E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 7, Spec. Issue (2022) 1-12.

Paper Type: Original Article

Wilcoxon Signed-Rank Test based on Fuzzy Random Variables and Fuzzy Hypotheses

Mehdi Shams[1,*], Gholamreza Hesamian[2]

[1] *Department of Statistics, University of Kashan, Kashan, Iran; mehdishams@kashanu.ac.ir.*
[2] *Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; gh.hesamian@pnu.ac.ir.*

Citation:

Shams, M., & Hesamian, Gh. (2022). Wilcoxon signed-rank test based on fuzzy random variables and fuzzy hypotheses. *Journal of decisions and operations research, 7*(Spec. Issue), 1-12.

Received: 01/08/2021 Reviewed: 03/09/2021 Revised: 09/10/2021 Accepted: 20/11/2021

Abstract

Purpose: In previous approaches to nonparametric fuzzy tests for the mean of the population based on fuzzy data, it has been assumed that the mean of the population is an exact quantity. However, since the observations are assumed to be imprecise quantity, it makes sense that it can be also assumed to be an imprecise quantity. Therefore, the previous non-parametric tests should be reviewed and generalized based on this new idea.

Methodology: In this paper, the Wilcoxon rank-test is generalized to the fuzzy environment based on a sample of fuzzy random variables. In the proposed approach, by recalling the concept of induced fuzzy random variable from a family of distributions with fuzzy parameter, first the fuzzy mean of the population and the fuzzy mean of a random sample of fuzzy random variables are generalized to the fuzzy environment. For this purpose, the fuzzy Wilcoxon test statistic is defined based on the observations of a fuzzy random sample. Finally, at a given exact significance level, a fuzzy test is proposed to test the fuzzy hypotheses for the fuzzy mean of the population.

Findings: The proposed method relies on modeling fuzzy hypotheses using a comparison of fuzzy median with a fixed fuzzy quantity via a common ranking method. Also, a belonging criterion with appropriate properties has been used to define the fuzzy test statistic. The generalized method of fuzzy Wilcoxon rank-test based on fuzzy parameter was investigated with a practical example. The large sample property of a sequence of fuzzy means is also investigated based on a common distance in a fuzzy environment. Also, the differences and advantages of the proposed approach with other similar methods were discussed.

Originality/Value: The proposed method relies on fuzzy median and its properties, which has been neglected in previous thechniques of fuzzy nonparametric tests. In our method, the statistical hypotheses are presented as fuzzy quantities. Thus, a ranking method is required to model such hypotheses that are consistent with the degrees of rejection or acceptance of fuzzy hypotheses.

Keywords: Fuzzy random variable, Fuzzy hypothesis, Fuzzy test statistics, Fuzzy parameter, Fuzzy median.

Corresponding Author: mehdishams@kashanu.ac.ir
http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.5.10.3

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۷، شماره ویژه، (۱۴۰۱)، ۱۲-۱

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون بر اساس نمونه تصادفی فازی از جامعه‌ای با میانه فازی

مهدی شمس[۱,*]، غلامرضا حسامیان[۲]

[۱]گروه آمار، دانشگاه کاشان،کاشان، ایران.

[۲]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: در رویکردهای پیشین آزمون‌های فازی ناپارامتری برای میانه جامعه بر اساس داده‌های فازی، فرض بر این بوده که میانه جامعه کمیتی دقیق است؛ اما ازآنجاکه مشاهدات نادقیق فرض شده‌اند، منطقی به‌نظر می‌رسد که میانه جامعه نیز کمیتی نادقیق باشد؛ بنابراین روش آزمون‌های ناپارامتری پیشین باید بر اساس این نوع نگرش جدید به پارامتر جامعه، مورد بازنگری واقع شوند و روش‌های پیشین را برای انجام آزمون فازی ناپارامتری با میانه فازی تعمیم داد.

روش‌شناسی پژوهش: در این مقاله، آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون بر اساس یک نمونه از متغیرهای تصادفی فازی، به محیط فازی تعمیم داده می‌شود. در رویکرد پیشنهادی، ابتدا با یادآوری مفهوم متغیر تصادفی فازی القایی از یک خانواده از توزیع‌ها با پارامتر فازی، میانه توزیع فازی و میانه یک نمونه از متغیرهای تصادفی فازی به محیط فازی تعمیم داده می‌شوند. برای این منظور ابتدا آماره آزمون ویلکاسون فازی بر اساس مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی تعریف می‌شود. سرانجام، در یک سطح معنی‌داری دقیق داده‌شده، تابع آزمون فازی برای انجام آزمون فرضیه‌های فازی برای میانه فازی جامعه پیشنهاد می‌شود.

یافته‌ها: روش پیشنهادی مبتنی بر مدل‌بندی فرضیه‌های فازی با استفاده از مقایسه میانه فازی با یک کمیت فازی ثابت و بر اساس یک روش رتبه‌بندی متداول است. همچنین یک معیار تعلق با خاصیت‌های مناسب برای تعریف آماره آزمون فازی بکار برده شده است. روش تعمیم‌یافته آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون فازی بر اساس پارامتر فازی با یک مثال کاربردی مورد بررسی و کنکاش قرار گرفت. خاصیت بزرگ نمونه‌ای یک دنباله از میانه نمونه فازی بر اساس یک متر متداول در محیط فازی نیز بررسی و اثبات می‌شود. هم‌چنین تفاوت‌ها و ارجحیت‌های رویکرد پیشنهادی با سایر روش‌های مشابه مورد بحث‌وبررسی قرار گرفت.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: روش پیشنهادی مبتنی بر میانه فازی و خاصیت‌های آن در محیط فازی است که در تحقیقات پیشین مورد غفلت واقع شده است؛ بنابراین فرضیه‌های آماری همان‌طور که انتظار می‌رود به‌صورت گزاره‌های فازی مطرح می‌شوند و لذا باید روش‌های رتبه‌بندی در محیط فازی برای مدل‌بندی چنین فرضیه‌های بکار گرفته شوند که همسو با درجات رد یا پذیرش فرضیه‌های فازی باشند.

کلیدواژه‌ها: آزمون فرضیه فازی، آماره آزمون فازی، پارامتر فازی، متغیر تصادفی فازی، میانه فازی.

۱- مقدمه

روش‌های ناپارامتری[۱] در آمار استنباطی به رویکردهایی اطلاق می‌شوند که وابستگی چندانی به فرضیات جامعه‌های تحت بررسی ندارند. یک رده ویژه از استنباط ناپارامتری شامل انواع آزمون‌های فرضیه آماری[۲] درموردجامعه[۳] تحت بررسی است. این آزمون‌ها کاربردهای فراوانی در علوم مختلف، مانند آمار زیستی، صنعت، علوم تربیتی و علوم اجتماعی دارند (گیبونز و چاکرابوردی[۴]، ۲۰۰۳). به‌عنوان مثال

[۱] Nonparametric method

[۲] Statistical hypothesis testing

[۳] Population

[۴] Gibbons and Chakraborti

* نویسنده مسئول

mehdishams@kashanu.ac.ir

http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.5.10.3

شمس و حسامیان/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ویژه، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۱۲-۱

می‌توان به آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون[۱] اشاره کرد؛ اما روش‌های ناپارامتری کلاسیک، مبتنی بر اطلاعات دقیق[۲] (غیر فازی[۳]) شامل داده‌های دقیق، فرضیه‌های دقیق است؛ اما در عمل، اغلب با حالت‌هایی سروکار داریم که حداقل یکی از مولفه‌های موجود نادقیق[۴] است. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم میانه طول عمر لاستیک‌هایی که به‌تازگی توسط یک شرکت به بازار عرضه شده است را مورد آزمون قرار دهیم (وو[۵]، ۲۰۰۳). در چنین حالاتی به علت عدم قطعیت[۶] در اندازه‌گیری طول عمر داده‌ها، معمولا داده‌ها نادقیق (فازی) ثبت می‌شوند. چنین داده‌هایی را می‌توان مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی در نظر گرفت. در چنین مواردی پارامتر جامعه نیز به دلیل عدم قطعیت معمولا در عمل نادقیق هستند. در این صورت برای انجام یک آزمون آماری نیاز است مفاهیمی همچون متغیر تصادفی فازی[۷]، پارامتر فازی[۸]، فرضیات فازی[۹]، آماره آزمون فازی[۱۰] و غیره را به محیط فازی[۱۱] تعمیم دهیم. یک‌راه مناسب برای صورت‌بندی چنین مفاهیمی، استفاده از مجموعه‌های فازی[۱۲] است که توسط پروفسور زاده[۱۳] (۱۹۶۵) ابداع شده است.

