E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 7, No. 3 (2022) 425–437.

Paper Type: Original-Application Paper

Estimation of Value at Risk (VaR) Index of Mobarakeh Steel Company Using Two-sided Lomax GARCH Model

Rasool Roozegar[1,*], Samane Arkia[2]

[1] *Department of Statistics, Yazd University, Yazd, Iran; rroozegar@yazd.ac.ir.*
[2] *Deapartemnt of Applied Mathematics, Yazd University, Yazd, Iran; Samane.arkia1994@gmail.com.*

Citation:

Roozegar, R., & Arkia, S. (2022). Estimation of value at risk (VaR) index of mobarakeh steel company using two-sided lomax GARCH model. *Journal of decisions and operations research, 7*(3), 425-437.

Received: 26/04/2021 Reviewed: 03/06/2021 Revised: 21/09/2021 Accepted: 06/10/2021

Abstract

Purpose: We have introduced the two-sided Lomax-GARCH (TSLx-GARCH) model. We have used this model to create a more realistic value-at-risk value index than other distributions for all confidence levels. We find this index for applied data.

Methodology: In this study, a new flexible distribution for GARCH models in predicting the value at risk is presented. Accurate modeling of financial returns requires proper innovation distribution.

Findings: Experimental results show that the GJR-GARCH model, with its innovative TSLx distribution, generates realistic value index predictions, realistic normal distribution, t-student and generalized error distributions for all levels of confidence. The proposed distribution flexibility opens up an opportunity to increase the accuracy of financial return modeling in GARCH models.

Originality/Value: We have used the TSLx-GARCH in data modeling and simulation and find both skewness and excess elongation in the financial return series and confidence levels for all levels.

Keywords: ARCH, GARCH, Value at risk, Two-sided lomax distribution, Financial return.

Corresponding Author: rroozegar@yazd.ac.ir

https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.3.3.2

Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۷، شماره (۳)، (۱۴۰۱)، ۴۳۷-۴۲۵

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی-کاربردی

برآورد شاخص ارزش در معرض خطر (VaR) شرکت فولاد مبارکه با استفاده از مدل دوطرفه گارچ-لوماکس

رسول روزگار[۱,*]، سمانه ارکیا[۲]

[۱] گروه آمار، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

[۲] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

چکیده

هدف: مدل دوطرفه گارچ-لوماکس معرفی شده است و از این مدل برای محاسبه شاخص ارزش در معرض خطر استفاده شده است که برآورد واقع‌بینانه‌تری از سایر توزیع‌ها برای تمام سطوح اطمینان در نظر گرفته می‌شود. سپس این شاخص را برای داده‌های کاربردی محاسبه می‌کنیم.

روش‌شناسی پژوهش: در این مطالعه، توزیع انعطاف‌پذیر جدیدی برای مدل‌های گارچ در پیش‌بینی ارزش در معرض خطر ارائه شده است. مدل‌سازی دقیق بازده مالی به توزیع مناسب نوآوری نیاز دارد.

یافته‌ها: نتایج تجربی نشان می‌دهد که مدل گارچ تعمیم‌یافته با توزیع نوآورانه لوماکس دوطرفه، پیش‌بینی‌های شاخص ارزش واقع‌بینانه، توزیع طبیعی واقع‌بینانه، توزیع تی و توزیع خطای تعمیم یافته برای همه سطوح اطمینان را ایجاد می‌کند. انعطاف‌پذیری توزیع پیشنهادی فرصتی را برای افزایش دقت مدل‌سازی بازده مالی در مدل‌های گارچ ایجاد می‌کند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: از مدل مذکور در مدل‌سازی و شبیه‌سازی داده‌های واقعی استفاده کرده و چولگی و کشیدگی را در سری بازده مالی و سطح اطمینان برای همه سطوح پیدا کرده‌ایم.

کلیدواژه‌ها: آرچ، گارچ، ارزش در معرض خطر، توزیع لوماکس دوطرفه، بازده مالی.

۱- مقدمه

شرکت فولاد مبارکه اصفهان یکی از بزرگ‌ترین واحدهای صنعتی و یکی از بزرگ‌ترین مجتمع تولید فولاد در ایران است که در شرق شهر مبارکه قرار دارد. شرکت فولاد مبارکه از شرکت‌های پیشرو ایرانی است که در زمینه تولید ورق‌های فولادی فعالیت می‌نماید. این شرکت با مأموریت «ایفای نقش محوری در توسعه صنعتی، اقتصادی و اجتماعی کشور و ارتقای سطح فناوری صنعت فولاد، به‌عنوان سازمانی جهان تراز» حدود ۵۰% از فولاد کشور را با ایجاد اشتغال مستقیم و غیرمستقیم برای ۳۵۰۰۰۰ نفر تولید می‌نماید. این شرکت هر ساله بخشی از محصولات خود را در راستای ارتقای کیفیت، برآورده نمودن نیازهای ارزی و حضور مستمر در بازارهای جهانی و توسعه آن صادر می‌کند و با توجه به اعتبار کسب شده در بازار جهانی هم اکنون پتانسیل و اعتبار لازم جهت صادرات به بیش از ۳۸ کشور دنیا را دارد.

* نویسنده مسئول

rroozegar@yazd.ac.ir

https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.3.3.2

فولاد مبارکه در یازده دوره جایزه ملی تعالی سازمانی و شش دوره جایزه شرکت دانشی در کشور رتبه نخست را به دست آورده است و هم‌چنین این شرکت در سال ۱۳۹۱ برای نخستین بار توانست به‌عنوان تنها شرکت ایرانی با کسب امتیاز ۶۵۴ تندیس زرین جایزه ملی تعالی سازمانی را از آن خود کند. این رتبه برای دومین بار با امتیاز ۶۸۲ در سال ۱۳۹۳ تکرار شد و این شرکت به‌عنوان سازمان سرآمد سال برگزیده شد. حضور در میان شرکت برتر دانشی آسیا مانند سامسونگ، تویوتا و... برای نخستین بار در سال‌های ۲۰۱۵ و ۲۰۱۷ از دیگر افتخارات دو سال اخیر این شرکت است. این شرکت در سال ۱۳۹۸ موفق به کسب بیش از ۲۰ هزار میلیارد تومان سود خالص شده است که با این اوصاف به یکی از سودآورترین شرکت‌های ایران بدل گشته است.

۱-۱- پیش‌بینی بلندمدت قیمت محصولات شرکت فولاد مبارکه اصفهان در بورس کالای ایران

در حالت کلی، قیمت محصولات تولیدی هر شرکت از مهم‌ترین عوامل و فاکتورهای تأثیرگذار در تدوین استراتژی‌ها و سیاست گذاری‌های مالی است. لذا پیش‌بینی دقیق قیمت محصولات می‌تواند نقش به سزایی در کارآمدی تصمیمات مالی اتخاذی در شرکت‌های تولیدی داشته باشد. چرا که اساساً شرکت‌ها سیاست‌های مالی خود را نه صرفاً بر مبنای وضع موجود، بلکه بر مبنای پیش‌بینی‌های کوتاه‌مدت و بلندمدت از متغیرهای کلیدی خود تدوین نموده و به اجرا می‌گذارند. لذا پیش‌بینی‌ها را از جمله مهم‌ترین رموز موفقیت سیاست‌ها و برنامه‌های مالی شرکت‌ها به شمار می‌آورند.

در حالت کلی، دقت و صحت پیش‌بینی‌ها با افق پیش‌بینی، رابطه معکوس غیر اکید دارد. پیش‌بینی‌ها می‌توانند برای افق‌های زمانی کوتاه‌مدت، میان‌مدت و یا بلندمدت صورت پذیرند. این دلیل اصلی این حقیقت است که چرا پیش‌بینی‌های کوتاه‌مدت در دنیای واقعی، از دقت بیشتری برخوردار بوده و آسان‌تر نیز به دست می‌آیند؛ اما به همان اندازه که حصول پیش‌بینی‌های بلندمدت سخت‌تر می‌گردند، اهمیت و کاربردشان نیز افزایش می‌یابد. بر این اساس است که اکثریت قریب به اتفاق اقدامات و مدل‌های ارائه شده مربوط به افق‌های کوتاه‌مدت بوده و کارهای اندکی در پیش‌بینی‌های میان‌مدت و بلندمدت صورت پذیرفته است (رهنمای رودپشتی و همکاران[۱]، ۲۰۱۵).

