E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 7, No. 1 (2022) 1–16.

Paper Type: Original-application Paper

New Extension of TOPSIS Method for Solving Inaccurate MADM Problems Modeled with Hesitant Fuzzy Numbers

Abazar Keikha*

Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Velayat University, Iranshahr, Iran; abazar_keikha@yahoo.com.

Citation:

Keikha, A. (2022). New extension of TOPSIS method for solving inaccurate MADM problems modeled with hesitant fuzzy numbers. *Journal of decisions and operations research*, 7(1), 1-16.

Received: 20/05/2021 Reviewed: 05/07/2021 Revised: 26/10/2021 Accepted: 16/11/2021

Abstract

Purpose: The aim of this paper is to propose a new extension of Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) method to be applied with Hesitant Fuzzy Numbers (HFNs).

Methodology: At first, the uncertainty of all enteries of evaluation matrix have been modeled by HFNs. Then, each step of the standard model of TOPSIS method will be updated, using the newly introduced HFNs' mathematical tools, such as distance measures and aggregation operators of HFNs. The proposed method will be used to solve a Multi-Attribute Decision Making (MADM) problem. Finally, the credibility and comparison analysis of the obtained ranking order will be discussed.

Findings: In this paper, the TOPSIS method as a popular method for solving MADM problems has been developed to be applied with HFNs.

Originality/Value: In this paper, the TOPSIS method as a popular method for solving MADM problems has been developed to be applied with HFNs.

Keywords: Hesitant Fuzzy Numbers (HFNs), Hesitant fuzzy sets, Multi Attribute Decision Making (MADM) problems, TOPSIS method.

Corresponding Author: abazar_keikha@yahoo.com
https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.1.1.6

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۷، شماره (۱)، (۱۴۰۱)، ۱۶-۱

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی-کاربردی

توسیع جدیدی از روش تاپسیس برای حل مسائل نادقیق MADM مدل شده با اعداد فازی مردد

اباذر کیخا[*]

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله توسیع جدیدی از روش قدرتمند تاپسیس برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه نادقیق مدل شده با استفاده از اعداد فازی مردد، که اخیرا برای مدل‌سازی نوع دیگری از منابع عدم قطعیت معرفی شده‌اند، ارائه خواهد شد.

روش‌شناسی پژوهش: چنان‌که می‌دانیم روش تاپسیس مبتنی بر چندین گام است که با انجام متوالی آن‌ها مسئله حل خواهد شد. در این مطالعه، داده‌های ماتریس تصمیم به کمک اعداد فازی مردد مدل می‌شوند. سپس با استفاده از ابزارهای ریاضی بیان شده برای این نوع اعداد، دیگر گام‌ها یعنی نرمال‌سازی و وزن‌دار کردن ماتریس تصمیم، یافتن گزینه‌های ایده‌آل مثبت و منفی، تعیین فاصله دیگر گزینه‌ها از این دو گزینه ایده‌آل را به‌روزرسانی خواهیم نمود.

یافته‌ها: در این مطالعه توسیع جدیدی از روش محبوب تاپسیس برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه نادقیق،که عدم‌قطعیت در آن‌ها با اعدادفازی مردد کمّی‌سازی شده‌اند، معرفی شده است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: به‌روزرسانی گام‌های روش تاپسیس برای استفاده از آن در مواردی که از اعداد فازی مردد برای مدل‌سازی عدم قطعیت استفاده می‌شود.

کلیدواژه‌ها: اعداد فازی مردد، روش تاپسیس، مجموعه‌های فازی مردد، مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه.

۱- مقدمه

تصمیم‌گیری به‌عنوان یکی از مهارت‌های پررنگ درابعاد گوناگون زندگی بشر، در تمامی سطوح و حتی سنین مختلف، از دیرباز مورد توجه بوده است. از این‌رو تلاش‌های بسیاری صورت گرفته تا از طرق مختلف و برمبنای جمع‌آوری اطلاعات مورد نیاز و مستظهر به روش‌های علمی-ریاضی‌بنیان به اتخاذ یک تصمیم درست و بهینه کمک شود. از طرفی حجم عظیمی از اطلاعات دنیای واقعی یا ماهیت کیفی دارند یا اینکه با اعداد غیر دقیق و غیرقطعی بیان می‌شوند. اگر چه در ابتدا محققین رویکرد حذفی نسبت به عدم‌قطعیت داشتند و از طریق نظریه خطا تلاش می‌شد تا صرفا از کمّیت‌های قطعی در تحلیل‌های ریاضی استفاده شود (سالیکون[1]، ۲۰۰۷)، اما به تدریج و با گسترش حوزه‌های پژوهشی به مطالعات حرکت مولکول‌های گاز توسط فیزیک‌دانان، این رویکرد رنگ باخت و در واقع اولین جنبه از عدم‌قطعیت مبتنی بر آمار

[1] Salicone

* نویسنده مسئول

abazar_keikha@yahoo.com

https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.1.1.6

و احتمالات در دنیای واقعی پذیرفته شد (کلیر[1]، ۲۰۰۶). در ابتدا تصور می‌شد که «تصادفی بودن» تنها منبع عدم‌قطعیت است و در نتیجه نظریه احتمالات نیز تنها راه مدلسازی آن است. اما دیری نپایید که ناکارآمدی این نظریه در مدلسازی همه موقعیت‌های نادقیق اثبات، منابع دیگر و بالطبع ابزارهای مدلسازی متنوع بعدی، مانند نظریه امکان، نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه مجموعه‌های راف، نظریه مجموعه‌های فازی شهودی و ... یکی پس از دیگری رخ نمودند. جالب است بدانید این تنوع در منابع عدم‌قطعیت به حدی بود که پولاک[2] (۲۰۰۵) از آن به «باغ عدم‌قطعیت» یاد می‌کند. البته باید در نظر داشت که نظریات فوق‌الذکر نه تنها یکدیگر را نفی نمی‌کنند بلکه به اعتقاد اسمیتسون[3] (۱۹۸۸) دارای تعاملاتی نیز هستند که نحوه این تعاملات را دنوکس[4] (۲۰۱۴) تشریح کرده است.

علاوه‌بر ابهام موجود در اطلاعات مسائل تصمیم‌گیری، معیارهای مؤثر در خروجی تصمیم نیز متنوع هستند، به این دلیل به آن‌ها مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره[5] گفته می‌شود که خود در دو قالب مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه[6] و مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه[7] دسته‌بندی می‌شوند. روش‌های بسیاری (از ساده تا پیچیده) برای حل مسائل هر دسته در حالت دقیق و نادقیق تا کنون ارائه شده است.

نوع دیگری از دسته‌بندی مسائل دنیای واقعی توسط ویور[8] (۱۹۴۸) و بر مبنای تعداد مؤلفه‌ها و عوامل تشکیل‌دهنده آن‌ها ارائه شده است. از این منظر، اگر تعداد عوامل متناهی و حداکثر چهار عامل باشد به آن‌ها مسائل به آسانی سازمان‌یافته[9]، اگر تعداد عوامل زیاد اما متناهی باشد مسائل پیچیده سازمان‌یافته[10]، و اگر تعداد عوامل بی‌نهایت باشد به آن‌ها مسائل غیرسازمان‌یافته پیچیده[11] گفته می‌شود. حجم عظیمی از مسائل دنیای واقعی دارای تعداد زیادی عامل (اما متناهی) هستند و لذا در قالب مسائل پیچیده سازمان‌یافته طبقه‌بندی می‌شوند. از نظر تحقیقاتی و با توجه به تفکر استقرایی حاکم بر تحلیل‌های ریاضی، همواره به طور سنتی برای اثبات و تحلیل ریاضیاتی هر پدیده تلاش می‌شده تا برمبنای بررسی درستی ادعا برای مشاهداتی معدود با استفاده از ابزارهای ریاضی موجود درستی ادعا در حالت کلی اثبات گردد. در نتیجه با پل زدن بین دو طبقه مسائل به آسانی سازمان یافته و مسائل غیرسازمان‌یافته پیچیده، عملا دسته میانی تا سال‌ها دست نخورده و لاینحل باقی مانده است. با معرفی نظریه مجموعه‌های فازی مردد[12]، به نظر می‌رسید که ابزار ریاضی مناسبی برای تحلیل ریاضی دسته میانی مسائل در اختیار محققان قرار گرفته است و لذا به سرعت مورد توجه قرار گرفته در مدت کوتاهی در هر دو بُعد کاربردی و نظری توسعه بسیار یافت.

در این مقاله با هدف توسعه نظری و کاربردی اعداد فازی مردد به عنوان شاخه‌ای از مجموعه‌های فازی مردد، در راستای گسترش روش‌شناسی ریاضی این مفهوم جدیدا معرفی شده، یکی از روش‌های محبوب حل مسائل *MADM* یعنی تاپسیس را به منظور قابلیت کاربردی با اعداد فازی مردد به‌روزرسانی خواهیم نمود.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

۲-۱- مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی[13] حاصل تعمیم نظریه مجموعه‌هاست که توسط زاده[14] (۱۹۶۵) دانشمند ایرانی‌الاصل به عنوان یکی از اولین مفاهیم ریاضی برای توصیف عدم‌قطعیت ارائه گردید. در ادامه نیز تعمیم‌های دیگری از این نظریه به نام نظریه مجموعه‌های فازی نوع-۲[15] و نظریه مجموعه‌های فازی شهودی[16]، به ترتیب توسط زاده (۱۹۷۵) و آتاناسف[17] (۱۹۹۹) ارائه شدند. مجموعه‌های فازی مردد نیز تعمیم دیگری از مجموعه‌های فازی هستند که توسط تورا و ناروکاوا[18] (۲۰۰۹) و تورا[19] (۲۰۱۰) معرفی و ارتباط آن‌ها با انواع پیشین بررسی

---

1 Klir
2 Pollack
3 Smithson
4 Denoeux
5 Multi-criteria decision making (MCDM) problems
6 Multi-objective decision making (MODM) problems
77 Multi-attribute decision making (MADM) problems
8 Weaver
9 Organized simplicity
10 Organized complexity
11 Disorganized complexity
12 Hesitant fuzzy sets (HFSs)
13 Fuzzy sets theory
14 Zadeh
15 Type-2 fuzzy sets theory
16 Intitionistic fuzzy sets (IFSs)
17 Atanassov
18 Torra and Narukawa
19 Torra

گردید. مجموعه‌های فازی مردد به سبب استفاده از تعداد متناهی درجه تردید/عضویت و در نتیجه هماهنگی که از این حیث با مسائل با پیچیدگی سازمان‌یافته داشتند، خیلی زود مورد توجه دانشمندان حوزه‌های مختلف قرار گرفتند، که منجر به توسعه سریع کاربردی و نظری آن‌ها شد.