تاکنون تحقیقات فراوانی درزمینه آزمون‌های آماری بر اساس اطلاعات نادقیق انجام شده است. در این روش‌ها داده‌ها، فرضیات، پارامترها و سطح معنی‌داری[۱۴] مقادیر دقیق و یا فازی در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به این‌که موضوع مقاله حاضر پیشنهاد یک روش آزمون فرض در حالت ناپارامتری است، در ادامه مروری مختصری بر مهم‌ترین مطالعات انجام‌شده درزمینه آزمون‌های ناپارامتری در محیط فازی داریم. دنو و همکاران[۱۵] (۲۰۰۵)، مفهوم *p*-مقدار[۱۶] را برای آزمون کندال[۱۷] و آزمون من‌ویتنی[۱۸] به محیط فازی بر اساس داده‌ای فازی و فرضیات دقیق تعمیم دادند. ژرکوفسکی[۱۹] (۱۹۹۸) با تعریف متغیر تصادفی فازی، میانه نمونه تصادفی فازی و خاصیت بزرگ نمونه‌ای[۲۰] آن بر اساس میانه جامعه دقیق به محیط فازی تعمیم داد. وی مساله آزمون علامت[۲۱] را بر پایه نمونه تصادفی فازی، با روشی مبتنی بر تعمیم روش فواصل اطمینان[۲۲] انجام داد. همچنین در مساله آزمون برابری میانه‌های (دقیق) دو جامعه در مطالعه ژرکوفسکی (۲۰۰۵) و آزمون برابری میانه‌های دقیق چند جامعه در مطالعه ژرکوفسکی (۲۰۰۹) با تعمیم آماره‌های آزمون و ناحیه رد[۲۳]، یک تابع آزمون فازی در سطح معنی‌داری دقیق معرفی کرد. قهرمان و همکاران[۲۴] (۲۰۰۴) آزمون ناپارامتری رتبه‌ای برای فرضیه‌های دقیق و مشاهدات نادقیق را انجام دادند. به تحلیل جداول توافقی[۲۵] دوطرفه بر اساس مشاهدات دقیق و رده‌های نادقیق پرداختند و همچنین یک روش برای انجام آزمون ویلکاکسون بر اساس مشاهدات نادقیق، فرضیه دقیق و سطح معنی‌داری فازی پیشنهاد کردند (طاهری و حسامیان[۲۶]، ۲۰۱۳). طاهری و حسامیان (۲۰۱۷) رده آزمون‌های آماری ناپارامتری مبتنی بر رتبه را برای حالتی که داده‌ها نادقیق، فرضیات دقیق و سطح معنی‌داری عددی فازی باشند به محیط فازی تعمیم دادند. چخوروا و یواهانسن[۲۷] (۲۰۲۱a) با تکیه‌بر آزمون علامت تعمیم‌یافته، روش آزمون علامت را برای حالتی که داده‌ها دقیق و فرضیات فازی باشند با استفاده از مفهوم رده‌های نادقیق به محیط فازی تعمیم دادند و همچنین آزمون نسبت را برای حالتی که داده‌ها دقیق و فرضیات فازی باشند به محیط فازی تعمیم دادند(چخوروا و یواهانسن، ۲۰۲۱b). برای مرور روش‌های آزمون فرض فازی پارامتری به مطالعه چخوروا و یواهانسن (۲۰۲۱b) مراجعه شود. همچنین برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد روش‌های آمار ناپارامتری موجود در محیط فازی می‌توان به باکلی[۲۸] (۲۰۰۴)، کروز و میبر[۲۹] (۱۹۸۷) و فیتل[۳۰] (۲۰۱۱) رجوع کرد.

۱-۱- اعداد فازی[۳۱]

در این بخش، برخی از مفاهیم نظریه مجموعه‌های فازی بیان و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

---

[1] Wilcoxon rank-sum test
[2] Precise information
[3] Non-fuzzy
[4] Imprecise
[5] Wu
[6] Uncertainty
[7] Fuzzy random variable
[8] Fuzzy parameter
[9] Fuzzy hypothesis
[10] Fuzzy statistics
[11] Fuzzy environment
[12] Fuzzy set
[13] Zadeh
[14] Significance level
[15] Denoeux et al.
[16] P-value
[17] Kendall test
[18] Mann-Whitney test
[19] Grzegorzewski
[20] Large sample property
[21] Sign test
[22] Confidence interval
[23] Rejection region
[24] Kahraman et al.
[25] Contingency table
[26] Taheri and Hesamian
[27] Chukhrova and Johannssen
[28] Buckley
[29] Kruze and Meyer
[30] Viertl
[31] Fuzzy number

تعریف ۱- فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی A از X با تابع عضویت[1] $\mu_A:\chi \to [0,1]$ مشخص می‌شود (لی[2]، ۲۰۰۴). برای هر $\alpha \in (0,1]$ ، $\alpha-$ برش مجموعه فازی A به‌صورت $A[\alpha] = \{x \in \chi: \mu_A(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود و مجموعه $Supp(A) = \{x \in \chi: \mu_A(x) > 0\}$ تکیه‌گاه[3] مجموعه فازی A نامیده می‌شود و $A[0]$ بستار مجموعه $Supp(A)$ است.

تعریف ۲- بر اساس مطالعه لیو[4] (۲۰۰۷) مجموعه فازی A از اعداد حقیقی $(\chi = \mathbb{R})$ را یک عدد فازی گویند، هرگاه برای هر $\alpha \in [0,1]$ مجموعه $A[\alpha]$ یک فاصله ناتهی، بسته و کران‌دار باشد. لذا، چنین فاصله‌ای به‌صورت $A[\alpha] = [A_\alpha^L, A_\alpha^U]$ است که در آن $A_\alpha^L = inf\{x \in \mathbb{R}: x \in A[\alpha]\}$ و $A_\alpha^L = sup\{x \in \mathbb{R}: x \in A[\alpha]\}$. مجموعه اعداد فازی را با $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳- فرض کنید z یک عدد فازی باشد. گوییم z متعلق به $A \subseteq \mathbb{R}$ است (و می‌نویسیم $z \in_W A$)، هرگاه $W\{z \in A\} > 0.5$ که در آن معیار W به‌صورت زیر تعریف می‌شود (لیو، ۲۰۰۷):

$$W\{z \in A\} = \frac{sup_{x\in A}\mu_z(x) + 1 - sup_{x\in A^c}\mu_z(x)}{2}. \tag{۱}$$

مثال ۱- برای یک عدد مثلثی $z = (z^l, z^c, z^r)_T$ و یک‌فاصله از اعداد حقیقی به‌صورت $A = [a,b]$، می‌توان نشان داد که:

$$W\{z \in A\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_z(b)\,, & b \leq z^c, \\ \frac{1}{2}\mu_z(a), & a \geq z^c, \\ \frac{1}{2}\left(2 - max\{\mu_z(a), \mu_z(b)\}\right), & a < z^c < b, \\ 0, & \text{جاهای دیگر}. \end{cases} \tag{۲}$$

معیار تعلق[5] W دارای خاصیت‌های زیر است:

گزاره ۱- بر اساس مطالعه لیو (۲۰۰۷) اگر z یک عدد فازی و A یک مجموعه معمولی باشد، آن‌گاه:

- $W\{z \in A\} = 1$ اگر و تنها اگر $supp(z) \subseteq A$.
- اگر $z \in_W A$ و $A \subseteq B$، آن‌گاه $z \in_W B$.
- $z \in_W A \cap B$ اگر و تنها اگر $z \in_W A$ و $z \in_W B$.
- $W\{z \in A^c\} = 1 - W\{z \in A\}$ که A^c متمم مجموعه A است.

