



Paper Type: Original Article



Optimal Approximation Model and Decision Making with Model Risk in Options Markets

Leila Torkzadeh

Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Semnan University, P.O. Box 35195-363, Semnan, Iran

Citation:



Torkzadeh, L., (Date). Optimal Approximation Model and Decision Making with Model Risk in Options Markets. Journal of decisions and operations research, Volume (Issue), PP.

Received:

Reviewed:

Revised:

Accept:

Abstract

Purpose: Providing an analytical approach to minimize risk to a situation that traders deal with model risk, as a financial risk arises by choosing an approximation model, for the underlying securities status in financial estimates.

Methodology: Improving the standard binomial pricing model and using the equivalence portfolio mechanism in a particular incomplete market situation which traders are uncertain about the actual status space of the stock binomial process.

Findings: From a research aspect, a model of approximation was provided and generalized with different hypotheses that minimizes the risk of the model for pricing call options. From a applied practical aspect, the results give to financial institutions the outlook to predict a mechanism to moderate excessive volatilities in the markets related to options.

Originality/Value: The study of the model risk is performed by maintaining the simple framework and elegance of the binomial model and then it is proved that by defining the optimality in the sense of minimum mean-square errors, the choice of an optimal approximation model is possible. In addition, the implementation and efficiency of the method for the multi-period model are explained.

Keywords: Equivalence portfolio, Risk minimization, Model risk, Option pricing, Approximation model and optimal decision.

Corresponding Author:

doi <http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2021.295645.1446>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



6

نوع مقاله: پژوهشی

مدل تقریب بهینه و تصمیم‌گیری با وجود ریسک مدل در بازارهای مرتبط با اختیارات

لیلا ترک‌زاده

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

چکیده

هدف: ارائه رهیافت تحلیلی به منظور حداقل‌سازی ریسک برای موقعیتی که معامله‌گران با ریسک مدل به عنوان یک ریسک مالی منتج از انتخاب مدل تقریب، برای فضای وضعیت اوراق بهادار مبنا در برآوردهای مالی، روبرو هستند.

روش‌شناسی پژوهش: بهبود مناسب مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد و استفاده از سازوکار پرتفوی معادل‌ساز در وضعیت خاصی از بازار ناکامل که معامله‌گران در مورد فضای وضعیت واقعی فرایند دوجمله‌ای سهام، نامطمئن هستند.

یافته‌ها: از چشم انداز تحقیقاتی، با فرضیه‌های مختلف یک مدل تقریب طراحی و تعمیم داده شد که ریسک مدل را برای قیمت‌گذاری اختیارات خرید به حداقل می‌رساند. از دیدگاه کاربرد عملی، نتایج حاصل برای مؤسسات مالی این بیش را فراهم می‌سازد که در بازارهای مرتبط با اختیارات یک سازوکار برای تعدیل نوسانات زیاده از حد پیش‌بینی نمایند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: بررسی مسئله‌ی ریسک مدل با حفظ چارچوب ساده و ظرافت مدل دوجمله‌ای انجام و سپس اثبات می‌شود که با تعریف بهینگی به مفهوم حداقل خطاهای میانگین-مربع، انتخاب یک مدل تقریب بهینه میسر است. علاوه بر این پیاده‌سازی و کارایی روش برای مدل چند دوره‌ای نیز تبیین می‌شود.

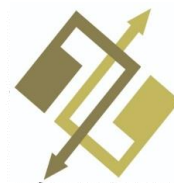
کلیدواژه‌ها: پرتفوی معادل‌ساز، حداقل‌سازی ریسک، ریسک مدل، قیمت‌گذاری اختیارات، مدل تقریب و تصمیم بهینه.

۱- مقدمه و پیشینه تحقیق

در میان اوراق بهادار متعددی که در بازارهای مالی داد و ستد می‌شوند، اختیارات دارای ویژگی‌های قراردادی مشخص هستند، فروشنده اختیار در معرض ریسک نامحدودی قرار دارد، اما خریدار بیش از پرداختی اولیه برای خرید اختیار ضرر نمی‌کند. در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰، بلک، شولز و مerton^۱ یک نظریه جدید برای تعیین قیمت منصفانه اختیار اروپایی پیشنهاد کردند. مهم‌تر از این، آن‌ها یک راهبرد تجاری منحصر به فرد برای ایجاد یک پرتفوی معادل‌ساز^۲ که عایدی نهایی کاملاً برابر با اختیارات داشته باشد، ارائه نمودند. پس از آن، مؤسسات مالی بر مبنای این تئوری و با بهره‌برداری از آن، اختیارات را فروخته و خودشان را با ایجاد یک پرتفوی که اصطلاحاً معادل‌ساز نامیده