همان‌گونه که اشاره شد اقدامات بسیار اندکی در پیش‌بینی بلندمدت و تحلیل عوامل مؤثره، به ویژه در صنعت فولاد انجام شده است. مدل رگرسیون خطی برای پیش‌بینی سالیانه قیمت جهانی ورق گرم ارائه و مورد توجه قرار گرفته است (مالانیچف و وروبیف[۲]، ۲۰۱۱).

در این پژوهش به متغیرهایی مانند قیمت صادرات، میزان عرضه، حجم تولید، متغیرهای کلان اقتصادی، ظرفیت تولید و هزینه‌های تولید به‌عنوان عوامل مؤثر بر قیمت محصولات فولادی اشاره شده است. از سایر مطالعات در این زمینه می‌توان به تحقیقی در ژاپن که با استفاده از متغیرهای درآمد ملی، جمعیت و صادرات برای پیش‌بینی‌های بلندمدت مصرف فولاد استفاده شده است اشاره کرد (فیندلی و ژین[۳]، ۱۹۸۵).

در ایران نیز در مطالعاتی تخمین تابع تقاضای فولاد و پیش‌بینی آن انجام شده است (آذربایجانی و رضایی[۴]، ۲۰۰۱؛ زاهدی و همکاران[۵]، ۲۰۲۱). از سایر اقدامات مرتبط با این موضوع می‌توان به مقاله نیه و همکاران[۶] (۲۰۱۳) که به بررسی رابطه علی و هم‌انباشتگی بین قیمت‌های فولاد چین، تایوان و آمریکا پرداخته‌اند و هم‌چنین تحقیقات بین[۷] (۲۰۰۷) که به بررسی رابطه پویای بین قیمت‌های داخلی چین و قیمت‌های جهانی فولاد پرداخته است، اشاره نمود. نتایج تحقیق بین، نشان می‌دهد که بین قیمت‌های داخلی و قیمت‌های جهانی هم انباشتگی وجود دارد، بنابراین تعادلی بلندمدت بین آن‌ها برقرار است. حال از بررسی مقالات فوق‌الذکر مشخص می‌گردد که روش پیشنهادی اکثریت نویسندگان، مدل‌های کلاسیک اقتصادسنجی است.

روزگار و ارکیا/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۳۷-۴۲۵

---

1 Rahnamay Roodposhti et al.
2 Malanichev and Vorobyev
3 Findlay and Xin
4 Azarbayjani and Rezaei
5 Zahedi et al.
6 Nieh et al.
7 Bin

۲-۱- شاخص ارزش در معرض ریسک

امروزه ریسک به‌عنوان مفهومی در شرایط آینده با ایجاد شرایطی که خارج از کنترل افراد تیم پروژه بوده و اگر به وقوع بپیوندد باعث تأثیر مستقیم بر روی پروژه می‌گردد، تلقی می‌شود. به بیان دیگر اگر تعریف مشکل در پروژه به معنی وجود ایرادی در وضعیت جاری پروژه است، ریسک مشکل بالقوه‌ای است که احتمال و قوه آن در آینده وجود خواهد داشت (گودرزی[۱]، ۲۰۰۷؛ محمودی راد و همکاران[۲]، ۲۰۱۸).

ارزش در معرض ریسک[۳] یک تکنیک آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا سبد سهام سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص استفاده می‌شود (لبافی و همکاران[۴]، ۲۰۱۹). این روش در اواخر دهه ۱۹۹۰ پس از آن که برخی از صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری و صندوق‌های بازنشستگی زیان‌های ناگهانی بزرگی را متحمل شدند مورد توجه قرار گرفت.

هدف از این روش هشدار به سرمایه‌گذاران در مورد حداکثر زیان بالقوه و احتمالی است که می‌تواند در روز یا یک هفته اتفاق بیافتد (آذربایجانی و رضایی، ۲۰۱۵). ارزش در معرض ریسك برای انواع ابزارهای مالی مانند سهام، اوراق قرضه، ارز، اوراق بهادار با پشتوانه دارایی‌ها و همچنین ابزارهای مالی مشتقه کاربرد دارد. این معیار کاربرد زیادی برای قانون گذاران و دستگاه‌های نظارتی دارد. به‌عنوان مثال کمیسیون بورس و اوراق بهادار در ژانویه ۱۹۹۷ همه موسسات مالی و شرکت‌های سهامی عام با ارزش سهام بیش از ۵/۲ میلیارد دلار را موظف کرد تا ریسک بازار خود را با معیار ارزش در معرض ریسک اعلام و محاسبه کنند. هم‌چنین کمیته بال بانک‌ها را از سال ۱۹۹۵ موظف کرد تا حد کفایت سرمایه خود را بر این اساس مشخص و رعایت کنند. ارزش در معرض ریسک برای اندازه‌گیری ریسک سبد سرمایه نیز استفاده می‌شود هنگام ارزیابی تک تک سهام، ممکن است برخی از سهام پر ریسک طبقه‌بندی شوند، اما هنگام ارزیابی آن‌ها به‌عنوان بخشی از سبد سهام، کم ریسك تشخیص داده شوند؛ زیرا احتمال تحقق زیانی بزرگ در سبد سهام تحت تاثیر احتمال زیان‌های هم‌زمان در همه سهام داخل سبد سرمایه در دوره ارزش در معرض ریسک[۵] یک تکنیک آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا سبد سهام سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص استفاده می‌شود (لبافی و همکاران، ۲۰۱۹). این روش در اواخر دهه ۱۹۹۰ پس از آن که برخی از صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری و صندوق‌های بازنشستگی زیان‌های ناگهانی بزرگی را متحمل شدند مورد توجه قرار گرفت. هدف از این روش هشدار به سرمایه‌گذاران در مورد حداکثر زیان بالقوه و احتمالی است که می‌تواند در روز یا یک هفته اتفاق بیافتد (آذربایجانی و رضایی، ۲۰۰۱).

ارزش در معرض ریسك برای انواع ابزارهای مالی مانند سهام، اوراق قرضه، ارز، اوراق بهادار با پشتوانه دارایی‌ها و همچنین ابزارهای مالی مشتقه کاربرد دارد. این معیار کاربرد زیادی برای قانون گذاران و دستگاه‌های نظارتی دارد. به‌عنوان مثال کمیسیون بورس و اوراق بهادار در ژانویه ۱۹۹۷ همه موسسات مالی و شرکت‌های سهامی عام با ارزش سهام بیش از ۵/۲ میلیارد دلار را موظف کرد تا ریسک بازار خود را با معیار ارزش در معرض ریسک اعلام و محاسبه کنند. هم‌چنین کمیته بال بانک‌ها را از سال ۱۹۹۵ موظف کرد تا حد کفایت سرمایه خود را بر این اساس مشخص و رعایت کنند. ارزش در معرض ریسک برای اندازه‌گیری ریسک سبد سرمایه نیز استفاده می‌شود هنگام ارزیابی تک تک سهام، ممکن است برخی از سهام پر ریسک طبقه‌بندی شوند، اما هنگام ارزیابی آن‌ها به‌عنوان بخشی از سبد سهام، کم ریسك تشخیص داده شوند؛ زیرا احتمال تحقق زیانی بزرگ در سبد سهام تحت تاثیر احتمال زیان‌های هم‌زمان در همه سهام داخل سبد سرمایه در دوره مورد نظر است. ارزش در معرض ریسك، ریسك سبد سهام را دریك عدد خلاصه می‌کند و همین ماهیت ساده است که باعث جذاب شدن آن شده است (آذربایجانی و رضایی، ۲۰۰۱).

تحقیقات زیادی توسط افراد و نهادهای مختلف برای بهبود بهتر مدل‌های پیچیده در برآورد ریسک بازار انجام شده است. شناخته شده ترین معیار، شاخص ارزش در معرض ریسک است که اشاره به بدترین نتیجه سبد سرمایه دارد که انتظار می‌رود در یک دوره‌ی از پیش تعیین شده و در یک سطح اطمینان داده شده رخ دهد. شاخص ارزش در معرض ریسک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VaR_P = F^{-1}(1-P). \qquad (۱)$$

[1] Goudarzi
[2] Mahmoudirad et al.
[3] Value at Risk
[4] Labbafi et al.