تعریف ۴- طبق تعریف حسامیان و شمس[6] (۲۰۱۶)، فرض کنید A و B دو عدد فازی باشند. برای بیان تساوی دو عدد فازی گوییم A مساوی B است (و می‌نویسیم $A = B$)، اگر برای هر $\alpha \in [0,1]$، $A_\alpha = B_\alpha$ که در آن:

$$A_\alpha = inf\{r \in A[0]: W\{z \in (-\infty, r]\} \geq \alpha\}. \tag{۳}$$

همچنین، گوییم A بزرگ‌تر[7] از B (و می‌نویسیم $A \widetilde{>} B$) است، اگر برای هر $\alpha \in [0,1]$، $A_\alpha > B_\alpha$ (A بزرگ‌تر یا مساوی B نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود).

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که **تعریف ٤** دارای خاصیت ترایایی[8] در فضای اعداد فازی است؛ به‌عبارت‌دیگر گزاره زیر برقرار است:

گزاره ۲- فرض کنید A، B و C سه عدد فازی دلخواه باشند، اگر $A > B$ و $B > C$، آن‌گاه $A > C$.

رابطه زیر بین A_α و کران‌های پایین و بالای $\alpha-$برش‌های فازی[9] عدد یک فازی در گزاره زیر بیان شده است (حسامیان و شمس، ۲۰۱۶).

گزاره ۳- اگر A_α^L و A_α^U به ترتیب کران پایین و کران بالای $\alpha-$برش‌های عدد فازی A باشند:

---

[1] Membership function
[2] Lee
[3] Support
[4] Liu
[5] Degree of belongness
[6] Hesamian and Shams
[7] Greater than
[8] Transitive property
[9] Alpha-cut

$$A_\alpha = \begin{cases} A^U_{2\alpha}, & 0 \le \alpha \le 0.5, \\ A^L_{2(1-\alpha)}, & 0.5 \le \alpha \le 1. \end{cases} \qquad (۴)$$

برای مثال، عدد فازی مثلثی[۱] $A = (a^l, a^c, a^r)_T$ در نظر بگیرید. با توجه به این که

$$A[\alpha] = \left[a^c - 1 - \alpha)a^l, a^c + 1 - \alpha)a^r\right]. \qquad (۵)$$

از **گزاره ۳** داریم:

$$A_\alpha = \begin{cases} a^c + 1 - 2\alpha)a^r, & 0 \le \alpha \le 0.5, \\ a^c + 1 - 2\alpha)a^l, & 0.5 \le \alpha \le 1. \end{cases} \qquad (۶)$$

تعریف ۵- فرض کنید A و B دو عدد فازی باشند. فاصله هاسدورف[۲] بین A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شود (ژرکوفسکی، ۲۰۰۵):

$$D_H\left(A, B\right) = sup_{\alpha\in[0,1]}\, max\left\{\left|A^L_\alpha - B^L_\alpha\right|, \left|A^U_\alpha - B^U_\alpha\right|\right\}. \qquad (۷)$$

به ازای سه عدد فازی دلخواه A، B و C، متر هاسدورف دارای خواص زیر است:

۱. $D_H\left(A, B\right) = 0$ اگر و تنها اگر $A = B$.
۲. $D_H\left(A, C\right) \le D_H\left(A, B\right) + D_H\left(B, C\right)$.

تعریف ۶- فرض کنید $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ که $\boldsymbol{A_n} \in \mathbb{F}\ \mathbb{R})$ یک دنباله از اعداد فازی باشد.گوییم A_n همگرا به $Z \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ است و آن را با نماد

$A_n \to Z$ نشان می‌دهیم، اگر $lim_{n\to\infty} D_H\left(A_n, Z\right) = 0$.

از **تعریف ٦** در بررسی خاصیت بزرگ نمونه‌ای میانه فازی یک نمونه تصادفی فازی در بخش ۳ استفاده خواهد شد.

۲- میانه فازی متغیر تصادفی فازی

در این بخش مفهوم میانه فازی را به محیط فازی تعمیم می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا مفهوم متغیر تصادفی فازی القایی[۳] از یک خانواده از توزیع‌ها با پارامتر فازی یادآوری می‌شود (حسامیان و شمس، ۲۰۱۶).

تعریف ۷- فرض کنید (Ω, A, P) یک فضای احتمال[۴] باشد. نگاشت $X: \Omega \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی از یک خانواده از توزیع‌های کلاسیک با پارامتر فازی $\theta: \Theta \to \mathbb{F}\ \Theta)$ است، هرگاه برای هر $\alpha\ \in [0,1]$، X_α یک متغیر تصادفی معمولی با تابع چگالی f_{θ_α} باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha_1 < \alpha_2$، X_{α_1} به‌طور تصادفی بزرگ‌تر از X_{α_2} باشد. همچنین متغیرهای تصادفی فازی X و Y مستقل و هم‌توزیع‌اند[۵] اگر برای هر $\alpha\ \in [0,1]$، X_α و Y_α مستقل و هم‌توزیع باشند.

ارجحیت اصلی **تعریف ۷** نسبت به سایر روش‌ها در این است که روش‌های پیشین مبتنی بر α-برش‌های پایین و بالای متغیر تصادفی فازی هستند، درحالی‌که در روش پیشنهادی این کران‌ها در X_α تجمیع شده‌اند. در این صورت، بررسی خاصیت‌های آماره‌های فازی مانند خاصیت‌های نااریبی[٦]، نامساوی‌ها و خاصیت‌های بزرگ نمونه‌ای در محیط فازی تنها می‌تواند بر اساس مقادیر $\tilde{X}_\alpha$ بررسی و انجام شوند.

در ادامه مقدار مشاهده‌شده متغیر تصادفی فازیX را با x نشان می‌دهیم و آن را یک مشاهده فازی می‌نامیم (کروز و میر، ۱۹۸۷؛ شاپیرو[۷]، ۲۰۰۹). همچنین در این مقاله گوییم X یک متغیر تصادفی فازی پیوسته است اگر به ازای هر $\alpha\ \in [0,1]$، $\boldsymbol{X_\alpha}$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد.

تعریف ۸- میانه متغیر تصادفی فازی پیوسته X به‌صورت مجموعه فازی $\widetilde{M}_X$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

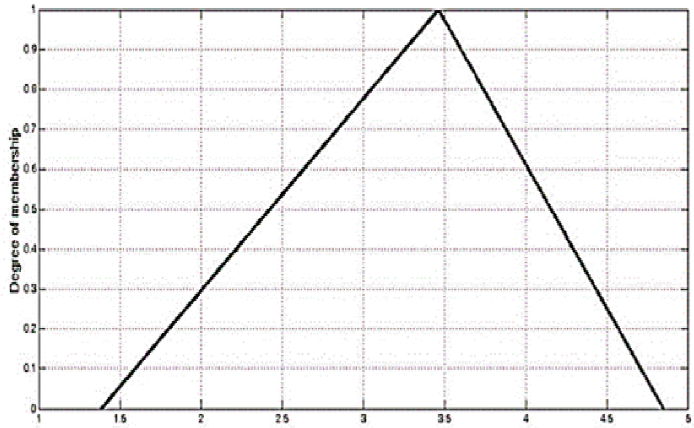
$$\mu_{\widetilde{M}_X}\ y) = sup\left\{\alpha \in [0.1]: y \in \left[\left(\widetilde{M}_X\right)^L_\alpha, \left(\widetilde{M}_X\right)^U_\alpha\right]\right\}. \qquad (۸)$$

---

[1] Triangular fuzzy number
[2] Hausdorff distance
[3] Induced fuzzy random variable
[4] Probability space
[5] Independent and identical
[6] Unbiasedness
[7] Shapiro

که در آن $(\widetilde{M}_X)^L_\alpha = inf_{\beta\in[1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]} M_{X_\beta} = M_{X_{1-\frac{\alpha}{2}}}$ ، $(\widetilde{M}_X)^U_\alpha = sup_{\beta\in[1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]} M_{X_\beta} = M_{X_{\frac{\alpha}{2}}}$ و M_{X_α} میانه متغیر تصادفی w است.