^۱Black, Scholes and Merton
^۲Replicating Portfolio

* نویسنده مسئول



می‌شود، تأمین می‌نمایند (ناتوسکی و ورنر، ۲۰۱۴؛ ویل هور، ۲۰۰۳). پرتفوی معادل‌ساز ترکیبی از اوراق قرضه بدون ریسک و دارایی‌های با ریسک است که عایدی آن دقیقاً برابر عایدات دارایی مشتقه می‌باشد. با وجود این که مدل‌های ارزش‌گذاری پیچیده‌تری به طور منظم در حال معرفی شدن هستند، اما اهمیت ایجاد پرتفوی معادل‌ساز مؤثر برای اهداف مدیریتی به قوهی خود باقی مانده است. بنابراین، با این معادل‌سازی مؤسسات در معرض ریسک کمتر از ریسک خالص پیشین قرار دارند. اگر ایجاد پرتفوی معادل‌ساز مؤثر میسر نباشد، با یک ارزیابی اشتباه از روند حرکتی بازار، فروشندگان اختیار با ریسک از دست دادن میزان قابل توجهی از سرمایه روبرو می‌شوند. رهیافت آریترائز، عمومی‌ترین رویکرد برای ارزش‌گذاری اختیارات و ایجاد پرتفوی معادل‌ساز است. مطابق اصل آریترائز بازده یک اختیار صادره روی اوراق بهادار با ریسک، می‌تواند از طریق معامله یک پرتفوی خاص که متشکل از اوراق بهادار بدون ریسک و سهام در نسبت‌های مناسب است، معادل‌سازی گردد به طوری که اختیارات اولیه و پرتفوی معادل‌ساز عایدی یکسان داشته باشند. یک فرض اساسی برای توسعه نظریه فوق این است که معامله‌گران، دانش کاملی از روند حرکتی قیمت سهام مبنای دارند. با این حال، عملاً تجربه نشان می‌دهد که پیشامدهای غیرمترقبه پذیرش چنین فرضی را ممکن نمی‌سازد. برای نمونه، معامله‌گران به طور عمده مدل دوجمله‌ای را با در نظر گرفتن قیمت تاریخی سهام پیاده‌سازی می‌کنند. در واقع، درخت دوجمله‌ای در هر دوره زمانی «بازسازی» می‌شود تا با قیمت سهام جاری جدید که متفاوت با پیش‌گویی درخت اصلی است، مطابقت داشته باشد. علاوه بر این، اغلب مقادیر بالا و پایین بر اساس تغییرات اخیر قیمت سهام، مجدداً مقداردهی خواهند شد، این شیوه عملکرد متناسب به «بازسازی پویا» است. در این مقاله، پایه تحلیلی چنین عملکردهای خاص را مهیا می‌نماییم. به منظور لحاظ کردن ریسک مدل، از بهبود مناسب مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد استفاده می‌کنیم. در اقتصادی که معامله‌گران در مورد فضای وضعیت واقعی فرایند دوجمله‌ای سهام، دچار ابهام هستند، از نقطه نظر تئوری، با شکل خاصی از بازار ناکامل مواجه هستیم (ژانگ و هان، ۲۰۱۳؛ مونیگ، ۲۰۲۱). تعداد قابل توجهی از متون علمی (برای مثال دیگر، ۲۰۱۲؛ گاندل، ۲۰۰۵؛ هندرسون، ۲۰۰۷؛ ژو، ۲۰۱۱) را ملاحظه فرمائید) وجود دارند که به کامل کردن بازار، با معرفی اوراق بهادار پایه افزوده که در قیمت‌گذاری اولیه دخیل نبوده‌اند و امکان باز ارزش‌گذاری دارند، می‌پردازند. این رهیافت را برای نیل به اهداف این مقاله پیشنهاد نمی‌کنیم. در عوض و شاید سازگارتر با کارکرد بازار واقعی، فرض می‌کنیم معامله‌گران به سادگی یک فضای وضعیت خاص را انتخاب می‌کنند که زین پس از آن به عنوان مدل تقریب نام می‌بریم. همچنین باید معامله‌گران این واقعیت را در نظر بگیرند که مدل تقریب تنها تقریبی از فضای وضعیت مجهول است. متعاقباً، یک انتخاب بهینه آن است که خطاهای حاصل به موجب این تقریب را حداقل سازد. علاوه بر این نشان می‌دهیم چنین انتخابی منحصر به فرد است و از این رو روشی را برای ارزش‌گذاری یک اختیار خرید ارائه می‌دهیم. جماًلاً در این مقاله، علاقه‌مند به بحث در مورد مسائل زیر هستیم. اولاً، مدل تقریب منطقی در این زمینه چیست؟ دوماً، چگونه می‌توان ریسک مدل را به طور رسمی تعریف و مشخصه‌سازی نمود؟ سوماً، چه نوع راهبرد تأمینی مؤثرتر خواهد بود؟ در این مقاله، محدودیت‌های یک نمونه بازار کامل را برای ارزش‌گذاری و تأمین اختیارات مدنظر قرار می‌دهیم. این مسئله بسیار مهم است چون رویکردهای معادل‌ساز مبتنی بر فرض بازار کامل به طور معمول توسط مؤسسات مالی، به منظور کاهش ریسک هنگام صدور اختیار، مورد استفاده قرار می‌گیرند. ساختار این مقاله به شرح زیر می‌باشد. در بخش ۲، یک مدل بهبود یافته تک دوره‌ای بر اساس مدل قیمت‌گذاری دوجمله‌ای ارائه می‌شود. بخش ۳ به تعریف و تحلیل مدل تقریب و ریسک مدل در چارچوب ساده مدل تک دوره‌ای بهبود یافته، اختصاص یافته است. در بخش ۴، مدل تک دوره‌ای به یک مجموعه چند دوره‌ای تعمیم داده می‌شود و سرانجام در بخش ۵ از این مقاله نتیجه‌گیری می‌شود.

