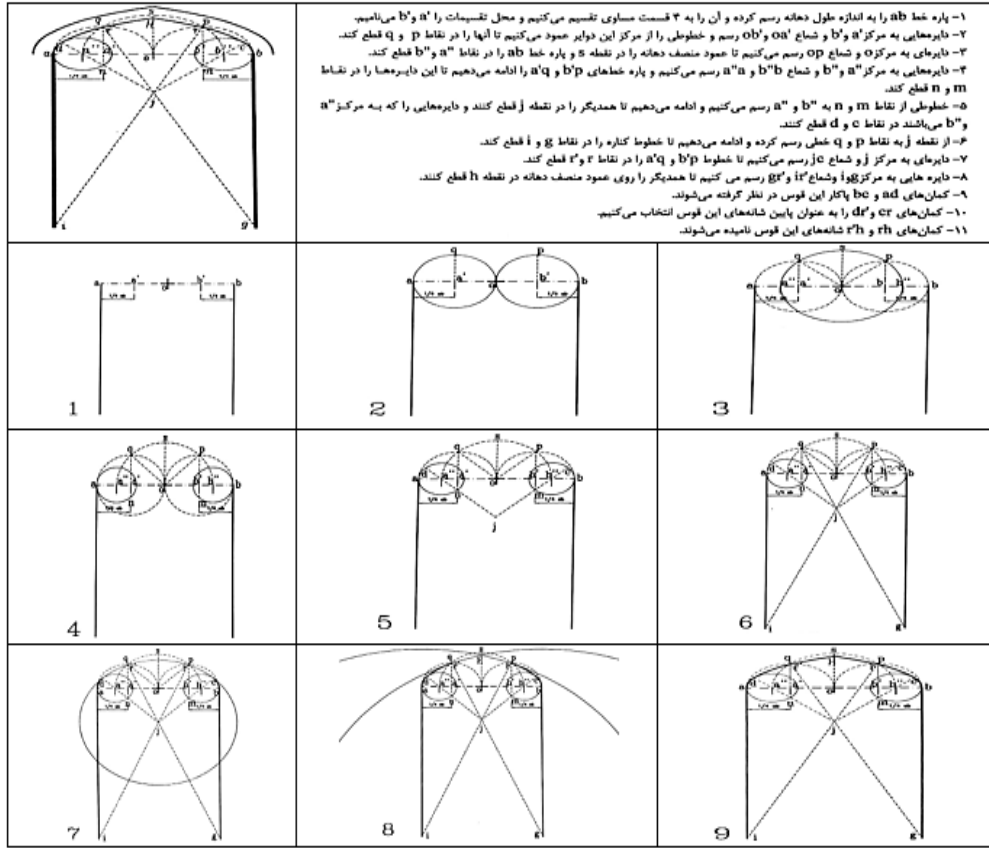
Figure 5- Drawing of chafed chabadri tand [3].



شکل ۶- ترسیم چفد شبدری کند [3].

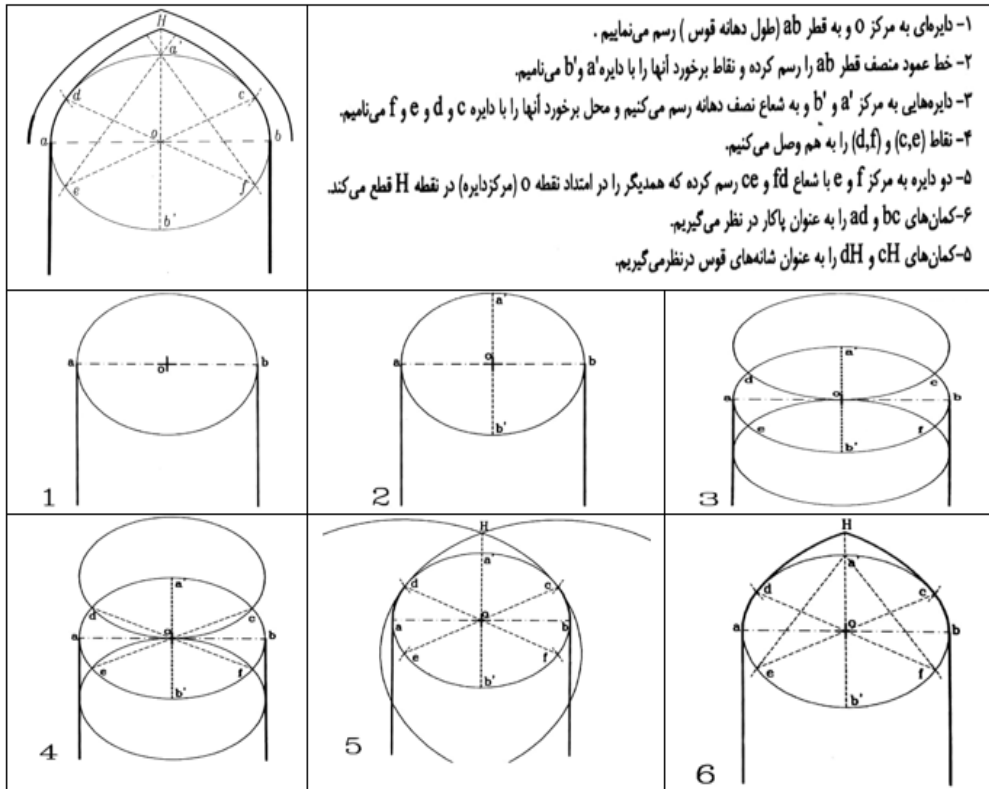
Figure 6- Drawing of chafed shabadri kand [3].





شکل ۷- ترسیم چفد پنج او هفت تند [13].

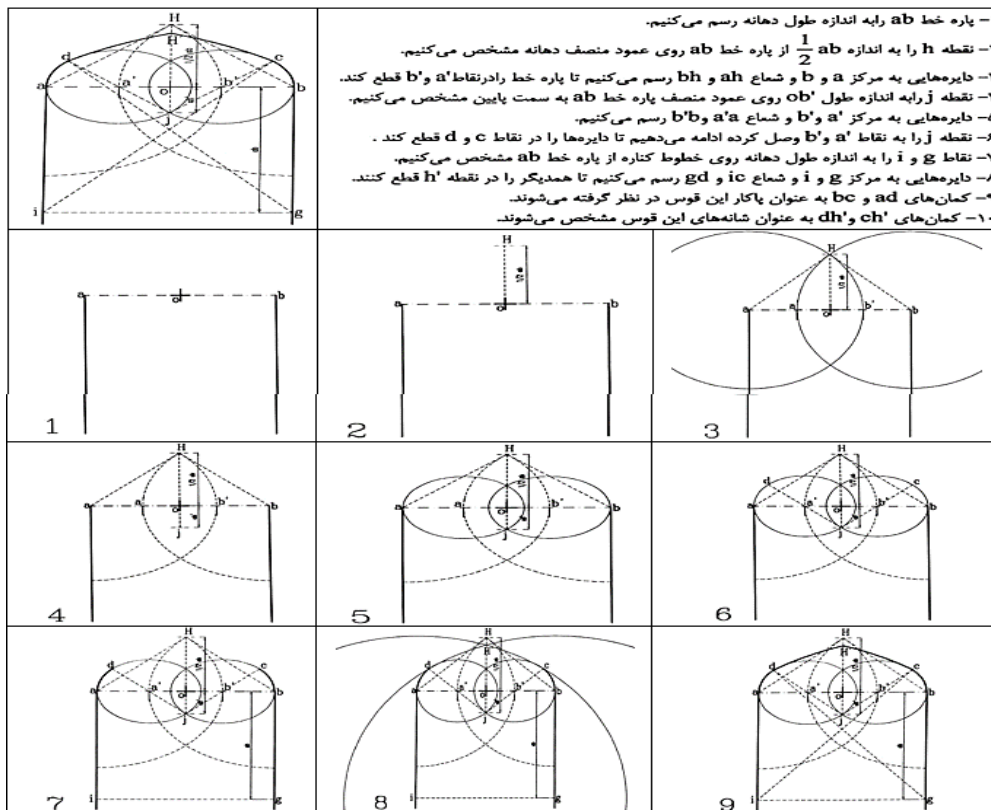
Figure 7- Drawing chafed panj oheft tand [13].