۲-۲- روش پژوهش

این پژوهش مبتنی بر مطالعات کتابخانه‌ای است و هدف آن توسعه کاربردی یکی از مفاهیم جدید در خصوص مدلسازی عدم‌قطعیت به نام اعداد فازی مردد می‌باشد. به این منظور با شناسایی مسئله‌ی متناسب با ابزار جدید کمّی‌سازی ابهامات دنیای واقعی، تمامی گام‌های معرفی شده در روش تاپسیس را مطابق با قواعد مترتب بر اعداد فازی مردد به‌روزرسانی کرده، با ارائه مثال‌های عددی، کاربردی از روش نیز معرفی خواهد شد. نتایج بدست آمده نیز مورد تجزیه و تحلیل مقایسه‌ای قرار خواهند گرفت.

۲-۳- پیشینه پژوهش

خیا وخوو[1] (۲۰۱۱a) با ارائه نماد ریاضی مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه درجات عضویت هر عضو را عناصر فازی مردد[2] نامیدند و مفاهیم اندازه تشابه، اندازه هم‌بستگی، قوانین عملگری مانند اعمال جمع و ضرب روی *HFE* ها را براساس ارتباط بین *HFEs* و *IFSs* تعریف کردند (خو وخیا[3]، ۲۰۱۱). ارائه شاخص‌هایی برای مقایسه *HFE* ها (خوو و خیا، ۲۰۱۱؛ خوو و خیا، ۲۰۱۲؛ لیائو و خوو[4]، ۲۰۱۴a؛ لیائو و خوو، ۲۰۱۴b)، تعیین فاصله بین مجموعه‌های فازی مردد (خیا وخوو، ۲۰۱۱a؛ خیا وخوو، ۲۰۱۱b؛ تانگ و یوو[5]، ۲۰۱۶؛ لالوترا و سینگ[6]، ۲۰۲۰) از دیگر پژوهش‌های صورت پذیرفته در این زمینه است. با توجه به این‌که *HFE* ها لزوما از نظر تعداد اعضاء با هم یکسان نیستند، ارائه روش‌هایی برای برابری تعداد اعضا *HFE* ها مورد توجه محققین قرار گرفت، لذا باید به مجموعه با تعداد عناصر کمتر اعضائی اضافه شوند تا گسترش یافته و همه آن‌ها اصطلاحا به *HFE* های تنظیم شده[7] تبدیل شوند: در حالت خوش‌بینانه، بزرگترین مقدار آن *HFE* را به دفعات تکرار، در حالت بدبینانه کمترین مقدار آن، در حالت بی‌تفاوت مقدار ۰/۵ را تکرار، و در غیر این‌صورت میانگین توانی اعضاء *HFE* با تعداد اعضاء کمتر را چنان به مجموعه اضافه می‌کنیم (خوو و خیا، ۲۰۱۱؛ خیا و خوو، ۲۰۱۱a؛ لیائو و خوو، ۲۰۱۳؛ لیائو و خوو، ۲۰۱۴a؛ لیائو و خوو، ۲۰۱۷؛ لیائو و همکاران[8]، ۲۰۱۸؛ وی[9]، ۲۰۱۲).

علی‌رغم تنوع بسیار ابزارهای مدلسازی در مواجه با عدم‌قطعیت، تکثر مسائل دنیای واقعی و تفاوت در منابع عدم‌قطعیت از یک سو، و اشتهای سیری‌ناپذیر محققین برای افزایش دقت مدلسازی از سوی دیگر، مانع از آن می‌شدند که جستجو برای یافتن ابزارهای جدید یا تعمیم و بهبود ابزارهای موجود متوقف شوند. مجموعه‌های فازی مردد بازه-مقدار[10] (چن و همکاران[11]، ۲۰۱۳؛ جین و همکاران[12]، ۲۰۱۶)، مجموعه‌های فازی مردد بازه‌ای نوع-۲[13] (هو و همکاران[14]، ۲۰۱۵)، مجموعه‌های فازی مردد نوع-۲[15] (فنگ و همکاران[16]، ۲۰۱۸)، اعداد فازی مردد ذوزنقه‌ای تعمیم یافته[17] (دلی[18]، ۲۰۲۰) از جمله توسیع‌های مختلف مجموعه‌های فازی مردد هستند که برای شرایط خاصی تعریف و بکار رفته‌اند.

یک بخش بسیار مهم از مسائل تصمیم‌گیری را مسائل *MADM* تشکیل می‌دهند که در آن‌ها تعداد متناهی گزینه و تعداد متناهی معیار/شاخص وجود داشته، گزینه‌ها براساس معیارهای داده شده به روش‌های مختلفی رتبه‌بندی می‌شوند (دلی، ۲۰۲۰؛ گارگ و آرورا[19]، ۲۰۲۰؛ رنجبر و همکاران[20]، ۲۰۲۰؛ تزنگ و هووانگ[21]، ۲۰۱۱). ساختار کلی این روش‌ها بر ارزیابی گزینه‌ها نسبت به تمامی معیارها و تشکیل ماتریس تصمیم استوار است و لذا وجود ابهام و عدم‌قطعیت دور از انتظار نیست. درایه‌های هر سطر ماتریس تصمیم به عنوان امتیازات جزئی گزینه مورد نظر تعبیر می‌شوند و امتیاز نهایی برآیندی از این مقادیر است که به روش‌های متنوعی مانند تاپسیس، ویکور،

---

[1] Xia and Xu
[2] Hesitant fuzzy elements (HFEs)
[3] Xu and Xia
[4] Liao and Xu
[5] Tong and Yu
[6] Lalotra and Singh
[7] Adjusted HFEs (AHFEs)
[8] Liao et al.
[9] Wei
[10] Interval-valued HFSs
[11] Chen et al.
[12] Jin et al.
[13] Interval type-2 HFSs (IT2HFSs)
[14] Hu et al.
[15] Type-2 HFSs (T2HFSs)
[16] Feng et al.
[17] Generalized Trapezoidal Hesitant Fuzzy Numbers (GTHFNs)
[18] Deli
[19] Garg and Arora
[20] Ranjbar et al.
[21] Tzeng and Huang

پرومته، میانگین ساده، میانگین وزن‌دار، میانگین وزن‌دار ترتیبی، میانگین هندسی، توابع *max/min*، انتگرال چوکوئت، میانگین توانی و ...، در هر دو محیط فازی و غیرفازی به دست می‌آیند (لیائو و همکاران، ۲۰۱۸؛ تزنگ و هووانگ، ۲۰۱۱؛ کیخا[1]، ۲۰۱۵؛ جوشی و کومار[2]، ۲۰۱۶؛ منگ و همکاران[3]، ۲۰۱۶؛ یوو و همکاران[4]، ۲۰۱۱؛ وی، ۲۰۱۲؛ وی و همکاران[5]، ۲۰۱۲؛ وی و همکاران، ۲۰۱۴؛ وی وهمکاران ۲۰۱۶؛ جعفری و احسانی‌فر[6]، ۲۰۲۰). روش تاپسیس یکی از روش‌های موفق در حل مسائل *MADM* است و به این دلیل با همه نوع داده فازی مورد استفاده قرار گرفته است (کیوپینگ و اویوانگ[7]، ۲۰۱۵؛ تزنگ و هووانگ، ۲۰۱۱؛ کیخا، ۲۰۱۵. پالزوسکی و سالابون[8]، ۲۰۱۹؛ مقصودی و همکاران[9]، ۲۰۱۵؛ منصوری و همکاران[10]، ۲۰۲۱).

معمولا فاز ارزیابی و تشکیل ماتریس تصمیم یا از طریق استفاده از مقادیر از پیش‌تعیین شده، یا قضاوت داوران خارجی و یا از طریق فرم‌های خود ارزیابی صورت می‌پذیرد. هر کدام از روش‌های مذکور دارای مزایا و معایبی هستند که ممکن است اعتبار نتایج آن‌ها بیشتر تحت‌الشعاع ایرادات وارده از سوی دیگر مشارکت‌کنندگان در فرایند ارزیابی قرار گیرد. به عنوان مثال در مدل ارزیابی یک سازمان توسط داور خارجی، ممکن است به دلیل عدم اشراف داور به تمامی شرایط مبتلا به سازمان قضاوت صورت گرفته مورد تشکیک قرار گیرد یا سازمان با ارائه عملکرد ویترینی در بازه زمانی ارزیابی، قضاوت را تحت تأثیر قرار دهد. در مدل خود ارزیابی نیز نتایج به هر دلیلی ممکن است غیر واقعی و متأثر از انگیزه‌های فردی و سازمانی برای کسب امتیاز بالاتر باشد. به عبارت دیگر در برخی از مسائل *MADM* و در فاز ارزیابی گزینه‌ها نسبت به هر معیارممکن است با مقادیری از پیش تعیین شده (مانند مقادیر خود ارزیابی یا تعیین شده توسط مدیر مافوق) مواجه شویم که به هر دلیلی از سوی تصمیم‌گیرنده به طور صددرصد قابل پذیرش/رد نیستند و باید در فرایند تصمیم‌گیری از آن‌ها استفاده شود. مثلا برتری نمره دانشجویی که در طی فرایند مستمر آموزش مشارکت مطلوب نداشته ولی در امتحان پایان ترم (در زمان و تعداد سوال محدود) بر دانشجویی که در طول ترم بالاترین حد فعالیت و مشارکت کلاسی را دارا بوده ولی در امتحان پایانی به علت مشکلات غیرمترقبه مانند بیماری ناموفق بوده است، همواره در ذهن اساتید از آن به عنوان قضاوتی ناعادلانه که گریزی از آن نیست، یاد می‌شود. اخیرا، تعمیمی از مجموعه‌های فازی مردد به نام اعداد فازی مردد[11] ارائه شده است (گارگ و همکاران[12]، ۲۰۲۰؛ کیخا، ۲۰۲۱) که ما را قادر می‌سازد با ترکیب دو شیوه مذکور ارزیابی، نقاط ضعف را تعدیل و نقاط قوت را نیز تقویت نماییم. یک *HFN* از دو بخش تشکیل شده است: بخش حقیقی–مقدار و بخش *HFE*-مقدار. امتیازات ناشی از خود ارزیابی تشکیل دهنده بخش حقیقی–مقدار و بخش *HFE*-مقدار نیز به نظرات داوران و میزان رضایت آن‌ها از امتیازات خود ارزیابی یا عملکرد واحد مورد ارزیابی اختصاص دارد. در این مقاله، پس از تشکیل ماتریس تصمیم بر مبنای اعداد فازی مردد، با توسعه روش تاپسیس به محیط اعداد فازی مردد، روشی جدید برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه معرفی خواهد شد.