۲- بهبود مدل دوجمله‌ای تک دوره‌ای برای قیمت‌گذاری اختیارات

در این بخش یک روش بهبود یافته غیربدهی از مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد را توسعه می‌دهیم. ابتدا با توصیف مدل تک دوره‌ای آغاز می‌کنیم که در آن دو نوع اوراق بهادار اولیه، سهام و اوراق قرضه مورد معامله هستند. در مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای

^۱Natolski and Werner, 2014

^۲Wielhouwer, 2003

^۳Zhang and Han, 2013

^۴Moenig, 2021

^۵Dierker, 2012

^۶Gundel, 2005

^۷Henderson, 2007

^۸Zhou, 2011

استاندارد، عدم قطعیت آینده از طریق یک فضای وضعیت گسسته، که تنها شامل دو حالت ممکن است، مدل‌سازی شده است (هال، ۲۰۰۶). هر کدام از این وضعیت‌ها به کمک ارزش نهایی سهام به شکل زیر مشخص می‌شوند:

$$S_u^{(1)} = u S^{(0)}, \quad S_d^{(1)} = d S^{(0)},$$

که در آن $S^{(0)}$ قیمت اولیه سهام است و u و d به ترتیب میزان تغییرات به بالا یا پایین قیمت می‌باشند. علاوه بر این، تمام کارگزاری‌ها اتفاق نظر دارند که باید احتمال‌های حرکت رو به بالا یا پایین قیمت مؤکداً بین ۰ و ۱ باشند. در مقابل سهام، اوراق قرضه یک نوع اوراق بهادار فاقد ریسک هستند، یعنی بدون کاستن از کلیت، اگر قیمت اولیه ورقه قرضه ۱ دلار باشد در هر وضعیت نهایی ارزش آن همان ۱ دلار خواهد بود.

در مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد، عموماً فرض بر این است که u و d میزان تغییرات بالا و پایین قیمت در زمان صفر یک آگاهی عمومی و مشترک هستند. خارج از این مدل، فرض می‌کنیم که فضای وضعیت در زمان صفر یک آگاهی عمومی نیست اما در عوض با استفاده از فرض زیر قابل توصیف است.

فرضیه ۱: همه کارگزاری‌ها بر این باورند که یک مجموعه‌ی $\Omega(W_1)$ از فضاهای وضعیت ممکن در زمان ۱ وجود دارد. هر عضو از این مجموعه مشتمل بر دو وضعیت به شرح زیر است:

$$u_1 = \exp(+\sigma \exp(W_1)), \\ d_1 = \exp(-\sigma \exp(W_1)),$$

که در آن $\sigma > 0$ و W_1 یک متغیر تصادفی است که توزیع آن در زمان صفر بر همگان روشن است اما در زمان ۱، فقط تحقق آن مشاهده شده است. به سادگی برای هر توزیع I_1 ، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$0 < d_1 < 1 < u_1,$$

شرط فوق به این معنی است که نه سهام و نه اوراق قرضه، یک اوراق بهادار غالب نیستند. در واقع، این مسئله به خوبی مشخص است که اگر اوراق بهادار غالبی وجود داشته باشد، برای مثال اوراق بهاداری که بازده زمان ۱ آن همیشه بیشتر از بازده سایر اوراق بهادار است، آنگاه هیچ تعادلی ممکن نخواهد بود. در سیستم قیمت تعادلی ابزار حداکثرسازی سود سوداگران با عرضه‌های نامحدود و یا از طریق ذخیره اوراق بهادار وجود ندارد.

