E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 7, No. 3 (2022) 489–495.

Paper Type: Original Article

Optimal Approximation Model and Decision Making with Model Risk in Options Markets

Leila Torkzadeh*

Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Semnan University, P.O. Box 35195-363, Semnan, Iran; torkzadeh@semnan.ac.ir.

Citation:

Torkzadeh, L. (2022). Optimal approximation model and decision making with model risk in options markets. *Journal of decisions and operations research, 7*(3), 489-495.

Received: 18/07/2021 Reviewed: 10/08/2021 Revised: 23/09/2021 Accepted: 30/09/2021

Abstract

Purpose: Providing an analytical approach to minimize risk to a situation that traders deal with model risk, as a financial risk arises by choosing an approximation model, for the underlying securities status in financial estimates.

Methodology: Improving the standard binomial pricing model and using the equivalence portfolio mechanism in a particular incomplete market situation which traders are uncertain about the actual status space of the stock binomial process.

Findings: From a research aspect, a model of approximation was provided and generalized with different hypotheses that minimizes the risk of the model for pricing call options. From an applied practical aspect, the results give to financial institutions the outlook to predict a mechanism to moderate excessive volatilities in the markets related to options.

Originality/Value: The study of the model risk is performed by maintaining the simple framework and elegance of the binomial model and then it is proved that by defining the optimality in the sense of minimum mean-square errors, the choice of an optimal approximation model is possible. In addition, the implementation and efficiency of the method for the multi-period model are explained.

Keywords: Equivalence portfolio, Risk minimization, Model risk, Option pricing, Approximation model and optimal decision.

Corresponding Author: torkzadeh@semnan.ac.ir
http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.3.7.6

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۷، شماره (۳)، (۱۴۰۱)، ۴۹۵-۴۸۹
www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

مدل تقریب بهینه و تصمیم گیری باوجود ریسک مدل در بازارهای مرتبط با اختیارات

لیلا ترک‌زاده*

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

چکیده

هدف: ارائه رهیافت تحلیلی به‌منظور حداقل‌سازی ریسک برای موقعیتی که معامله‌گران با ریسک مدل به‌عنوان یک ریسک مالی منتج از انتخاب مدل تقریب، برای فضای وضعیت اوراق بهادار مبنا در برآوردهای مالی، روبرو هستند.

روش‌شناسی پژوهش: بهبود مناسب مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد و استفاده از سازوکار پرتفوی معادل‌ساز در وضعیت خاصی از بازار ناکامل که معامله‌گران در مورد فضای وضعیت واقعی فرایند دوجمله‌ای سهام، نامطمئن هستند.

یافته‌ها: از چشم‌انداز تحقیقاتی، با فرضیه‌های مختلف یک مدل تقریب طراحی و تعمیم داده شد که ریسک مدل را برای قیمت‌گذاری اختیارات خرید به حداقل می‌رساند. از دیدگاه کاربرد عملی، نتایج حاصل برای مؤسسات مالی این بینش را فراهم می‌سازد که در بازارهای مرتبط با اختیارات یک سازوکار برای تعدیل نوسانات زیاده از حد پیش‌بینی نمایند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: بررسی مسئله‌ی ریسک مدل با حفظ چارچوب ساده و ظرافت مدل دوجمله‌ای انجام و سپس اثبات می‌شود که با تعریف بهینگی به مفهوم حداقل خطاهای میانگین-مربع، انتخاب یک مدل تقریب بهینه میسر است. علاوه براین پیاده‌سازی و کارایی روش برای مدل چند دوره‌ای نیز تبیین می‌شود.

کلیدواژه‌ها: پرتفوی معادل‌ساز، حداقل‌سازی ریسک، ریسک مدل، قیمت‌گذاری اختیارات، مدل تقریب و تصمیم بهینه.