که F تابع توزیع تجمعی زیان است. F^{-1} معکوس F و P معادله‌ای است که در آن ارزش احتمال محاسبه می‌شود. شاخص ارزش در معرض ریسک، تخمینی از دم‌های توزیع تجربی است (آنجلیدیس و همکاران[1]، ۲۰۰۴؛ رستمی و فرهمندی[2]، ۲۰۱۲). ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار دو معیار اندازه‌گیری ریسک هستند که برای جلوگیری از زیان مالی در مؤسسات مالی تبیین شده است. علاوه بر این ارزش در معرض ریسک یک تکنیک آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا سبد سرمایه‌گذاری در یک دوره‌ی زمانی مشخص استفاده می شود. ارزش در معرض ریسک توسط مدیران ریسک برای اندازه‌گیری و کنترل سطح ریسکی که شرکت متعهد شده است مورد استفاده قرار می‌گیرد. شرکت‌ها معمولاً ریسک و بازده ناشی از روش‌های مختلف را در نظر می‌گیرند. وظیفه مدیران ریسک این است که مطمئن شوند ریسک شرکت از حدی که می‌تواند ضررهای یک نتیجه بدتر احتمالی را تحمل کند، بیشتر نباشد. به‌طورکلی می توان گفت ارزش در معرض ریسک بیشترین مقدار زیان مورد انتظار در یک افق زمانی مشخص در سطح اطمینانی معین را اندازه‌گیری می‌نماید و با سه متغیر اندازه‌گیری می‌شود: میزان ضرر و زیان بالقوه ، احتمال رخداد ضرر و زیان، بازه زمانی.

۲- روش پژوهش

۲-۱- روش ماکسیمم درست نمایی (MLE)

در علم آمار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی[3] روشی برای برآورد کردن یک مدل آماری است. زمانی که بر مجموعه‌ای از داده‌ها عملیات انجام می‌شود یک مدل آماری به دست می‌آید آن‌گاه ماکسیمم درست‌نمایی می‌تواند تخمینی از پارامترهای مدل ارائه دهد. روش ماکسیمم درست‌نمایی به بسیاری از روش‌های شناخته شده تخمین آماری شباهت دارد. فرض کنید برای شخصی اطلاعات مربوط به قد زرافه‌های ماده بالغ موجود در یک جمعیت مهم باشد و این شخص به خاطر محدودیت هزینه یا زمان نتواند قد تک تک این زرافه‌ها را اندازه بگیرد، این شخص تنها می‌داند که این طول قدها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند ولی میانگین و واریانس توزیع را نمی‌داند لذا با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی و با داشتن اطلاعات مربوط به نمونه‌ای محدود از جمعیت می‌تواند تخمینی از میانگین و واریانس این توزیع به دست آورد (هندری و نیلسن[4]، ۲۰۰۷).

روش ماکسیمم درست‌نمایی این کار را بدین ترتیب انجام می‌دهد که واریانس و میانگین را مجهول در نظر می‌گیرد سپس مقادیری را به آن‌ها نسبت می‌دهد که با توجه به اطلاعات موجود در مورد یک مجموعه مشخص از محتمل‌ترین حالت باشد. در حالت کلی روش ماکسیمم درست‌نمایی در مورد یک مجموعه مشخص از داده‌ها عبارت است از نسبت دادن مقادیری به پارامترهای مدل که در نتیجه آن توزیعی تولید شود که بیشترین احتمال را به داده‌های مشاهده شده نسبت دهد یعنی مقادیری از پارامتر که تابع درست‌نمایی را ماکسیمم کند. MLE یک سازوکار مشخص را برای تخمین ارائه می‌دهد که در مورد توزیع نرمال و بسیاری توزیع‌های دیگر به‌طور خوش تعریف عمل می‌کند. بااین‌حال در بعضی موارد مشکلاتی پیش می‌آید از قبیل این که برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی نامناسب‌اند یا اصلاً وجود ندارند (مالانیچف و وروبیف، ۲۰۱۱).

فرض کنید n مشاهده $x_1.x_2.\dots.x_n$ را داریم که به‌طور مستقل و یکنواخت توزیع شده‌اند و از یک توزیع با تابع توزیع احتمال. f پیروی می‌کنند. f متعلق به یک خانواده از توزیع‌های نرمال مانند $\{f(\cdot|\theta).\theta\epsilon\theta\}$ می‌باشد که مدل پارامتری نامیده می‌شود بنابراین $f_. = f(\cdot;\theta_0)$ مقدار θ_{mle} نامعلوم است و به‌عنوان مقدار صحیح پارامتر در نظر گرفته می‌شود حال می‌خواهیم برآوردگری چون $\hat{\theta}$ بیابیم که تا حد امکان به مقدار صحیح یعنی θ_0 نزدیک باشد. برای استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی ابتدا باید تابع چگالی توأم را برای همه مشاهدات مشخص کنیم. برای حالتی که توزیع‌ها مستقل و یکنواخت‌اند داریم؛

$$f(x_1.x_2.\cdots.x_n) = f(x_1|\theta).f(x_2|\theta)\dots f(x_n|\theta).$$

حال فرض کنید $x_1.x_2.\dots.x_n$ پارامترهای ثابت و θ پارامتر متغیر این تابع باشد در این صورت این تابع، توزیع تابع درست‌نمایی نامیده می‌شود و لگاریتم تابع درست‌نمایی به شرح زیر است:

$$L(\theta|x_1.x_2,\dots,x_n) = f(x_1.x_2,\dots,x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta).$$

و نمونه تراز شده آن که میانگین درست نمایی لگاریتمی نامیده می شود به صورت زیراست:

---

[1] Angelidiset al.
[2] Rostami and Farahmandi
[3] Maximum Likelihood Estimation
[4] Hendry and Nielsen

$$L(\theta|x_1.x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} ln\, f(x_i|\theta), \qquad \widehat{\ell} = \frac{1}{n} lnL.In.$$

علامت حد بالای ℓ نشان‌دهنده آن است که وابسته به یک برآوردگر می‌باشد. روش ماکسیمم درست‌نمایی، θ_0 را با یافتن مقداری از θ که$\widehat{\ell}(\theta|X)$ را ماکسیمم کند تخمین می‌زند. این روش تخمین یک تقریب ماکسیمم درست‌نمایی ازθ_0 می‌باشد.

$$\left\{\hat{\theta}_{mle}\right\} \subseteq \left\{argmax\widehat{\ell}\,(\theta|x_1.x_2.\ldots.x_n)\right\}.$$

در این روش تفاوتی نمی‌کند که تابع درست‌نمایی یا لگاریتم درست‌نمایی را ماکسیمم کنیم زیرا لگاریتم یک تبدیل یکنوا است. برای بسیاری از مدل‌ها می‌توان روش ماکسیمم درست‌نمایی را به‌عنوان تابعی صریح از داده‌های مشاهده شده $x_1.x_2.\ldots.x_n$ پیدا کرد. اما در بسیاری از مسائل پیدا کردن یک فرم بسته برای تابع درست‌نمایی ممکن نیست و باید از روش‌های عددی برای یافتن MLE *استفاده* کرد. برای برخی از مسائل ممکن است تقریب‌هایی متفاوت موجود باشند که تابع را ماکسیمم کنند و برای برخی دیگر هیچ تقریب مناسبی وجود ندارد. در گفته‌های فوق فرض بر این بود که داده‌ها به‌طور مستقل و یکنواخت توزیع شده‌اند.

۳- مدل‌های مورد استفاده

۳-۱- مدل‌های آرچ و گارچ

پیش‌بینی مقادیر آینده یک سری که با استفاده از روش‌های سری زمانی انجام می‌شود برای بسیاری از پژوهش‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. در مباحث اقتصادی و مالی پیش‌بینی شاخص‌ها و قیمت‌ها در آینده اهمیت ویژه‌ای دارد. تاکنون از مدل‌های سری زمانی برای مدل‌سازی سری‌های مالی و اقتصادی استفاده می‌کردند که چندان مناسب نبود. زیرا در سری‌های مالی ناپایداری‌ها به شدت به گذشته خود وابسته‌اند و بایستی در مدل‌سازی‌ها این ناپایداری به حساب آید. مدل‌هایی که به بررسی این موضوع و مدل‌سازی ناپایداری‌ها می‌پردازد، مدل‌های آرچ[۱] نامیده می‌شوند. در اقتصادسنجی، مدل‌های با خصوصیت ناهمسان واریانس شرطی خودبازگشتی به مدل‌هایی گفته می‌شود که فرض بر این دارد که واریانس خطاها یا نوآورها یک تابع از اندازه‌ی خطاهای دوره‌های زمانی قبل است. اغلب واریانس با مربع نوآور قبلی مرتبط است چنین مدلی، مدل آرچ نامیده می شود. البته علامت‌های اختصاری دیگری هم برای مدل‌هایی بر همین پایه به کار برده می‌شود. مدل‌های آرچ معمولا برای سری‌های زمانی مالی به کار برده می‌شود که دسته‌بندی‌های نوسانی بر پایه زمان که دوره‌های با نوسان با دوره‌های بدون نوسان همراه می‌شوند را نشان می‌دهند.