دو تفسیر برای فرضیه ۱ وجود دارد. اولاً، جمله نوفه W_1 می‌تواند به عنوان تردیدی در مورد فضای وضعیت واقعی در زمان ۱ تعبیر گردد. در واقع، در زمان صفر، بسته به توزیع W_1 ، یک تعداد متناهی از مجموعه‌های فضای وضعیت وجود دارند (که هر کدام از آنها تنها شامل دو وضعیت هستند). هنگامی که W_1 نمایان شود، معامله‌گران از فضای وضعیت درست، که باید تحت آن ارزش‌گذاری را انجام می‌دادند، مطلع خواهند شد. همچنین روشن است که W_1 حاکم بر روند گسترش بین وضعیت‌های «بالا» و «پایین» است و به این ترتیب می‌توان آن را به عنوان یک مؤلفه تلاطم تصادفی در نظر گرفت. دوماً، حتی اگر نوسان واقعی ثابت باشد، هنوز هم محتمل است که برآورد آن دارای خطاهای اندازه‌گیری تصادفی باشد. در این حالت، نه به صورت یک تفسیر انحصاری، اگر $\ln(\sigma)$ بیانگر لگاریتم تلاطم در نقطه برآورد و $\ln(\sigma_t)$ لگاریتم تلاطم واقعی در زمان t باشد، آنگاه داریم:

$$\ln(\sigma_t) = \ln(\sigma) + W_t,$$

اینجا W_t نوفه سفید^۲ است.



قابل ملاحظه است که اقتصاد توصیف شده در بخش قبل متناظر با یک بازار ناقص است (به هندرسون ۲۰۰۷، مراجعه کنید)، چون، بجز حالتی که توزیع W_1 میرا شود، همه وضعیت‌های پایانی ممکن نمی‌توانند تنها به وسیله اوراق قرضه و سهام پوشش داده شوند، به طوری که نمی‌توان به طور کامل با تجارت در پرتفوی مناسب از اوراق بهادار اولیه، بازدهی معادل یک اختیار خرید را ایجاد کرد. به بیان دیگر، برای معامله‌گری که درک کاملی از جزئیات تحقق W_1 دارد، بازار کامل خواهد بود. ما علاقه‌مند به بررسی نمونه بازار کامل نیز هستیم. یک راهبرد ساده این است که اگر میزان عدم قطعیت W_1 زیاده از حد نباشد، استفاده از آن برای تقریب فضای وضعیت واقعی مجهول، معقول به نظر می‌رسد. به تبع آن، فرض می‌کنیم معامله‌گران از تمام اطلاعات مورد دسترس در زمان صفر برای پیش‌بینی محتمل‌ترین فضای وضعیت در زمان ۱ استفاده می‌کنند که باید آن را به عنوان مدل تقریب در نظر بگیریم. به بیان دقیق‌تر، تعریف زیر را برای «مدل تقریب» ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱: مدل تقریب یک زوج از اعداد حقیقی (u_0, d_0) است که جواب‌های مسئله‌ی حداقل سازی زیر را مهیا می‌نماید:

$$\text{Min}_{u_0} E[(u_1 S_0 - u_0 S_0)^2], \quad (۱- الف)$$

$$\text{Min}_{d_0} E[(d_1 S_0 - d_0 S_0)^2], \quad (۱- ب)$$

که در آن $E[\cdot]$ عملگر امید ریاضی روی توزیع W_1 است. معیار بهینگی حداقل میانگین مربعی پیشنهادی به طور گسترده‌ای لاقبل از اوایل دهه ۱۹۵۰ برای حل مسائل اقتصادی مختلف از قبیل، تولید بهینه، مسائل تخصیص، کنترل و مدیریت موجودی، به خصوص زمانی که فروش‌های آتی تصادفی هستند، مورد استفاده بوده است (هارمن و ستلاچتر، ۲۰۱۱؛ وو و همکاران، ۲۰۱۲). همچنین در امور مالی، معیارهای مشابه بیشتری مورد بررسی قرار گرفته‌اند، و عموماً به عنوان تکنیک‌های تأمین‌ی میانگین-واریانس شناخته می‌شوند (فونتانا و سوزیر، ۲۰۱۲؛ لازریوا و همکاران، ۲۰۰۸) را برای جزئیات بیشتر مشاهده فرمائید. این تکنیک‌ها عمدتاً به مشخص سازی دلخواه از اندازه مارتینگل نیاز دارند، برخلاف ایده اساسی مدل دوجمله‌ای که در آن احتمالات ذهنی برای قیمت‌گذاری مورد استفاده نیستند. یکی از اهداف این مقاله بهره‌برداری از سادگی مدل دوجمله‌ای استاندارد ولی با مدنظر قرار دادن مشکل بدمشخص سازی است.

مسئله کمینه‌سازی توصیف شده در (۱) یک مسئله‌ی پیش‌گونی استاندارد است و با توجه به شرایط انتگرال‌پذیری، جواب منحصر به فرد زیر برای آن به دست می‌آید:

$$u_0 = E[u_1], \quad d_0 = E[d_1].$$

پس از اینکه u_0 و d_0 محاسبه گردیدند، معامله‌گران کمیت‌های سهام و اوراق قرضه را برای معادل‌سازی مدل پرداخت اختیار در زمان ۱ تعیین می‌کنند. این کمیت‌ها برای ایجاد پرتفوی معادل‌ساز باید معلوم شده باشند.

تعریف ۲: پرتفوی معادل‌ساز مدل، زوج (α_0, β_0) از کمیت‌های سهام و اوراق قرضه است که با حل سیستم معادلات خطی زیر به دست آمده است:

$$\alpha_0 \tilde{S}_u^{(1)} + \beta_0 = \tilde{C}_u^{(1)}, \quad (۲- الف)$$

$$\alpha_0 \tilde{S}_d^{(1)} + \beta_0 = \tilde{C}_d^{(1)}, \quad (۲- ب)$$

که در آن $\tilde{S}_u^{(1)} = u_0 S^{(0)}$ و $\tilde{S}_d^{(1)} = d_0 S^{(0)}$ قیمت‌های سهام مدل در زمان ۱، به ترتیب در وضعیت‌های بالا و پایین هستند و اگر K قیمت توافقی اعمال اختیار باشد،

$$\tilde{C}_u^{(1)} = \text{Max}(\tilde{S}_u^{(1)} - K, 0),$$

^۱Harman and Stulajter, 2011

^۲Wu and et. al., 2012

^۳Fontana and Schweizer, 2012

^۴Lazrieva and et. al., 2008

$$\tilde{C}_d^{(1)} = \text{Max}(\tilde{S}_d^{(1)} - K, 0),$$

ارزش اختیار خرید مدل در زمان ۱ در وضعیت‌های بالا و پایین هستند. در ادبیات قیمت‌گذاری اختیار، α_0 به عنوان نسبت تأمین‌ی معرفی شده و می‌توان نشان داد که $0 \leq \alpha_0 \leq 1$.

جواب یکتای سیستم (۲) عبارت است از:

$$\alpha_0 = \frac{\tilde{C}_u^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)}}{\tilde{S}_u^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)}}, \quad (\text{الف} - ۳)$$

$$\beta_0 = \tilde{C}_u^{(1)} - \alpha_0 \tilde{S}_u^{(1)} = \tilde{C}_d^{(1)} - \alpha_0 \tilde{S}_d^{(1)}. \quad (\text{ب} - ۳)$$

در ادامه به بررسی برخی ویژگی‌های پرتفوی معادل‌ساز مدل مبادرت می‌شود. قابل ملاحظه است که در زمان ۱، ارزش این پرتفوی برابر است با:

$$V_u^{(1)} = \alpha_0 S_u^{(1)} + \beta_0, \quad (\text{الف} - ۴)$$

$$V_d^{(1)} = \alpha_0 S_d^{(1)} + \beta_0. \quad (\text{ب} - ۴)$$

حال به سادگی معادلات (۴-الف) و (۴-ب) را با استفاده از (۳-ب)، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)} = \alpha_0 (S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)}), \quad (\text{الف} - ۵)$$

$$V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)} = \alpha_0 (S_d^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)}). \quad (\text{ب} - ۵)$$

از روابط فوق، قابل استنتاج است که:

$$E[V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}] = 0, \quad (\text{الف} - ۶)$$

$$E[V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)}] = 0, \quad (\text{ب} - ۶)$$

$$\text{Var}[V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}] = E[(V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})^2] = \alpha_0^2 E[(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})^2], \quad (\text{الف} - ۷)$$

$$\text{Var}[V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)}] = E[(V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)})^2] = \alpha_0^2 E[(S_d^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)})^2]. \quad (\text{ب} - ۷)$$