شکل ۸- ترسیم چفد پنج او هفت خوابیده [3].

Figure 8- Drawing of chafed panj oheft lying down [3].





شکل ۹- ترسیم چفد پنچ او هفت کند [13].  
Figure 9- Drawing chafed panj oheft kand [13].

### ۳-۱- مبانی نظری هندسه دیفرانسیلی مدل سازی رویه گنبدی شکل

در این قسمت مدل هندسی بناهای گنبدی شکل را با استفاده از اصطلاحات نظریه هندسه دیفرانسیل تعیین می‌شوند. به اختصار برخی تعریف‌های موردنیاز را در ادامه مطرح می‌نماییم. سپس با توجه به این نگرش، محاسبه‌های لازمه مربوط به انواع مدل‌سازی‌های هندسی را برای گنبدهای خاص انجام می‌دهیم.

همان‌طور که پیش‌تر بیان نمودیم. در اینجا، از لحاظ هندسی شکل یک گنبد، به‌عنوان یک رویه‌ای دوار در نظر گرفته می‌شود.

در صفحه اقلیدسی یک منحنی به‌صورت تابع  $\gamma(t): (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$  تعریف می‌شود که در آن متغیر  $t \in (\alpha, \beta)$  است.  $\gamma(t)$ ، تابع مکان منحنی در لحظه  $t$  و برابر با  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  است. که آن مکان من؛ کپرا در زمان  $t$  نشان می‌دهد.

طول قوس منحنی  $\gamma$  با شروع از نقطه‌ی  $\gamma(t_0)$  برابر است با:

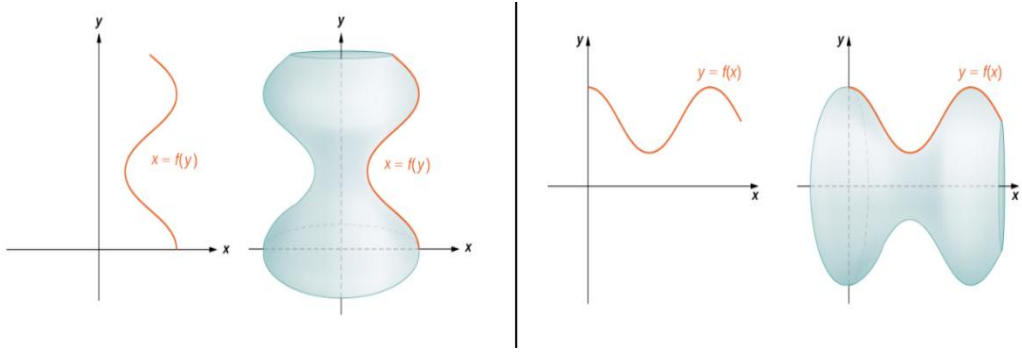
$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du.$$

هم‌چنین سرعت منحنی (نسبت تغییرات طول قوس به تغییرات زمان)  $\gamma(t)$  در نقطه‌ی  $t$  برابر است با:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

منظور از نماد  $\dot{\gamma}$  همان مشتق اول تابع  $\gamma$  نسبت به  $t$  است.

هرگاه به ازای هر متغیر  $t \in (\alpha, \beta)$  عبارت تابع مشتق  $\dot{\gamma}(t)$  یک بردار واحد باشد، می‌گوییم منحنی  $\gamma$  با سرعت واحد است، توجه داشته باشید که اگر منحنی موردنظر با سرعت واحد باشد، تابع مشتق  $\dot{\gamma}$  یا صفر است یا بر تابع مشتق (در نمایش برداری)  $\dot{\gamma}$  عمود است. در اینجا منظور از نماد  $\dot{\gamma}$  به معنی تابع مشتق دوم  $\gamma$  نسبت به متغیر  $t$  است. یک رویه دوار، رویه‌ای است در فضای اقلیدسی که از دوران یک منحنی مولد حول یک محور دورانی، حاصل می‌شود.



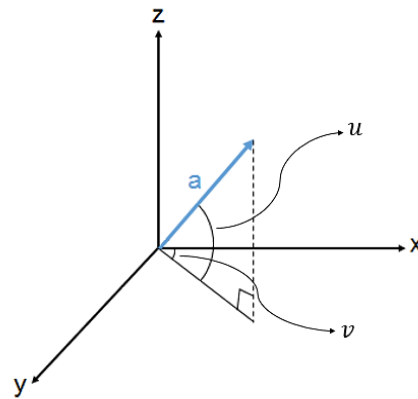
شکل ۱۰- دو نمونه از رویه دوار حاصل از دوران حول محورهای اصلی (نویسندگان).

Figure 10- Two examples of the rotating top resulting from rotation around the main axes (authors).

در این مقاله، منحنی‌های مولد گنبد‌ها را روی صفحه اقلیدسی  $xOz$  در نظر می‌گیریم و آن‌ها را حول محور عمودی  $zS$  دوران می‌دهیم. لذا این منحنی‌ها به صورت پارامتری  $(f(t), 0, g(t))$  در فضای سه‌بعدی، نمایش داده می‌شوند (منظور از تابع  $f(t)$ ، مولفه اول منحنی در لحظه‌ی  $t$ ، یعنی نسبت به محور  $xS$  است. تابع  $g(t)$  مولفه سوم منحنی در همان لحظه نسبت به محور  $zS$  است. مشخصاً مولفه دوم که نسبت به محور  $zS$  است، صفر خواهد بود).

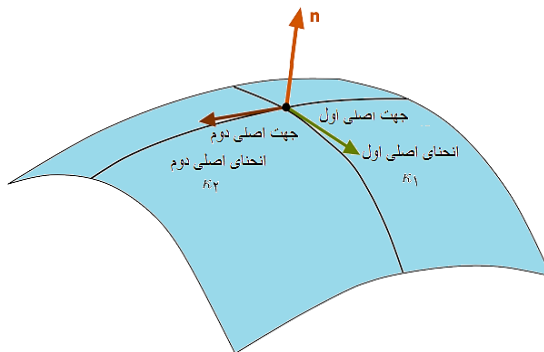
این منحنی مولد با استفاده از دو زاویه  $u$  و  $v$  و فاصله‌ی  $a$  از مبدا (در فضای سه‌بعدی)، به صورتی که در شکل ۱۱ مشاهده می‌کنید، به صورت زیر پارامتری می‌شود:

$$\sigma(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), a \cos(u) \sin(v), a \sin(u)). \quad (1)$$



شکل ۱۱- منحنی  $\gamma$  در فضای سه‌بعدی (نویسندگان).

Figure 11-  $\gamma$  curve in three-dimensional space (authors).



شکل ۱۲- تصویر انحنای اصلی یک رویه (نویسندگان).

Figure 12- Image of the main curves of a procedure (authors).



در شکل ۱۱، فرض کنید نقطه‌ی  $p$  در فضای سه‌بعدی بافاصله  $a$  از مبدا قرار دارد. برای به‌دست آوردن مولفه‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  باید این نقطه را بر صفحه‌های  $xOy$ ،  $xOz$  و  $yOz$  تصویر کنیم. با این عمل و با استفاده از توابع مثلثاتی می‌توان معادله (۱) را به‌دست آورد. تنها نکته اینجاست که تابع  $\sigma$  موقعیت هر نقطه از فضا را با توجه به زاویه‌هایی که آن با صفحه‌های  $xOz$  و  $yOz$  می‌سازد، تعیین می‌کند.

با دوران منحنی مولد موردنظر، یک رویه دوار خواهیم داشت که همان سطح گنبد حاصل از دوران چفند مولد است. در نظریه هندسه دیفرانسیل برای چنین سطوحی دو انحنا اصلی، یکی در راستای افق و دیگری در راستای عمودی تعیین می‌شوند.