انگل[۲] (۱۹۸۲) مدل آرچ از مرتبه q را معرفی کرد. اگرε_t نشان‌دهنده عبارت خطا باشد و فرض کنیم $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ باشد زمانی که $z_t \sim N(0.1)$، سری به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{t-1}^2,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \cdots + \sum_{i=1}^{q} a_i\varepsilon_{t-i}^2.$$

برای این که واریانس شرطی مثبت باشد باید برای $i = 1.2.\ldots.q$ پارامتر$a_i \geq 0$ باشد. اگر مدل میانگین متحرک خودبازگشتی را برای واریانس خطاها فرض بگیریم مدل ناهمسان واریانس شرطی خودبازگشتی تعمیم یافته یا گارچ[۳] را خواهیم داشت. قبل از گارچ مدل میانگین متحرک موزون نمایی مورد استفاده بوده است که مدل گارچ جایگزین آن شده است.

بولرزلوف[۴] (۱۹۸۶، ۱۹۸۷) در سال ۱۹۸۶مدل آرچ تعمیم‌یافته یا گارچ از مرتبه p,q را به شرح زیر پیشنهاد کرد:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_j\varepsilon_{t-j}^2.$$

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^{q} a_i - \sum_{j=1}^{p} b_j}.$$

مدل‌های آرچ و گارچ به‌طور معمول در مطالعات مربوط به اقتصاد مالی از قبیل؛ بازار بورس، نوسانات نرخ ارز و تورم به کار گرفته می‌شوند. شرط استفاده از این گونه مدل‌ها نقض فرض همسانی واریانس جزء خطا می‌باشد. مدل‌های آرچ و گارچ برای مدل‌سازی معادله واریانس شرطی جمله خطا طراحی شده‌اند. برای تخمین این گونه مدل‌ها از روش حداکثر درست نمایی استفاده می‌شود.

[1] Autoregressive conditional heteroskedasticity
[2] Engle
[3] Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)
[4] Bollerslev

۲-۳- مدل گلوشتین، جاگاناتان و رونکل- گارچ (HCRAG-RJG)

این مدل توسط گلوشتین و همکاران[1] (۱۹۹۳) ارائه شد و عدم تقارن در روش گارچ را مدل و پیشنهاد می‌کند $\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$ را مدل کنیم که در آن مؤلفه‌های Z_t نویزها هستند که متغیرهای مستقل و هم توزیعی هستند:

$$\sigma^2 = k + \delta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \Phi\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1.}$$

که اگر $\varepsilon_{t-1} > 0$ باشد $I_{t-1} = 0$ است و اگر $\varepsilon_{t-1} < 0$ باشد $I_{t-1} = 1$ است.

۳-۳- توزیع نرمال

تابع لگاریتم درست‌نمایی r_t مشخص شده تحت نوآورهای توزیع نرمال می‌تواند به صورت زیر باشد (آنجلیدیس و همکاران، ۲۰۰۴):

$$L(\psi) = -\frac{1}{2}(Tln\,2\pi + \sum_{t=1}^{T} ln\,h_t^2 + \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2).$$

که $\psi = (m.\omega.\gamma_1.\gamma_2.\gamma_3)$ پارامتر بردار از مدل $GJR - GARCH - N$ به شرح زیر است:

$$h_t^2 = \omega + \gamma_1 e_{t-1}^2 + \gamma_3 I_{t-1} e_{t-1}^2 + \gamma_2 h_{t-1}^2.$$

یک گام جلوتر، پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک به شرح زیر بیان می شود:

$$VaR_{p,t+1} = \widehat{m}_{t+1} + F_p^{-1}\widehat{h}_{t+1}.$$

$\widehat{m}_{t+1}$ و $\widehat{h}_{t+1}$ به ترتیب پیش‌بینی‌هایی از میانگین و انحراف استاندارد شرطی می‌باشند.

۴-۳- توزیع تی‌استیودنت

متغیر تصادفی X دارای توزیع تی‌استیودنت با n درجه آزادی است هرگاه (روزگار و همکاران[2]، ۲۰۱۸؛ زاهدی و همکاران، ۲۰۲۱)؛

$$f(x) = K(n)(1 + \frac{x^2}{n})^{\frac{-n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

که در آن $K(n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$. تابع توزیع مربوطه عبارت است از:

$$F(x) = \frac{1 + sign(x)}{2} - \frac{sign(x)}{2} I_{\frac{n}{x^2+n}}\left(\frac{n}{2}.\frac{1}{2}\right).$$

از آن‌جایی که سری‌های بازگشت مالی نسبت به توزیع نرمال دارای دم‌های ضخیم‌تری است بولرزلوف (۱۹۸۷، ۱۹۸۶) مدل گارچ را با نوآورهای تی استیودنت پیشنهاد کرد. مدل گارچ با نوآورهای تی استیودنت هر دو مدل دم سنگین و کشیدگی اضافی مشاهده شده در سری‌های بازگشت مالی را مدل می‌کند (آلتون[3]، ۲۰۲۰؛ برمال زن و همکاران[4]، ۲۰۲۰).

تابع لگاریتم درست‌نمایی مدل $GJR - GARCH - T$ عبارتست از:

$$L(\psi) = T\left[ln\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - ln\,\Gamma(\frac{\nu}{2}) - \frac{1}{2}ln\,[\pi(\nu-2)]\right]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}[ln\,h_t^2 + (1+\nu)ln\,(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu-2})].$$

که $\psi = (m.\omega.\gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\nu)$ بردار پارامتر است.

$\Gamma(\nu)$ تابع گاما است و پارامتر ν دم توزیع را کنترل می‌کند. یک گام جلوتر، پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک بر اساس توزیع تی‌استیودنت داده شده به صورت:

$$VaR_{p.t+1} = \widehat{m}_{t+1} + F_p^{-1}\widehat{h}_{t+1}.$$

F_P^{-1} تابع چندک از توزیع تی‌استیودنت در سطح P است.

---

[1] Glosten-Jagannathan-Runkle
[2] Roozegar et al.
[3] Altun
[4] Barmalzan et al.

۳-۵- توزیع خطای تعمیم‌یافته

نلسون[1] (۱۹۹۱) توزیع خطای عمومی را به جای فرض ε_t توزیع نرمال پیشنهاد کرد. تحت مشخصات تابع لگاریتم درست‌نمایی از مدل $GJR - GARCH - GED$ داده شده به صورت (آنجلیدیس و همکاران، ۲۰۰۴؛ رستمی و فرهمندی، ۲۰۱۲):

$$L(\psi) = \sum_{t=1}^{T} [\, ln\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{1}{2}\left|\frac{\varepsilon_t}{\sigma}\right|^k - (1 + k^{-1})\, ln(2) - ln\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} ln\left(h_t^2\right)].$$

K پارامتر ضخامت دم است و داریم:

$$\delta = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{2^{\left(\frac{2}{k}\right)}\Gamma\left(\frac{3}{k}\right)}\right).$$

وقتی $k = 2$ پارامتر باشد، توزیع خطای تعمیم یافته به توزیع نرمال استاندارد کاهش می‌یابد وقتی $k < 2$ باشد توزیع خطای تعمیم یافته، دم سنگین‌تر از توزیع گاوسی است.

یک گام جلوتر؛ پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک از مدل $GJR - GARCH - GED$ داده شده به صورت:

$$VaR_{p.t+1} = \widehat{m}_{t+1} + F_p^{-1}(\varepsilon_t.\, k)\widehat{h}_{t+1}.$$

$F_p(\varepsilon_t.\, k)$ تابع چندک از توزیع خطای تعمیم یافته در سطح p است.