۱- مقدمه و پیشینه تحقیق

در میان اوراق بهادار متعددی که در بازارهای مالی دادوستد می‌شوند، اختیارات دارای ویژگی‌های قراردادی مشخص هستند، فروشنده اختیار در معرض ریسک نامحدودی قرار دارد، اما خریدار بیش از پرداختی اولیه برای خرید اختیار ضرر نمی‌کند. در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰، بلک، شولز و مرتون[1] یک نظریه جدید برای تعیین قیمت منصفانه اختیار اروپایی پیشنهاد کردند. مهم‌تر از این، آن‌ها یک راهبرد تجاری منحصربه‌فرد برای ایجاد یک پرتفوی معادل‌ساز[2] که عایدی نهایی کاملاً برابر با اختیارات داشته باشد، ارائه نمودند. پس‌ازآن، مؤسسات مالی بر مبنای این تئوری و با بهره‌برداری از آن، اختیارات را فروخته و خودشان را با ایجاد یک پرتفوی که اصطلاحاً معادل‌ساز نامیده می‌شود، تأمین می‌نمایند (ناتوسکی و ورنر[3]، ۲۰۱۴؛ ویل هور[4]، ۲۰۰۳). پرتفوی معادل‌ساز ترکیبی از اوراق قرضه بدون ریسک و دارایی‌های با ریسک است که عایدی آن دقیقاً برابر عایدات دارایی مشتقه می‌باشد. باوجود این‌که مدل‌های ارزش‌گذاری پیچیده‌تری به‌طور منظم در حال معرفی شدن هستند، اما اهمیت ایجاد پرتفوی معادل‌ساز مؤثر برای اهداف مدیریتی به قوه‌ی خود باقی‌مانده است؛ بنابراین، با این معادل‌سازی مؤسسات در معرض ریسک کمتر از ریسک خالص پیشین قرار دارند. اگر ایجاد پرتفوی معادل‌ساز مؤثر میسر نباشد،

[1] Black, Scholes and Merton
[2] Replicating Portfolio
[3] Natolski and Werner
[4] Wielhouwer

* نویسنده مسئول

torkzadeh@semnan.ac.ir
http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.3.7.6

با یک ارزیابی اشتباه از روند حرکتی بازار، فروشندگان اختیار با ریسک از دست دادن میزان قابل‌توجهی از سرمایه روبرو می‌شوند. رهیافت آربیتراژ، عمومی‌ترین رویکرد برای ارزش‌گذاری اختیارات و ایجاد پرتفوی معادل‌ساز است. مطابق اصل آربیتراژ بازده یک اختیار صادره روی اوراق بهادار با ریسک، می‌تواند از طریق معامله یک پرتفوی خاص که متشکل از اوراق بهادار بدون ریسک و سهام در نسبت‌های مناسب است، معادل‌سازی گردد به‌طوری‌که اختیارات اولیه و پرتفوی معادل‌ساز عایدی یکسان داشته باشند. یک فرض اساسی برای توسعه نظریه فوق این است که معامله‌گران، دانش کاملی از روند حرکتی قیمت سهام مبنا دارند. بااین‌حال، عملاً تجربه نشان می‌دهد که پیشامدهای غیرمترقبه پذیرش چنین فرضی را ممکن نمی‌سازد. برای نمونه، معامله‌گران به‌طور عمده مدل دوجمله‌ای را با در نظر گرفتن قیمت تاریخی سهام پیاده‌سازی می‌کنند. درواقع، درخت دوجمله‌ای در هر دوره زمانی «بازسازی» می‌شود تا باقیمت سهام جاری جدید که متفاوت با پیشگوئی درخت اصلی است، مطابقت داشته باشد. علاوه بر این، اغلب مقادیر بالا و پایین‌بر اساس تغییرات اخیر قیمت سهام، مجدداً مقداردهی خواهند شد، این شیوه عملکرد منتسب به «بازسازی پویا» است. در این مقاله، پایه تحلیلی چنین عملکردهای خاص را مهیا می‌نماییم. به‌منظور لحاظ کردن ریسک مدل، از بهبود مناسب مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد استفاده می‌کنیم .

