



Paper Type: Original-Application Paper



Efficiency Evaluation in Fuzzy Two-Stage DEA Based on Fuzzy Arithmetic Approach

Mohammad Kachouei¹, Ali Ebrahimnejad^{2,*} , Hadi Bagherzadeh-Valami¹

¹ Department of Mathematics, Yadegar -e- Imam Khomeini (RAH) Shahr-e-Rey Branch, Islamic Azad University, Shahr-e-Rey, Iran; mohammad.kachouei@gmail.com; hadi_bagherzadeh@yahoo.com.

² Department of Mathematics and Statistics, Qaemshahr Branch, Islamic Azad University, Qaemshahr, Iran; aemaroun@gmail.com.

Citation:



Kachouei, M., Ebrahimnejad, A., & Bagherzadeh-Valami, H. (2022). Efficiency evaluation in fuzzy two-stage data envelopment analysis based on fuzzy arithmetic approach. *Journal of decisions and operations research*, 7(1), 143-159.

Received: 31/01/2021

Reviewed: 05/03/2021

Revised: 04/06/2021

Accepted: 20/06/2021

Abstract

Purpose: In classical data envelopment analysis models, a production system for measuring performance is considered as a black box and no attention is paid to the internal structure of decision-making units in the process of evaluation performance. However, it is important to consider the internal structure of the units to identify sources of inefficiency to calculate efficiency. On the other hands, the observed values of input and output data in real world problems are sometimes imprecise and vague. Therefore, in this paper, the network data envelopment analysis model is used in order to evaluate the performance of decision-making units with a two-stage structure in a fuzzy environment in which input and output values are displayed in terms of triangular fuzzy numbers.

Methodology: To solve the fuzzy two-stage data envelopment analysis model, the fuzzy arithmetic approach is used and a lexicographic optimization method for calculating the fuzzy efficiency of processes and the fuzzy efficiency of the system is proposed.

Findings: The main advantage of the proposed approach over the existing approaches is that it solves fewer models for finding fuzzy efficiency.

Originality/Value: The application of the proposed model is explained by evaluating the performance of 24 insurance companies.

Keywords: Two-stage data envelopment analysis, Fuzzy numbers, Fuzzy arithmetic approach, Lexicographic method.

Corresponding Author: aemaroun@gmail.com

 <https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.1.9.4>




Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی-کاربردی

6

ارزیابی کارایی در تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی با رویکرد حساب فازی

محمد کچوئی^۱، علی ابراهیم‌نژاد^{۲*} , هادی باقرزاده ولمی^۱

^۱ گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی (ره) شهر ری، دانشگاه آزاد اسلامی، شهر ری، ایران.
^۲ گروه ریاضی و آمار، واحد قائم‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم‌شهر، ایران.

چکیده

هدف: در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها، از یک طرف یک سیستم تولیدی برای اندازه‌گیری کارایی به‌عنوان جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شود و توجهی به ساختار داخلی واحدهای تصمیم‌گیرنده در فرایند ارزیابی عملکرد نمی‌شود. با این وجود، در نظر گرفتن ساختار درونی واحدها جهت شناسایی منابع ناکارایی برای محاسبه کارایی اهمیت به‌سزایی دارد. از طرف دیگر، مقادیر مشاهده‌شده داده‌های ورودی و خروجی‌ها در مسائل جهان واقعی گاهی نادقیق و مبهم هستند؛ بنابراین در این مقاله، مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای به‌منظور ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با ساختار دومرحله‌ای در محیط فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن مقادیر ورودی و خروجی برحسب اعداد فازی مثلثی نمایش داده می‌شوند.

روش‌شناسی پژوهش: برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی از رویکرد حساب فازی استفاده می‌شود و یک روش الفبایی برای محاسبه کارایی فازی فرآیندها و کارایی فازی سیستم پیشنهاد می‌گردد.

یافته‌ها: مزیت اصلی رویکرد پیشنهادی نسبت به رویکردهای موجود این است که مدل‌های کمتری برای یافتن کارایی فازی حل می‌کند.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: کاربرد مدل پیشنهادی با ارزیابی عملکرد ۲۴ شرکت بیمه تبیین می‌شود. کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای، اعداد فازی، رویکرد حساب فازی، روش الفبایی.

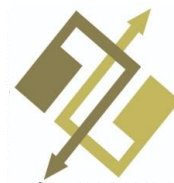
۱- مقدمه

در سال‌های اخیر در بسیاری از کشورهای جهان برای ارزیابی عملکرد نهادها از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها^۱ (DEA) استفاده می‌شود. علت گستردگی این تکنیک امکان بررسی روابط پیچیده و نامعلوم بین چندین ورودی و چندین خروجی، حجم بسیار زیاد اطلاعات محدود بودن واحدها در خصوص تصمیم‌گیری مناسب است. فعالیت‌هایی نظیر عملکرد شعب بانک‌ها، کارایی دانشگاه‌های یک کشور و عملکرد پالایشگاه‌های گاز مثال‌هایی از این دست هستند. تحلیل پوششی داده‌ها برای اولین بار توسط چارنر و همکاران^۲ (۱۹۷۸) ارائه شد. DEA به‌عنوان یک روش غیر پارامتری، ابزاری مناسب و کارآمد برای محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده^۳ می‌باشد که علاوه بر تعیین

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)
² Charnes et al.