۳-۶- توزیع لوماکس دوطرفه (TSLx)

توزیع لوماکس دوطرفه اولین بار توسط لوماکس[2] (۱۹۵۴) معرفی شد. در مطالعه توزیع لوماکس دوطرفه هدف اصلی مطالعه، پیشنهاد شاخص جدید ارزش در معرض ریسک با توزیع جدید چوله و دم سنگین برای دست‌یابی به پیش‌بینی‌های واقعی‌تر شاخص ارزش در معرض ریسک نسبت به سایر مدل‌های شناخته شده شاخص ارزش در معرض ریسک است. برای رسیدن به این هدف یک توزیع انعطاف‌پذیر جدید به نام توزیع لوماکس دوطرفه به‌منظور مدل‌سازی مجموعه داده‌ها و مجموعه داده‌هایی که شاخص کشیدگی برای آن‌ها بیش‌تر است ارائه می‌گردد. هدف، افزودن پارامترهای شکل اضافی به توزیع لوماکس برای توانمندسازی توزیع لوماکس به‌خصوص در مدل‌سازی مربوط به داده‌های طول عمر است (آلتون، ۲۰۲۰؛ برمال زن و همکاران، ۲۰۲۰).

سودمندی توزیع پیشنهادی در پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک با استفاده از توزیع لوماکس دوطرفه در مدل‌های ناهمسان واریانس شرطی خودبازگشتی تعمیم‌یافته یا همان مدل‌های گارچ نشان داده شده است. علاوه بر این در این پژوهش یک مدل جدید پویا به نام $GJR - GARCH - TSLx$ برای پیش‌بینی روزانه شاخص ارزش در معرض ریسک بر اساس مدل نوسانی $GJR - GARCH$ با توزیع نوآورهای لوماکس دوطرفه معرفی می‌گردد. مهم‌ترین مزیت توزیع لوماکس دوطرفه در پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک، فراهم آوردن فرصتی برای مدل‌سازی معیارهای چولگی و کشیدگی اضافی سری بازده مالی به‌طور هم‌زمان است. سری‌های زمانی مالی دارای ویژگی‌های غیرطبیعی مانند چولگی و کشیدگی اضافی هستند. اگرچه توزیع لوماکس دوطرفه می‌تواند یک انتخاب خوب در مدل‌سازی سری‌های زمانی مالی باشد اما مدل‌سازی دقیق سری‌های زمانی مالی، دقت پیش‌بینی‌های شاخص ارزش در معرض ریسک را افزایش می‌دهد (آلتون، ۲۰۲۰؛ برمال زن و همکاران، ۲۰۲۰).

مطالعه شبیه‌سازی به‌منظور بررسی عملکرد برآوردگرهای ماکسیمم درست نمایی پارامترهای توزیع لوماکس دوطرفه انجام می‌گیرد. معیارهای ارزش در معرض ریسک میزان دارایی یا پورتفوی خطرناک برای یک سطح اطمینان داده شده است. تابع چگالی احتمال توزیع لوماکس به شرح زیر می‌باشد:

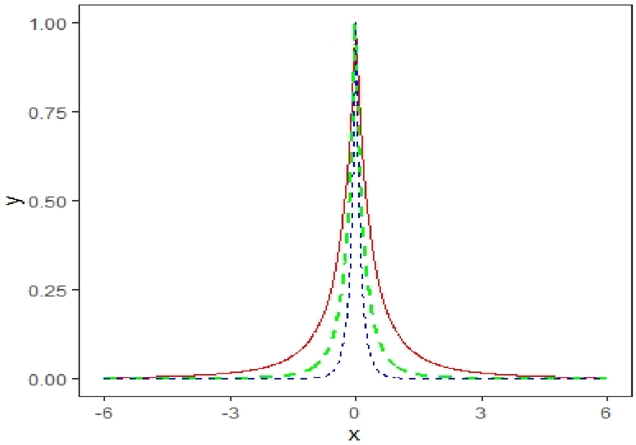
$$f(x.\, \alpha.\, \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda}[1 + \frac{x}{\lambda}]^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 0.$$

$\alpha > 0$ و $\lambda > 0$ به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس هستند. تابع توزیع تجمعی توزیع لوماکس به صورت زیر می‌باشد (هوانگ و همکاران[3]، ۲۰۱۷):

---

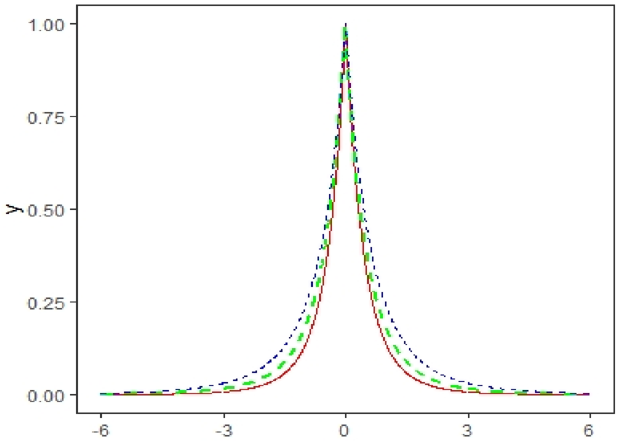
[1] Nelson et al.
[2] Lomax
[3] Huang et al.

$$F(x) = 1 - [1 + \frac{x}{\lambda}]^{\alpha}.$$



شکل ۱- نمودار تابع چگالی برای توزیع لوماکس دوطرفه برای $\lambda_1 = 1$.

Figure 1- Pdf of two sided-lomax for $\lambda_1 = 1$.



شکل ۲- نمودار تابع چگالی برای توزیع لوماکس دوطرفه برای $\lambda_1 = 3$.

Figure 2- Pdf of two sided-Lomax for $\lambda_1 = 3$.

توزیع لوماکس استاندارد شده با استفاده از متغیرهای تصادفی تبدیل شده به دست می‌آید.

$$Var(\varepsilon) = 1, \quad E(\varepsilon) = 0, \qquad \varepsilon = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

بنابراین تابع چگالی احتمال از توزیع لوماکس دوطرفه استاندارد شده به صورت زیر است:

$$.f(\varepsilon,\alpha,\lambda_1) = \begin{cases} \sigma(1 + \frac{-(\varepsilon\sigma+\mu)}{\lambda_1})^{-(\alpha+1)}, & \varepsilon < \frac{-\mu}{\sigma} \\ \sigma(1 + \frac{(\varepsilon\sigma+\mu)}{\lambda_1})^{-(\alpha+1)}, & \varepsilon \geq \frac{-\mu}{\sigma} \end{cases}$$

که $0 < \lambda_1 < \alpha$ و $\alpha > 2$ و $\lambda_2 = \alpha - \lambda_1$ می‌باشد.

۴- ارتباطات، آمار، شبیه‌سازی و محاسبات

مطالعه شبیه‌سازی به‌منظور بررسی عملکرد پارامترهای حداکثر احتمال برآورد شده توزیع لوماکس دوطرفه انجام شده است. دقت حداکثر احتمال برآورد شده توزیع لوماکس دوطرفه انجام شده است. دقت حداکثر احتمال برآورد شده با استفاده از اقدامات زیر مورد بحث قرار می‌گیرد (آلتون، ۲۰۲۰):

- *میانگین برآورده (AES)*.
- *خطای میانگین مربعات (MSES)*.

روزگار و ارکیا/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۳۷-۴۲۵

ما با استفاده از الگوریتم تبدیل معکوس در ثانیه ۱۰۰۰۰، نمونه‌ای از اندازه‌های ۵۰، ۱۵۰ و ۵۰۰ را از این توزیع تولید می‌کنیم که در **جدول ۱** داده شده است.

جدول ۱- MSES ،AES، Bias و MSES براساس ۱۰۰۰۰ مشاهده از توزیع TSLx.