در اقتصادی که معامله‌گران در مورد فضای وضعیت واقعی فرایند دوجمله‌ای سهام، دچار ابهام هستند، ازنقطه‌نظر تئوری، با شکل خاصی از بازار ناکامل مواجه هستیم (ژانگ و هان[1]، ۲۰۱۳؛ مونیگ[2]، ۲۰۲۱). تعداد قابل‌توجهی از متون علمی (برای مثال دیکر،دیرکر و دیرکر[3]، ۲۰۱۲؛ گاندل[4]، ۲۰۰۵؛ هندرسون[5]، ۲۰۰۷؛ ژو[6]، ۲۰۱۱ را ملاحظه فرمایید) وجود دارند که به کامل کردن بازار، با معرفی اوراق بهادار پایه افزوده که در قیمت‌گذاری اولیه دخیل نبوده‌اند و امکان باز ارزش‌گذاری دارند، می‌پردازند. این رهیافت را برای نیل به اهداف این مقاله پیشنهاد نمی‌کنیم. در عوض و شاید سازگارتر با کارکرد بازار واقعی، فرض می‌کنیم معامله‌گران به‌سادگی یک فضای وضعیت خاص را انتخاب می‌کنند که زین پس‌ازآن به‌عنوان مدل تقریب نام می‌بریم. همچنین باید معامله‌گران این واقعیت را در نظر بگیرند که مدل تقریب تنها تقریبی از فضای وضعیت مجهول است. متعاقباً، یک انتخاب بهینه آن است که خطاهای حاصل به‌موجب این تقریب را حداقل سازد. علاوه بر این نشان می‌دهیم چنین انتخابی منحصربه‌فرد است و ازاین‌رو روشی را برای ارزش‌گذاری یک اختیار خرید ارائه می‌دهیم. اجمالاً در این مقاله، علاقه‌مند به بحث در مورد مسائل زیر هستیم. اولاً، مدل تقریب منطقی در این زمینه چیست؟ دوماً، چگونه می‌توان ریسک مدل را به‌طور رسمی تعریف و مشخصه‌سازی نمود؟ سوماً، چه نوع راهبرد تأمینی مؤثرتر خواهد بود؟ در این مقاله، محدودیت‌های یک نمونه بازار کامل را برای ارزش‌گذاری و تأمین اختیارات مدنظر قرار می‌دهیم. این مسئله بسیار مهم است چون رویکردهای معادل‌ساز مبتنی برفرض بازار کامل به‌طورمعمول توسط مؤسسات مالی، به‌منظور کاهش ریسک هنگام صدور اختیارت، مورداستفاده قرار می‌گیرند. ساختار این مقاله به شرح زیر می‌باشد. در بخش ۲، یک مدل بهبودیافته تک دوره‌ای بر اساس مدل قیمت‌گذاری دوجمله‌ای ارائه می‌شود. بخش ۳ به تعریف و تحلیل مدل تقریب و ریسک مدل در چارچوب ساده مدل تک دوره‌ای بهبودیافته، اختصاص‌یافته است. در بخش ۴، مدل تک دوره‌ای به یک مجموعه چند دوره‌ای تعمیم داده می‌شود و سرانجام در بخش ۵ از این مقاله نتیجه‌گیری می‌شود.

۲- بهبود مدل دوجمله‌ای تک دوره‌ای برای قیمت‌گذاری اختیارات

در این بخش یک روش بهبودیافته غیر بدیهی از مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد را توسعه می‌دهیم. ابتدا با توصیف مدل تک دوره‌ای آغاز می‌کنیم که در آن دو نوع اوراق بهادار اولیه، سهام و اوراق قرضه مورد معامله هستند. در مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد، عدم قطعیت آینده از طریق یک فضای وضعیت گسسته، که تنها شامل دو حالت ممکن است، مدل‌سازی شده است (هال[7]، ۲۰۰۶). هرکدام از این وضعیت‌ها به کمک ارزش نهایی سهام به شکل زیر مشخص می‌شوند:

$$S_u^{(1)} = u\, S^{(0)},\ S_d^{(1)} = d\, S^{(0)}.$$

که در آن $S^{(0)}$ قیمت اولیه سهام است و u و d به ترتیب میزان تغییرات به بالا یا پایین قیمت می‌باشند. علاوه بر این، تمام کارگزاری‌ها اتفاق‌نظر دارند که باید احتمال‌های حرکت رو به بالا یا پایین قیمت مؤکداً بین ۰ و ۱ باشند. در مقابل سهام، اوراق قرضه یک نوع اوراق بهادار فاقد ریسک هستند، یعنی بدون کاستن از کلیت، اگر قیمت اولیه ورقه قرضه ۱ دلار باشد در هر وضعیت نهایی ارزش آن همان ۱ دلار خواهد بود.

[1] Zhang and Han
[2] Moenig
[3] Dierker and Dierker
[4] Gundel
[5] Henderson
[6] Zhou
[7] Hull

نویسندگان مقاله / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۹۵-۴۸۹

در مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای استاندارد، عموماً فرض بر این است که u و d میزان تغییرات بالا و پایین قیمت در زمان صفر یک آگاهی عمومی و مشترک هستند. خارج از این مدل، فرض می‌کنیم که فضای وضعیت در زمان صفر یک آگاهی عمومی نیست اما در عوض با استفاده از فرض زیر قابل توصیف است.

فرضیه ۱. همه کارگزاری‌ها بر این باورند که یک مجموعه‌ی $\Omega(W_1)$ از فضاهای وضعیت ممکن در زمان ۱ وجود دارد. هر عضو از این مجموعه مشتمل بر دو وضعیت به شرح زیر است:

$$u_1 = exp\left(+\sigma\ exp\,(W_1)\right).$$
$$d_1 = exp\left(-\sigma\ exp\,(W_1)\right).$$

که در آن $\sigma > 0$ و W_1 یک متغیر تصادفی است که توزیع آن در زمان صفر بر همگان روشن است اما در زمان ۱، فقط تحقق آن مشاهده‌شده است. به‌سادگی برای هر توزیع I_1، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$0 < d_1 < 1 < u_1.$$

شرط فوق به این معنی است که نه سهام و نه اوراق قرضه، یک اوراق بهادار غالب نیستند. درواقع، این مسئله به‌خوبی مشخص است که اگر اوراق بهادار غالبی وجود داشته باشد، برای مثال اوراق بهاداری که بازده زمان ۱ آن همیشه بیشتر از بازده سایر اوراق بهادار است، آنگاه هیچ تعادلی ممکن نخواهد بود. در سیستم قیمت تعادلی ابزار حداکثر سازی سود سوداگران باعرضه‌های نامحدود و یا از طریق ذخیره اوراق بهادار وجود ندارد.