دیگر بخش‌های این مقاله به ترتیب عبارتند از: بخش‌های ۲ و ۳، به ترتیب به مروری بر مجموعه‌های فازی مردد و اعداد فازی مردد خواهند پرداخت. بخش ۴، ساختار کلی یک مسئله *MADM* و حل آن به روش تاپسیس در محیط‌های قطعی و غیرقطعی را ارائه می‌کند. در بخش ۵، تعمیم روش تاپسیس برای حل یک مسئله *MADM* در محیط اعداد فازی مردد مورد بحث قرار خواهد گرفت. بخش‌های ۶ و ۷، به ترتیب شامل یک مثال عددی، تحلیل نتایج و اعتبارسنجی شیوه پیشنهادی مقاله و نتیجه‌گیری هستند.

۲-۴- مجموعه‌های فازی مردد و اعداد فازی مردد

مجموعه‌های فازی مردد تعمیمی از مجموعه‌های فازی هستند، که مناسب مدل‌سازی موقعیت‌هایی هستند که تصمیم‌گیرنده درجات تردید خودش را به صورت یک مجموعه متناهی از مقادیر بیان می‌کند. مجموعه‌های فازی مردد به جای کل بازه $[0,1]$ مجموعه‌ای متناهی از مقادیر متعلق به آن را به عنوان درجات تردید اختیار می‌کنند و به شرح زیر تعریف می‌شوند.

[1] Keikha
[2] Joshi and Kumar
[3] Meng et al.
[4] Yu et al.
[5] Wei
[6] Jafari and Ehsanifar
[7] Qiaoping and Oyuang
[8] Palczewski and Sałabun
[9] Maghsoudi et al.
[10] Mansory et al.
[11] Hesitant fuzzy numbers (HFNs)
[12] Garg et al.

تعریف ۱- فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع باشد. یک HFS روی X در واقع یک تابع روی X است که زیرمجموعه‌ای از $[0,1]$ را برمی‌گرداند.

تعریف ۲- HFE دلخواه $h=\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$، که در آن $\gamma_i\in[0,1]$ داده شده است. آنگاه

الف) میانگین یا تابع امتیاز h را با $\bar{h}(x)=S(h)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$،

ب) درجه تردید h را با $\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i-\bar{h}(x))^2}$،

پ) واریانس h را با $Var(h)=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\gamma_i,\gamma_j}(\gamma_i-\gamma_j)^2}$ می‌دهند.

تعریف ۳- فرض کنید h_1 و h_2 دو HFE دلخواه تنظیم‌شده هر یک شامل l عنصر باشند. فاصله بین آن‌ها بر مبنای فاصله‌های مردد نرمال‌شده‌ی همینگ (d_{hnh}) و اقلیدسی (d_{hne}) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{hnh}(h_1,h_2)=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left|h_{1(i)}-h_{2(i)}\right|,$$
$$d_{hne}(h_1,h_2)=\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left|h_{1(i)}-h_{2(i)}\right|^2}, \qquad (۱)$$

که در آن $h_{j(i)}$، i امین مقدار کوچک آن‌ها است.

تعریف ۴- برای دسته‌ای دلخواه از HFE های تنظیم‌شده مانند $h_j\,(j=1,2,...,n)$ (هر یک شامل l عنصر)، و مقداری حقیقی و مثبت λ، اعمال حسابی به صورت زیر تعریف می‌شوند. ابتدا فرض کنید برای هر مقدار j، $h_j^{\sigma(t)}$ را t امین مقدار کوچک h_j باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}
&1)\,h^{\lambda}=\left\{\left(h^{\sigma(t)}\right)^{\lambda}\,/\,t=1,2,...,l\right\},\\
&2)\,\lambda h=\left\{1-\left(1-h^{\sigma(t)}\right)^{\lambda}\,/\,t=1,2,...,l\right\},\\
&3)\,h_1\oplus h_2=\left\{h_1^{\sigma(t)}+h_2^{\sigma(t)}-h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)}\,/\,t=1,2,...,l\right\},\\
&4)\,h_1\otimes h_2=\left\{h_1^{\sigma(t)}h_2^{\sigma(t)}\,/\,t=1,2,...,l\right\},\\
&5)\,\oplus_{j=1}^{n}h_j=\left\{1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-h_j^{\sigma(t)}\right)/\,t=1,2,...,l\right\},\\
&6)\,\otimes_{j=1}^{n}h_j=\left\{\prod_{j=1}^{n}h_j^{\sigma(t)}\,/\,t=1,2,...,l\right\}.
\end{aligned} \qquad (۲)$$

عدد فازی مردد را می‌توان تعمیم‌یافته‌ی HFE یا حالت خاصی از عدد فازی معمولی نامید.

تعریف ۵- مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته، فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ و $h(a)=\{\gamma\,/\,\gamma\in[0,1]\}$ مجموعه‌ای با تعداد متناهی عضو باشد. آنگاه $\tilde{a}=\langle a;h(a)\rangle$ را یک عدد فازی مردد می‌نامیم.

تعریف ۶- فرض کنید $\tilde{a}=\langle a;h(a)\rangle$ و $\tilde{b}=\langle b;h(b)\rangle$ اعداد فازی مردد و $\lambda\in\mathbb{R}$ باشند، آنگاه اعمال حسابی روی اعداد فازی مردد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(1)\ \tilde{a}+\tilde{b}=\langle a+b;h(a)\cup h(b)\rangle,$$
$$(2)\ \lambda\tilde{a}=\langle\lambda a;h(a)\rangle,$$
$$(3)\ \tilde{a}^{\lambda}=\langle a^{\lambda};h(a)\rangle,\qquad (۳)$$
$$(4)\ \tilde{a}\tilde{b}=\begin{cases}\langle ab;h(a)\cap h(b)\rangle & if \quad h(a)\cap h(b)\neq\varphi\\ \left\langle ab;\min\limits_{\gamma_i\in h(a),\gamma_j\in h(b)}\{\gamma_i,\gamma_j\}\right\rangle & if \quad h(a)\cap h(b)\neq\varphi\end{cases}.$$

تعریف ۷- دو عدد فازی مردد $\tilde{a}_1=\langle a_1;\{\gamma_{11},\gamma_{12},...,\gamma_{1l}\}\rangle$ و $\tilde{a}_2=\langle a_2;\{\gamma_{21},\gamma_{22},...,\gamma_{2k}\}\rangle$ را در نظر بگیرید. فاصله‌های اقلیدسی (d_E) و همینگ (d_H) بین آن‌ها به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d_E(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\sqrt{\frac{1}{1+k\times l}\left(|a_1-a_2|^2+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}|\gamma_{1i}-\gamma_{2j}|^2\right)},\qquad (۴)$$
$$d_H(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\frac{1}{1+k\times l}\left(|a_1-a_2|+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}|\gamma_{1i}-\gamma_{2j}|\right).$$

۵-۲- مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه

فرم کلی یک مسئله $MADM$، در هر دو محیط دقیق و نادقیق، مرکب از m گزینه‌ی $\{A_1,A_2,...,A_m\}$ و n معیار $\{C_1,C_2,...,C_n\}$ با بردار وزن $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ می‌باشد. تاکنون روش‌های زیادی مانند $TOPSIS$، CI، SWA و ... مبتنی بر تشکیل ماتریس تصمیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$، a_{ij} مقدار ارزیابی از گزینه i ام نسبت به معیار j ام است، برای حل آن‌ها ارائه شده است (تزنگ و هووانگ، ۲۰۱۱).

۱-۵-۲- روش تاپسیس معمولی

روش تاپسیس یکی از ابزارهای پرکاربرد حل مسائل $MADM$ است. فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس تصمیم متناظر با یک مسئله $MADM$ با ساختار فوق باشد. مجموعه معیارهای مسئله را به دو دسته‌ی افراز می‌کنیم: معیارهای با جنبه مثبت (معیارهای سود)، یعنی بیشتر بهتر است، که با B نشان می‌دهیم؛ و معیارهای با جنبه منفی (معیارهای هزینه)، یعنی کمتر بهتر است که با C نشان می‌دهیم. الگوریتم این روش به شرح زیر می‌باشد.

گام ۱- ماتریس تصمیم را به ماتریس نرمال $N=[n_{ij}]_{m\times n}$ تبدیل کنید که در آن

$$n_{ij}=\begin{cases}\dfrac{a_j^{max}-a_{ij}}{a_j^{max}-a_j^{min}}; & j\in B,\\[2ex] \dfrac{a_{ij}-a_j^{min}}{a_j^{max}-a_j^{min}}; & j\in C.\end{cases}\qquad (۵)$$

$a_j^{max}=max\{a_{ij}\,|\,i=1,2,...,m;\, j\in B\}$ ؛ $a_j^{min}=min\{a_{ij}\,|\,i=1,2,...,m;\, j\in C\}$.

گام ۲- با استفاده از بردار وزن معیارها، ماتریس نرمال گام ۱ را به ماتریس نرمال وزن‌دار $NW=[v_{ij}]_{m\times n}$ تبدیل کنید به طوری‌که $v_{ij}=w_i\times n_{ij}$.