باتوجه به تعریفی که از رویه‌های دوار و تعریف (۱) بیان شدند، انحناهای اصلی تابع دو متغیره  $\sigma(u, v)$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

باتوجه به این نکته در اینجا  $f(u) = a \cos(u)$  و  $g(u) = a \sin(u)$  هستند. منظور از تابع  $g$  مشتق اول تابع  $g$  نسبت به متغیره  $u$  است.

$$\kappa_1 = \frac{-\dot{f}\dot{g} + f\ddot{g}}{(\dot{f}^2 + \dot{g}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{۲}$$

$$\kappa_2 = \frac{\ddot{g}}{(\dot{f}^2 + \dot{g}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot f}.$$

حال با استفاده از انحناهای اصلی  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$ ، می‌توان انحنا گوسی  $K$  و انحنا متوسط  $H$  را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$K = \kappa_1 \times \kappa_2. \tag{۳}$$

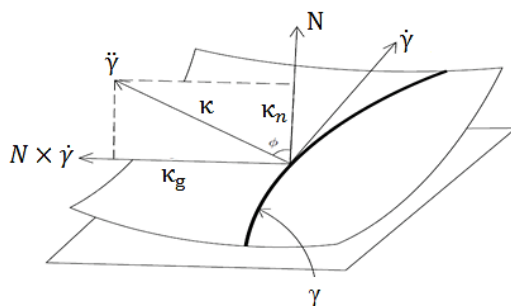
$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{۴}$$

درواقع انحنا گوسی مولفه‌ای برای تخمین میزان برآمدگی و فرورفتگی سطح رویه در نظر گرفته شده است. انحنا متوسط یک مقیاس خارجی از انحنا سطح است که به‌طور موضعی انحنا رویه را به‌دست می‌دهد.

فرض کنید  $\gamma$  خمی با سرعت واحد روی رویه  $S$  باشد. در این صورت  $\dot{\gamma}$  نیز یک برداری واحد و مماس بر رویه‌ی  $S$  است. پس می‌توان گفت،  $\dot{\gamma}$  بر بردار واحد قائم بر رویه  $S$ ، یعنی بردار  $N$  عمود است. در نتیجه  $\dot{\gamma}$ ،  $N$  و  $N \times \dot{\gamma}$  همگی بردارهایی واحد و دوه‌دو عمود برهم هستند. چون  $\gamma$  با سرعت واحد است، پس بردار  $\dot{\gamma}$  نیز بر بردار  $N$  عمود بوده و در نتیجه به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای  $N$  و  $N \times \dot{\gamma}$  خواهد بود. لذا بدین معنی داریم:

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n N + \kappa_g (N \times \dot{\gamma}). \tag{۵}$$

اسکالرهای  $\kappa_n$  و  $\kappa_g$  به ترتیب انحنا قائم و انحنا ژئودزیک منحنی  $\gamma$  بر رویه‌ی  $S$  نامیده می‌شوند.



شکل ۱۳- تصویر انحناهای قائم و ژئودزیک روی یک رویه [14].  
Figure 13- Image of vertical and geodesic curves on a surface [14].

اگر رویه پارامتری شده‌ای مانند  $S$  در اختیار داشته باشیم، فرم اساسی مرتبه اول آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2. \tag{۶}$$

که در آن  $E = \|\sigma_u\|^2$  و  $F = \sigma_u \cdot \sigma_v$ ،  $G = \|\sigma_v\|^2$  هستند.

باتوجه به تعریف‌های قبل اگر منحنی  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  در صفحه  $S$  قرار داشته و به ازای هر  $t$  در دو معادله زیر صدق کند. آنگاه به آن منحنی یک ژئودزیک گفته می‌شود.

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_{uu}\dot{u}^2 + 2F_{uv}\dot{u}\dot{v} + G_{vv}\dot{v}^2). \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2). \quad (8)$$

معادله‌های (7) و (8) را معادله‌های ژئودزیک می‌گویند. پس اگر مانند آن‌چه در بخش‌های قبلی گفته شد، فرمول منحنی مولد را به صورت  $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$  در نظر بگیریم، معادله رویه دوار دارای ضابطه دومتغیره به صورت زیر خواهد بود:

$$\gamma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, T g(u)).$$

در نتیجه معادله‌های ژئودزیک بالا به شکل زیر خواهند بود:

$$\ddot{f} + (\dot{g})^2 \cos u \cdot \sin u = 0. \quad (9)$$

$$\ddot{g} + 2\dot{f}\dot{g} \frac{\sin u}{\cos u} = 0. \quad (10)$$

برای محاسبه مفاهیم طول یک منحنی، زاویه بین دو منحنی متقاطع و مساحت قسمتی از یک رویه، نیاز است ابتدا فرم اساسی اولیه رویه را پیدا کنیم. بر طبق روابط حاصل شده بالا، برای انواع چفدهای ذکر شده در قسمت نخستین مقاله، می‌توانیم یک دسته‌بندی از مدل‌سازی‌های هندسی این چفدها را از منظر هندسه دیفرانسیل، به شرح زیر ارائه نماییم:

جدول ۱- مدل‌سازی هندسی قوس پاتوپای ساده.

Table 1- The geometric modeling of a simple patopai arch.

$z = -0.5d + \sqrt{(1.2d)^2 - (x + 0.5d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.35d.$	منحنی
$z = \sqrt{0.25d^2 - x^2}$	$0.35d \leq x \leq 0.5d.$	پارامتری شده
$h \approx 0.6d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.5d \sin u \cos v, 0.5d \sin u \sin v, 0.5d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ,$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$\sigma(u, v) = (1.2d \sin u \cos v, 1.2d \sin u \sin v, 1.2d \cos u),$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ,$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$L = \int_0^{0.35d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.2d)^2 - (x + 0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.35d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{0.25d^2 - x^2}}\right)^2} dx.$		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.35d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.2d)^2 - (x + 0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.35d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{0.25d^2 - x^2}}\right)^2} dx \right).$		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.35d} x \cdot  -0.5d + \sqrt{(1.2d)^2 - (x + 0.5d)^2}  dx + \int_{0.35d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{0.25d^2 - x^2}  dx \right).$		حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.5d = 2/d$	$\kappa_2 = 1/0.5d = 2/d,$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ.$
$\kappa_1 = 1/1.2d = 5/6d$	$\kappa_2 = 1/1.2d = 5/6d,$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ.$
$\mathcal{H} = 1/(0.5d)^2 = 4/d^2$	$\mathcal{H} = 1/0.5d = 2/d,$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ.$
$\mathcal{H} = 1/(1.2d)^2 = 25/36d^2$	$\mathcal{H} = 1/1.2d = 5/6d'$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ.$
$0.5d \cos u(0.5d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$		$0^\circ \leq u \leq 45^\circ.$
$1.2d \cos u(1.2d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$		$45^\circ \leq u \leq 70^\circ.$
$0.5d \sin u (-d \sin u - 1) = 0,$		$0^\circ \leq u \leq 45^\circ.$
$1.2d \sin u (-2.4d \sin u - 1) = 0,$		$45^\circ \leq u \leq 70^\circ.$

جدول ۲- مدل‌سازی هندسی قوس شاخ بزی تند.

Table 2 - Geometrical modeling of the sharp horn arch.

$z = -1.1d + \sqrt{(1.6d)^2 - (x + 0.5d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.33d$	منحنی
$z = \sqrt{(0.33d)^2 - (x - 0.17d)^2},$	$0.33d \leq x \leq 0.5d$	پارامتری شده
$h \approx 0.44d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.33d \sin u \cos v, 0.33d \sin u \sin v, 0.33d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ,$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$\sigma(u, v) = (1.6d \sin u \cos v, 1.6d \sin u \sin v, 1.6d \cos u),$	$60^\circ \leq u \leq 70^\circ,$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$L = \int_0^{0.33d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.6d)^2 - (x + 0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.33d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x - 0.17d)}{\sqrt{(0.33d)^2 - (x - 0.17d)^2}}\right)^2} dx.$		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.33d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.6d)^2 - (x + 0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.33d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x - 0.17d)}{\sqrt{(0.33d)^2 - (x - 0.17d)^2}}\right)^2} dx \right).$		مساحت گنبد



Table 2- Continued.