مثال ۲- فرض کنید $X \sim \exp(\lambda)$، که در آن $\lambda \in \mathbb{F}(0,\infty)$. در این صورت تابع عضویت میانه متغیر تصادفی فازی X به‌صورت $\mu_{\widetilde{M}_X}(y) = sup\{\alpha \in [0.1]: y \in [\lambda_{1-\alpha/2} log2, \lambda_{\alpha/2} log2]\}$. به‌دست می‌آید (حسامیان و شمس، ۲۰۱۶). برای مثال فرض کنید $\lambda = (2,5,7)_T$. در این صورت تابع عضویت میانه فازی $\widetilde{M}_X$ در **شکل ۱** رسم شده است.



شکل ۱- نموار میانه فازی توزیع نمایی با پارامتر فازی $\lambda = (2,5,7)_T$.

Figure 1- Plot of fuzzy mean of exponential distribution with $\tilde{\lambda} = (2,5,7)_T$.

تعریف ۹- میانه یک نمونه از متغیرهای تصادفی فازی X_1، X_2، ...، X_n به‌صورت مجموعه فازی $\widetilde{m}_n$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\widetilde{m}_n}(y) = sup\{\alpha \in [0.1]: y \in [(\widetilde{m}_n)^L_\alpha, (\widetilde{m}_n)^U_\alpha]\}. \quad (۹)$$

که در آن

$$(\widetilde{m}_n)^L_\alpha = \begin{cases} (X_{1-\alpha/2})_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{فرد } n, \\ \dfrac{X_{1-\alpha/2})_{(\frac{n}{2})} + X_{1-\alpha/2})_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & \text{زوج } n. \end{cases} \quad (۱۰)$$

$$(\widetilde{m}_n)^U_\alpha = \begin{cases} (X_{\frac{\alpha}{2}})_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{فرد } n, \\ \dfrac{(X_{\alpha/2})_{(\frac{n}{2})} + (X_{\alpha/2})_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & \text{زوج } n. \end{cases} \quad (۱۱)$$

و $(X_{\alpha/2})_{(j)}$، نشان‌دهنده آماره ترتیبی jth در نمونه تصادفی $(X_{\alpha/2})_1$، $(X_{\alpha/2})_2$،...، $(X_\alpha)_n$ است.

تعریف ۱۰- یک دنباله متغیرهای تصادفی فازی $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ با احتمال یک به عدد فازی Z تقریبا همه‌جا[1] همگرا در احتمال[2] است، اگر $P(D_H(X_n, Z) \to 0) = 1$ که در آن D_H فاصله هاسدروف بین دو عدد فازی است.

تذکر- در **تعریف ۱۰**، اگر متغیرهای تصادفی فازی $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ و Z به ترتیب به متغیرهای تصادفی معمولی $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ و Z تبدیل شوند، آن‌گاه رابطه احتمالی داده‌شده در **تعریف ۱۰** به رابطه $P\ |X_n - Z| \to 0) = 1$ تبدیل می‌شود. بنابراین در این حالت، **تعریف ۱۰** به همگرایی با احتمال در حالت کلاسیک تبدیل می‌شود.

توجه اگر M_X و m_n به ترتیب میانه جامعه[3] و میانه نمونه[4] بر اساس یک نمونه تصادفی X_1، X_2، ...، X_n از جامعه X باشند، آن‌گاه از آمار کلاسیک می‌دانیم که $P\ |M_X - m_n| \to 0) = 1$. حال در قضیه زیر نشان می‌دهیم که این رابطه در محیط فازی نیز برقرار است.

---

[1] Almost every where
[2] Converges in probability
[3] Population mean
[4] Sample mean

قضیه ۱ - بر اساس یک نمونه از متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم‌توزیع X_1،X_2،...،X_n میانه نمونه فازی $\widetilde{m}_n$ به میانه فازی جامعه $\widetilde{M}_X$ همگرا با احتمال یک[1] است. به‌عبارت‌دیگر $P\left(D_H\left(\widetilde{m}_n,\widetilde{M}_X\right)\to 0\right)=1$.

اثبات: ابتدا توجه کنید که $D_H\left(\widetilde{m}_n,\widetilde{M}_X\right)=sup_{\alpha\in[0,1]}max\left\{\left|(\widetilde{m}_n)^L_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^L_\alpha\right|,\left|(\widetilde{m}_n)^U_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^U_\alpha\right|\right\}$. بنابراین برای هر $\epsilon>0$ داده شده داریم $P\left(D_H\left(\widetilde{m}_n,\widetilde{M}_X\right)>\epsilon\right)\le P\left(max\left\{\left|(\widetilde{m}_n)^L_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^L_\alpha\right|,\left|(\widetilde{m}_n)^U_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^U_\alpha\right|\right\}>\epsilon\right)$. اکنون به ازای هر عدد دلخواه $\alpha\in[0,1]$ ملاحظه می‌شود که:

$$\begin{aligned}&P\left(max\left\{\left|(\widetilde{m}_n)^L_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^L_\alpha\right|,\left|(\widetilde{m}_n)^U_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^U_\alpha\right|\right\}>\epsilon\right).\\ &\le P\left(\left|(\widetilde{m}_n)^L_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^L_\alpha\right|>\epsilon\right)+P\left(\left|(\widetilde{m}_n)^U_\alpha-\left(\widetilde{M}_X\right)^U_\alpha\right|>\epsilon\right).\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با توجه به آمار استباط کلاسیک که دنباله‌ای از میانه‌های نمونه در احتمال به میانه جامعه همگراست، برای هر $\alpha\in[0,1]$، حد عبارت سمت راست **رابطه (۱۲)** برای حجم نمونه[2] به‌اندازه کافی زیاد[3] به صفر میل می‌کند و بنابراین طبق **تعریف ۱۰** اثبات کامل است.

تذکر- لازم به ذکر است که در مطالعات (ژرکوفسکی، ۱۹۹۸، ۲۰۰۵) نیز میانه جامعه و میانه یک نمونه تصادفی فازی را به محیط فازی تعمیم داده است. توجه کنید که رویکرد ما به دلیل استفاده مستقیم از α-برش‌های متغیر تصادفی فازی و پارامتر فازی متفاوت از رویکرد وی است. روش ژرکوفسکی مبتنی بر متغیر تصادفی فازی القایی از خانواده توزیع کلاسیک با پارامتر دقیق است. در هر دو روش از مفهوم متغیر تصادفی فازی برای تعریف میانه فازی نمونه استفاده شده است. منتهی در روش ما، اگر پارامتر فازی به عددی دقیق تبدیل شود، آن‌گاه ملاحظه می‌شود تکنیک ژرکوفسکی حالت خاصی از روش پیشنهادی در این مقاله است.