دو تفسیر برای **فرضیه ۱** وجود دارد. اولاً، جمله نوفهW_1 می‌تواند به‌عنوان تردیدی در مورد فضای وضعیت واقعی در زمان ۱ تعبیر گردد. درواقع، در زمان صفر، بسته به توزیع W_1، یک تعداد متناهی از مجموعه‌های فضای وضعیت وجود دارند (که هرکدام از آن‌ها تنها شامل دو وضعیت هستند). هنگامی‌که W_1 نمایان شود، معامله‌گران از فضای وضعیت درست، که باید تحت آن ارزش‌گذاری را انجام می‌دادند، مطلع خواهند شد. همچنین روشن است که W_1 حاکم بر روند گسترش بین وضعیت‌های «بالا» و «پایین» است و به‌این‌ترتیب می‌توان آن را به‌عنوان یک مؤلفه تلاطم تصادفی در نظر گرفت. دوماً، حتی اگر نوسان واقعی ثابت باشد، هنوز هم محتمل است که برآورد آن دارای خطاهای اندازه‌گیری تصادفی باشد. در این حالت، نه به‌صورت یک تفسیر انحصاری، اگر $ln(\sigma)$ بیانگر لگاریتم تلاطم در نقطه برآورد و $ln(\sigma_t)$ لگاریتم تلاطم واقعی در زمان t باشد، آنگاه داریم:

$$ln(\sigma_t) = ln(\sigma) + W_t.$$

اینجاW_t نوفه سفید[1] است.

۳- مدل تقریب و پرتفوی معادل‌ساز مدل

قابل‌ملاحظه است که اقتصاد توصیف‌شده در بخش قبل متناظر با یک بازار ناقص است (به هندرسون، ۲۰۰۷، مراجعه کنید)، چون به‌جز حالتی که توزیعW_1 میرا شود، همه وضعیت‌های پایانی ممکن نمی‌توانند تنها به‌وسیله اوراق قرضه و سهام پوشش داده شوند، به‌طوری‌که نمی‌توان به‌طور کامل با تجارت در پرتفوی مناسب از اوراق بهادار اولیه، بازدهی معادل یک اختیار خرید را ایجاد کرد. به‌بیان‌دیگر، برای معامله‌گری که درک کاملی از جزئیات تحقق W_1 دارد، بازار کامل خواهد بود. ما علاقه‌مند به بررسی نمونه بازار کامل نیز هستیم. یک راهبرد ساده این است که اگر میزان عدم قطعیت W_1 زیاده از حد نباشد، استفاده از آن برای تقریب فضای وضعیت واقعی مجهول، معقول به نظر می‌رسد. به‌تبع آن، فرض می‌کنیم معامله‌گران از تمام اطلاعات مورد دسترس در زمان صفر برای پیش‌بینی محتمل‌ترین فضای وضعیت در زمان ۱ استفاده می‌کنند که باید آن را به‌عنوان مدل تقریب در نظر بگیریم. به بیان دقیق‌تر، تعریف زیر را برای «مدل تقریب» ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱– مدل تقریب یک زوج از اعداد حقیقی (u_0,d_0) است که جواب‌های مسئله‌ی حداقل سازی زیر را مهیا می‌نماید:

[1] White Noise

$$Min_{u_0} E[(u_1 S_0 - u_0 S_0)^2]. \quad \text{(۱-الف)}$$

$$Min_{d_0} E[(d_1 S_0 - d_0 S_0)^2]. \quad \text{(۱-ب)}$$

که در آن $E[\,.\,]$ عملگر امید ریاضی روی توزیع W_1 است. معیار بهینگی حداقل میانگین مربعی پیشنهادی به‌طور گسترده‌ای لااقل از اوایل دهه ۱۹۵۰ برای حل مسائل اقتصادی مختلف از قبیل، تولید بهینه، مسائل تخصیص، کنترل و مدیریت موجودی، به‌خصوص زمانی که فروش‌های آتی تصادفی هستند، مورداستفاده بوده است (هارمن و ستلاجتر[1]، ۲۰۱۱؛ وو و همکاران[2]، ۲۰۱۲). همچنین در امور مالی، معیارهای مشابه بیشتری موردبررسی قرارگرفته‌اند، و عموماً به‌عنوان تکنیک‌های تأمینی میانگین-واریانس شناخته می‌شوند (فونتانا و شویزر[3]، ۲۰۱۲؛ لازریوا و تورنجاز[4]، ۲۰۰۸ را برای جزئیات بیش‌تر مشاهده فرمایید). این تکنیک‌ها عمدتاً به مشخص‌سازی دلخواه از اندازه مارتینگل نیاز دارند، برخلاف ایده اساسی مدل دوجمله‌ای که در آن احتمالات ذهنی برای قیمت‌گذاری مورداستفاده نیستند. یکی از اهداف این مقاله بهره‌برداری از سادگی مدل دوجمله‌ای استاندارد ولی با مدنظر قرار دادن مشکل بد مشخص‌سازی است. مسئله کمینه‌سازی توصیف‌شده در (۱) یک مسئله‌ی پیشگوئی استاندارد است و با توجه به شرایط انتگرال‌پذیری، جواب منحصربه‌فرد زیر برای آن به دست می‌آید:

$$u_0 = E[u_1],\ d_0 = E[d_1].$$

پس‌ازاینکه u_0 و d_0 محاسبه گردیدند، معامله‌گران کمیت‌های سهام و اوراق قرضه را برای معادل‌سازی مدل پرداخت اختیار در زمان ۱ تعیین می‌کنند. این کمیت‌ها برای ایجاد پرتفوی معادل‌ساز باید معلوم شده باشند.

تعریف ۲- پرتفوی معادل‌ساز مدل، زوج (α_0,β_0) از کمیت‌های سهام و اوراق قرضه است که با حل سیستم معادلات خطی زیر به‌دست‌آمده است:

$$\alpha_0 \tilde{S}_u^{(1)} + \beta_0 = \tilde{C}_u^{(1)}. \quad \text{(۲-الف)}$$

$$\alpha_0 \tilde{S}_d^{(1)} + \beta_0 = \tilde{C}_d^{(1)}. \quad \text{(۲-ب)}$$

که در آن $\tilde{S}_u^{(1)} = u_0\, S^{(0)}$ و $\tilde{S}_d^{(1)} = d_0\, S^{(0)}$ قیمت‌های سهام مدل در زمان ۱، به ترتیب در وضعیت‌های بالا و پایین هستند و اگر K قیمت توافقی اعمال اختیار باشد،

$$\tilde{C}_u^{(1)} = Max\left(\tilde{S}_u^{(1)} - K, 0\right).$$

ارزش اختیار خرید مدل در زمان ۱ در وضعیت‌های بالا و پایین هستند. در ادبیات قیمت‌گذاری اختیار، α_0 به‌عنوان نسبت تأمینی معرفی‌شده و می‌توان نشان داد که $0 \le \alpha_0 \le 1$.

جواب یکتای **سیستم (۲)** عبارت است از:

$$\alpha_0 = \frac{\tilde{C}_u^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)}}{\tilde{S}_u^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)}}. \quad \text{(۳-الف)}$$

$$\beta_0 = \tilde{C}_u^{(1)} - \alpha_0 \tilde{S}_u^{(1)} = \tilde{C}_d^{(1)} - \alpha_0 \tilde{S}_d^{(1)}. \quad \text{(۳-ب)}$$

در ادامه به بررسی برخی ویژگی‌های پرتفوی معادل‌ساز مدل مبادرت می‌شود. قابل‌ملاحظه است که در زمان ۱، ارزش این پرتفوی برابر است با:

$$V_u^{(1)} = \alpha_0 S_u^{(1)} + \beta_0. \quad \text{(۴-الف)}$$

$$V_d^{(1)} = \alpha_0 S_d^{(1)} + \beta_0. \quad \text{(۴-ب)}$$

حال به‌سادگی **معادلات (٤-الف)** و **(۴-ب)** را با استفاده از **(۳-ب)**، به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)} = \alpha_0 (S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)}). \quad \text{(۵-الف)}$$

---

[1] Harman and Štulajter
[2] Wu and et al.
[3] Fontana and Schweizer
[4] Lazrieva and Toronjadze

نویسندگان مقاله / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۹۵-۴۸۹

$$V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)} = \alpha_0(S_d^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)}). \quad \text{(۵–ب)}$$

از روابط فوق، قابل استنتاج است که:

$$E[V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}] = 0. \quad \text{(۶–الف)}$$

$$E[V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)}] = 0. \quad \text{(۶–ب)}$$

$$Var[V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}] = E[(V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})^2] = \alpha_0^2 E[(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})^2]. \quad \text{(۷–الف)}$$

$$Var[V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)}] = E[(V_d^{(1)} - \tilde{C}_d^{(1)})^2] = \alpha_0^2 E[(S_d^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)})^2]. \quad \text{(۷–الف)}$$

عبارات (٦) بیانگر این واقعیت هستند که ارزش نهایی مورد انتظار پرتفوی معادل‌ساز مدل، یک برآورد ناااریب از ارزش واقعی آن است. از **روابط (۷)** درمی‌یابیم که نوفه مدل، اندازه‌گیری شده با خطای میانگین مربعی، حداقل شده است چون مقادیر تغییرات طوری انتخاب‌شده‌اند که $E[(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})^2]$ و $E[(S_d^{(1)} - \tilde{S}_d^{(1)})^2]$ حداقل مقدار خود را اختیار کنند.