$V = 2\pi \left( \int_0^{0.33d} x \cdot  -1.1d + \sqrt{(1.6d)^2 - (x + 0.5d)^2}  dx + \int_{0.33d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.33d)^2 - (x - 0.17d)^2}  dx \right)$	حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.33d = 3/10d$ $\kappa_2 = 1/0.33d = 3/10d'$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$
$\kappa_1 = 1/1.6d = 5/8d$ $\kappa_2 = 1/1.6d = 5/8d'$	$60^\circ \leq u \leq 70^\circ$
$\mathcal{H} = 1/(0.33d)^2 = 9/100d^2$ $\mathcal{H} = 1/0.33d = 3/10d'$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$
$\mathcal{H} = 1/(1.6d)^2 = 25/64d^2$ $\mathcal{H} = 1/1.6d = 5/8d'$	$60^\circ \leq u \leq 70^\circ$
$0.33d \cos u(0.33d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$
$1.6d \cos u(1.6d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$60^\circ \leq u \leq 70^\circ$
$0.33d \sin u(-0.66d \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$
$1.6d \sin u(-3.2d \sin u - 1) = 0,$	$60^\circ \leq u \leq 70^\circ$



جدول ۳- مدل سازی هندسی قوس شاخ بزی کند.

Table 3- Geometrical modeling of the slow horn arch.

$z = -1.4d + \sqrt{(1.8d)^2 - (x + 0.5d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.42d.$	منحنی
$z = \sqrt{(0.16d)^2 - (x - 0.42d)^2},$	$0.42d \leq x \leq 0.5d.$	پارامتری شده
$h \approx 0.32d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.16d \sin u \cos v, 0.16d \sin u \sin v, 0.16d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$\sigma(u, v) = (1.8d \sin u \cos v, 1.8d \sin u \sin v, 1.8d \cos u),$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$L = \int_0^{0.42d} \sqrt{1 + \left( \frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.8d)^2 - (x + 0.5d)^2}} \right)^2} dx + \int_{0.42d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left( \frac{-(x - 0.42d)}{\sqrt{(0.16d)^2 - (x - 0.42d)^2}} \right)^2} dx.$		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.42d} x \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.8d)^2 - (x + 0.5d)^2}} \right)^2} dx + \int_{0.42d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{-(x - 0.42d)}{\sqrt{(0.16d)^2 - (x - 0.42d)^2}} \right)^2} dx \right)$		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.42d} x \cdot  -1.4d + \sqrt{(1.8d)^2 - (x + 0.5d)^2}  dx + \int_{0.42d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.16d)^2 - (x - 0.42d)^2}  dx \right)$		حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.16d = 25/4d'$ $\kappa_2 = 1/0.16d = 25/4d'$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$	
$\kappa_1 = 1/1.8d = 5/9d'$ $\kappa_2 = 1/1.8d = 5/9d'$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ$	
$\mathcal{H} = 1/(0.16d)^2 = 625/16d^2$ $\mathcal{H} = 1/0.16d = 25/4d'$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$	
$\mathcal{H} = 1/(1.8d)^2 = 25/81d^2$ $\mathcal{H} = 1/1.8d = 5/9d'$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ$	
$0.16d \cos u(0.16d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$	
$1.8d \cos u(1.8d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ$	
$0.16d \sin u(-0.32d \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ$	
$1.8d \sin u(-3.6d \sin u - 1) = 0,$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ$	

جدول ۴- مدل سازی هندسی قوس شبدری ساده.

Table 4- Geometric modeling of simple clover arch.

$z = -0.35d + \sqrt{d^2 - (x + 0.35d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.35d.$	منحنی
$z = \sqrt{(0.5d)^2 - x^2},$	$0.35d \leq x \leq 0.5d.$	پارامتری شده
$h \approx 0.6d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.5d \sin u \cos v, 0.5d \sin u \sin v, 0.5d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$\sigma(u, v) = (d \sin u \cos v, d \sin u \sin v, d \cos u),$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$L = \int_0^{0.35d} \sqrt{1 + \left( \frac{-(x + 0.35d)}{\sqrt{d^2 - (x + 0.35d)^2}} \right)^2} dx + \int_{0.35d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{(0.5d)^2 - x^2}} \right)^2} dx.$		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.35d} x \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{-(x + 0.35d)}{\sqrt{d^2 - (x + 0.35d)^2}} \right)^2} dx + \int_{0.35d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{(0.5d)^2 - x^2}} \right)^2} dx \right)$		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.35d} x \cdot  -0.35d + \sqrt{d^2 - (x + 0.35d)^2}  dx + \int_{0.35d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.5d)^2 - x^2}  dx \right)$		حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.5d = 2/d'$ $\kappa_2 = 1/0.5d = 2/d'$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$	
$\kappa_1 = 1/d'$ $\kappa_2 = 1/d'$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ$	
$\mathcal{H} = 1/(0.5d)^2 = 4/d^2$ $\mathcal{H} = 1/0.5d = 2/d'$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$	
$\mathcal{H} = 1/d^2$ $\mathcal{H} = 1/d'$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ$	
$0.5d \cos u(0.5d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$	
$d \cos u(d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ$	
$0.5d \sin u(-d \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$	
$d \sin u(-2d \sin u - 1) = 0,$	$45^\circ \leq u \leq 70^\circ$	

Table 5- Geometric modeling of the sharp clover arch.

$z = -0.25d + \sqrt{d^2 - (x + 0.43d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.43d.$	منحنی
$z = \sqrt{(0.5d)^2 - x^2},$	$0.43d \leq x \leq 0.5d.$	پارامتری شده
$h \approx 0.65d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.5d \sin u \cos v, 0.5d \sin u \sin v, 0.5d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ.$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$\sigma(u, v) = (d \sin u \cos v, d \sin u \sin v, d \cos u),$	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ.$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$L = \int_0^{0.43d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.43d)}{\sqrt{d^2 - (x + 0.43d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.43d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{(0.5d)^2 - x^2}}\right)^2} dx.$		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.43d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.43d)}{\sqrt{d^2 - (x + 0.43d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.43d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{(0.5d)^2 - x^2}}\right)^2} dx \right).$		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.43d} x \cdot  -0.25d + \sqrt{d^2 - (x + 0.43d)^2}  dx + \int_{0.43d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.5d)^2 - x^2}  dx \right).$		حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.5d = 2/d', \quad \kappa_2 = 1/0.5d = 2/d'.$	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ.$	
$\kappa_1 = 1/d', \quad \kappa_2 = 1/d'.$	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ.$	
$\mathcal{H} = 1/(0.5d)^2 = 4/d^2, \quad \mathcal{H} = 1/0.5d = 2/d'.$	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ.$	
$\mathcal{H} = 1/d^2, \quad \mathcal{H} = 1/d'.$	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ.$	
$0.5d \cos u (0.5d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ.$	
$d \cos u (d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ.$	
$0.5d \sin u (-d \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ.$	
$d \sin u (-2d \sin u - 1) = 0,$	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ.$	

Table 6- Geometric modeling of the slow clover arch.

$z = -0.43d + \sqrt{d^2 - (x + 0.25d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.25d.$	منحنی
$z = \sqrt{(0.5d)^2 - x^2},$	$0.25d \leq x \leq 0.5d.$	پارامتری شده
$h \approx 0.55d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.5d \sin u \cos v, 0.5d \sin u \sin v, 0.5d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ.$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$\sigma(u, v) = (d \sin u \cos v, d \sin u \sin v, d \cos u),$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ.$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$L = \int_0^{0.25d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.25d)}{\sqrt{d^2 - (x + 0.25d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.25d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{(0.5d)^2 - x^2}}\right)^2} dx.$		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.25d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.25d)}{\sqrt{d^2 - (x + 0.25d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.25d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{(0.5d)^2 - x^2}}\right)^2} dx \right).$		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.25d} x \cdot  -0.43d + \sqrt{d^2 - (x + 0.25d)^2}  dx + \int_{0.25d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.5d)^2 - x^2}  dx \right).$		حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.5d = 2/d', \quad \kappa_2 = 1/0.5d = 2/d'.$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ.$	
$\kappa_1 = 1/d', \quad \kappa_2 = 1/d'.$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ.$	
$\mathcal{H} = 1/(0.5d)^2 = 4/d^2, \quad \mathcal{H} = 1/0.5d = 2/d'.$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ.$	
$\mathcal{H} = 1/d^2, \quad \mathcal{H} = 1/d'.$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ.$	
$0.5d \cos u (0.5d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ.$	
$d \cos u (d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0,$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ.$	
$0.5d \sin u (-d \sin u - 1) = 0,$	$0^\circ \leq u \leq 60^\circ.$	
$d \sin u (-2d \sin u - 1) = 0,$	$60^\circ \leq u \leq 75^\circ.$	

Table 7- Geometrical modeling of the five-point arch.