۳- آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون بر اساس نمونه تصادفی فازی از جامعه‌ای با میانه فازی

در این بخش، بر اساس مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی، آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون برای انجام آزمون فرضیه رد مورد میانه فازی جامعه به محیط فازی تعمیم داده می‌شود. ابتدا فرضیه‌ها در مورد میانه فازی مشابه با حسامیان و شمس (۲۰۱۶) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۱۱ - فرض کنید $\widetilde{M}_X$ میانه فازی متغیر تصادفی فازی X باشد. به‌عنوان تعمیم آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون، آزمون فرضیه یک‌طرفه[4] و دوطرفه[5] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\widetilde{H}_0:\widetilde{M}_X=\widetilde{M}_0 \quad\equiv\quad \widetilde{H}_0:\left(\widetilde{M}_X\right)_\alpha=\left(\widetilde{M}_0\right)_\alpha \quad for\ all\ \alpha\in[0,1]. \qquad (۱۳)$$

در مقابل

$$\widetilde{H}_1:\widetilde{M}_X>\widetilde{M}_0 \quad\equiv\quad \widetilde{H}_1:\left(\widetilde{M}_X\right)_\alpha>\left(\widetilde{M}_0\right)_\alpha \quad for\ all\ \alpha\in[0,1]. \qquad (۱۴)$$

و

$$\widetilde{H}_0:\widetilde{M}_X=\widetilde{M}_0 \quad\equiv\quad \widetilde{H}_0:\left(\widetilde{M}_X\right)_\alpha=\left(\widetilde{M}_0\right)_\alpha \quad for\ all\ \alpha\in[0,1]. \qquad (۱۵)$$

در مقابل

$$\widetilde{H}_1:\widetilde{M}_X>\widetilde{M}_0 \quad\equiv\quad \widetilde{H}_0:\left(\widetilde{M}_X\right)_\alpha<\left(\widetilde{M}_0\right)_\alpha \quad for\ all\ \alpha\in[0,1]. \qquad (۱۶)$$

همچنین، آزمون فرضیه فازی دوطرفه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{H}_0:\widetilde{M}_X=\widetilde{M}_0 \quad\equiv\quad \widetilde{H}_0:\left(\widetilde{M}_X\right)_\alpha=\left(\widetilde{M}_0\right)_\alpha \quad for\ all\ \alpha\in[0,1]. \qquad (۱۷)$$

در مقابل

$$\widetilde{H}_1:\widetilde{M}_X\neq\widetilde{M}_0 \quad\equiv\quad \widetilde{H}_0:\left(\widetilde{M}_X\right)_\alpha\neq\left(\widetilde{M}_0\right)_\alpha \quad for\ all\ \alpha\in[0,1]. \qquad (۱۸)$$

---

[1] Converges with probability one
[2] Sample size
[3] Enough large
[4] One-sided fuzzy hypothesis
[5] Two-sided fuzzy hypothesis

برای انجام آزمون **رابطه (۱۳)** تا **رابطه (۱۸)**، ابتدا مفهوم آماره آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون را به محیط فازی تعمیم می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا توجه کنید که آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون برای انجام آزمون فرضیه صفر $H_0{:}M_X = M_0$ بر اساس نمونه تصادفی معمولی $X_1, X_2, \dots X_n$ به‌صورت زیر است (گیبونز و چاکرابوردی، ۲۰۰۳):

$$S = \sum_{i=1}^{n} r\ |d_i|)I\ d_i > 0), \qquad (۱۹)$$

که در آن $r(.)$ رتبه[1] مشاهده، $I(.)$ تابع نشانگر[2] و $d_i = X_i - M_0$ است. حال با تعمیم **آماره (۱۹)** بر اساس مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی تعمیم آماره ویلکاکسون فازی بر اساس آزمون فرضیه فازی به صورت زیر انجام می‌شود.

تعریف ۱۲- بر اساس مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی X_1،X_2،...،X_n، آماره آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون فازی را به‌صورت مجموعه فازی S با تابع عضویت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_S\ y) = sup\{\alpha \in [0,1]{:}\, y \in \{S_\alpha^L, S_\alpha^L + 1, \dots, S_\alpha^U\}. \qquad (۲۰)$$

به‌طوری‌که

$$S_\alpha^L = inf_{\beta \in [1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]} \sum_{i=1}^{n} r(|(x_i)_\beta - (\widetilde{M}_0)_\beta|)I((x_i)_\beta > (\widetilde{M}_0)_\beta). \qquad (۲۱)$$

$$S_\alpha^L = inf_{\beta \in [1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]} \sum_{i=1}^{n} r(|(x_i)_\beta - (\widetilde{M}_0)_\beta|)I((x_i)_\beta > (\widetilde{M}_0)_\beta). \qquad (۲۲)$$

که در آن $(x_i)_\beta$، برای هر $\alpha \in [0,1]$ در تذکر اول آمده است.

با توجه به مبحث فوق، بر اساس یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی فازی و در سطح معنی‌داری دقیق δ، آماره آزمون فازی از **تعریف ۱۲** محاسبه می‌شود. حال، به‌منظور تصمیم‌گیری[3] در مورد رد[4] یا پذیرش[5] فرضیه فازی مورد علاقه، با استفاده از معیار تعلق W، می‌توان بر اساس درجه تعلق[6] آماره آزمون ویلکاکسون فازی در ناحیه رد کلاسیک یک تابع آزمون فازی به‌صورت زیر معرفی نمود:

تعریف ۱۳- در مساله آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون بر پایه نمونه تصادفی فازی مشاهده‌شده x_1،x_2،...،x_n ، توابع آزمون فازی را برای انجام فرضیه‌های فازی **تعریف ۱۱** و در سطح معنی‌داری دقیق داده‌شده δ، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱. برای آزمون فرضیه $\widetilde{H}_0 : \widetilde{M}_X = \widetilde{M}_0$ در مقابل $\widetilde{H}_1 : \widetilde{M}_X > \widetilde{M}_0$:

$$\varphi_\delta\ x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{\frac{W\{S \in \{C'_\delta, \dots, n(n+1)/2\}\}}{1}, \frac{W\{S \in \{0,1, \dots, C'_\delta - 1\}\}}{0}\right\}. \qquad (۲۳)$$

۲. برای آزمون فرضیه $\widetilde{H}_0 : \widetilde{M}_X = \widetilde{M}_0$ در مقابل $\widetilde{H}_1 : \widetilde{M}_X < \widetilde{M}_0$:

$$\varphi_\delta\ x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{\frac{W\{S \in \{0,1,2, \dots, C''_\delta\}\}}{1}, \frac{W\{S \in \{C''_\delta + 1, \dots, n(n+1)/2\}\}}{0}\right\}. \qquad (۲۴)$$

۳. برای آزمون فرضیه $\widetilde{H}_0 : \widetilde{M}_X = \widetilde{M}_0$ در مقابل $\widetilde{H}_1 : \widetilde{M}_X \neq \widetilde{M}_0$:

$$\varphi_\delta\ x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{W\{S \in \{0,1,2, \dots, C'''_{\delta/2}\} \cup \{n\ n-1)/4 - C'''_{\delta/2}, \dots, n(n+1)/2\}\}}{1}, \frac{W\{S \in \{C''_{\frac{\delta}{2}} + 1, \dots, \frac{n\ n-1)}{4} - C''_{\frac{\delta}{2}} - 1\}\}}{0}\}. \qquad (۲۵)$$

که در آن $W\{S \in A\}$ از **تعریف ۳** محاسبه می‌شود. همچنین C'_δ، C''_δ و C'''_δ به ترتیب مقادیر بحرانی[7] برای انجام آزمون فرضیه ویلکاکسون کلاسیک به ترتیب یک‌طرفه بزرگ‌تر، کوچک‌تر و دوطرفه هستند.

[1] Rank
[2] Indicator function
[3] Decision making
[4] Reject
[5] Accept
[6] Degree of belongness
[7] Critical value

تذکر- توجه کنید که مجموع درجه‌های پذیرش[1] و رد[2] فرضیه صفر فازی برابر یک است. بنابراین، بر اساس درجه‌های DA و DR می‌توان به‌صورت زیر در مورد رد یا پذیرش فرضیه‌های فازی قضاوت کرد:

۱. اگر $DA > 0.5$، آن‌گاه مشاهدات فازی بیشتر علیه فرضیه صفر است تا به نفع آن.
۲. اگر $DA = DR = 0.5$، آن‌گاه مشاهدات فازی به نفع و علیه فرضیه صفر یکسان است.
۳. اگر $DR > 0.5$، آن‌گاه مشاهدات فازی بیشتر به نفع فرضیه صفر فازی است تا علیه آن.