معادلات (٦) و **(۷)** اساساً بیان‌کننده این مفهوم هستند که در راهبرد تجارت بهینه، مقادیر $V_u^{(1)}$ و $V_d^{(1)}$ بهترین تقریب قیمت‌های مدل یعنی $\tilde{C}_u^{(1)}$ و $\tilde{C}_d^{(1)}$ خواهند بود.

گزاره ۱– ریسک واقعی پرتفوی معادل‌ساز همواره کمتر از ریسک مدل پیشین بعلاوه نوفه مدل است، به‌بیان‌دیگر

$$E[(C_u^{(1)} - V_u^{(1)})^2] \le E[\left(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}\right)^2] + E[\left(V_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}\right)^2]. \quad \text{(۸)}$$

(دقیقاً همین عبارت در وضعیت «پایین» نیز درست است).

اثبات– با استفاده از **معادله (۵–الف)**، داریم:

$$E[(V_u^{(1)} - C_u^{(1)})^2] = E[(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})^2 - 2\,\alpha_0\left(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)}\right)\left(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)}\right) + \alpha_0^2\left(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)}\right)^2].$$

چون $E[(C_u^{(1)} - \tilde{C}_u^{(1)})(S_u^{(1)} - \tilde{S}_u^{(1)})] \ge 0$، بنابراین **نامعادله (۸)** برقرار است.

ساختار ساده‌ای که در این بخش توسعه داده‌شده است برای نمایان ساختن انگیزه‌های اقتصادی این مقاله مفید است؛ بااین‌حال، به‌منظور دست‌یابی به یک مدل واقعی‌تر، باید این ساختار را به یک چارچوب چند دوره‌ای بسط دهیم (هال، ۲۰۰۶).

۴- بسط مدل به حالت چند دوره‌ای گسسته

در این بخش، مدل تک دوره‌ای را به یک مدل چند دوره‌ای گسسته بسط می‌دهیم. درحالی‌که ایده اصلی همانند مدل تک دوره‌ای است، اما برخی از نکات حائز اهمیت را مورد تأکید قرار می‌دهیم. درواقع، در اقتصاد چند دوره‌ای، فرایند قیمت سهام یک فرایند منشعب دوجمله‌ای است. مدل در زمان صفر از وضعیت $S^{(0)}$ آغاز می‌شود. در زمان ۱، تمام معامله‌گران بر این عقیده هستند که تنها دو وضعیت ممکن وجود دارد، به‌بیان‌دیگر تنها وضعیت‌های «بالا» یا «پایین» قابل‌دسترسی هستند. فرض کنید Ω_1 نشان‌دهنده وضعیت در زمان ۱ با $\Omega_1 \in \{u_1, d_1\}$ باشد. سپس، وابسته به Ω_1 و روند حرکتی فرایند به «بالا» یا «پایین»، وضعیت Ω_2 با

$$\Omega_2 \in \{u_2\Omega_1, d_2\Omega_1\} = \{u_2u_1, u_2d_1, d_2u_1, d_2d_1\}.$$

پیش روی ما است. فرایند فضای وضعیت به این شکل تا دوره آخر مثلاً N ادامه می‌یابد. یعنی برای $1 \le i \le N$ وضعیت دوره ith، Ω_i، از ترکیب روند حرکتی در این دوره با Ω_{i-1} به دست می‌آید، به‌عبارت‌دیگر $\Omega_i \in \{u_i\Omega_{i-1}, d_i\Omega_{i-1}\}$. بنابراین فرایند قیمت سهام $S^{(i)}$، به‌صورت درخت دودوئی در مرحله i–ام مشتمل بر 2^i حالت خواهد بود. یعنی برای $1 \le i \le N$:

$$S^{(i)} = \begin{cases} u_i\, S^{(i-1)}, & \text{حرکت قیمت به بالا} \\ d_i\, S^{(i-1)}, & \text{حرکت قیمت به پایین} \end{cases}$$