$z = -0.73d + \sqrt{(1.3d)^2 - (x + 0.5d)^2},$	$0 \leq x \leq 0.42d$	منحنی
$z = \sqrt{(0.3d)^2 - (x - 0.2d)^2},$	$0.42d \leq x \leq 0.5d$	پارامتری شده
$h \approx 0.49d.$		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.3d \sin u \cos v, 0.3d \sin u \sin v, 0.3d \cos u),$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ.$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	
$\sigma(u, v) = (1.3d \sin u \cos v, 1.3d \sin u \sin v, 1.3d \cos u),$	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ.$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ.$	





Table 7- Continued.

$L = \int_0^{0.42d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x+0.5d)}{\sqrt{(1.3d)^2 - (x+0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.42d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x-0.2d)}{\sqrt{(0.3d)^2 - (x-0.2d)^2}}\right)^2} dx$	طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.42d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x+0.5d)}{\sqrt{(1.3d)^2 - (x+0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.42d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x-0.2d)}{\sqrt{(0.3d)^2 - (x-0.2d)^2}}\right)^2} dx \right)$	مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.42d} x \cdot  -0.73d + \sqrt{(1.3d)^2 - (x+0.5d)^2}  dx + \int_{0.42d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.3d)^2 - (x-0.2d)^2}  dx \right)$	حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.3d = 10/3d'$ , $\kappa_2 = 1/0.3d = 10/3d'$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .
$\kappa_1 = 1/1.3d = 10/13d'$ , $\kappa_2 = 1/1.3d = 10/13d'$	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .
$\mathcal{H} = 1/(0.3d)^2 = 100/9d^2$ , $\mathcal{H} = 1/0.3d = 10/3d'$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .
$\mathcal{H} = 1/(1.3d)^2 = 100/169d^2$ , $\mathcal{H} = 1/1.3d = 10/13d'$	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .
$0.3d \cos u(0.3d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .
$1.3d \cos u(1.3d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .
$0.3d \sin u (-0.6d \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .
$1.3d \sin u (-2.6d \sin u - 1) = 0$	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .

جدول ۸- مدل سازی هندسی قوس پنج او هفت خوابیده.

Table 8- Geometrical modeling of the arch of five horizontal arches.

$z = -1.6d + \sqrt{(2d)^2 - (x+0.5d)^2}$ ,	$0 \leq x \leq 0.25d$ .	منحنی
$z = -0.35d + \sqrt{(0.65d)^2 - x^2}$ ,	$0.25d \leq x \leq 0.46d$ .	پارامتری شده
$z = \sqrt{(0.15d)^2 - (x-0.35d)^2}$ ,	$0.46d \leq x \leq 0.5d$ .	ارتفاع قوس
$h \approx 0.39d$ .		
$\sigma(u, v) = (0.15d \sin u \cos v, 0.15d \sin u \sin v, 0.15d \cos u)$ ,	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .	
	$0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ .	
$\sigma(u, v) = (0.65d \sin u \cos v, 0.65d \sin u \sin v, 0.65d \cos u)$ ,	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
	$0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ .	
$\sigma(u, v) = (2d \sin u \cos v, 2d \sin u \sin v, 2d \cos u)$ ,	$65^\circ \leq u \leq 75^\circ$ .	
	$0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ .	
$L = \int_0^{0.25d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x+0.5d)}{\sqrt{(2d)^2 - (x+0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.25d}^{0.46d} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{(0.65d)^2 - x^2}}\right)^2} dx$		طول قوس
$+ \int_{0.46d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x-0.35d)}{\sqrt{(0.15d)^2 - (x-0.35d)^2}}\right)^2} dx$ .		
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.25d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x+0.5d)}{\sqrt{(2d)^2 - (x+0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.25d}^{0.46d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{(0.65d)^2 - x^2}}\right)^2} dx$		مساحت گنبد
$+ \int_{0.46d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x-0.35d)}{\sqrt{(0.15d)^2 - (x-0.35d)^2}}\right)^2} dx \right)$ .		
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.25d} x \cdot  -1.6d + \sqrt{(2d)^2 - (x+0.5d)^2}  dx$		حجم گنبد
$+ \int_{0.25d}^{0.46d} x \cdot  -0.35d + \sqrt{(0.65d)^2 - x^2}  dx + \int_{0.46d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.15d)^2 - (x-0.35d)^2}  dx \right)$ .		
$\kappa_1 = 1/0.15d = 20/3d'$ , $\kappa_2 = 1/0.15d = 20/3d'$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .	
$\kappa_1 = 1/0.65d = 20/13d'$ , $\kappa_2 = 1/0.65d = 20/13d'$	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$\kappa_1 = 1/2d'$ , $\kappa_2 = 1/2d'$	$65^\circ \leq u \leq 75^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 1/(0.15d)^2 = 400/9d^2$ , $\mathcal{H} = 1/0.15d = 20/3d'$	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 1/(0.65d)^2 = 400/169d^2$ , $\mathcal{H} = 1/0.65d = 20/13d'$	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 1/(2d)^2 = 1/4d^2$ , $\mathcal{H} = 1/2d'$	$65^\circ \leq u \leq 75^\circ$ .	
$0.15d \cos u(0.15d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .	
$0.65d \cos u(0.65d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$2d \cos u(2d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$65^\circ \leq u \leq 75^\circ$ .	
$0.15d \sin u (-0.3d \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 45^\circ$ .	
$0.65d \sin u (-1.3d \sin u - 1) = 0$ ,	$45^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$2d \sin u (-4d \sin u - 1) = 0$ ,	$65^\circ \leq u \leq 75^\circ$ .	



Table 9- Geometrical modeling of the arch of five ohft.

$z = -d + \sqrt{(1.5d)^2 - (x + 0.5d)^2}$ ,	$0 \leq x \leq 0.37d$	منحنی
$z = \sqrt{(0.3d)^2 - (x - 0.2d)^2}$ ,	$0.37d \leq x \leq 0.5d$	پارامتری شده
$h \approx 0.43d$ .		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (0.3d \sin u \cos v, 0.3d \sin u \sin v, 0.3d \cos u)$ ,	$0^\circ \leq u \leq 55^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$\sigma(u, v) = (1.5d \sin u \cos v, 1.5d \sin u \sin v, 1.5d \cos u)$ ,	$55^\circ \leq u \leq 70^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$L = \int_0^{0.37d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.5d)^2 - (x + 0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.37d}^{0.5d} \sqrt{1 + \left(\frac{-(x - 0.2d)}{\sqrt{(0.3d)^2 - (x - 0.2d)^2}}\right)^2} dx$ .		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{0.37d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x + 0.5d)}{\sqrt{(1.5d)^2 - (x + 0.5d)^2}}\right)^2} dx + \int_{0.37d}^{0.5d} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-(x - 0.2d)}{\sqrt{(0.3d)^2 - (x - 0.2d)^2}}\right)^2} dx \right)$ .		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{0.37d} x \cdot  -d + \sqrt{(1.5d)^2 - (x + 0.5d)^2}  dx + \int_{0.37d}^{0.5d} x \cdot  \sqrt{(0.3d)^2 - (x - 0.2d)^2}  dx \right)$ .		حجم گنبد
$\kappa_1 = 1/0.3d = 10/3d'$ , $\kappa_2 = 1/0.3d = 10/3d'$	$0^\circ \leq u \leq 55^\circ$ .	
$\kappa_1 = 1/1.5d = 2/3d'$ , $\kappa_2 = 1/1.5d = 2/3d'$	$55^\circ \leq u \leq 70^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 1/(0.3d)^2 = 100/9d^2$ , $\mathcal{H} = 1/0.3d = 10/3d'$	$0^\circ \leq u \leq 55^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 1/(1.5d)^2 = 4/9d^2$ , $\mathcal{H} = 1/1.5d = 2/3d'$	$55^\circ \leq u \leq 70^\circ$ .	
$0.3d \cos u (0.3d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 55^\circ$ .	
$1.5d \cos u (1.5d \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$55^\circ \leq u \leq 70^\circ$ .	
$0.3d \sin u (-0.6d \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 55^\circ$ .	
$1.5d \sin u (-3d \sin u - 1) = 0$ ,	$55^\circ \leq u \leq 70^\circ$ .	

جدول ۱۰- محاسبات هندسی مربوط به مسجد جمعه اردبیل (چفد شبدری تند).