تذکر- دقت کنید که سطح معنی‌داری وجه تصادفی بودن داده‌ها و درجات رد یا پذیرش آزمون، وجه ابهام[3] در مشاهدات را کنترل می‌کند. همچنین اگر فرضیه‌های فازی متغیرهای تصادفی فازی X_1، X_2، ...، X_n به‌ترتیب به فرضیه‌های معمولی و متغیرهای تصادفی معمولی X_1،X_2،...،X_n تبدیل شوند، ملاحظه می‌شود که توابع آزمون فازی فوق به توابع آزمون در حالت معمولی تبدیل می‌شوند.

تذکر- از آمار کلاسیک می‌دانیم که بر اساس مشاهدات یک نمونه تصادفی، اگر فرضیه صفر در سطح معنی‌داری δ_1 رد شود، آن‌گاه فرضیه صفر در هر سطح $\delta_2 > \delta_1$ نیز رد می‌شود. حال، با توجه به خاصیت‌های معیار تعلق W، این مطلب برای متغیرهای تصادفی فازی از یک توزیع فازی[4] نیز برقرار است. برای مثال، آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون برای آزمون فرضیه‌های $\widetilde{H}_0{:}\widetilde{M}_X = \widetilde{M}_0$ در مقابل $\widetilde{H}_1{:}\widetilde{M}_X > \widetilde{M}_0$ را در نظر بگیرید. اگر $\delta_2 > \delta_1$، آن‌گاه داریم؛

$$W\left\{S \in \{C'_{\delta_2}, \dots, n(n+1)/2\}\right\} \geq W\left\{S \in \left\{C'_{\delta_1}, \dots, \frac{n\ n+1)}{2}\right\}\right\}. \qquad (۲۶)$$

به‌عبارت‌دیگر درجه‌ای که S متعلق به ناحیه رد فرضیه صفر فازی در سطح δ_2 است بزرگ‌تر از درجه‌ای است که S متعلق به ناحیه رد فرضیه صفر فازی در سطح δ_1 است.

٤- مقایسه روش پیشنهادی با رویکردهای موجود آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون بر اساس اطلاعات نادقیق

۴-۱- مقایسه با روش ژرکوفسکی

روش ژرکوفسکی (۱۹۹۸) مبتنی بر میانه جامعه دقیق و لذا فرضیات دقیق است. لذا روش ما اساسا متفاوت از روش وی است. همچنین ژرکوفسکی (۲۰۰۸) مساله آزمون علامت را در حالت ناپارامتری بر اساس رده‌ای خاص از مجموعه‌های فازی به نام مجموعه‌های فازی شهودی[5] بررسی کرده است. روش وی مبتنی بر میانه دقیق است؛ اما رویکرد وی تنها برای آزمون فرضیه یک‌طرفه ارایه شده است. نتیجه آزمون نیز منجر به تصمیم‌گیری دقیق در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر می‌شود و در برخی موارد نیز روش وی قادر به تصمیم‌گیری نیست. درحالی‌که در روش پیشنهادشده در این مقاله، علاوه بر اینکه مساله آزمون فرضیه‌های دوطرفه (با میانه فازی) نیز مورد توجه قرار گرفته است، نتیجه آزمون نیز به‌صورت تصمیم نادقیق بیان می‌شود.

۴-۲- مقایسه با رویکرد طاهری و حسامیان

طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) نیز مسئله آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون را به محیط فازی تعمیم دادند. رویکرد ایشان را به اختصار توضیح می‌دهیم. فرض کنید علاقه‌مند به انجام آزمون فرضیه دقیق $H_0{:}M_X = M_0$ بر اساس مشاهدات نادقیق به‌عنوان درک مبهمی[6] از یک نمونه تصادفی معمولی به‌صورت x_1،x_2،...،x_n باشیم. در واقع در روش پیشنهادی طاهری و حسامیان (۲۰۱۳)، فرض شده که مشاهدات به‌صورت نادقیق اندازه‌گیری می‌شوند. برای این منظور، آن‌ها ابتدا آماره آزمون ویلکاکسون را به‌صورت زیر به محیط فازی تعمیم دادند:

$$\mu_S\ y) = sup\{\alpha \in [0,1]{:}\, y \in \left\{S_\alpha^L, S_\alpha^L + 1, \dots, S_\alpha^U\right\}. \qquad (۲۷)$$

به‌طوری‌که

$$S_\alpha^L = min\left\{inf_{\beta\geq\alpha} g_\beta^L, inf_{\beta\geq\alpha} g_\beta^U\right\},\quad S_\alpha^L = max\left\{sup_{\beta\geq\alpha} g_\beta^L, sup_{\beta\geq\alpha} g_\beta^U\right\}, \qquad (۲۸)$$

---

[1] Degree of Acceptance (DA)
[2] Degree of Rejection (DR)
[3] Vagueness
[4] Fuzzy distribution
[5] Intuitionistic fuzzy set
[6] Vague concept

و

$$g_\beta^L=\sum_{i=1}^{n} r(|\ x_i)_\beta^L-M_0|)I(\ x_i)_\beta^L>M_0), \qquad g_\beta^U=\sum_{i=1}^{n} r(|\ x_i)_\beta^U-M_0|)I(\ x_i)_\beta^U>M_0). \qquad (۲۹)$$

سپس در یک سطح معنی‌داری فازی داده‌شده، مفهوم مقدار بحرانی فازی[1] برای انجام آزمون فرضیه‌های کلاسیک را به محیط فازی تعمیم دادند. سرانجام، با به‌کار بردن یک معیار رتبه‌بندی[2] برای مقایسه مجموعه‌های فازی آماره آزمون فازی و مقدار بحرانی فازی، یک تابع آزمون فازی برای رد یا پذیرش فرضیه‌های دقیق و در سطح معنی‌داری فازی معرفی شد؛ بنابراین، در مقایسه رویکرد پیشنهادی با روش طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) نکات زیر حایز اهمیت هستند:

۱. در رویکرد پیشنهادی این مقاله، میانه جامعه فازی فرض شده است. توجه کنید که در بررسی آزمون فرضیه برای میانه جامعه ازآنجاکه مشاهدات نادقیق فرض شده‌اند، کاملا منطقی به‌نظر می‌رسد که میانه جامعه نیز کمیتی نادقیق باشد، به بیان دیگر اگر مشاهدات در یک خانواده از توزیع‌ها ذاتا نادقیق باشند بنابراین معقولانه است که فرض کنیم میانه جامعه نیز ذاتا یک کمیت فازی[3] است؛ بنابراین به‌منظور بررسی آزمون فرضیه در مورد میانه فازی، مفهوم میانه باید به‌گونه‌ای به محیط فازی تعمیم داده شود تا خاصیت‌های کلاسیک آن در محیط فازی قابل بررسی باشند. در این صورت توجه کنید که بررسی خاصیت‌های میانه فازی را تنها می‌توان در یک چارچوب از فضای احتمال اما در محیط فازی انجام داد که این موضوع مهم‌ترین تفاوت رویکرد مقاله حاضر با رویکرد طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) است. برای این منظور با استفاده از مفهوم متغیر تصادفی از یک خانواده از توزیع‌ها با پارامتر فازی، در رویکرد حاضر مفهوم میانه فازی تعریف و سپس خاصیت بزرگ نمونه‌ای آن مورد بررسی قرار گرفت درحالی‌که اگر میانه فازی را (مانند مشاهدات نادقیق در رویکرد طاهری و حسامیان (۲۰۱۳)) درک مبهمی از میانه جامعه در نظر می‌گرفتیم بررسی خاصیت بزرگ نمونه‌ای به دلیل فقدان یک چارچوب استنباطی مناسب مقدور نبود.