مشاهده می‌کنید که فرایند توصیف‌کننده‌ی تحول قیمت سهام وابسته به مسیر است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که قیمت اوراق قرضه در همه‌ی زمان‌ها برابر ۱ دلار می‌باشد. همچنین با $\sigma > 0$ ساختار تصادفی حرکت بالا و پایین قیمت در امتداد زمان را به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$u_i = exp\left(+\sigma\; exp\,(W_i)\right).$$

$$d_i = exp\left(-\sigma\; exp\,(W_i)\right).$$

نویسندگان مقاله / تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۹۵-۴۸۹

در ادامه، به‌منظور تبیین مدل تقریب، ابتدا مسائل بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:

$$Min_{u_{i-1}} E[((u_i - u_{i-1})S^{(i-1)})^2|\Omega_{i-1}].$$
$$Min_{d_{i-1}} E[((d_i - d_{i-1})S^{(i-1)})^2|\Omega_{i-1}].$$

مشابه بخش ۳، جواب‌ها برای $1 \le i \le N$ عبارت‌اند از

$$u_{i-1} = E(u_i|\Omega_{i-1}).$$
$$d_{i-1} = E(d_i|\Omega_{i-1}).$$

ازاین‌رو در هر مرحله مانند j که $1 \le j \le i-1$، مدل تقریب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳- مدل تقریب در دوره jth مجموعه‌ای از اندازه‌های تغییرات بالا و پایین است به‌طوری‌که:

$$u_j = E(u_{j+1}|\Omega_j).$$
$$d_j = E(d_{j+1}|\Omega_j).$$

متعاقبا، فرایند قیمت سهم مدل به ازای هر $1 \le j \le N-1$، با معادلات بازگشتی زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{S}^{(j)} = \begin{cases} u_{i-1}\tilde{S}^{(j-1)}, & \text{حرکت قیمت به بالا} \\ d_{i-1}\tilde{S}^{(j-1)}, & \text{حرکت قیمت به پایین} \end{cases}$$

علاوه بر این، هنگامی‌که $j = N-1$، شرط زیر را داریم:

$$\tilde{S}^{(N-1)} = S^{(N-1)}.$$

که به معنی استفاده از قیمت سهام واقعی به‌منظور بازسازی مدل برای دوره قبلی است.

گزاره ۲- اگر I_iها نوفه‌های تصادفی مستقل باشند، آنگاه نیاز نیست مقادیر بالا و پایین از یک دوره‌ی زمانی به دوره دیگر مجدداً تنظیم شوند (به‌بیان‌دیگر «بازسازی پویا» موجه نیست).

اثبات- برای هر دوره $0 \le j_1 \le j_2 \le i-1$، به دست می‌آوریم:

$$E[u_{i-1}/\Omega_{j_1}] = E[u_{i-1}/\Omega_{j_2}] = E[u_{i-1}].$$
$$E[d_{i-1}/\Omega_{j_1}] = E[d_{i-1}/\Omega_{j_2}] = E[d_{i-1}].$$

به‌عنوان یک توضیح شهودی، اطلاع از مقدار تغییرات گذشته بی‌ارتباط به پیشگوئی مقدار تغییرات آینده است، زیرا تمام امیدهای شرطی به امید غیرشرطی از I_iها تبدیل می‌شوند. به‌محض اینکه مدل تقریب مشخص شد، اقدام به تعریف پرتفوی معادل‌ساز مدل در دوره j می‌نماییم.

تعریف ٤- پرتفوی معادل‌ساز مدل در دوره‌ی jth مجموعه $(\alpha_{j-1}, \beta_{j-1})$ از زوج کمیت‌های اوراق قرضه و سهام است که با حل سیستم‌های معادلات خطی زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_{j-1}\tilde{S}_u^{(j)} + \beta_{j-1} = \tilde{C}_u^{(j)}.$$
$$\alpha_{j-1}\tilde{S}_d^{(j)} + \beta_{j-1} = \tilde{C}_d^{(j)}.$$

در عبارت فوق $\tilde{S}_u^{(j)} = u_{j-1}\,\tilde{S}^{(j-1)}$ و $\tilde{S}_d^{(j)} = d_{j-1}\,\tilde{S}^{(j-1)}$ قیمت‌های سهام مدل را در هر حالت نهایی نسبی مربوطه نشان می‌دهند. بازده نهایی اختیار خرید برای $i = N$ به صورت $\tilde{C}_u^{(N)} = Max(\tilde{S}_u^{(N)} - K, 0)$ و $\tilde{C}_d^{(N)} = Max(\tilde{S}_d^{(N)} - K, 0)$ و هنگامی‌که $1 \le i \le N-1$ با

$$\tilde{C}_u^{(i)} = \alpha_i\tilde{S}_u^{(i)} + \beta_i.$$
$$\tilde{C}_d^{(i)} = \alpha_i\tilde{S}_d^{(i)} + \beta_i.$$

معین می‌گردند.