گام ۳- دو گزینه مجازی A^+ و A^- را به عنوان جواب‌های ایده‌آل مثبت و منفی به شرح زیر تعیین کنید:

کیفا / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحه: ۱۶-۱

$$A^{+}=\left\{d_1^{+},d_2^{+},...,d_n^{+}\right\}=\left\{\left(max_i\, v_{ij}\ /\ j\in \boldsymbol{B}\right)\&\left(min_i\, v_{ij}\ /\ j\in C\right)\right\};$$
$$A^{-}=\left\{d_1^{-},d_2^{-},...,d_n^{-}\right\}=\left\{\left(min_i\, v_{ij}\ /\ j\in B\right)\&\left(max_i\, v_{ij}\ /\ j\in C\right)\right\}. \quad (۶)$$

گام ٤- فاصله هر یک از گزینه‌های اصلی را از دو گزینه مجازی فوق محاسبه کنید (با استفاده از فاصله اقلیدسی روابط زیر را خواهیم داشت).

$$S_i^{+}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(v_{ij}-d_i^{+}\right)^2}; \qquad S_i^{-}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(v_{ij}-d_i^{-}\right)^2}.\ \ i=1,2,...,n \quad (۷)$$

گام ۵- مقدار $r_i=\frac{S_i^{-}}{S_i^{+}+S_i^{-}}$ ، $i=1,2,...,n$ را نظیر هر گزینه حساب و نتایج را به صورت صعودی مرتب کنید.

گام ۶- گزینه‌ها را مطابق رتبه‌بندی مقادیر متناظر در گام ۵ مرتب کنید.

۲-۵-۲- حل مسائل MADM درمحیط فازی مردد

در بسیاری موارد درایه‌های ماتریس تصمیم یا از طریق قضاوتهای انسانی به دست می‌آیند ویا در بیان نتایج ارزیابی‌های جزئی از عبارات زبانی استفاده می‌شود، لذا با درجاتی از عدم‌قطعیت همراه هستند و در نتیجه تعمیم روش‌های حل این نوع مسائل از محیط‌های دقیق به محیط‌های نادقیق ضروری است. ابتدا فرض کنید ارزیابی توسط تصمیم‌گیرنده صورت گرفته و او مقدار ارزیابی خویش از گزینه‌ی i ام نسبت به معیار j ام را با HFE به صورت $h_j=\{\gamma_{j1},\gamma_{j2},...,\gamma_{jk}\}$ بیان می‌کند. برای انتخاب بهترین گزینه یا حل مسئله از این طریق، وی و همکاران (۲۰۱۲) گام‌های زیر را پیشنهاد دادند:

گام ۱ - ارزیابی تمامی گزینه‌ها نسبت به همه معیارها و بیان آن با HFE به صورت $h_{ij}, i=1,...,m; j=1,...,n$.

گام ۲ - تعیین اندازه‌های فازی هر زیرمجموعه از مجموعه معیارها.

گام ۳- همسوسازی h_{ij} ($i=1,...,m$) به یک مقدار HFE کلی h_i برای گزینه‌ی A_i.

گام ۴- رتبه‌بندی گزینه‌ها بر مبنای رتبه‌بندی مقادیر HFE حاصل از گام ۳.

۳- توسعه روش تاپسیس برای حل مسئله MADM با اعداد فازی مردد

شکل کلی مسئله $MADM$ با معیارهای وزن‌دار شده با بردار وزن $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ و ماتریس تصمیم مدل‌سازی شده با اعداد فازی مردد به صورت $\tilde{D}=\left[\left\langle d_{ij},\left\{\gamma_{ij1},\gamma_{ij2},...,\gamma_{ijk_i}\right\}\right\rangle\right]_{m\times n}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه معیارها به دو دسته‌ی معیارهای از جنس سود و معیارهای از جنس هزینه به ترتیب با نام‌های B و C افراز شده باشد. در این مقاله رتبه‌بندی گزینه‌ها مطابق روش تاپسیس صورت خواهد پذیرفت. به این منظور ابتدا گزینه‌های ایده‌آل مثبت و منفی را باید تعیین کرد و گزینه‌های واقعی را بر مبنای فاصله نسبی آن‌ها از این دو گزینه مجازی رتبه‌بندی نمود. برای این کار گام‌های زیر پیشنهاد می‌شوند:

گام ۱ - درایه‌های ماتریس تصمیم را به اعداد فازی مردد تنظیم شده تبدیل کنید.

$$\tilde{AD}=\left[\left\langle d_{ij},\left\{\gamma_{ij}^{\sigma(1)},\gamma_{ij}^{\sigma(2)},...,\gamma_{ij}^{\sigma(k)}\right\}\right\rangle\right]_{m\times n}.$$

که در آن $\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(k)\}$ جایگشتی از $\{1,2,...,k\}$ است به طوری که $\gamma_{ij}^{\sigma(1)}\le\gamma_{ij}^{\sigma(2)}\le...\le\gamma_{ij}^{\sigma(k)}$.

گام ۲- ماتریس تصمیم حاصل از گام ۱ را به ماتریس نرمال وزن‌دار $\tilde{ND}=\left[\tilde{nh}_{ij}\right]_{m\times n}$ تبدیل کنید که در آن

$$nh_{ij}=\left\langle nd_{ij};\left\{\gamma_{ij}^{\sigma(1)},\gamma_{ij}^{\sigma(2)},...,\gamma_{ij}^{\sigma(k)}\right\}\right\rangle=\begin{cases}\left\langle w_i\times\dfrac{d_j^{max}-d_{ij}}{d_j^{max}-d_j^{min}},\left\{\gamma_{ij}^{\sigma(1)},\gamma_{ij}^{\sigma(2)},...,\gamma_{ij}^{\sigma(k)}\right\}\right\rangle, & j\in B\\ \left\langle w_i\times\dfrac{d_{ij}-d_j^{min}}{d_j^{max}-d_j^{min}},\left\{\gamma_{ij}^{\sigma(1)},\gamma_{ij}^{\sigma(2)},...,\gamma_{ij}^{\sigma(k)}\right\}\right\rangle. & j\in C\end{cases} \quad (۸)$$

گام ۳- گزینه‌های مجازی ایده‌آل مثبت A^+ و منفی A^- را به شرح زیر تعیین کنید:

$$A^+=\left\{\tilde{d}_i^+ \mid i=1,2,..,m\right\}=\left\{\left\langle max_i\, nd_{ij},\{1,1,...,1 \mid j\in B\}\right\rangle \& \left\langle min_i\, nd_{ij},\bigcup_{r=1}^{k}\left\{min_i\gamma_{ij}^{\sigma(r)}\wedge 0.5 \mid j\in C\right\}\right\rangle\right\},$$

$$A^-=\left\{\tilde{d}_i^- \mid i=1,2,..,m\right\}=\left\{\left\langle min_i\, nd_{ij},\bigcup_{r=1}^{k}\left\{min_i\gamma_{ij}^{\sigma(r)}\wedge 0.5 \mid j\in B\right\}\right\rangle \& \left\langle max_i\, nd_{ij},\{1,1,...,1 \mid j\in C\}\right\rangle\right\}. \quad (۹)$$

گام ۴- فاصله هر گزینه از A^+ (S_i^+) و A^- (S_i^-) را محاسبه کنید:

$$S_i^+=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(d_E(d_j^+,\tilde{nh}_{ij})\right)^2},\qquad S_i^-=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(d_E(d_j^-,\tilde{nh}_{ij})\right)^2}.\qquad i=1,2,...,m \quad (۱۰)$$

گام ۵- با استفاده از نتایج گام ۴، متناظر هر گزینه مقادیر نسبی $C_i=\dfrac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}, i=1,2,...,m$ را حساب کنید.

گام ۶- C_i ها را به صورت صعودی مرتب و گزینه‌ها را مشابه رتبه‌ی مقادیر متناظر آن‌ها مرتب کنید.

۴- مثال عددی

در این بخش، مثالی را که پیش از این به روش انتگرال چوکوئت مورد بررسی قرار گرفته بود (کیخا و میش‌مست نهی[1]، ۲۰۲۱)، به روش تاپسیس حل خواهیم نمود.

مثال ۱. مسأله رتبه بندی هفت سازمان A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 و A_7 بر مبنای معیارهای c_1، c_2، c_3، c_4، c_5 و c_6 را در نظر بگیرید. در این مسأله، معیارهای با بردار $W=(0.125; 0.33; 0.175; 0.09; 0.15; 0.13)$ وزن‌دار و سقف امتیاز هر یک از شش محور فوق نیز به ترتیب ۱۲۵، ۳۳۰، ۱۷۵، ۹۰، ۱۵۰ و ۱۳۰ امتیاز می‌باشد. علاوه بر این، فرض کنید A_5 گزینه‌ای است فرضی با امتیازات خود ارزیابی غیرواقعی. فرآیند ارزیابی از دو مرحله ی خود ارزیابی و ارزیابی داوران تشکیل شده است. خود ارزیابی توسط مدیران سازمان‌ها از طریق فرم‌هایی از پیش‌طراحی شده و بارگذاری مستندات هر امتیاز ادعایی صورت می‌پذیرد. ماتریس D با درایه‌های بی‌مقیاس، شامل نتایج این مرحله از ارزیابی است:

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\\A_6\\A_7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}c_1&c_2&c_3&c_4&c_5&c_6\end{array}\\ \begin{pmatrix}124&321&175&82&144&127\\123&324&160&88&147&125\\123&327&170&85&148&127\\121&329&173&85&147&129\\125&327&171&90&149&130\\125&325&172&90&145&129\\122&325&172&89&147&129\end{pmatrix}\end{array}$$