Table 1- MSES, Bias and AES for TSLx distribution based on 10000 observations

n	Parameters	$\lambda_1 = 1$	$\alpha = 3$	ESM	n	Parameters	$\lambda_1 = 0.3$	$\alpha = 0.7$	MSE
50	λ_1	1.0495	0.0495	0.2054	50	λ_1	0.3190	0.0190	0.0089
	α_1	3.1826	0.1826	1.4139		α_1	0.7457	0.0457	0.0353
150	λ_1	1.0440	0.0440	0.1198	150	λ_1	0.3085	0.0085	0.0025
	α_1	3.1301	0.1301	0.8713		α_1	0.7201	0.0201	0.0094
500	λ_1	1.0141	0.0141	0.0253	500	λ_1	0.3022	0.0022	0.0003
	α_1	3.0430	0.0430	0.2025		α_1	0.7038	0.0038	0.0012
1000	λ_1	1.0131	0.0131	0.0127	1000	λ_1	0.3001	0.0001	0.0002
	α_1	3.0387	0.0387	0.0967		α_1	0.7015	0.0015	0.0010

n	Parameters	$\lambda_1 = 2$	$\alpha = 3$	ESM	n	Parameters	$\lambda_1 = 0.7$	$\alpha = 1.2$	MSE
50	λ_1	2.0916	0.0916	0.2060	50	λ_1	0.7907	0.0907	0.0857
	α_1	3.1346	0.1346	0.4401		α_1	1.3598	0.1598	0.2400
150	λ_1	2.0872	0.0872	0.1421	150	λ_1	0.7303	0.0303	0.0216
	α_1	3.1279	0.1279	0.3063		α_1	1.2530	0.0530	0.0557
500	λ_1	2.0342	0.0342	0.0456	500	λ_1	0.7013	0.0013	0.0010
	α_1	3.0510	0.0510	0.1008		α_1	1.2026	0.0026	0.0024
1000	λ_1	2.0222	0.0222	0.0365	1000	λ_1	0.7009	0.0009	0.0003
	α_1	2.0209	0.0209	0.0701		α_1	1.2020	0.0020	0.0012

n	Parameters	$\lambda_1 = 3$	$\alpha = 4$	ESM	n	Parameters	$\lambda_1 = 0.5$	$\alpha = 0.9$	MSE
50	λ_1	3.0904	0.0904	0.4705	50	λ_1	0.5178	0.0178	0.0108
	α_1	4.1229	0.1229	0.8132		α_1	0.9327	0.0327	0.0308
150	λ_1	3.0856	0.0865	0.4197	150	λ_1	0.5089	0.0089	0.0062
	α_1	4.1053	0.1053	0.7102		α_1	0.9173	0.0173	0.0165
500	λ_1	3.0599	0.0599	0.2222	500	λ_1	0.5025	0.0025	0.0018
	α_1	4.0835	0.0835	0.3805		α_1	0.9054	0.0054	0.0047
1000	λ_1	3.0460	0.0460	0.0731	1000	λ_1	0.5025	0.0025	0.0009
	α_1	4.0610	0.0610	0.1262		α_1	0.9053	0.0053	0.0024

جدول ۱ نشان می‌دهد که تخمین ها کاملاً پایدار هستند و مهم‌تر از همه نزدیک به مقادیر واقعی این اندازه نمونه هستند. مطالعه شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش MLE برای ارزیابی پارامترهای $TSLx$ مناسب است میانگین پارامترها زمانی که n افزایش می‌یابد نزدیک‌تر به مقادیر پارامتر واقعی است. در جدول فوق MSE میانگین خطاهای مربع است و تفاوت بین مقادیر تخمینی و آن چه تخمین زده شده است را نشان می‌دهد. MSE تقریباً به دو دلیل همه جا مثبت است:

۱. این که تصادفی است.
۲. به این دلیل که تخمین گر اطلاعاتی که قابلیت تولید تخمین دقیق‌تری دارد را حساب نمی‌کند.

پس این شاخص همواره مقداری نامنفی دارد و هرچه مقدار آن به صفر نزدیک‌تر باشد نشان دهنده‌ی میزان کمتر خطاست (روزگار و نادارجا[1]، ۲۰۱۷؛ روشی[2]، ۲۰۱۸).

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2.$$

MSE از یک تخمین‌گر با توجه به پارامتر نامعلوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

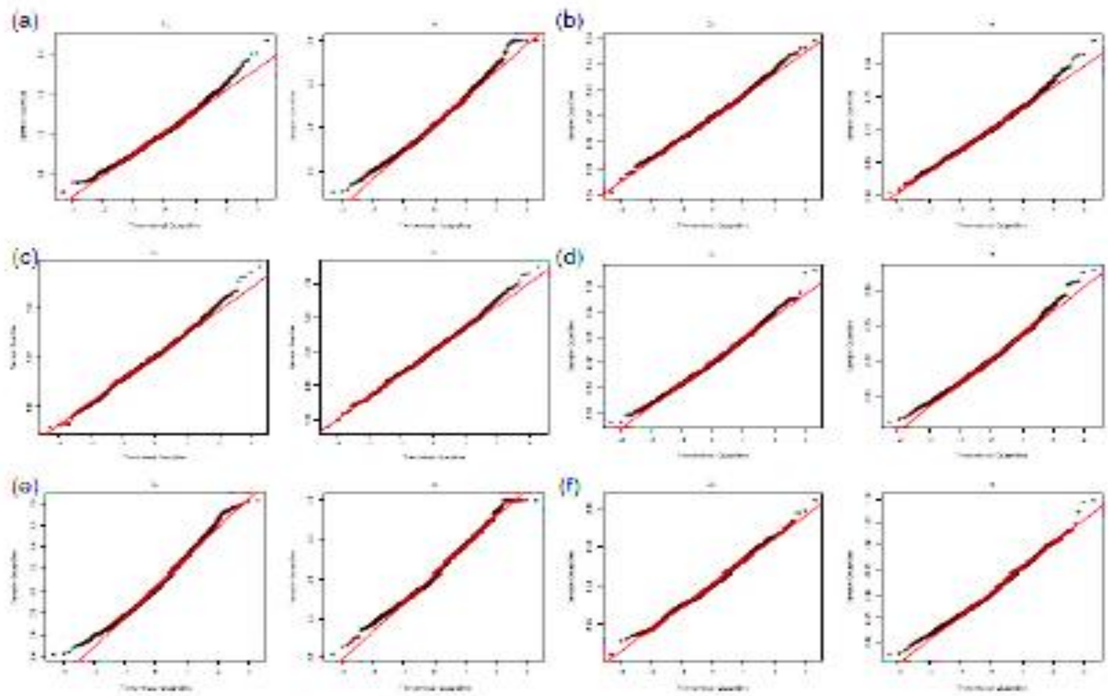
$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = E_{\hat{\theta}}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right].$$

این تعریف وابسته به پارامتر نامعلوم و MSE یک ویژگی از تخمین‌گر است. MSE امید ریاضی است لذا نمی‌تواند متغیر تصادفی باشد. MSE می‌تواند یک تابع از پارامترهای نامشخص باشد که در این صورت هر MSE یک تابع داده براساس تخمین پارامترها است پس یک متغیر تصادفی است. این شاخص می‌تواند به صورت جمع واریانس تخمین گر و مربع اُریبی نوشته شود.

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = var_{\theta}\left(\hat{\theta}\right) + Bias(\hat{\theta}.\theta)^2.$$

[1] Roozegar and Nadarajah [2] Rossi

واضح است که MLE توزیع لوماکس دوطرفه نزدیک به توزیع نرمال است. تقریب نرمال را می‌توان با استفاده از تعدیل‌های تعصبی به این برآوردها بهبود داد. تقریب به تعصبات آن‌ها در مدل‌های ساده می‌تواند به صورت تحلیلی به دست آید. نمودار $Q - Q$ با استفاده از مقایسه شکل توزیع‌ها، می‌توان از لحاظ تصویری به یکسان بودن پارامترهای دو توزیع مانند پارامتر مرکزی، پارامتر مقیاس و هم‌چنین پارامتر تقارن مانند چولگی پرداخت. از طرفی می‌توان توزیع احتمالی داده را با یک توزیع دلخواه نیز مورد بررسی قرار داده و نتیجه بگیریم که آیا داده‌ها از توزیع خاصی پیروی می‌کنند یا خیر؟ نمودار چندک چندک، نمونه‌ای از داده را بر روی محور عمودی با یک جامعه آماری روی محور افقی مقایسه می‌کند و نقاط الگویی غیرخطی را فراهم می‌کند و این نشان می‌دهد که داده‌ها به شکل استاندارد معمولی توزیع نیافته‌اند (آنجلیدیس و همکاران، ٢٠٠٤؛ رستمی و فرهمندی، ٢٠١٢). شکل زیر نمودارهای $Q - Q$ از حداکثر احتمال برآورد شده توزیع لوماکس دوطرفه را برای $n = 1000$ نمایش می‌دهد.



$\lambda_1 = ۱, \alpha = ۳$ (a) $\lambda_1 = ۰/۳, \alpha = ۰/۷$ (b)

$\lambda_1 = ۲, \alpha = ۳$ (c) $\lambda_1 = ۰/۷, \alpha = ۱/۲$ (d)

$\lambda_1 = ۳, \alpha = ۴$ (e) $\lambda_1 = ۰/۵, \alpha = ۰/۹$ (f)

شکل ٣- نمودار Q-Q از حداکثر احتمال برآورد شده توزیع لوماکس دوطرفه برای n=1000.