³ Decision Making Unit (DMU)

* نویسنده مسئول



میزان کارایی نسبی نقاط ضعف سازمان را در شاخص‌های مختلف تعیین کرده و با ارائه میزان مطلوبیت آن‌ها، خط مشی سازمان را به‌سوی پیشرفت و ارتقاء سطح کارایی هدایت می‌کند.

معمولاً در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی یک سیستم به‌عنوان یک جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شود که توجه چندانی به ساختار داخلی آن ندارد. باین‌حال عملیات تولیدی معمولاً از ترکیب فرآیندهای سری و موازی تشکیل می‌شود که این موضوع استفاده از ساختار شبکه را ضروری می‌سازد. کائو و هوانگ^۱ (۲۰۰۸) رویکرد *DEA* شبکه را توسعه دادند که به اصطلاح مدل *DEA* دومرحله‌ای نامیده می‌شود. در این مدل با استفاده از دو فرآیند متصل در مدل سری، کارایی‌های فرآیند و سیستم اندازه‌گیری می‌شود و کارایی سیستم نیز محصول تولیدات این دو فرآیند است. در واقع در *DEA* دومرحله‌ای کارایی کل هر واحد و ارتباط بین مراحل آن را با در نظر گرفتن ورودی‌های مشترک و تولیدات میانی ارزیابی می‌کند. امیرتیموری^۲ (۲۰۱۳) یک روش *DEA* را برای اندازه‌گیری کارایی فرآیندهای تصمیم‌گیری توسعه داد که در آن فرآیندها به دو مرحله متصل به هم که به صورت یک سری مرتب‌شده‌اند تقسیم می‌شود. در این روش خروجی‌ها به صورت کامل و ناقص با منابع مشترک در نظر گرفته شدند. امیرتیموری و همکاران^۳ (۲۰۱۵) با استفاده از مدل *DEA* شبکه‌ای کارایی تعداد ۲۵ شرکت گاز در ایران را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از روش کارایی متقاطع آن‌ها را رتبه‌بندی کردند. ژانگ و همکاران^۴ (۲۰۱۹) یک مدل *DEA* دومرحله‌ای را برای تخصیص منابع بر اساس مفروضات سود مجموع-صفر و سود مجموع-ثابت ارائه دادند که در آن تمام ورودی‌ها به ورودی‌های اختیاری و غیر اختیاری تقسیم می‌شود و دو مدل برای تخصیص منابع بر اساس نمرات کارایی محیط‌زیست ارائه شد. وانگ و همکاران^۵ (۲۰۱۹) به بررسی یکنواختی وزن‌های تجزیه در مدل *DEA* دومرحله‌ای با منابع مشترک پرداختند و دریافتند که این وزن‌ها در چنین شرایطی نسبت به مرحله دوم مغرضانه نیست و با استفاده از وزن‌های ثابت تمایز بین واحدهای کارا را بهبود بخشیدند. تسای و همکاران^۶ (۲۰۲۰) یک رابطه نظری بین نمرات کارایی به دست آمده از مدل *DEA* دومرحله‌ای و مدل اصلی *CCR* را ارائه دادند. همچنین چگونگی تأثیر مجموعه وزن‌های نامتقارن بر نمرات کارایی را بررسی کردند.

از طرفی دیگر، در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مقادیر ورودی و خروجی با مقادیر دقیق برآورد می‌شوند. ولی در بررسی مسائل کاربردی چنین امری در جهان واقعی همیشه امکان‌پذیر نیست و در بسیاری از موارد داده‌ها نادقیق و مبهم هستند. همین مسئله باعث ترکیب مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با نظریه مجموعه‌های فازی شده است و محققین بسیاری در این زمینه تحقیق نموده‌اند. رویکردهای موجود برای حل تحلیل پوششی داده‌های فازی در پنج دسته مختلف قرار می‌گیرند.

رویکرد آلفا برش یکی از پرکاربردترین رویکردها برای حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی است. ایده اصلی این رویکرد، تبدیل مدل *DEA* فازی به یک جفت از مسائل پارامتریک است به طوری که کران‌های پایین و بالای توابع عضویت نمرات کارایی به دست آید (کائو و لیو^۷، ۲۰۰۰؛ کائو و لیو، ۲۰۰۳؛ ساعتی و همکاران^۸، ۲۰۰۲). پوری و یاداو^۹ (۲۰۱۴) یک مدل *DEA* فازی با خروجی‌های نامطلوب را ارائه دادند که با استفاده از رویکرد آلفا برش ساعتی و همکاران (۲۰۰۲) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی را حل می‌کند. همچنین از تکنیک کارایی متقابل برای رتبه‌بندی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری استفاده می‌کند. حاتمی - ماریینی و همکاران^{۱۰} (۲۰۱۸b) یک فرآیند ارزیابی را برای تخمین بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیرنده در *DEA* نادقیق توسعه دادند که در آن ورودی‌ها و خروجی‌ها بازه‌های کران‌دار هستند.