Table 10- Geometrical calculations related to Ardabil Juma mosque (chafed shabdrri tend).

$z = -3.13 + \sqrt{127.81 - (x + 5.38)^2}$ ,	$0 \leq x \leq 5.38$ .	منحنی
$z = \sqrt{39.18 - x^2}$ ,	$5.38 \leq x \leq 6.26$ .	پارامتری شده
$h \approx 8.14$ .		ارتفاع قوس
$\sigma(u, v) = (6.26 \sin u \cos v, 6.26 \sin u \sin v, 6.26 \cos u)$ ,	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$\sigma(u, v) = (12.52 \sin u \cos v, 12.52 \sin u \sin v, 12.52 \cos u)$ ,	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ$ $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	
$L = \int_0^{5.38} \sqrt{1 + \frac{(x + 5.38)^2}{156.75 - (x + 5.38)^2}} dx + \int_{5.38}^{6.26} \sqrt{1 + \frac{x^2}{39.18 - x^2}} dx = 10.40$ .		طول قوس
$S = 2\pi \left( \int_0^{5.38} x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x + 5.38)^2}{156.75 - (x + 5.38)^2}} dx + \int_{5.38}^{6.26} x \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{39.18 - x^2}} dx \right) = 79.08\pi$ .		مساحت گنبد
$V = 2\pi \left( \int_0^{5.38} x \cdot  -3.13 + \sqrt{156.75 - (x + 5.38)^2}  dx + \int_{5.38}^{6.26} x \cdot  \sqrt{39.18 - x^2}  dx \right) = 178.75\pi$ .		حجم گنبد
$\kappa_1 = 0.16$ , $\kappa_2 = 0.16$ ,	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ$ .	
$\kappa_1 = 0.08$ , $\kappa_2 = 0.08$ ,	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 0.025$ , $\mathcal{H} = 0.16$ ,	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ$ .	
$\mathcal{H} = 0.006$ , $\mathcal{H} = 0.08$ ,	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$6.26 \cos u (6.26 \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ$ .	
$12.52 \cos u (12.52 \cos^2 u \cdot \sin u - 1) = 0$ ,	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	
$6.26 \sin u (-12.52 \sin u - 1) = 0$ ,	$0^\circ \leq u \leq 30^\circ$ .	
$12.52 \sin u (-12.52 \sin u - 1) = 0$ ,	$30^\circ \leq u \leq 65^\circ$ .	

باید به این نکته توجه نمود که در بررسی رفتار یک رویه، خطوط ژئودزیک بسیار حایز اهمیت هستند. به بیانی دیگر، مفهوم ژئودزی به معنای کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه است که باید مسیر حرکت از یکی به دیگری آن به‌طور کامل روی سطح قرار بگیرد. برای نمونه می‌دانیم که خطوط ژئودزیک روی یک سازه‌ی گنبدی شکل، همان خطوطی هستند که از راس گنبد شروع شده و به دایره موجود در قاعده گنبد ختم می‌شوند (همان مرز بین ترک‌های گنبد‌های ترک‌دار).





این تحقیق بر پایه داده‌های علمی و روش‌های پذیرفته‌شده در معماری استوار شده است. تمام مراحل از راه رسم چفدهای مولد تا معادله‌ها و روابط حاکم بر آن‌ها که از قواعد هندسه دیفرانسیل پیروی می‌کنند؛ همگی با اصولی پذیرفته‌شده با قوانینی مشخص هستند. ارایه یک تجزیه و تحلیل پارامترهای موثر هندسی (هندسه دیفرانسیل) در بناهای گنبدی شکل، هسته اصلی این پژوهش است. به بیانی روش استفاده‌شده در این مقاله پژوهشی و توصیفی بوده و شامل محاسبه‌های کمی و بررسی کیفی است. در پایان با استفاده از دو نمونه مورد مطالعه، انجام این نتایج پیاده‌سازی می‌شوند.

سوالاتی که درصدد پاسخ به آن‌ها هستیم شامل موارد زیر است:

۱. آیا می‌توان رفتار سازه‌ای یک گنبد را به وسیله هندسه حاکم بر آن توجیه کرد؟
۲. آیا میزان آسیب‌پذیری قسمت‌های مختلف یک گنبد قابل محاسبه و پیش‌بینی است؟
۳. آیا ممکن است با یافتن ضابطه ریاضی مدل هندسی این بناهای معماری ایرانی، از بروز آسیب‌های احتمالی به این بناهای ارزشمند ایران عزیزمان، جلوگیری نموده یا حداقل امکان آن را کاهش داد؟

در جهت بهبود دانش موثر در راستای پاسخ به سوال‌های بالا، در ابتدای کار، مروری بر نحوه ترسیم برخی چفدهای پرکاربرد در خلق گنبدها ایرانی موردنظر خواهیم داشت. بیان نحوه ترسیم این چفدها از آن جهت اهمیت دارد که در پارامتری کردن یا مشخص نمودن ضابطه ریاضی رویه گنبدها کمک سازنده‌ای خواهند نمود. ذکر این مطلب ضروری است که مراحل طراحی هر چفد مطرح‌شده در این مقاله از منابع معتبر و شناخته‌شده استخراج شده است. در مرحله بعدی، مفاهیم اساسی به کار رفته از هندسه دیفرانسیل رویه‌ها با بیانی ساده مطرح می‌شوند. به منظور ساده‌تر کردن این مفاهیم و برای اطمینان از دریافت اطلاعات لازم برای اندیشمندان عرصه مختلف (از جمله معماری) سعی شده است تا توضیحات کافی (صورت فیزیکی هر نماد و فرمول معین آن‌ها) ارایه گردند. سپس با استفاده از این دسته‌بندی مدل‌سازی، می‌توان جزئیات بیش‌تری از هندسه حاکم بر این گنبدهای ایرانی (حاصل از دوران هر چفد موردنظر) را ارایه نمود.

### ۵- یافته‌های پژوهش

در اینجا، دو نمونه از شاهکارهای هنر معماری ایرانی به نام‌های، گنبد شاه نعمت‌الله ولی و مسجد جمعه‌ی اردبیل، مطرح می‌شوند. روی این دو نمونه، مدل‌سازی‌های هندسی (ارایه‌شده در این پژوهش) پیاده‌سازی می‌شوند.

#### ۵-۱- مسجد جمعه اردبیل (جمعه مسجد)

مسجد جمعه اردبیل در بافت تاریخی شهر و در محل تلاقی محله‌های پیرشمس‌الدین و عبدالله شاه روی خط‌الراس یک تپه‌ی باستانی که از آوارهای آثار معماری پیش از اسلام به وجود آمده واقع شده است [15]. این بنای با عظمت دارای گنبدی بزرگ و آجری بوده که از خارج با کاشی‌های آبی‌رنگ ساده مزین شده است و دورتادور گنبد مذکور کتیبه‌هایی وجود داشته است که به مرور زمان از بین رفته‌اند [16]. مسجد جمعه اردبیل تا اوایل قرن هفتم به‌عنوان مهم‌ترین بنای مذهبی شهر بوده است.

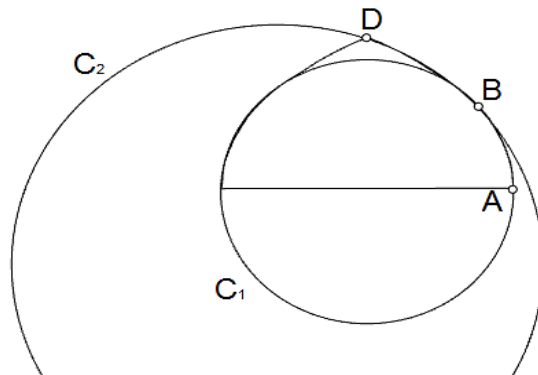
در هنگام هجوم مغول، بنای مذکور به شدت آسیب دید ولی پس از بازسازی‌های ایلخانی، بنا تا زمان تخریب مجدد گنبد و شبستان‌های ایلخانی مجدداً به‌عنوان مسجد جامع شهر مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر آن در این دوره، مسجد به‌عنوان مدرسه و دارالشفا نیز عمل می‌کرده است.