۲. رویکرد حاضر در تعریف آماره آزمون ویلکاکسون بر اساس مشاهدات یک نمونه تصادفی فازی و فرضیه‌های فازی یک حالت کلی‌تر نسبت به آماره آزمون فازی است که طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) معرفی کرده‌اند به این معنی که اگر در این روش میانه جامعه را به‌عنوان درک مبهمی از میانه جامعه در نظر بگیریم، آن‌گاه در بررسی فرضیه‌های فازی و بر اساس مشاهدات نادقیق، مقدار آماره آزمون در هر دو روش یکسان به‌دست می‌آید؛ اما همان‌گونه که در نکته ۱ مطرح شد، مزیت روش پیشنهادی ما ارایه یک تعریف مناسب از مفهوم میانه فازی نمونه و جامعه و بررسی خاصیت بزرگ نمونه‌ای آن در محیط فازی است.

۳. در رویکرد طاهری و حسامیان از مفهوم سطح معنی‌داری فازی برای بررسی آزمون فرضیه‌های دقیق استفاده شده است، درحالی‌که در رویکرد پیشنهادی این مقاله آزمون فرضیه‌ها در مورد میانه فازی جامعه اما در سطح معنی‌داری دقیق مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای این منظور طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) از یک معیار رتبه‌بندی بین مجموعه‌های فازی برای تعریف تابع آزمون فازی استفاده کردند درحالی‌که ما از یک معیار تعلق برای ارزیابی درجه تعلق آماره آزمون فازی به ناحیه رد کلاسیک استفاده نموده‌ایم. توجه شود که اگر سطح معنی‌داری فازی در روش طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) را دقیق در نظر بگیریم، آن‌گاه تابع آزمون فازی پیشنهادی را می‌توان در روش آزمون فرضیه پیشنهادی توسط طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) برای بررسی فرضیه‌های دقیق به‌کار برد؛ اما روش تصمیم‌گیری پیشنهادی طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) را نمی‌توان بر اساس یک سطح معنی‌داری دقیق برای بررسی آزمون فرضیه در مورد میانه فازی به‌کار برد به این دلیل که معیار رتبه‌بندی در روش طاهری و حسامیان (۲۰۱۳) نیاز به مقایسه دو مجموعه فازی در تابع تصمیم فازی دارد، درحالی‌که در روش پیشنهادی ما، تنها آماره آزمون است که به‌صورت یک مجموعه فازی به‌دست می‌آید، اما مقدار بحرانی یک عدد دقیق است. همچنین توجه کنید که اگر در روش حاضر به‌جای سطح معنی‌داری دقیق از سطح معنی‌داری فازی استفاده کنیم، آن‌گاه در صورتی می‌توان از روش تصمیم‌گیری طاهری و حسامیان برای بررسی فرضیه‌های فازی استفاده نمود که مفهوم مقدار بحرانی فازی را بتوان بر اساس فرضیه و سطح معنی‌داری فازی به نحوی مناسب به محیط فازی تعمیم داده شود که این خود البته می‌تواند از مسایل بالقوه در تحقیقات آینده باشد.

۴. طاهری و حسامیان (۲۰۱۷) رویکرد فوق را برای رده آمار آزمون‌های مکانی-مقیاسی[4] (مبتنی بر رتبه) بکار بردند. در این تکنیک نیز داده‌ها مقادیر فازی، سطح معنی‌داری فازی و فرضیات دقیق هستند و روش تصمیم‌گیری نیز همانند روش فوق است؛ بنابراین نقاط قوت روش پیشنهادی در این مقاله نسبت به طاهری و حسامیان همانند موارد ۱ تا ۳ در بالاست.

۵- مثال کاربردی

در این بخش کاربرد روش پیشنهادی برای انجام آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون بر اساس یک نمونه تصادفی فازی و میانه فازی، با یک مثال کاربردی توضیح داده می‌شود.

---

[1] Fuzzy critical value
[2] Ranking criterion
[3] Fuzzy quantity
[4] Location-scale

مثال ۳- یک شرکت تولید لاستیک[1] اتومبیل علاقه‌مند به بررسی کیفیت تولیدات اخیر خود است. یک نمونه تصادفی ۲۴ تایی از لاستیک‌های تولیدشده، بر روی ٦ اتومبیل با مدل کاملاً یکسان آزمایش شدند. طول عمر لاستیک‌ها (برحسب مسافت طی شده به مایل) به‌صورت اعداد فازی مثلثی در **جدول ۱** آمده‌اند (وو، ۲۰۰۵). در سطح معنی‌داری δ=0.05، علاقه‌مند به انجام آزمون فرضیه زیر هستیم:

$$\begin{cases}\widetilde{H}_0 : \widetilde{M}_X = \widetilde{M}_0 = \ 30000,32000,34000)_T, \\ \widetilde{H}_1 : \widetilde{M}_X \neq \ 32000,33000,34000)_T.\end{cases} \qquad (۳۰)$$

جدول ۱- داده‌های فازی مثلثی در مثال ۳.

Table 1- Data set in example 3.

مشاهدات نمونه تصادفی فازی	
$x_1 = (33262,33978,34889)_T$	$x_{13} = (32093,32617,33255)_T$
$x_2 = (32585,33052,33787)_T$	$x_{14} = (31720,32611,33497)_T$
$x_3 = (32806,33418,33908)_T$	$x_{15} = (31977,32455,33034)_T$
$x_4 = (33065,33463,34131)_T$	$x_{16} = (31943,32466,33212)_T$
$x_5 = (30743,31624,32460)_T$	$x_{17} = (32169,33070,33968)_T$
$x_6 = (32415,33127,34072)_T$	$x_{18} = (32900,33543,34335)_T$
$x_7 = (32687,33224,33908)_T$	$x_{19} = (30327,30881,31455)_T$
$x_8 = (32185,32597,33186)_T$	$x_{20} = (31187,31565,32237)_T$
$x_9 = (33423,34036,34771)_T$	$x_{21} = (33208,34053,34876)_T$
$x_{10} = (31639,32584,33542)_T$	$x_{22} = (30945,31838,32739)_T$
$x_{11} = (31511,32290,33064)_T$	$x_{23} = (31934,32800,33445)_T$
$x_{12} = (33060,33844,34449)_T$	$x_{24} = (33464,34157,34974)_T$

بر اساس روابط مطرح‌شده در بخش قبل، آماره آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$S = \left\{\frac{0.18}{113}, \frac{0.29}{118}, \frac{0.31}{131}, \frac{0.80}{141}, \frac{1}{144}, \frac{0.31}{159}, \frac{0.19}{161}\right\}. \qquad (۳۱)$$

بنابراین در سطح معنی‌داری ۰٫۰۵ با استفاده از معیار تعلق W در **تعریف ۳**، تابع آزمون فازی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varphi_\delta\ x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{\frac{W\{S \in (\{0,1,..,81\} \cup \{219, \dots ,300\})\}}{1}, \frac{W\ \{S \in \{82, \dots ,218\}\}}{0}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}. \qquad (۳۲)$$

بنابراین، در سطح معنی‌داری ۰٫۰۵، با درجه ۱ فرضیه صفر پذیرفته می‌شود.