---

[1] Keikha and Mishmast Nehi

در مرحله بعدی و با حضور پنج کارشناس خبره و آگاه به مسئله، گزینه‌ها مورد ارزیابی قرار خواهند گرفت، که مقادیر ارزیابی در قالب اعدادی در بازه‌ی $[0,1]$ بیان و در ماتریس تصمیم HFE مرتب شده‌اند:

$$HFED=\left(\begin{array}{ccc} \{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\} & \{0.1,0.4,0.7,0.8,0.9\} & \{0.2,0.6,0.6,0.4,0.5\} \\ \{0.3,0.5,0.8,0.6,0.9\} & \{0.3,0.5,0.6,0.5,0.9\} & \{0.9,0.9,0.9,0.9,0.9\} \\ \{0.3,0.5,0.6,0.7,0.9\} & \{0.1,0.5,0.6,0.9,0.9\} & \{0.3,0.5,0.7,0.6,0.9\} \\ \{0.9,0.7,0.8,0.9,0.9\} & \{0.1,0.7,0.3,0.8,0.9\} & \{0.2,0.6,0.7,0.4,0.5\} \\ \{0.1,0.1,0.1,0.1,0.1\} & \{0.1,0.2,0.1,0.2,0.1\} & \{0.2,0.2,0.3,0.1,0.1\} \\ \{0.8,0.8,0.9,0.8,0.9\} & \{0.9,0.8,0.7,0.8,0.9\} & \{0.2,0.2,0.3,0.4,0.5\} \\ \{0.4,0.4,0.5,0.6,0.9\} & \{0.8,0.5,0.6,0.9,0.6\} & \{0.3,0.5,0.6,0.6,0.6\} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \{0.7,0.7,0.5,0.6,0.9\} & \{0.3,0.2,0.6,0.3,0.3\} & \{0.3,0.4,0.6,0.7,0.7\} \\ \{0.7,0.8,0.5,0.5,0.9\} & \{0.3,0.4,0.4,0.6,0.8\} & \{0.8,0.8,0.8,0.9,0.9\} \\ \{0.7,0.6,0.5,0.6,0.9\} & \{0.3,0.3,0.5,0.6,0.6\} & \{0.6,0.7,0.8,0.6,0.9\} \\ \{0.8,0.7,0.5,0.5,0.6\} & \{0.1,0.5,0.4,0.5,0.9\} & \{0.7,0.3,0.3,0.4,0.5\} \\ \{0.1,0.2,0.2,0.2,0.2\} & \{0.1,0.2,0.1,0.3,0.3\} & \{0.3,0.1,0.2,0.2,0.1\} \\ \{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\} & \{0.1,0.7,0.6,0.8,0.9\} & \{0.5,0.3,0.7,0.4,0.5\} \\ \{0.3,0.5,0.5,0.6,0.9\} & \{0.7,0.7,0.5,0.6,0.8\} & \{0.3,0.5,0.6,0.4,0.4\} \end{array}\right).$$

ماتریس تصمیم $HFND$ زیر، ماتریس حاصل از ترکیب دو ماتریس تصمیم D و HFE است که درایه‌های آن را اعداد فازی مردد تشکیل می‌دهند:

$$HFND=\left(\begin{array}{ccc} \langle 124;\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\}\rangle & \langle 321;\{0.1,0.4,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 175;\{0.2,0.6,0.6,0.4,0.5\}\rangle \\ \langle 123;\{0.3,0.5,0.8,0.6,0.9\}\rangle & \langle 324;\{0.3,0.5,0.6,0.5,0.9\}\rangle & \langle 160;\{0.9,0.9,0.9,0.9,0.9\}\rangle \\ \langle 123;\{0.3,0.5,0.6,0.7,0.9\}\rangle & \langle 327;\{0.1,0.5,0.6,0.9,0.9\}\rangle & \langle 170;\{0.3,0.5,0.7,0.6,0.9\}\rangle \\ \langle 121;\{0.9,0.7,0.8,0.9,0.9\}\rangle & \langle 329;\{0.1,0.7,0.3,0.8,0.9\}\rangle & \langle 173;\{0.2,0.6,0.7,0.4,0.5\}\rangle \\ \langle 125;\{0.1,0.1,0.1,0.1,0.1\}\rangle & \langle 327;\{0.1,0.2,0.1,0.2,0.1\}\rangle & \langle 171;\{0.2,0.2,0.3,0.1,0.1\}\rangle \\ \langle 125;\{0.8,0.8,0.9,0.8,0.9\}\rangle & \langle 325;\{0.9,0.8,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 172;\{0.2,0.2,0.3,0.4,0.5\}\rangle \\ \langle 122;\{0.4,0.4,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 325;\{0.8,0.5,0.6,0.9,0.6\}\rangle & \langle 172;\{0.3,0.5,0.6,0.6,0.6\}\rangle \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \langle 82;\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 144;\{0.3,0.2,0.6,0.3,0.3\}\rangle & \langle 127;\{0.3,0.4,0.6,0.7,0.7\}\rangle \\ \langle 88;\{0.7,0.8,0.5,0.5,0.9\}\rangle & \langle 147;\{0.3,0.4,0.4,0.6,0.8\}\rangle & \langle 125;\{0.8,0.8,0.8,0.9,0.9\}\rangle \\ \langle 85;\{0.7,0.6,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 148;\{0.3,0.3,0.5,0.6,0.6\}\rangle & \langle 127;\{0.6,0.7,0.8,0.6,0.9\}\rangle \\ \langle 85;\{0.8,0.7,0.5,0.5,0.6\}\rangle & \langle 147;\{0.1,0.5,0.4,0.5,0.9\}\rangle & \langle 129;\{0.7,0.3,0.3,0.4,0.5\}\rangle \\ \langle 90;\{0.1,0.2,0.2,0.2,0.2\}\rangle & \langle 149;\{0.1,0.2,0.1,0.3,0.3\}\rangle & \langle 130;\{0.3,0.1,0.2,0.2,0.1\}\rangle \\ \langle 90;\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\}\rangle & \langle 145;\{0.1,0.7,0.6,0.8,0.9\}\rangle & \langle 129;\{0.5,0.3,0.7,0.4,0.5\}\rangle \\ \langle 89;\{0.3,0.5,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 147;\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.8\}\rangle & \langle 129;\{0.3,0.5,0.6,0.4,0.4\}\rangle \end{array}\right).$$

اکنون با استفاده از ماتریس $HFND$ و روش توسعه یافته تاپسیس معرفی شده در این مقاله، با انجام گام‌های زیر گزینه‌ها را مرتب خواهیم نمود:

گام ۱- داده‌های ماتریس تصمیم تنظیم‌شده هستند و نیازی به تنظیم مجدد ندارند.

گام ۲- با توجه به این که داده‌های ماتریس ارزیابی، بی‌مقیاس هستند لذا نرمال‌سازی ضرورتی ندارد و فقط وزن‌دار کردن درایه‌های ماتریس تصمیم باید انجام گیرد، لذا خواهیم داشت:

$$WHFND=\begin{pmatrix}
\langle 15.5;\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\}\rangle & \langle 105.93;\{0.1,0.4,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 30.625;\{0.2,0.6,0.6,0.4,0.5\}\rangle & \langle 7.2;\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 21.6;\{0.3,0.2,0.6,0.3,0.3\}\rangle & \langle 16.51;\{0.3,0.4,0.6,0.7,0.7\}\rangle \\
\langle 15.375;\{0.3,0.5,0.8,0.6,0.9\}\rangle & \langle 107.25;\{0.3,0.5,0.6,0.5,0.9\}\rangle & \langle 28;\{0.9,0.9,0.9,0.9,0.9\}\rangle & \langle 7.92;\{0.7,0.8,0.5,0.5,0.9\}\rangle & \langle 22.05;\{0.3,0.4,0.4,0.6,0.8\}\rangle & \langle 16.25;\{0.8,0.8,0.8,0.9,0.9\}\rangle \\
\langle 15.375;\{0.3,0.5,0.6,0.7,0.9\}\rangle & \langle 107.91;\{0.1,0.5,0.6,0.9,0.9\}\rangle & \langle 29.75;\{0.3,0.5,0.7,0.6,0.9\}\rangle & \langle 7.65;\{0.7,0.6,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 22.2;\{0.3,0.3,0.5,0.6,0.6\}\rangle & \langle 16.51;\{0.6,0.7,0.8,0.6,0.9\}\rangle \\
\langle 15.125;\{0.9,0.7,0.8,0.9,0.9\}\rangle & \langle 108.57;\{0.1,0.7,0.3,0.8,0.9\}\rangle & \langle 30.275;\{0.2,0.6,0.7,0.4,0.5\}\rangle & \langle 7.65;\{0.8,0.7,0.5,0.5,0.6\}\rangle & \langle 22.05;\{0.1,0.5,0.4,0.5,0.9\}\rangle & \langle 16.77;\{0.7,0.3,0.3,0.4,0.5\}\rangle \\
\langle 15.625;\{0.1,0.1,0.1,0.1,0.1\}\rangle & \langle 107.91;\{0.1,0.2,0.1,0.2,0.1\}\rangle & \langle 29.925;\{0.2,0.2,0.3,0.1,0.1\}\rangle & \langle 8.1;\{0.1,0.2,0.2,0.2,0.2\}\rangle & \langle 22.35;\{0.1,0.2,0.1,0.3,0.3\}\rangle & \langle 16.9;\{0.3,0.1,0.2,0.2,0.1\}\rangle \\
\langle 15.625;\{0.8,0.8,0.9,0.8,0.9\}\rangle & \langle 107.25;\{0.9,0.8,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 30.1;\{0.2,0.2,0.3,0.4,0.5\}\rangle & \langle 8.1;\{0.3,0.4,0.5,0.5,0.2\}\rangle & \langle 21.75;\{0.1,0.7,0.6,0.8,0.9\}\rangle & \langle 16.77;\{0.5,0.3,0.7,0.4,0.5\}\rangle \\
\langle 15.25;\{0.4,0.4,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 107.25;\{0.8,0.5,0.6,0.9,0.6\}\rangle & \langle 30.1;\{0.3,0.5,0.6,0.6,0.6\}\rangle & \langle 8.01;\{0.3,0.5,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 22.05;\{0.7,0.7,0.5,0.6,0.8\}\rangle & \langle 16.77;\{0.3,0.5,0.6,0.4,0.4\}\rangle
\end{pmatrix}.$$

گام ۳- گزینه‌های موسوم به ایده‌آل مثبت و منفی را با توجه به ماتریس تصمیم به شرح زیر تعیین می‌کنیم.

$$A^{+}=\left(\langle 15.625;\{1,1,1,1,1\}\rangle,\langle 108.57;\{1,1,1,1,1\}\rangle,\langle 30.625;\{1,1,1,1,1\}\rangle,\langle 8.1;\{1,1,1,1,1\}\rangle,\right.$$
$$\left.\langle 22.35;\{1,1,1,1,1\}\rangle,\langle 16.9;\{1,1,1,1,1\}\rangle\right).$$

$$A^{-}=\left(\langle 15.125;\{.1,.1,.1,.1,.1\}\rangle,\langle 105.93;\{.1,.1,.1,.2,.2\}\rangle,\langle 28;\{.1,.1,.2,.2,.3\}\rangle,\langle 7.2;\{.1,.2,.2,.2,.2\}\rangle,\right.$$
$$\left.\langle 21.6;\{.1,.1,.2,.3,.3\}\rangle,\langle 16.25;\{.1,.1,.2,.2,.3\}\rangle\right).$$

گام ۴- فاصله هر یک از هفت گزینه را از دو گزینه ایده‌آل را با بردارهای S^{+} و S^{-} نشان داده، داریم:

$$S^{+}=\left(7.2911 \quad 5.5893 \quad 5.5893 \quad 6.0772 \quad 10.3284 \quad 6.2165 \quad 5.8501\right),$$

$$S^{-}=\left(5.5694 \quad 7.0410 \quad 6.6637 \quad 6.9311 \quad 3.2911 \quad 6.6892 \quad 6.0957\right).$$

گام ۵- با توجه به این که گزینه برتر، گزینه‌ای است که در عین حال که بیشترین فاصله از گزینه ایده‌آل منفی را دارد به گزینه ایده‌آل مثبت نیز نزدیک‌ترین باشد. لذا فاصله نسبی هر گزینه هم‌زمان از دو گزینه ایده‌آل را به کمک مقادیر گام قبلی به دست می‌آوریم.

$$RD=\left(\ 0.4331 \quad 0.5575 \quad 0.5438 \quad 0.5328 \quad 0.2416 \quad 0.5183 \quad 0.5103\ \right).$$

گام ۶- گزینه‌ها را بر اساس ترتیب صعودی فاصله نسبی آن‌ها مرتب می‌نماییم.

$$A_5 \prec A_1 \prec A_7 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_3 \prec A_2.$$

۱-۴- اعتبارسنجی نتایج روش پیشنهادی

وانگ و تریان‌تافیلو[1] (۲۰۰۸) سه آزمون معیار برای اعتبارسنجی یک روش ارائه کردند:

آزمون معیار ۱ - اگر بردار وزن بدون تغییر و یک گزینه غیربهین را با یک گزینه‌ی بدتر جایگزین کنیم، جایگاه گزینه برتر نباید تغییر کند.