پس از روی کار آمدن سلسله صفوی و مرکزیت مذهبی و سیاسی مجموعه شیخ‌صافی‌الدین اردبیلی در شهر، به تدریج از اهمیت مسجد جمعه کاسته شد و با گذر زمان بیش‌تر رو به خرابی نهاد. از این دوره به بعد، اطراف مسجد و نقاط مختلف تپه تاریخی به گورستان بدل گشت. احداث قبور خود باعث تخریب هرچه بیش‌تر شبستان‌های مسجد قدیم گردید؛ تا جایی که آجر دیوارهای مسجد برای ساخت قبور مورد استفاده قرار گرفت [15]. در سال‌های اخیر، بنا مورد مرمت قرار گرفته و علاوه بر استحکام‌بخشی شالوده و تزریق بتن در زیر پی، بخش‌هایی از بدنه آجری و مناره نیز بازسازی شده است.



در ادامه قصد داریم محاسبه‌های مدل هندسی مربوط به این بنا را با توجه به مطالب ارائه شده در بخش‌های قبلی انجام دهیم. گنبد این مسجد دارای قطری معادل با  $۱۲/۵۲$  متر و افرازی برابر با  $۸/۴۵$  متر می‌باشد. به نظر می‌رسد نوع چفد مولد این گنبد شبدری ساده یا شبدری تند باشد. با توجه با داده‌های جدول ۴ و جدول ۵ و قطر دهانه این بنا می‌توان گفت که نوع چفد مولد شبدری تند بوده است. حال می‌توانیم داده‌های جدول ۵ را برای مسجد جمعه اردبیل محاسبه کنیم (جدول ۱۰).

همان‌طور که در شکل ۱۵ مشاهده می‌کنید، رویه گنبد از نقطه‌ی  $A$  (سطح افقی) تا نقطه‌ی  $B$  روی دایره‌ی  $C_1$  و از نقطه‌ی  $B$  تا  $D$  روی دایره‌ی  $C_2$  قرار گرفته است. این مطلب بدین معنی است که شیب گنبد در نقطه‌ی  $B$  به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند و معادله منحنی مولد قبل از  $B$  و بعد از آن باهم متفاوت است. این اختلاف بر انحنا‌ی گوسی نیز اثر می‌گذارد و موجب می‌شود که نقطه‌ی  $B$  آسیب‌پذیرترین نقطه از لحاظ تغییرات انحنا‌ی سطح گنبد باشد. این تفاوت را در شکل ۱۶ که توسط نرم‌افزار راینو<sup>۱</sup> به‌دست آمده است، مشاهده می‌کنید. نواحی قرمز رنگ دارای بیش‌ترین انحنا و نواحی آبی کم‌ترین انحنا را دارند. لذا توصیه محققان رشته هندسه به متخصصین معماری این است که در این نواحی مقاوم‌سازی بیش‌تری انجام دهند. طبق آن‌چه در کتاب معماری ایرانی نیارش معماریان [17] آمده، یکی از اقدامات لازم که برای مقاوم‌سازی این قسمت پیشنهاد می‌شود، قرار دادن تیرهای چوبی حمال به‌صورت شکل ۱۷، به‌عنوان پایه‌ای برای نقطه‌ی  $B$  است. روش دیگر استفاده از ملات یا آژندگل در این قسمت‌ها است. دقت بفرمایید که استفاده از این ساختمایه برای مقاوم‌سازی کل بنا، گنبد را سنگین می‌کند و در واقع خسارت ناشی از وزن زیاد تحمیل شده، بیش‌تر از منفعت آن خواهد بود. لذا یافتن مناطق آسیب‌پذیرتر، مانند آن‌چه در این مقاله ارائه می‌شود، این مشکل را برطرف می‌کند و به معمار کمک می‌کند تا نواحی در معرض تخریب را پیدا کند؛ بنابراین، با استفاده از این آژند سنگین ولی مقاوم، استحکام بنا را بیش‌تر نماید.



شکل ۱۴- مسجد جمعه اردبیل (جمعه مسجد).

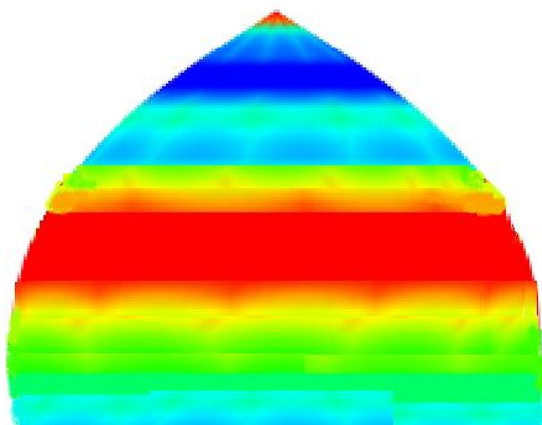
Figure 14- Ardabil friday mosque (friday mosque).



شکل ۱۵- مسجد جمعه اردبیل (جمعه مسجد).

Figure 14- Ardabil friday mosque (friday mosque).

<sup>1</sup> Rhino



شکل ۱۶- انحناي گوسی روی گنبد مسجد جمعه.

Figure 16- Gaussian curve on the dome of Juma mosque.



شکل ۱۷- قرار دادن تیغهی حمال زیر نقطه‌ی B.

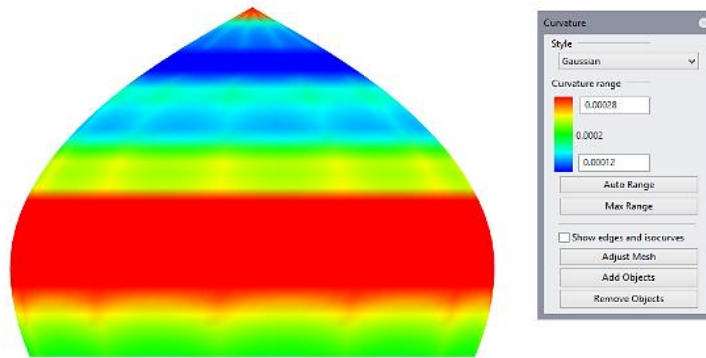
Figure 17- Placing the carrier blade under point B.

## ۲-۵- مسجد شاه نعمت‌الله ولی

آرامگاه شاه نعمت‌الله ولی یکی دیگر از جلوه‌های هنر معماری در بناهای اسلامی ایرانی است. این بنا مربوط به دوره تیموری بوده و در شهر ماهان در استان کرمان واقع شده است. قدیمی‌ترین قسمت این مجموعه، گنبدی است متعلق به سال ۸۴۰ هجری قمری که بر مزار شاه نعمت‌الله بنا شده است. این گنبد که با کاشی‌های سفید و لاجوردی پوشانده شده است، دارای طرحی منحصربه‌فرد و چشم‌نواز است. رویه این گنبد از نوع ترک‌دار است. نکته جالب‌توجه این است که تعداد این ترک‌ها، برخلاف عرف (که عدد ۱۲ است)، تنها شامل ۱۱ ترک می‌باشد. وجود اعجازهای عددی بسیار در طراحی و تزئین این بنا توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. همان‌طور که در شکل ۱۸ مشاهده می‌کنید، در سال‌های اخیر قسمتی از سطح گنبد مذکور دچار ریزش شده است. با بهره‌گیری مدل‌سازی حاصل‌شده در این پژوهش و به‌کارگیری نرم‌افزار راینو مشاهده می‌شود که وجود انحناهای زیادتر در قسمت‌های آسیب‌دیده از قسمت‌های دیگر گنبد، می‌تواند یک علل اساسی این تخریب باشد. براین اساس به معماران و هنرمندان عرصه ترمیم آثار باستانی پیشنهاد می‌شود، با شناسایی میزان انحناهای هر قسمت از گنبد، از آژندهای خاص و مقاوم‌تر در این قسمت‌ها استفاده کنند.



شکل ۱۸- ریزش در قسمتی از گنبد شاه نعمت‌الله ولی.  
Figure 18- Falling in a part of the dome of Shah Nematullah Wali.



شکل ۱۹- انحنا روی گنبد شاه نعمت‌الله ولی.  
Figure 19- Curve on the dome of Shah Nematullah Wali.