ازاین‌رو، معامله‌گران این مسئله را به‌صورت بازگشتی و پسرو با شروع از دوره N حل می‌کنند تا مقادیر سهام و اوراق قرضه در دوره j–ام را محاسبه کنند.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

استفاده از ابزارهای دقیق و پیچیده‌ی ارزش‌گذاری و تأمین طلبی اختیارات برای حداقل‌سازی ریسک، یکی از اهداف عمده مؤسسات مالی است. در این مقاله، به بررسی مسئله‌ی ریسک مدل در چارچوب ساده‌ی مدل قیمت‌گذاری اختیار دوجمله‌ای پرداخته شد. با تعریف بهینگی به مفهوم حداقل خطاهای میانگین-مربع، اثبات شد که انتخاب یک مدل تقریب بهینه در این حالت میسر می‌شود. علاوه بر این، پیاده‌سازی و کارایی روش را برای مدل چند دوره‌ای نیز تبیین نمودیم.

نتایج حاصل از این مقاله، چند پیامد قابل‌توجه دارد. از چشم‌انداز تحقیقاتی، با فرضیه‌های مختلف، یک مدل تقریب که ریسک مدل را به حداقل می‌رساند برای قیمت‌گذاری اختیارات خرید طراحی و تعمیم داده شد. از دیدگاه کاربرد عملی، این مقاله برای مؤسسات مالی این بینش را فراهم می‌سازد که در بازارهای مرتبط با اختیارات یک سازوکار برای تعدیل نوسانات زیاده از حد پیش‌بینی نمایند. این آگاهی، ضررها را کاهش و احتمال سودآوری در این بازارها را افزایش می‌دهد. پیاده‌سازی الگوی ارائه‌شده در این پژوهش برای بازارهای مختلف با توجه به قوانین حاکم بر آن‌ها، یک موضوع مطالعاتی ارزشمند می‌باشد.

تشکر و قدردانی

از حمایت‌های دانشگاه سمنان برای پیشبرد و بهبود فعالیت‌های پژوهشی به‌خصوص در فرآیند نگارش این مقاله سپاسگزارم.

تعارض با منافع

نویسنده اعلام می‌دارد که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تأیید کرده است. نویسنده تضمین می‌کند که مقاله، اثر اصلی بوده، قبلاً چاپ‌نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

Dierker, E., & Dierker, H. (2012). Ownership structure and control in incomplete market economies with transferable utility. *Economic theory*, *51*(3), 713-728. https://doi.org/10.1007/s00199-011-0621-y

Fontana, C., & Schweizer, M. (2012). Simplified mean-variance portfolio optimisation. *Mathematics and financial economics*, *6*(2), 125-152. https://doi.org/10.1007/s11579-012-0067-4

Gundel, A. (2005). Robust utility maximization for complete and incomplete market models. *Finance and stochastics*, *9*(2), 151-176. https://doi.org/10.1007/s00780-004-0148-1

Harman, R., & Štulajter, F. (2011). Optimality of equidistant sampling designs for the Brownian motion with a quadratic drift. *Journal of statistical planning and inference*, *141*(8), 2750-2758. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2011.02.025

Henderson, V. (2007). Valuing the option to invest in an incomplete market. *Mathematics and financial economics*, *1*(2), 103-128. https://doi.org/10.1007/s11579-007-0005-z

Hull, J. (2006). *Options, futures, & other derivatives. Solutions manual*. Prentice Hall International.

Lazrieva, N., & Toronjadze, T. (2008). Optimal robust mean-variance hedging in incomplete financial markets. *Journal of mathematical sciences*, *153*(3), 262-290. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9128-x

Moenig, T. (2021). Variable annuities: market incompleteness and policyholder behavior. *Insurance: mathematics and economics*, *99*, 63-78. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2021.03.007

Natolski, J., & Werner, R. (2014). Mathematical analysis of different approaches for replicating portfolios. *European actuarial journal*, *4*(2), 411-435. https://doi.org/10.1007/s13385-014-0094-z

Wielhouwer, J. L. (2003). On the steady state of the replicating portfolio: accounting for a growth rate. *OR spectrum*, *25*(3), 329-343. https://doi.org/10.1007/s00291-003-0134-6

Wu, Z., Yang, Y., Bai, F., & Tian, J. (2012). Global optimality conditions and optimization methods for quadratic assignment problems. *Applied mathematics and computation*, *218*(11), 6214-6231. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.068

Zhang, Q., & Han, J. (2013). Option pricing in incomplete markets. *Applied mathematics letters*, *26*(10), 975-978. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.05.002

Zhou, Q. (2011). Two-agent Pareto optimal cooperative investment in incomplete market: an equivalent characterization. *Journal of systems science and complexity*, *24*(4), 701-710. https://doi.org/10.1007/s11424-010-9002-z