---

[1] Wang and Triantaphyllou

آزمون معیار ۲- در یک روش مؤثر تصمیم‌گیری چند معیاره، ویژگی ترایایی باید برقرار باشد.

آزمون معیار ۳- جواب یک مسئله *MCDM* در هر دو حالت زیر باید یکسان باشد:

الف) حل مسئله در حالت کلی و بدون تجزیه‌ی آن به چندین زیر مسئله *MCDM*.

ب) تجزیه مسئله *MCDM* به دو یا چند زیرمسئله *MCDM* و حل آن‌ها و جمع‌بندی رتبه‌های بدست آمده با استفاده از ویژگی ترایایی.

در این زیر بخش سه آزمون فوق را در مورد روش معرفی شده مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فرض کنید گزینه‌ی غیر بهین A جایگزین گزینه‌ی A_3 با امتیازات ارزیابی زیر گردد:

$$\{\langle 122;\{0.4,0.7,0.2,0.5,0.5\}\rangle,\langle 324,\{0.5,0.2,0.3,0.6,0.3\}\rangle,\langle 169;\{0.3,0.8,0.6,0.6,0.5\}\rangle$$
$$\langle 87;\{0.4,0.9,0.1,0.2,0.2\}\rangle,\langle 145;\{0.6,0.6,0.5,0.3,0.3\}\rangle,\langle 126;\{0.4,0.7,0.6,0.7,0.7\}\rangle\}.$$

امتیاز این گزینه پس از همسوسازی با روش CI به صورت $\langle 197.7;\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9\}\rangle$ و در نتیجه تابع امتیاز آن مقدار ۹۸/۸۵ خواهد بود. با این امتیاز رتبه‌بندی $A_5 \prec A \prec A_1 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_2 \prec A_7$ را داریم که تغییری در رتبه‌ی گزینه‌ی برتر ایجاد نشده است.

اگر مسئله را به چهار مسئله *MCDM* با گزینه‌های $\{A_1,A_2,A_5,A_6,A_7\}$، $\{A_3,A_4,A_5,A_7\}$، $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_7\}$ و $\{A_2,A_3,A_4,A_5,A_7\}$ تجزیه کنیم، به ترتیب رتبه‌بندی آن‌ها به ترتیب به صورت $A_5 \prec A_1 \prec A_2 \prec A_7 \prec A_6$، $A_5 \prec A_3 \prec A_4 \prec A_4 \prec A_7$، $A_5 \prec A_1 \prec A_2 \prec A_7 \prec A_3 \prec A_4$ و $A_5 \prec A_2 \prec A_3 \prec A_4 \prec A_7$ خواهد بود. از ترکیب این جواب‌ها، رتبه‌ی ۷ گزینه عبارت است از:

$$A_5 \prec A_1 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_3 \prec A_2 \prec A_7.$$

این یعنی روش ارائه شده در سه معیار معرفی شده صدق می‌کند.

۲-۴- مقایسه و تحلیل عددی

به منظور تحلیل و بررسی رتبه‌بندی حاصل از اِعمال روش *TOPSIS* در محیط اعداد فازی مردد، اجازه دهید مسئله را در هر دو محیط دقیق و نادقیق با برخی روش‌های متداول مانند روش میانگین، روش میانگین وزن‌دار ساده، انتگرال چوکوئت، و روش ترکیبی *TOPSISCI* حل نماییم.

ابتدا ماتریس تصمیم با مقادیر خود ارزیابی قطعی D را در نظر بگیرید.

الف) اگر امتیاز نهایی هر گزینه را حاصل جمع مستقیم امتیازات مکتسبه و بدون در نظر گرفتن بردار وزن داده شده، بدانیم؛ خواهیم داشت: $A_2 \prec A_1 \prec A_3 \prec A_4 = A_7 \prec A_6 \prec A_5$.

ب) همسوسازی هر سطر ماتریس تصمیم با استفاده از روش میانگین وزن‌دار ساده وترتیب صعودی آن‌ها به رتبه‌بندی $A_2 \prec A_1 \prec A_3 \prec A_7 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_5$ منجر می‌شود.

ج) در این حالت، روش تاپسیس نیز گزینه‌ها را به صورت $A_2 \prec A_1 \prec A_3 \prec A_6 \prec A_7 \prec A_4 \prec A_5$ مرتب می‌کند.

نتایج فوق نشان می‌دهند که مطابق داده‌های حاصل از خود ارزیابی گزینه‌ی با امتیازات غیرواقعی A_5 گزینه‌ی برتر است و در همه آن‌ها بدترین گزینه نیز A_2 است.

در ادامه، مسئله را از دید تصمیم‌گیرندگان یعنی ماتریس تصمیم *HFED* حل می‌کنیم.

– با همسوسازی هر سطر آن به روش انتگرال چوکوئت،رتبه‌بندی $A_5 \prec A_1 \prec A_4 \prec A_7 \prec A_3 \prec A_6 \prec A_2$ را خواهیم داشت.

– اگر مسئله را با روش تاپسیس حل کنیم، آنگاه گزینه‌ها به صورت $A_5 \prec A_1 \prec A_7 \prec A_4 \prec A_6 \prec A_3 \prec A_2$ مرتب می‌شوند.

یعنی از نگاه تصمیم‌گیرندگان، A_2 بهترین و A_5 بدترین گزینه‌ها هستند. رده‌بندی‌های فوق بیانگر این نکته هستند که امتیازات خود ارزیابی گزینه‌ی A_5 از واقعیت عملکردی آن بسیار دور است. علاوه براین، اگر از تغییرات رده‌بندی‌های میانی چشم‌پوشی کنیم، بدترین و بهترین گزینه‌ها در دو شیوه‌ی ارزیابی کاملاً برعکس هم هستند.

به منظور استفاده همزمان از مزایای هر دو شیوه‌ی ارزیابی مذکور، با تلفیق نظرات با هم به ماتریس تصمیم *HFND* متشکل از اعداد فازی مردد دست خواهیم یافت.

همسوسازی هر سطر ماتریس *HFND* به کمک انتگرال چوکوئت به یک مقدار واحد به عنوان امتیاز نهایی گزینه نظیر آن و در نتیجه رتبه‌بندی گزینه‌ها در **جدول ۱** آمده است.

جدول ۱- همسوسازی سطرهای ماتریس تصمیم فازی مردد و رتبه‌بندی گزینه‌ها.

Table 1- Aggregation of the hesitant decision matrix' rows and ranking of options.

گزینه	حاصل انتگرال	امتیاز	رتبه
A1	$\langle 197.93; \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \rangle$	98.965	6
A2	$\langle 197.25; \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \rangle$	118.35	2
A3	$\langle 199.39; \{0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \rangle$	111.089	3
A4	$\langle 200.44; \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \rangle$	100.22	4
A5	$\langle 200.81; \{0.1, 0.2, 0.3\} \rangle$	40.162	7
A6	$\langle 199.59; \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \rangle$	99.795	5
A7	$\langle 199.43; \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} \rangle$	119.658	1

$$A_5 \prec A_1 \prec A_6 \prec A_4 \prec A_3 \prec A_2 \prec A_7.$$

استفاده از روش ترکیبی انتگرال چوکوئت–تاپسیس *TOPSISCI* منجر به رتبه بندی زیر می‌شود:

$$A_5 \prec A_1 \prec A_2 \prec A_7 \prec A_3 \prec A_4 \prec A_6.$$

تحلیل مقایسه‌ای این رتبه‌بندی‌ها نشان می‌دهد که وقتی ماهیت داده‌های ماتریس تصمیم تغییر می‌کند، نتایج کاملاً متضادی به دست می‌آیند. این اختلاف در رتبه‌بندی با توجه به تغییر جنس مقادیر اولیه قابل انتظار و پذیرش است. سوال این است که وقتی با داده یکسان، روش‌های متفاوت استفاده می‌شوند چرا نتایج با هم فرق دارند؟ در پاسخ باید گفت این به دلیل حجم اطلاعاتی است که در هر روش استخراج و مورد استفاده قرار می‌گیرد، است. برای توضیح بیشتر، در روش میانگین وزن‌دار ساده علاوه بر اهمیت هر معیار، فقط به امتیازات کسب شده توجه می‌شود؛ درحالی‌که در روش جمع مستقیم به معیارها با درجات تأثیر یکسان در عملکرد انگاشته شده‌اند. روش تاپسیس همزمان که به تأثیرات متفاوت معیارها در عملکرد گزینه‌ها توجه دارد، امتیازات کسب نشده را نیز علاوه بر امتیازات کسب شده در فرآیند رتبه‌بندی گزینه‌ها دخیل می‌نماید. ماهیت روش انتگرال چوکوئت نیز به گونه‌ای است که به میزان تأثیر معیارها بر هم و تعاملاتی که می‌توانند بر هم داشته باشند نیز توجه داشته، لذا مناسب‌ترین روش برای مسائل با معیارهای متعامل است.