عبارات (۶) بیانگر این واقعیت هستند که ارزش نهایی مورد انتظار پرتفوی معادل‌ساز مدل، یک برآورد نااریب از ارزش واقعی آن است. از روابط (۷) در می‌یابیم که نوفه مدل، اندازه‌گیری شده با خطای میانگین مربعی، حداقل شده است چون مقادیر تغییرات طوری انتخاب شده‌اند که $E[(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})^2]$ و $E[(S_d^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)})^2]$ حداقل مقدار خود را اختیار کنند.

معادلات (۶) و (۷) اساساً بیان‌کننده این مفهوم هستند که در راهبرد تجارت بهینه، مقادیر $V_u^{(1)}$ و $V_d^{(1)}$ بهترین تقریب قیمت‌های مدل یعنی $\tilde{C}_u^{(1)}$ و $\tilde{C}_d^{(1)}$ خواهند بود.

گزاره ۱: ریسک واقعی پرتفوی معادل‌ساز همواره کمتر از ریسک مدل پیشین بعلاوه نوفه مدل است، به بیان دیگر

$$E[(C_u^{(1)} - V_u^{(1)})^2] \leq E[(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})^2] + E[(V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})^2], \quad (\text{۸})$$

(دقیقاً همین عبارت در وضعیت «پایین» نیز درست است).

اثبات: با استفاده از معادله (۵-الف)، داریم:

$$E[(V_u^{(1)} - C_u^{(1)})^2] = E[(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})^2 - 2\alpha_0(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)}) + \alpha_0^2(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})^2],$$

چون $E[(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})] \geq 0$ ، بنابراین نامعادله (۸) برقرار است.





ساختار ساده‌ای که در این بخش توسعه داده شده است برای نمایان ساختن انگیزه‌های اقتصادی این مقاله مفید است؛ با این حال، به منظور دست‌یابی به یک مدل واقعی‌تر، باید این ساختار را به یک چارچوب چند دوره‌ای بسط دهیم (هال ۲۰۰۶).

۴- بسط مدل به حالت چند دوره‌ای گسسته

در این بخش، مدل تک دوره‌ای را به یک مدل چند دوره‌ای گسسته بسط می‌دهیم. در حالی که ایده اصلی همانند مدل تک دوره‌ای است، اما برخی از نکات حائز اهمیت را مورد تأکید قرار می‌دهیم. در واقع، در اقتصاد چند دوره‌ای، فرایند قیمت سهام یک فرایند منشعب دو جمله‌ای است. مدل در زمان صفر از وضعیت $S^{(0)}$ آغاز می‌شود. در زمان ۱، تمام معامله‌گران بر این عقیده هستند که تنها دو وضعیت ممکن وجود دارد، به بیان دیگر تنها وضعیت‌های «بالا» یا «پایین» قابل دسترسی هستند. فرض کنید Ω_1 نشان دهنده وضعیت در زمان ۱ با $\Omega_1 \in \{u_1, d_1\}$ باشد. سپس، وابسته به Ω_1 و روند حرکتی فرایند به «بالا» یا «پایین»، وضعیت Ω_2 با

$$\Omega_2 \in \{u_2\Omega_1, d_2\Omega_1\} = \{u_2u_1, u_2d_1, d_2u_1, d_2d_1\},$$

پیش روی ما است. فرایند فضای وضعیت به این شکل تا دوره آخر مثلاً N ادامه می‌یابد. یعنی برای $1 \leq i \leq N$ وضعیت دوره i -ام، Ω_i ، از ترکیب روند حرکتی در این دوره با Ω_{i-1} به دست می‌آید، به عبارت دیگر $\Omega_i \in \{u_i\Omega_{i-1}, d_i\Omega_{i-1}\}$. بنابراین فرایند قیمت سهام $S^{(i)}$ ، به صورت درخت دودویی در مرحله i -ام مشتمل بر 2^i حالت خواهد بود. یعنی برای $1 \leq i \leq N$:

$$S^{(i)} = \begin{cases} u_i S^{(i-1)}, & \text{حرکت قیمت به بالا} \\ d_i S^{(i-1)}, & \text{حرکت قیمت به پایین} \end{cases}$$