Figure 3- Q-Q plots of estimated probability of TSLx distribution.

پارامتر γ_3 نشان دهنده‌ی اثر نامتقارن بر نوسان است. وقتی پارامتر $\gamma_3 = 0$ مدل $GJR - GARCH$ به مدل بولرزلوف کاهش می‌یابد. واریانس بی قید و شرط ε_t برای مدل $GJR - GARCH$ داده شده به صورت:

$$var(e_t) = \frac{\omega}{1 - \gamma_1 - \gamma_2 - k\gamma_3}.$$

که

$$k = E(I_{t-1}e_{t-1}^2)\int_{-\infty}^{0} f(\varepsilon)d_\varepsilon.$$

فرضیه‌ی توزیع بر روند نوآور مدل‌های نوسان پذیر به‌طور مستقیم بر دو دقت نوسان و فرکانس‌ها تأثیر می‌گذارد. تابع لگاریتم درست نمایی از مدل $GJR - GARCH$ با توزیع نوآور $TSLx$ داده شده به صورت:

$$L(\psi) = \sum_{t=1}^{T} ln\left\{\frac{\sigma{\theta_1}^2}{2(\theta_1+1)}\big(1-(\varepsilon_t\sigma+\mu)\big)exp\,(\theta_1(\varepsilon_t\sigma+\mu))\right\}_{\varepsilon_t \le \frac{-\mu}{\sigma}} +$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left\{\frac{\sigma\theta_2^2}{2(\theta_2+1)}\big(1+(\varepsilon_t\sigma+\mu)\big)exp\,(-\theta_2(\varepsilon_t\sigma+\mu))\right\}_{\varepsilon_t > \frac{-\mu}{\sigma}} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} ln\big(h_t^2\big).$$

که $\psi = (m.\omega.\gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\alpha.\lambda_1)$.

زمانی که از مدل $GJR-GARCH$ استفاده شود تعریف واریانس شرطی به صورت $h_t^2=\omega+\gamma_1 e_{t-1}^2+\gamma_3 I_{t-1}e_{t-1}^2+\gamma_2 h_{t-1}^2$ موقعیت بدون تغییر از مدل $GJR-GARCH$ تحت توزیع $TSLx$ داده شده توسط $\gamma_1+\gamma_2+k\gamma_3<1$ که

$$k=\int_{-\infty}^{0} f(\varepsilon)d_{\varepsilon}=\frac{\lambda_1}{\alpha}(1-\frac{(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{\lambda_1\alpha(\alpha-1)})^{-\alpha}.$$

واضح است که $k=\frac{1}{2}$ برای توزیع‌های متقارن. یک گام جلوتر پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک براساس توزیع $TSLx$ به شرح زیر است:

$$VaR_{p,t+1}=\widehat{m}_{t+1}+F_p^{-1}(\varepsilon_t.\alpha.\lambda_1).$$

$F_p^{-1}(\varepsilon_t.\alpha.\lambda_1)$ تابع چندک از توزیع $TSLx$ در سطح p می‌باشد.

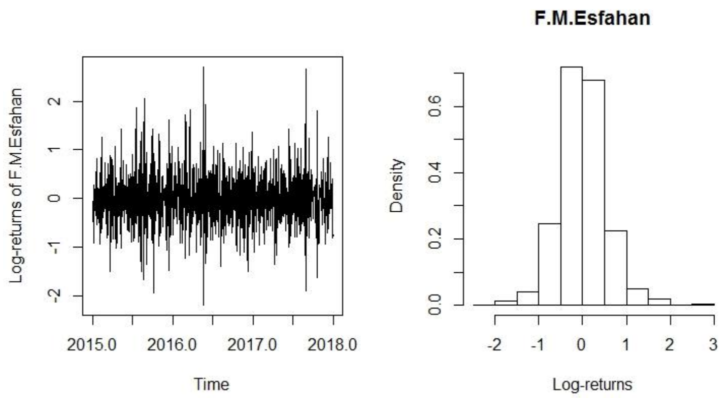
موضوع آمار توصیفی تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها، نمایش ترسیمی و محاسبه مقادیری از قبیل میانگین، میانه و ... می‌باشد که حاکی از مشخصات یکایک اعضای جامعه مورد بحث است. در آمار توصیفی اطلاعات حاصل از یک گروه، همان گروه را توصیف می‌کند و اطلاعات به‌دست‌آمده به دسته‌ها مشابه تعمیم داده نمی‌شود. آمار توصیفی فقط مختص به نمونه است و نمی‌توان از آن برای کل جامعه آماری استفاده کرد. براساس سرمایه گزاری بازار برای نشان دادن عملکرد مدل $GJR-GARCH$ مشخص شده در توزیع نوآور $TSLx$ در پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک در برابر برخی از توزیع‌های نوآور به خوبی شناخته شده مانند نرمال، تی استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته استفاده می شود. ما داده‌های ورود به سیستم سری زمانی شرکت فولاد مبارکه اصفهان را، شامل ۱۰۲۹ مشاهدات روزانه از ۲۰۱٤/۰۳/۱۵ تا ۲۰۱۸/۱۰/۲۲ در نظر گرفته‌ایم آمار توصیفی مربوط به حجم معامله ابتدایی به شرح زیر است:

جدول ۲- آمار توصیفی مربوط به حجم معاملات ابتدایی شرکت فولاد مبارکه اصفهان.

Table 2- Descriptive statistics of initial trading volume of Mobarakeh Steel Company of Isfahan.

تعداد مشاهدات	1029
کمینه	43
بیشینه	15072
میانگین	1417.01
میانه	742
انحراف استاندارد	1854.33
چولگی	1.092

در **جدول ۲** مثبت بودن چولگی نشان می‌دهد که داده‌ها نسبت به میانگین متقارن نیستند و نشان دهنده یک توزیع نامتقارن با کشیدگی به سمت مقادیر بالاتر است. لذا بازده ورود به سیستم (حجم معاملات ابتدایی) شرکت فولاد مبارکه اصفهان دارای ویژگی‌های غیر عادی مانند کشیدگی اضافی است.



شکل ۴- نمودار بازده روزانه لگاریتم بازگشتی حجم معاملات ابتدایی شرکت فولاد مبارکه اصفهان و بافت نگار لگاریتم بازگشتی.

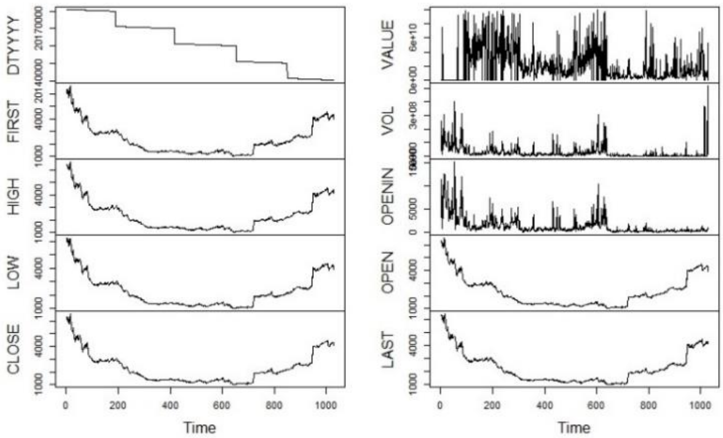
Figure 4- Daily return chart of the initial trading volume of Mobarakeh Steel Company of Isfahan and Histogram of the recurring logarithm.