در هر یک از این روش‌ها، اعمال ریاضی به کارگرفته شده هم به لحاظ کمیّت و هم به لحاظ کیفیّت متفاوت هستند. وقتی از داده‌های نادقیق در ساختار ماتریس تصمیم استفاده می‌شود، از منظر انتشار خطا، افزایش تعداد محاسبات منجر به افزایش خطای محاسباتی و انتشار بیشتر آن می‌شود. در این مقاله با هدف کاهش چالش‌ها و افزایش دقت ارزیابی، ماتریس تصمیم تلفیقی مرکب از اعداد فازی مردد مورد استفاده قرار گرفته است. بکارگیری انتگرال چوکوئت یا روش ترکیبی *TOPSISCI* در چنین مسئله‌ای که معیارها مستقل از هم فرض شده‌اند (زیرا

کیخا / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحه: ۱۶-۱

مجموع اوزان معیارها برابر ۱ است)، ضرورت ندارد. زیرا خطای محاسباتی مدلسازی این روش‌ها به دلیل تعداد زیاد محاسبات صورت گرفته (در مقایسه با روش تاپسیس که علاوه بر برخورداری از اعمال حسابی کمتر، مانند انتگرال چوکوئت روی بخش غیرعضویت اعداد فازی مردد نیز اثر نمی‌گذارد)، بیشتر است.

۳-۴- تحلیل حساسیت

در این بخش با تغییر برخی درجات تردید، اثر آن‌ها در رتبه‌بندی نهایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید سطر نخست ماتریس تصمیم $HFND$ به صورت زیر تغییر کند:

$$A' = \Big[\langle 124;\{0.9,0.8,0.9,0.95,0.8\}\rangle \quad \langle 321;\{0.98,0.9,0.9,0.8,0.9\}\rangle \quad \langle 175;\{0.9,0.8,0.95,0.9,0.8\}\rangle$$
$$\langle 82;\{0.9,0.95,0.9,0.8,0.9\}\rangle \quad \langle 144;\{0.8,0.95,0.9,0.9,0.9\}\rangle \quad \langle 127;\{0.95,0.9,0.9,0.98,0.9\}\rangle\Big].$$

مطابق الگوریتم تاپسیس، امتیاز این گزینه $RD_1^{*} = 0.7371$ خواهد بود و در نتیجه رتبه نخست را کسب خواهد کرد. اکنون اجازه دهید به جای تغییر مثبت همه درجات تردید، تغییرات را به صورت دلخواه در هر دو بخش حقیقی و درجه تردید سطر نخست ماتریس تصمیم $HFND$ و آزادانه (کاهشی یا افزایشی) اعمال نماییم. اگر داشته باشیم:

$$A'' = \Big[\langle 110;\{0.9,0.8,0.9,0.95,0.8\}\rangle \quad \langle 300;\{0.3,0.5,0.9,0.1,0.6\}\rangle \quad \langle 175;\{0.1,0.2,0.15,0.3,0.1\}\rangle$$
$$\langle 78;\{0.9,0.95,0.9,0.8,0.9\}\rangle \quad \langle 135;\{0.8,0.7,0.2,0.1,0.9\}\rangle \quad \langle 120;\{0.95,0.9,0.9,0.98,0.9\}\rangle\Big].$$

مطابق الگوریتم پیشنهادی این مقاله و با توجه به فاصله نسبی این گزینه یعنی $RD_1^{*} = 0.4741$ ، رتبه آن تنزل کرده و در جایگاه ششم قرار خواهد گرفت. تحلیل فوق نشان می‌دهد الگوریتم نسبت به هر تغییری در هر بخش ارزیابی حساس بوده، ممکن است رده‌بندی تغییر کند.

مثال ۲. مسئله رتبه‌بندی شش دانشجوی A، B، C، D، E و F براساس نمرات دروس ریاضی، فیزیک، شیمی، زیست، هنر، ادبیات و هنر، که به ترتیب با مقادیر $0.2,015,0.1,0.1,0.15,0.2$ و 0.1 وزن‌دار شده‌اند، را در نظر بگیرید. نمرات دانشجویان ترکیبی است از ارزیابی نهایی درقالب آزمون کتبی، و نظرات استاد هر درس از فعالیت‌های طول ترم دانشجو در قالب تعداد متناهی مقدار بین ۰ و ۱. فرض کنید امتیازات ترکیبی کسب شده توسط دانشجوان در هر درس مطابق ماتریس زیر باشد (کیخا، ۲۰۲۱).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathit{Math.} & \mathit{Physics} & \mathit{Chemestry} \end{array} \\ HFNScore = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} \langle 80;\{0.3,0.4,0.5,0.7\}\rangle & \langle 88;\{0.1,0.7,0.8,0.9\}\rangle & \langle 92;\{0.2,0.7,0.4,0.5\}\rangle \\ \langle 78;\{0.3,0.8,0.8,0.9\}\rangle & \langle 98;\{0.8,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 82;\{0.4,0.5,0.6,0.8\}\rangle \\ \langle 87;\{0.1,0.2,0.3,0.2\}\rangle & \langle 85;\{0.3,0.4,0.2,0.3\}\rangle & \langle 80;\{0.3,0.5,0.1,0.1\}\rangle \\ \langle 82;\{0.3,0.7,0.8,0.4\}\rangle & \langle 80;\{0.2,0.7,0.4,0.4\}\rangle & \langle 86;\{0.1,0.8,0.5,0.5\}\rangle \\ \langle 90;\{0.4,0.3,0.6,0.8\}\rangle & \langle 92;\{0.4,0.6,0.7,0.8\}\rangle & \langle 98;\{0.7,0.8,0.9,0.8\}\rangle \\ \langle 78;\{0.5,0.3,0.65,0.7\}\rangle & \langle 85;\{0.4,0.6,0.7,0.8\}\rangle & \langle 87;\{0.7,0.8,0.9,0.8\}\rangle \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathit{Bio.} & \mathit{Litrature} & \mathit{Art} & \mathit{Comp.} \end{array} \\ \left.\begin{array}{cccc} \langle 78;\{0.3,0.5,0.6,0.9\}\rangle & \langle 83;\{0.55,0.45,0.6,0.7\}\rangle & \langle 91;\{0.65,0.6,0.8,0.75\}\rangle & \langle 89;\{0.55,0.6,0.5,0.7\}\rangle \\ \langle 68;\{0.3,0.9,0.6,0.7\}\rangle & \langle 80;\{0.7,0.8,0.75,0.85\}\rangle & \langle 91;\{0.85,0.8,0.9,0.9\}\rangle & \langle 80;\{0.7,0.5,0.6,0.35\}\rangle \\ \langle 79;\{0.2,0.4,0.1,0.1\}\rangle & \langle 70;\{0.1,0.25,0.3,0.2\}\rangle & \langle 90;\{0.3,0.45,0.35,0.2\}\rangle & \langle 90;\{0.3,0.25,0.15,0.1\}\rangle \\ \langle 94;\{0.8,0.9,0.6,0.8\}\rangle & \langle 95;\{0.35,0.7,0.4,0.8\}\rangle & \langle 92;\{0.2,0.7,0.4,0.9\}\rangle & \langle 92;\{0.6,0.8,0.5,0.5\}\rangle \\ \langle 85;\{0.3,0.9,0.6,0.7\}\rangle & \langle 87;\{0.8,0.3,0.5,0.7\}\rangle & \langle 55;\{0.4,0.6,0.5,0.8\}\rangle & \langle 90;\{0.85,0.8,0.9,0.8\}\rangle \\ \langle 92;\{0.3,0.9,0.6,0.7\}\rangle & \langle 86;\{0.35,0.1,0.6,0.75\}\rangle & \langle 84;\{0.45,0.75,0.6,0.8\}\rangle & \langle 90;\{0.8,0.9,0.7,0.8\}\rangle \end{array}\right). \end{array}$$

با اعمال الگوریتم تاپسیس اعداد فازی مردد رو ی ماتریس نمرات فوق خواهیم داشت:

$$C \prec E \prec A \prec F \prec D \prec B.$$

مقایسه رده‌بندی حاصل شده در این مقاله با آنچه در کیخا (۲۰۲۱) معرفی شده است نشان می‌دهد هر دو روش در معرفی بهترین و بدترین گزینه‌ها مشابه عمل کرده‌اند. اما در رتبه دیگر گزینه‌ها به جز رتبه دانشجوی A متفاوت هستند. این حد از تفاوت قابل پیش‌بینی و قابل پذیرش است. زیرا از منظر انتشار خطا در پردازش داده‌های تقریبی، روش تاپسیس از تعداد عملیات ریاضی کمتری (فقط تعیین فاصله) نسبت به دیگر روش‌ها برخوردار است و در نتیجه رده‌بندی حاصل از آن قابل اطمینان‌تر است.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به توسعه روش‌شناسی ریاضی یکی از جدیدترین منابع عدم‌قطعیت یعنی اعداد فازی مردد پرداختیم. هدف ما به‌روزرسانی روش محبوب تاپسیس برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه‌ای است که فاز ارزیابی آن قابلیت مدل‌سازی به کمک اعداد فازی مردد را داشته باشند. به دیگر سخن، در فرآیند ارزیابی یا با مقادیر قطعی از پیش تعیین شده‌ای مواجه باشیم که پذیرش/عدم پذیرش آن‌ها از حوزه اختیار تصمیم‌گیرنده خارج است اما قادر است درجات رضایت خود از هر مقدار را در قالب عناصر فازی مردد اعلام و اِعمال کند. در نتیجه از ترکیب این دو مقدار با هم، درایه‌های ماتریس ارزیابی به فرم اعداد فازی مردد تبدیل خواهند شد. از سویی دیگر، همزمان با گسترش روزافزون کاربرد نظام ارزیابی در حوزه عملکردی (فردی، گروهی، اجتماعی و ...)، یافتن شیوه‌هایی که به عدالت نزدیک‌تر باشد مورد توجه محققین قرار گرفته است. به کمک اعداد فازی مردد می‌توان با استفاده همزمان از دو نوع ارزیابی متداول یعنی خود ارزیابی و ارزیابی داوران خارجی و با هم‌افزایی مزایای تعریف شده برای این دو شیوه ارزیابی، ایرادات را تعدیل نموده، عدالت مورد تقاضای ارزیاب‌شوندگان را به طور نسبی فراهم کرد.