مشاهده می‌کنید که فرایند توصیف‌کننده تحول قیمت سهام وابسته به مسیر است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که قیمت اوراق قرضه در همه‌ی زمان‌ها برابر ۱ دلار می‌باشد. همچنین با $\sigma > 0$ ساختار تصادفی حرکت بالا و پایین قیمت در امتداد زمان را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u_i &= \exp(+\sigma \exp(W_i)), \\ d_i &= \exp(-\sigma \exp(W_i)). \end{aligned}$$

در ادامه، به منظور تبیین مدل تقریب، ابتدا مسائل بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{u_{i-1}} E[\{(u_i - u_{i-1})S^{(i-1)}\}^2 | \Omega_{i-1}], \\ \text{Min}_{d_{i-1}} E[\{(d_i - d_{i-1})S^{(i-1)}\}^2 | \Omega_{i-1}]. \end{aligned}$$

مشابه بخش ۳، جواب‌ها برای $1 \leq i \leq N$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= E(u_i | \Omega_{i-1}), \\ d_{i-1} &= E(d_i | \Omega_{i-1}), \end{aligned}$$

از این رو در هر مرحله مانند j که $1 \leq j \leq i - 1$ ، مدل تقریب به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳: مدل تقریب در دوره j -ام مجموعه‌ای از اندازه‌های تغییرات بالا و پایین است به طوری که:

$$\begin{aligned} u_j &= E(u_{j+1} | \Omega_j), \\ d_j &= E(d_{j+1} | \Omega_j), \end{aligned}$$

متعاقباً، فرایند قیمت سهم مدل به ازای هر $1 \leq j \leq N - 1$ ، با معادلات بازگشتی زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{S}^{(j)} = \begin{cases} u_{i-1} \tilde{S}^{(j-1)}, & \text{حرکت قیمت به بالا} \\ d_{i-1} \tilde{S}^{(j-1)}, & \text{حرکت قیمت به پایین} \end{cases}$$

علاوه بر این، هنگامی که $j = N - 1$ ، شرط زیر را داریم:

$$\tilde{S}^{(N-1)} = S^{(N-1)},$$

که به معنی استفاده از قیمت سهام واقعی به منظور بازسازی مدل برای دوره قبلی است.

گزاره ۲: اگر I_i ها نوبه‌های تصادفی مستقل باشند، آنگاه نیاز نیست مقادیر بالا و پایین از یک دوره‌ی زمانی به دوره دیگر مجدداً تنظیم شوند (به بیان دیگر «بازسازی پویا» موجه نیست).

اثبات: برای هر دوره $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq i - 1$ ، به دست می‌آوریم:

$$E[u_{i-1} | \Omega_{j_1}] = E[u_{i-1} | \Omega_{j_2}] = E[u_{i-1}],$$

$$E[d_{i-1} | \Omega_{j_1}] = E[d_{i-1} | \Omega_{j_2}] = E[d_{i-1}].$$

به عنوان یک توضیح شهودی، اطلاع از مقدار تغییرات گذشته بی‌ارتباط به پیش‌گویی مقدار تغییرات آینده است، زیرا تمام امیدهای شرطی به امید غیرشرطی از I_i ها تبدیل می‌شوند. به محض اینکه مدل تقریب مشخص شد، اقدام به تعریف پرتفوی معادل‌ساز مدل در دوره j می‌نمائیم.

تعریف ۴: پرتفوی معادل‌ساز مدل در دوره‌ی j -ام مجموعه $(\alpha_{j-1}, \beta_{j-1})$ از زوج کمیت‌های اوراق قرضه و سهام است که با حل سیستم‌های معادلات خطی زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_{j-1} \tilde{S}_u^{(j)} + \beta_{j-1} = \tilde{C}_u^{(j)},$$

$$\alpha_{j-1} \tilde{S}_d^{(j)} + \beta_{j-1} = \tilde{C}_d^{(j)},$$

در عبارت فوق $\tilde{S}_u^{(j)} = u_{j-1} \tilde{S}^{(j-1)}$ و $\tilde{S}_d^{(j)} = d_{j-1} \tilde{S}^{(j-1)}$ قیمت‌های سهام مدل را در هر حالت نهایی نسبی مربوطه نشان می‌دهند. بازده نهایی اختیار خرید برای $i = N$ به صورت $\tilde{C}_u^{(N)} = \text{Max}(\tilde{S}_u^{(N)} - K, 0)$ و $\tilde{C}_d^{(N)} = \text{Max}(\tilde{S}_d^{(N)} - K, 0)$ و هنگامی که $1 \leq i \leq N - 1$

$$\tilde{C}_u^{(i)} = \alpha_i \tilde{S}_u^{(i)} + \beta_i,$$

$$\tilde{C}_d^{(i)} = \alpha_i \tilde{S}_d^{(i)} + \beta_i,$$

معین می‌گردند.