روش‌های مختلفی برای ارزیابی میزان نرمال بودن داده‌ها وجود دارد. ابزار دم دستی برای این کار نمودار بافت نگار است. کجی یا چولگی در آمار مقداری است از تقارن توزیع یک متغیر در اطراف میانگین. در واقع کجی، انحراف منحنی نرمال از حالت تقارن است و مقدار

آن می‌تواند مثبت یا منفی باشد. چولگی در حقیقت معیاری از وجود یا عدم تقارن تابع توزیع می‌باشد. برای یک توزیع کاملاً متقارن، چولگی صفر و برای یک توزیع نامتقارن با کشیدگی به سمت مقادیر بالاتر، چولگی مثبت و برای توزیع نامتقارن با کشیدگی به سمت مقادیر کوچک‌تر، مقدار چولگی منفی است. برای آن‌که بدانیم یک بافت نگار یا منحنی فراوانی چه میزان به چپ یا راست چوله است از چولگی میانه پیرسون استفاده کرده‌ایم، داریم

$$\frac{3 \times (Mean - Median)}{Std.\,Deviation}.$$

اگر ضریب چولگی منفی باشد، منحنی چوله به چپ است. اگر ضریب چولگی مثبت باشد، منحنی چوله به راست است. اگر قدر مطلق ضریب چولگی کوچک‌تر از ۰/۱ باشد توزیع داده‌ها نرمال است و اگر قدر مطلق ضریب چولگی بزرگ‌تر از ۰/۱ و کوچک‌تر از ۰/۵ باشد توزیع داده‌ها نرمال نیست. در شکل فوق بازده روزانه لگاریتم بازگشتی مربوط به حجم معامله ابتدایی شرکت فولاد مبارکه اصفهان و بافت نگار لگاریتم بازگشتی مربوط به آن نشان داده شده است. نمودار سری زمانی داده‌های واقعی مربوط به شرکت فولاد مبارکه اصفهان در **شکل ۲** رسم شده است.



شکل ۵- نمودار سری زمانی داده‌های واقعی مربوط به شرکت فولاد مبارکه اصفهان.

Figure 5- Time series diagram of real data related to Mobarakeh Steel Company of Isfahan.

۵- نتیجه‌گیری

از آن‌جایی که توزیع نرمال عملکرد ضعیفی را به ویژه در حالت بازده شرطی انجام می‌دهد و توزیع‌های انعطاف‌پذیر برای افزایش دقت مدل‌سازی بازده شرطی مورد نیاز هستند. به‌طورکلی در این مطالعه توزیع انعطاف‌پذیر جدیدی برای مدل‌های گارچ در پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک ارائه شده است. مدل‌سازی دقیق بازده‌های مالی نیاز به توزیع مناسب نوآور دارد. انعطاف‌پذیری توزیع پیشنهادی فرصتی برای افزایش دقت مدل‌سازی بازده مالی در مدل‌های گارچ باز می‌کند. توزیع لوماکس دوطرفه بهترین حالت مناسب برای هر دو حالت سری بازگشت شرطی را فراهم می‌کند و برای فرکانس حوادث شدید در میان دیگران، استحکام بسیار خوبی را نشان می‌دهد. نتایج تجربی نشان می‌دهد که مدل $GJR-GARCH$ با توزیع نوآور $TSLx$ پیش‌بینی‌های شاخص ارزش در معرض ریسک، واقع گرایانه تراز توزیع نرمال، تی استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته را برای کلیه سطوح اطمینان ایجاد می‌کند. لذا توزیع $TSLx$ یک توزیع بسیار جذاب برای مدل‌سازی هر دو چولگی و کشیدگی اضافی در سری بازده مالی است و مدل $GJR-GARCH$ با توزیع جدید $TSLx$ پیش‌بینی شاخص ارزش در معرض ریسک بهتری نسبت به توزیع نرمال، تی استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته برای کلیه سطوح اطمینان را ارائه می‌دهد.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد.

روزگار و ارکیا/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۳۷-۴۲۵

تشکر و قدردانی

بدین‌وسیله از معاونت آموزشی و پژوهشی دانشگاه یزد و همچنین از شرکت فولاد مبارکه جهت همکاری در جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز تشکر می‌شود.

منابع

Altun, E. (2020). A new approach to value-at-risk: GARCH-TSLx model with inference. *Communications in statistics-simulation and computation*, *49*(12), 3134-3151.

Angelidis, T., Benos, A., & Degiannakis, S. (2004). The use of GARCH models in VaR estimation. *Statistical methodology*, *1*(1-2), 105-128.

Azarbayjani, K., & Rezaei, M. R. (2001). An estimation of steel demand in Iran (1967-1999). *Iranian journal of economic research*, *8*(3), 101-114. (**In Persian**). https://www.sid.ir/fa/journal/ViewPaper.aspx?id=27062

Barmalzan, G., Ayat, S. M., Balakrishnan, N., & Roozegar, R. (2020). Stochastic comparisons of series and parallel systems with dependent heterogeneous extended exponential components under Archimedean copula. *Journal of computational and applied mathematics*, *380*, 112965. https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112965

Bin, D. (2007, September). The empirical study on dynamic relationship between domestic and global steel price. *2007 international conference on wireless communications, networking and mobile computing* (pp. 4347-4350). IEEE.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, *31*(3), 307-327.

Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The review of economics and statistics*, *69*(3), 542-547. https://doi.org/10.2307/1925546

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: journal of the econometric society*, *50*(4), 987-1007. https://doi.org/10.2307/1912773

Findlay, C., & Xin, L. L. (1985). China's Iron and Steel Industry Policy: Implications for Australia. *Pacific Economic Papers*, (127).

Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, *48*(5), 1779-1801.

Goudarzi, H. (2007). Predicting Iran's raw steel demand in 2021. *The journal of planning and budgeting*, *12*(4), 209-232. (**In Persian**). DOI: http://jpbud.ir/article-1-36-en.html

Hendry, D. F., & Nielsen, B. (2007). *Econometric modeling: a likelihood approach*. Princeton University Press.

Huang, C. K., North, D., & Zewotir, T. (2017). Exchangeability, extreme returns and value-at-risk forecasts. *Physica a: statistical mechanics and its applications*, *477*, 204-216.

Labbafi, M., Darabi, R., & Sarraf, F. (2021). Modeling of asset-liability management in Bank Melli Iran under uncertainty: fractional programming model approach. *Journal of decisions and operations research*, *5*(4), 446-461. (**In Persian**). http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2020.255392.1252

Lomax, K. S. (1954). Business failures: another example of the analysis of failure data. *Journal of the American statistical association*, *49*(268), 847-852.

Mahmoudirad, A., Salehi Darreh Barik, M., & Taghaodi, R. (2018). Fixed-charge Solid transportation problem with type-2 fuzzy variables. *Journal of decisions and operations research*, *2*(3), 179-194. (In Persian). http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2018.57823

Malanichev, A. G., & Vorobyev, P. V. (2011). Forecast of global steel prices. *Studies on Russian economic development*, *22*(3), 304-311.

Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica: Journal of the econometric society*, *59*(2), 347-370. https://doi.org/10.2307/2938260

Nieh, C. C., Yau, H. Y., Hung, K., Ou, H. K., & Hung, S. M. (2013). Cointegration and causal relationships among steel prices of Mainland China, Taiwan, and USA in the presence of multiple structural changes. *Empirical economics*, *44*(2), 545-561.

Rahnamay Roodposhti, F., Nikoomaram, H., Tolouei Eshlaghi, A., Hosseinzadeh, F., & Bayat, M. (2015). Portfolio optimization model to optimize the performances of classical forecasting stable portfolio risk and return. *Financial engineering and portfolio management*, *6*(22), 29-59. (**In Persian**). https://www.sid.ir/en/journal/ViewPaper.aspx?id=433760

Roozegar, R., & Nadarajah, S. (2017). The power series skew normal class of distributions. *Communications in statistics-theory and methods*, *46*(22), 11404-11423.

Roozegar, R., & Nadarajah, S. (2017). The quadratic hazard rate power series distribution. *Journal of testing and evaluation*, *45*(3), 1058-1072. DOI: 10.1520/JTE20150506

Roozegar, R., Soufi, B., & Taherizadeh, H. R. (2018). Calculating value at risk and expected shortfall of some statistical distributions. *Journal of decisions and operations research*, *3*(1), 72-81. (**In Persian**). http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2018.64783

Rossi, R. J. (2018). *Mathematical statistics: an introduction to likelihood based inference*. John Wiley & Sons.

Rostami, M. R., & Farahmandi, S. (2012). Estimation of value at risk of crude oil price and economic statistic value at risk and spillover effect estimate using multivariate GARCH models. *Journal of investment knowledge*, *1*(4), 215-228. (**In Persian**). https://www.sid.ir/en/journal/ViewPaper.aspx?id=327666

Zahedi, M., Khalilzadeh, M., & Javanshir, H. (2020). Design of a new fuzzy expert system for project portfolio risk management. *Innovation management and operational strategies*, *1*(4), 403-421. (**In Persian**). http://dx.doi.org/10.22105/imos.2021.271975.1029