## ۶- نتیجه‌گیری

همان‌طور که در شکل‌های بالا دیده می‌شود انحناهای گنبدی آثار معماری پس از صدها سال تکامل و اصلاح، به‌صورتی درآمده که از او در برابر حوادث محافظت می‌کند؛ هم‌چنین این نوع شکل گنبد، به‌سازه کمک می‌کند تا هنگام تغییر حالت از حالت طبیعی‌اش، بتواند با این انحنا، کم‌ترین آسیب را داشته باشد. در حقیقت این انحنا به‌صورتی است که بیش‌ترین میزان تنش را تحمل و با کاهش نقاط تمرکز تنش، به مقاومت بیش‌تر آن کمک می‌کند.

باتوجه به نوع چفد مولد می‌توان ویژگی‌های هندسی گنبد‌های متناظر به هر یک را تعیین کرده و باهم مقایسه نمود؛ هم‌چنین امکان مقایسه انحنا در قسمت‌های مختلف فراهم می‌آید. این عمل باعث می‌شود میزان آسیب‌پذیری هر قسمت تخمین زده شود. بر این باور هستیم که در ساخت بناهای گنبدی، باید نسبت به مصالح به‌کار برده شده در قسمت‌های مختلف حساس بود.

بدین وسیله با انتخاب عملکرد درست، جلوی تخریب‌های احتمالی را گرفت. پیشنهاد اصلی این است که متخصصان این عرصه با یافتن و تحکیم بخشیدن به پیوند بین ریاضیات معاصر و معماری سنتی، روش‌های تازه‌ای را برای مقاوم‌سازی بناها مدنظر قرار دهند.

در حوزه‌ی ترمیم آثار گذشته، می‌توان استفاده از آژندهای ویژه و مستحکم‌تر در نواحی آسیب‌پذیر (که در این مقاله روش یافتن آن‌ها را مشاهده کردیم) هم‌چنین استفاده از تیرچه‌های چوبی حمال را پیشنهاد نمود. به‌علاوه برای بهبود عملکرد ساخت بناهای گنبدی شکل، روش استفاده از شبیه‌سازی سازه با درنظر گرفتن این مدل‌سازی هندسی توصیه می‌شود.





در ساخت این بناها، با محاسبه انحناهای گوسی سطح گنبدها، می‌توان نواحی آسیب‌پذیر را شناسایی کرده و سپس نسبت مقاوم‌سازی این مناطق اقدامات لازم صورت پذیرد.

در خاتمه در حالت کلی می‌توان موارد زیر را به جهت بهبود عملکردی مرمت و ساخت سازه‌ها (در معماری ایرانی) مورد توجه قرار داد:

۱. ساخت مواد هوشمند با بهینه‌سازی بخش اسفنجی (سبک‌ترین حالت با بیش‌ترین کارایی).
۲. الگوگیری از نحوه چینش چندضلعی‌ها (کاشی‌کاری) در کنار یکدیگر و محاسبه دقیق آن‌ها برای تولید انحناهای مورد نظر.
۳. پیدا کردن انحناهای ایده‌آل برای انواع بارگیری‌های سازه‌ای.
۴. ساخت مواد مشابه (کامپوزیت‌ها حتی‌الامکان از مواد طبیعی) با مواد اولیه متفاوت از آن‌چه در مصالح روزمره استفاده می‌شود.

به خاطر بسپاریم که شناختن و حفظ این شکل سازه‌ای برای بقای این آثار بی‌ظنیر، یک رکن اساسی است. در نتیجه پژوهش‌های مشابه با موضوعیت بررسی مدل‌سازی هندسی سطوح به‌کار رفته در معماری سنتی و ایرانی، می‌تواند به پایداری بسیاری از سازه‌ها و مساجد گنبدی شکل در ایران کمک شایانی بنماید.

## تشکر و قدردانی

از زحمات و راهنمایی‌های دکتر غلامحسین معماریان در روند نگارش این مقاله، نهایت قدردانی را داریم.

## منابع مالی

در روند اجرای این پروژه، نویسندگان از هیچ‌گونه منبع خارجی کمک مالی دریافت نکردند.

## تعارض با منافع

به این وسیله نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع درمورد انتشار این نسخه وجود ندارد و نسخه نهایی ارسال شده مورد تایید نویسندگان می‌باشد؛ هم‌چنین تضمین می‌کنیم که مقاله، اثر اصلی بوده، قبلاً چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

## منابع

- [1] Pirmia, M. K. (1991). *Iranian architectural styles*. Art publications. (In Persian). <https://www.gisoom.com/book/>
- [2] Majidi, S., & Ghorbani Nia, E. (2015). *The process of determining the type of arch based on the way of observation and implementation (case example of Saveh jame mosque)* [presentation]. International congress of sustainability in contemporary middle east architecture and urbanism. (In Persian). <https://civilica.com/doc/505675/>
- [3] Jamshidikashani, Q. (1987). *Treatise on Taq and Azj*. Soroush Publications. (In Persian). <https://www.iranketab.ir/book/57203-taq-va-azaj>
- [4] Pirmia, M. K. (1973). Iran's contributions to the dome architecture world. *Art and people magazine*, 136/137, 2-7. (In Persian). <https://ensani.ir/>
- [5] Pirmia, M. K. (2008). *Iranian architectural stylistics*. Soroush Danesh Publications. (In Persian). <https://www.gisoom.com/book/>
- [6] Safaipour, H., Memarian, G. H., & Bemanian, M. R. (2015). Tuba concept's role in formation of illustrious Safavid domes. *Journal of researches in islamic architecture*, 2(4), 16-31. (In Persian). <http://jria.iust.ac.ir/article-1-108-fa.html>
- [7] Tokhmchian, A., Qara Baglo, M., & Nejadabrahimi, A. (2017). The formation of space as a result of the conceptual connection of "music-mathematics" and architecture (case study: Jalokhan and Asamena dome of Sheikh Lotf Elah mosque in Isfahan). *Researches of islamic architecture*, 5(2), 108-129. (In Persian). <https://sid.ir/paper/509060/fa>
- [8] Valibeig, N., Mehdizadeh, F., & Tehrani, F. (2012). The geometrical and mathematical analysis of panjohaft arches in iranian barrel vaults. *Journal maramat-e asar & baft-haye tarikhi-farhangi*, 2(3), 39-49. (In Persian). <https://www.sid.ir/paper/205207/en>
- [9] Abolhasanizadeh, H. (2013). *Structural analysis of Jebeliya dome in Kerman* [presentation]. International congress of sustainability in architecture and urban development-masdar city. (In Persian). <https://civilica.com/doc/377736/>
- [10] Hejazi, M., & Nasri, E. (2009). *Analysis of qaboos dome structures* [presentation]. 8th international civil engineering congress. (In Persian). <https://civilica.com/doc/62623/>



- [11] Shini Gholampour, R. (2011). *The dome according to the Iranian structure* [presentation]. The first international conference on urban construction in the vicinity of active faults. **(In Persian)**. <https://civilica.com/doc/119478>
- [12] Shamsipour Dehkordi, A., Jafari Farsani, M., & Naqdi Dorbati, Z. (2013). *Static of domes and arches with stable materials in traditional Iranian architecture* [presentation]. The first national conference on geography, urban planning and sustainable developmen. **(In Persian)**. <https://civilica.com/doc/266483/certificate/print/>
- [13] Bozormehri, Z. (1981). *Geometry in Iranian architecture*. Publications of the National Organization for the Protection of Antiquities of Iran. **(In Persian)**. <https://www.gisoom.com/book/>
- [14] Pressley, A. N. (2010). *Elementary differential geometry*. Springer Science & Business Media. [https://books.google.com/books/about/Elementary\\_Differential\\_Geometry.html?id=9nT1fOwATf0C](https://books.google.com/books/about/Elementary_Differential_Geometry.html?id=9nT1fOwATf0C)
- [15] Mousavi, S. M. (1997). Ardabil grand mosque. *Proceedings of the conference on mosque architecture; past present future* (pp. 633–650). University of Arts. **(In Persian)**. <http://noo.rs/G17tW>
- [16] Safari, B. (2017). *Ardabil in the passage of history*. Omid Publications. **(In Persian)**. <https://www.gisoom.com/book/>
- [17] Memarian, G. H. (2018). *Iranian architecture of Niarsh*. Goljam Publications. **(In Persian)**. <https://www.gisoom.com/book/>