علاوه بر این که مدلسازی درست اطلاعات می‌تواند عدالت بیشتری را تأمین نماید، انتخاب شیوه مناسب پردازش داده‌های مدل‌سازی شده در نیل به اهداف بسیار با اهمیت است. با توجه به این‌که استفاده از انتگرال چوکوئت فازی مردد در مسائلی که معیارها مستقل از هم تعریف شده‌اند باعث خطای بیشتر در نتایج خواهد شد. درحالی‌که روش تاپسیس به دلیل استفاده حداقلی از اعمال ریاضی برای چنین مسائلی به دلیل داده‌های مدلسازی شده، مناسب‌ترین است. لذا در این مقاله با توسعه گام‌های الگوریتم تاپسیس برای مناسب‌سازی در استفاده با اعداد فازی مردد، توسیعی جدید از آن ارائه شده است. در ادامه چند مسئله را به کمک آن حل، نتایج عددی حاصل را مورد تحلیل مقایسه‌ای و تحلیل حساسیت قرار داده‌ایم. استفاده از اعداد فازی مردد در حل مسائل تصمیم‌گیری در آغاز راه است و در آینده می‌توان از آن‌ها در مدلسازی مسائل برنامه‌ریزی خطی (کومار و همکاران[1]، ۲۰۱۱؛ روح‌بخش و همکاران[2]، ۲۰۲۰)، تحلیل پوششی داده‌ها (کایدپور و همکاران[3]، ۲۰۲۱) توسعه روش‌های الکتره و ویکور فازی (لیائو و خو، ۲۰۱۳) برای حل مسائل $MADM$ استفاده کرد.

توافقنامه نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که نسخه نهایی را قبل از ارسال مشاهده و تأیید کرده‌اند. همچنین تضمین می‌نماییم که این مقاله اثر اصلی نویسندگان است و قبلاً چاپ نشده یا در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

سپاسگزاری

نویسندگان تمایل دارند تا مراتب تقدیر و تشکر خویش را از داوران محترم که با نظرات سازنده خویش موجب افزایش کیفیت مقاله شدند، ابراز نمایند.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد.

[1] Kumar et al.
[2] Ruhbakhsh et al.
[3] Kayedppour et al.

منابع

Atanassov, K. T. (1999). Intuitionistic fuzzy sets. In *Intuitionistic fuzzy sets* (pp. 1-137). Physica, Heidelberg.
Chen, N., Xu, Z., & Xia, M. (2013). Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. *Knowledge-based systems*, *37*, 528-540.
Deli, I. (2020). A TOPSIS method by using generalized trapezoidal hesitant fuzzy numbers and application to a robot selection problem. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *38*(1), 779-793.
Denoeux, T. (2014). *Dempster-Shafer theory, introduction, connections with rough sets and application to clustering*. Retrieved from https://www.hds.utc.fr/~tdenoeux/dokuwiki/_media/en/rskt2014.pdf
Feng, L., Chuan-qiang, F., & Wei-he, X. (2018). Type-2 hesitant fuzzy sets. *Fuzzy information and engineering*, *10*(2), 249-259.
Garg, H., Arora, R. (2020). TOPSIS method based on correlation coefficient for solving decision-making problems with intuitionistic fuzzy soft set information. *AIMS mathematics*, *5*(4), 2944-2966.
Garg, H., Keikha, A., & Mishmast Nehi, H. (2020). Multiple-attribute decision-making problem using TOPSIS and choquet integral with hesitant fuzzy number information. *Mathematical problems in engineering*, *2020*. https://doi.org/10.1155/2020/9874951
Hu, J., Xiao, K., Chen, X., & Liu, Y. (2015). Interval type-2 hesitant fuzzy set and its application in multi-criteria decision making. *Computers & industrial engineering*, *87*, 91-103.
Jafari, H., & Ehsanifar, M. (2020). Using interval arithmetic for providing a MADM approach. *Journal of fuzzy extension and applications*, *1*(1), 57-65.
Jin, F., Ni, Z., & Chen, H. (2016). Interval-valued hesitant fuzzy Einstein prioritized aggregation operators and their applications to multi-attribute group decision making. *Soft computing*, *20*(5), 1863-1878.
Joshi, D., & Kumar, S. (2016). Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Choquet integral based TOPSIS method for multi-criteria group decision making. *European journal of operational research*, *248*(1), 183-191.
Kayedppour, F., Sayadmanesh, Sh., Salmani, Y., & Sadeghi, Z. (2020). Measuring the efficiency and productivity of cement companies in Tehran Stock Exchange by data envelopment analysis and Malmquist productivity index in gray environment. *Innovation management and operational strategies, 1*(4), 363-382. (**In Persian**). https://www.sid.ir/fa/Journal/ViewPaper.aspx?ID=554606
Keikha, A. (2015). *Fuzzy Choquet integral and its application in multi-attribute decision making* (Ph.D. Thesis, University of Sistan and Baluchestan). (**In Persian**).
Keikha, A. (2021). Introducing a new type of HFSs and their application in solving MADM. *Journal of intelligence & fuzzy systems, 40*(4), *1-12*. DOI: 10.3233/JIFS-201808
Keikha, A., & Mishmast Nehi, H. (2021). Introducing a new model for evaluating and ranking employees, organizations and solving MADM problems in a hesitant fuzzy environment. *Journal of decisions and operations research*, *6*(2), 256-270. (**In Persian**). DOI: 10.22105/dmor.2021.238906.1177
Klir, G. J. (2006). *Uncertainty and information: foundations of generalized information theory.* John Wiley & Sons.
Kumar, A., Kaur, J., & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied mathematical modelling*, *35*(2), 817-823.
Lalotra, S., & Singh, S. (2020). Knowledge measure of hesitant fuzzy set and its application in multi-attribute decision-making. *Computational and applied mathematics*, *39*(2), 1-31.
Liao, H., & Xu, Z. (2013). A VIKOR-based method for hesitant fuzzy multi-criteria decision making. *Fuzzy optimization and decision making*, *12*(4), 373-392.
Liao, H., & Xu, Z. (2014a). Subtraction and division operations over hesitant fuzzy sets. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *27*(1), 65-72.
Liao, H., & Xu, Z. (2014b). Some new hybrid weighted aggregation operators under hesitant fuzzy multi-criteria decision making environment. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *26*(4), 1601-1617.
Liao, H., & Xu, Z. (2017). *Hesitant fuzzy decision making methodologies and applications*. Springer Singapore.
Liao, H., Wu, X., Keikha, A., & Hafezalkotob, A. (2018). Power average-based score function and extension rule of hesitant fuzzy set and the hesitant power average operators. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *35*(3), 3873-3882.
Maghsoudi, E., Shirouyehzad, H., & Shahin, A. (2015). Prioritization and analysis agility factors affecting the performance of project based organizations with Topsis technique. *Journal of applied research on industrial engineering*, *2*(3), 195-203.
Mansory, A., Nasiri, A., & Mohammadi, N. (2021). Proposing an integrated model for evaluation of green and resilient suppliers by path analysis, SWARA and TOPSIS. *Journal of applied research on industrial engineering*, *8*(2), 129-149.
Meng, F., Wang, C., & Chen, X. (2016). Linguistic interval hesitant fuzzy sets and their application in decision making. *Cognitive computation*, *8*(1), 52-68.
Palczewski, K., & Sałabun, W. (2019). The fuzzy TOPSIS applications in the last decade. *Procedia computer science*, *159*, 2294-2303.
Pollack, H. N. (2005). *Uncertain science... uncertain world*. Cambridge University Press.
Qiaoping, S. U. N., & Ouyang, J. (2015). Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with entropy-weighted method. *Management science and engineering*, *9*(3), 1-6.
Ranjbar, M., Miri, S. M., & Effati, S. (2020). Hesitant fuzzy numbers with (α, k)-cuts in compact intervals and applications. *Expert systems with applications*, *151*, 113363. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113363
Rouhbakhsh, F. F., Ranjbar, M., Effati, S., & Hassanpour, H. (2020). Multi objective programming problem in the hesitant fuzzy environment. *Applied intelligence*, *50*(10), 2991-3006.
Salicone, S. (2007). *Measurement uncertainty: an approach via the mathematical theory of evidence*. Springer Science & Business Media.
Smithson, M. (1988). *Ignorance and uncertainty.* Springer.
Tong, X., & Yu, L. (2016). MADM based on distance and correlation coefficient measures with decision-maker preferences under a hesitant fuzzy environment. *Soft computing*, *20*(11), 4449-4461.
Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, *25*(6), 529-539.

Torra, V., & Narukawa, Y. (2009, August). On hesitant fuzzy sets and decision. *2009 IEEE international conference on fuzzy systems* (pp. 1378-1382). IEEE.

Tzeng, G. H., & Huang, J. J. (2011). *Multiple attribute decision making: methods and applications*. CRC press.

Wang, X., & Triantaphyllou, E. (2008). Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods. *Omega*, *36*(1), 45-63.

Weaver, W. (1948). Science and complexity. *American scientist*, *36*(4), 536-544. https://www.jstor.org/stable/27826254

Wei, G. (2012). Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making. *Knowledge-based systems*, *31*, 176-182.

Wei, G., Alsaadi, F. E., Hayat, T., & Alsaedi, A. (2016). Hesitant fuzzy linguistic arithmetic aggregation operators in multiple attribute decision making. *Iranian journal of fuzzy systems*, *13*(4), 1-16.

Wei, G., Wang, H., Zhao, X., & Lin, R. (2014). Approaches to hesitant fuzzy multiple attribute decision making with incomplete weight information. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *26*(1), 259-266.

Wei, G., Zhao, X., Wang, H., & Lin, R. (2012). Hesitant fuzzy choquet integral aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making. *International information institute (Tokyo)*, *15*(2), 441-448.

Xia, M., & Xu, Z. (2011a). Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International journal of approximate reasoning*, *52*(3), 395-407.

Xia, M., & Xu, Z. (2011b). Methods for fuzzy complementary preference relations based on multiplicative consistency. *Computers & industrial engineering*, *61*(4), 930-935.

Xu, Z., & Xia, M. (2011). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*, *181*(11), 2128-2138.

Xu, Z., & Xia, M. (2012). Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making. *International journal of intelligent systems*, *27*(9), 799-822.

Yu, D., Wu, Y., & Zhou, W. (2011). Multi-criteria decision making based on choquet integral under hesitant fuzzy environment. *Journal of computational information systems*, *7*(12), 4506–4513.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information sciences*, *8*(3), 199-249.