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، روش‌های آزمون فرضیه ناپارامتری موجود مبتنی بر میانه جامعه دقیق و لذا فرضیه دقیق برای میانه جامعه است، درحالی‌که در برخی موارد جامعه هم می‌تواند کمیتی نادقیق باشد. لذا در این موارد با مسئله آزمون فرض برای میانه فازی روبرو می‌شویم و لازم است تکنیک‌های قبلی به این حالت تعمیم داده شود؛ بنابراین، ازآنجاکه رویکردهای موجود با روش ما متفاوت‌اند روشی برای مقایسه عددی درنتیجه آزمون **مثال ۱** در نظر گرفته نشده است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رویکرد جدیدی برای آزمون رتبه علامت‌دار ویلکاکسون، بر اساس متغیرهای تصادفی فازی از یک خانواده از توزیع با پارامتر فازی، پیشنهاد شد. برای این منظور، ابتدا مفاهیم میانه فازی و میانه فازی بر اساس یک نمونه از متغیرهای تصادفی فازی به محیط فازی تعمیم داده شدند. خاصیت بزرگ نمونه‌ای میانه فازی بر اساس یک متر متداول بین اعداد فازی مورد نیز بررسی قرار گرفت. سپس، آماره آزمون کلاسیک ویلکاکسون بر اساس یک نمونه تصادفی فازی با استفاده از آلفاشک‌های اعداد فازی به‌صورت یک عدد فازی تعریف شد. برای انجام آزمون فرض صفر فازی در مقابل فرض متقابل فازی (برای میانه فازی جامعه) از یک معیار تعلق که نشان‌دهنده میزان تعلق یک مجموعه فازی به یک مجموعه دقیق است، برای اندازه‌گیری درجه رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی استفاده شد. تفاوت‌ها و مزیت‌های رویکرد پیشنهادی نسبت به روش‌های موجود نیز در این مقاله مورد بحث و کنکاش قرار گرفتند. کارایی روش پیشنهادی در انجام آزمون ویلکاکسون برای حالتی که داده‌ها و فرض‌ها اعداد فازی هستند با یک مثال کاربردی نشان داده شد.

خصوصیت روش پیشنهادی این است برای تصمیم‌گیری در مورد فرضیه‌های فازی مورد آزمون، از یک درجه پذیرش (میزان سازگاری داده‌های فازی با فرضیه صفر) و یک درجه رد (میزان سازگاری مشاهدات با فرضیه مقابل) استفاده شده است. بررسی ملاک‌های بهینگی

---

[1] Rubber company

آزمون علامت با مشاهدات و فرضیه‌های فازی، سطح معنی‌داری فازی و تاثیر ابهام مشاهدات فازی بر تابع آزمون فازی، می‌تواند از مسایل بالقوه در تحقیقات آینده باشد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از داوران محترمی که با نقطه نظرات ارزشمندشان موجب بهبود کیفیت مقاله شدند نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد و نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلا چاپ‌نشده و در حال حاضر تحت انتشار نیست.

منابع

Buckley, J. J. (2006). *Fuzzy probability and statistics* (Vol. 196). Springer.

Chukhrova, N., & Johannssen, A. (2020). Fuzzy hypothesis testing for a population proportion based on set-valued information. *Fuzzy sets and systems*, *387*, 127-157.

Chukhrova, N., & Johannssen, A. (2021a). Fuzzy hypothesis testing: Systematic review and bibliography. *Applied soft computing*, *106*, 107331. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2021.107331

Chukhrova, N., & Johannssen, A. (2021b). Generalized two-tailed hypothesis testing for quantiles applied to the psychosocial status during the COVID-19 pandemic. *International journal of intelligent systems*, *36*(12), 7412-7442. https://doi.org/10.1002/int.22592

Denoeux, T., Masson, M. H., & Herbert, P. H. (2005). Non-parametric rank-based statistics and significance tests for fuzzy data. *Fuzzy sets and systems*, *153*(1), 1-28. DOI: 10.5391/IJFIS.2017.17.3.145

Gibbons, J. D., & Chakraborti, S. (2003). *Non-parametric statistical inference* (4th Ed.). Marcel Dekker, New York.

Grzegorzewski, P. (1998). Statistical inference about the median from vague data. *Control and cybernetics*, *27*(3), 447-464.

Grzegorzewski, P. (2005). Two-sample median test for vague data. *Proceedings of the joint 4th conference of the European society for fuzzy logic and technology and the 11th rencontres francophones sur la logique floue et ses applications,* (pp. 621-626), Barcelona. https://www.researchgate.net/publication/221398945_Two-Sample_Median_Test_for_Vague_Data

Grzegorzewski, P. (2008). A bi-robust test for vague data. *Proceedings 12th international conference on information processing and management of uncertainty* (pp. 138-144), Spain, Torremolinos (Malaga). http://www.gimac.uma.es/IPMU08/proceedings/papers/019-Grzegorzewski.pdf

Grzegorzewski, P. (2009). K-sample median test for vague data. *International journal of intelligent system*, *24*(5), 529-539.https://doi.org/10.1002/int.20345

Hesamian, G., & Shams, M. (2016). Parametric testing statistical hypotheses for fuzzy random variables. *Soft computing*, *20*(4), 1537-1548. DOI: 10.1007/s00500-015-1604-x

Kahraman, C., Bozdag, C. E., Ruan, D., & Özok, A. F. (2004). Fuzzy sets approaches to statistical parametric and nonparametric tests. *International journal of intelligent systems*, *19*(11), 1069-1087. DOI: 10.1002/int.20037

Kruse, R., & Meyer, K. D. (1987). Descriptive statistics with vague data. In *Statistics with vague data* (pp. 71-130). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3943-1

Lee, K. H. (2004). *First course on fuzzy theory and applications* (Vol. 27). Springer Science & Business Media.

Liu, B. (2007). Uncertainty theory. In *Uncertainty theory* (Vol. 154, pp. 205-234). Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-540-73165-8_5

Puri, M. L., & Ralescu, D. A. (1986). Fuzzy random variables. *Journal of mathematical analysis and applications*, *114*, 409-422. http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(86)90093-4

Shapiro, A. F. (2009). Fuzzy random variables. *Insurance: mathematics and economics*, *44*(2), 307-314. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.008

Taheri S. M., & Hesamian G. (2017). Non-parametric statistical tests for fuzzy observations: fuzzy test statistic approach. *International journal of fuzzy logic and intelligence systems*, *17*(3), 145-153. https://www.ijfis.org/journal/view.html?uid=787&vmd=Full

Taheri, S. M., & Hesamian, G. (2011). Goodman-Kruskal measure of association for fuzzy-categorized variables. *Kybernetika*, *47*(1), 110-122. http://eudml.org/doc/196869

Taheri, S. M., & Hesamian, G. (2013). A generalization of the Wilcoxon signed-rank test and its applications. *Statistical papers*, *54*(2), 457–470.https://doi.org/10.1007/s00362-012-0443-4

Viertl, R. (2011). *Statistical methods for fuzzy data*. John Wiley & Sons.

Wu, H. C. (2005). Statistical hypotheses testing for fuzzy data. *Information sciences*, *175*(1-2), 30-56. https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.12.009

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

ضمایم

نمادهای ریاضی به‌کار رفته در رویکرد پیشنهادی مقاله در **جدول ۲** نمایش داده شده‌اند.

جدول ۲- نمادهای ریاضی.
Table 2- Mathematical symbols.

مجموعه فازی	$\widetilde{A}$
درجه عضویت مجموعه فازی $\widetilde{A}$	$\mu_{\widetilde{A}}$
آلفا–برش‌های عدد فازی $\widetilde{A}$	$\widetilde{A}[\alpha]$
درجه تعلق عدد فازی z به مجموعه A	$W\{z \in A\}$
آلفا–شک‌های عدد فازی $\widetilde{A}$	$\widetilde{A}_{\alpha}$
نماد بزرگتر بودن عدد فازی $\widetilde{A}$ نسبت به B	$\widetilde{A} > \widetilde{B}$
فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی $\widetilde{A}$ و B	$D_H(\widetilde{A}, B)$
متغیر تصادفی فازی	X
نمونه تصادفی فازی	$X_n،\ldots،X_2،X_1$
میانه فازی متغیر تصادفی X	$\widetilde{M}_X$
میانه نمونه فازی	$\widetilde{m}_n$
فرض صفر فازی	$\widetilde{H}_0$
فرض مقابل فازی	$\widetilde{H}_1$
آماره آزمون ویلکاکسون	S
آماره آزمون فازی ویلکاکسون	S
سطح معنی‌داری	δ
آزمون فازی در سطح معنی‌داری δ	φ_{δ}
درجه پذیرش فرض صفر فازی	DA
درجه رد فرض مقابل فازی	DR
بحرانی در سطح معنی‌داری δ	C'_{δ}
تابع نشانگر	$I(.)$

شمس و حسامیان / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ویژه، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۱۲-۱