از این رو، معامله‌گران این مسئله را به صورت بازگشتی و پسرو با شروع از دوره N حل می‌کنند تا مقادیر سهام و اوراق قرضه در دوره j -ام را محاسبه کنند.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

استفاده از ابزارهای دقیق و پیچیده‌ی ارزش‌گذاری و تأمین‌طلبی اختیارات برای حداقل‌سازی ریسک، یکی از اهداف عمده مؤسسات مالی است. در این مقاله، به بررسی مسئله‌ی ریسک مدل در چارچوب ساده‌ی مدل قیمت‌گذاری اختیار دو جمله‌ای پرداخته



شد. با تعریف بهینگی به مفهوم حداقل خطاهای میانگین-مریع، اثبات شد که انتخاب یک مدل تقریب بهینه در این حالت میسر می‌شود. علاوه بر این، پیاده‌سازی و کارایی روش را برای مدل چند دوره‌ای نیز تبیین نمودیم.

نتایج حاصل از این مقاله، چند پیامد قابل توجه دارد. از چشم انداز تحقیقاتی، با فرضیه‌های مختلف، یک مدل تقریب که ریسک مدل را به حداقل می‌رساند برای قیمت‌گذاری اختیارات خرید طراحی و تعمیم داده شد. از دیدگاه کاربرد عملی، این مقاله برای مؤسسات مالی این بینش را فراهم می‌سازد که در بازارهای مرتبط با اختیارات یک سازوکار برای تعدیل نوسانات زیاده از حد پیش‌بینی نمایند. این آگاهی، ضررها را کاهش و احتمال سودآوری در این بازارها را افزایش می‌دهد. پیاده‌سازی الگوی ارائه شده در این پژوهش برای بازارهای مختلف با توجه به قوانین حاکم بر آنها، یک موضوع مطالعاتی ارزشمند می‌باشد.

تشکر و قدردانی

از حمایت‌های دانشگاه سمنان برای پیشبرد و بهبود فعالیت‌های پژوهشی به خصوص در فرآیند نگارش این مقاله سپاسگزارم.

تعارض با منافع

نویسنده اعلام می‌دارد که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، نسخه نهایی ارسال شده را مشاهده و تأیید کرده است. نویسنده تضمین می‌کند که مقاله، اثر اصلی بوده، قبلاً چاپ نشده، و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

- Dierker, E., & Dierker, H. (2012). Ownership structure and control in incomplete market economies with transferable utility. *Economic Theory*, 51(3), 713-728.
- Fontana, C., & Schweizer, M. (2012). Simplified mean-variance portfolio optimization. *Mathematics and Financial Economics*, 6(2), 125-152.
- Gundel, A. (2005). Robust utility maximization for complete and incomplete market models. *Finance and Stochastics*, 9(2), 151-176.
- Harman, R., & Stulajter, F. (2011). Optimality of equidistant sampling designs for the Brownian motion with a quadratic drift. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(8), 2750-2758.
- Henderson, V. (2007). Valuing the option to invest in an incomplete market. *Mathematics and Financial Economics*, 1(2), 103-128.
- Hull, J. C. (2006). *Options, futures, and other derivatives* (6th Ed.). Pearson/Prentice Hall.
- Lazrieva, N., Razmadze, A., & Toronjadze, T. (2008). Optimal robust mean-variance hedging in incomplete financial markets. *Journal of Mathematical Sciences*, 153(3), 262-290.
- Moenig, T. (2021). Variable annuities: Market incompleteness and policyholder behavior. *Insurance: Mathematics and Economics*, 99, 63-78.
- Natolski, J., & Werner, R. (2014). Mathematical analysis of different approaches for replicating portfolios. *European Actuarial Journal*, 4(2), 411-435.
- Wielhouwer, J. L. (2003). On the steady state of the replicating portfolio: accounting for a growth rate. *OR Spectrum*, 25(3), 329-343.
- Wu, Z., Yang, Y., Bai, F., & Tian, J. (2012). Global optimality conditions and optimization methods for quadratic assignment problems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(11), 6214-6231.
- Zhang, Q., & Han, J. (2013). Option pricing in incomplete markets. *Applied Mathematics Letters*, 26(10), 975-978.
- Zhou, Q. (2011). Two-agent Pareto optimal cooperative investment in incomplete market: An equivalent characterization. *Journal of Systems Science and Complexity*, 24(4), 701-710.