رویکرد رتبه‌بندی فازی روش دیگری برای یافتن کارایی فازی واحدها با استفاده از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی است که نیاز به رتبه‌بندی اعداد فازی دارد. جیوو و تاناکا^{۱۱} (۲۰۰۱) از این رویکرد برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌ها فازی استفاده کرده‌اند که در آن مقادیر ورودی و خروجی با اعداد فازی مثلثی متقارن بیان می‌شوند. آن‌ها هر قید نامساوی فازی را با استفاده از رتبه‌بندی فازی به دو قید نامساوی قطعی تبدیل کرده‌اند. برای تبدیل قید نرمال ساز فازی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی حل کرده و آن را تبدیل به سه قید قطعی کرده‌اند. همچنین برای تابع هدف فازی با تبدیل آن به یک بازه برحسب آلفا برش و استفاده از مجموع وزن‌دار شده کران پایین و کران بالای بازه یک تابع هدف

¹ Kao and Hwang

² Amirteimoori

³ Amirteimoori et al.

⁴ Zhang et al.

⁵ Wang et al.

⁶ Tsai et al.

⁷ Kao and Liu

⁸ Saati et al.

⁹ Puri and Yadav

¹⁰ Hatami-Marbini et al.

¹¹ Guo and Tanaka

قطعی به دست آوردند. جیو^۱ (۲۰۰۹) این روش را برای حالتی که مقادیر ورودی و خروجی با اعداد فازی مسطح گسترش داده‌اند و از آن برای حل مسائل مکان‌یابی استفاده کرده‌اند.

رویکرد امکان‌پذیری از دیگر رویکردهای مهم در حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی است که بر طبق این رویکرد هر قید به‌عنوان یک پیشامد فازی در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از اندازه امکان پیشامدهای فازی، مدل‌های *DEA* فازی به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های امکان‌پذیر تبدیل می‌شوند. روئیز و سیرونت^۲ (۲۰۱۷) یک رویکرد فازی برای ارزیابی کارایی متقاطع بر اساس رویکرد امکان زمانی که داده‌ها نادقیق و بخصوص ورودی‌ها و خروجی‌ها نرمال و محدب باشند را ارائه دادند.

رویکرد برنامه‌ریزی چندهدفه نیز برای حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی استفاده می‌شود. ایده اصلی این رویکرد، تبدیل مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی به یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه و استفاده از رویکرد الفبایی برای یافتن کارایی فازی هر واحد تصمیم‌گیرنده است. حاتمی-ماربینی و همکاران^۳ (۲۰۱۷) از این رویکرد بر مبنای بهینه‌سازی الفبایی برای حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های تماماً فازی استفاده کرده‌اند.

با این وجود یکی از اساسی‌ترین رویکردها برای حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی، رویکرد حساب فازی می‌باشد. ایده اصلی این رویکرد بر این اصل استوار است که هر مدل کسری تحلیل پوششی داده‌های فازی را نمی‌توان با روش‌های سنتی به مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی تبدیل نمود. بر این اساس وانگ و همکاران (۲۰۰۹) رویکرد حساب فازی را معرفی نموده‌اند که روی مدل کسری کار می‌کند. با فرض این‌که مقادیر ورودی و خروجی با اعداد فازی مثلی نمایش داده شوند، با استفاده از عملیات حساب فازی هر مدل کسری به سه مدل کسری خطی تبدیل می‌شود. با حل مدل‌های خطی، کران پایین، میانی و بالای کارایی فازی تخمین زده می‌شود. باردواج و همکاران^۴ (۲۰۱۸) به ایرادات روش وانگ و همکاران (۲۰۰۹) اشاره کرده و مدل اصلاح شده‌ای برای برطرف شدن آن ایرادات پیشنهاد کرده‌اند. آذر و همکاران^۵ (۲۰۱۶) با توسعه مدل پیشنهادی وانگ و همکاران (۲۰۰۹) مجموعه وزن مشترک برای حل مدل فازی به دست آوردند که با حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، کارایی فازی تمام واحدها محاسبه می‌گردد. کچونی و همکاران^۶ (۲۰۲۰) با استفاده از رویکرد حساب فازی روش جدیدی را برای پیدا کردن مجموعه وزن‌های مشترک برای محاسبه کارایی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی با خروجی‌های نامطلوب پیشنهاد داده‌اند. در این روش با استفاده از رویکرد حساب فازی مدل جمعی فازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود و کارایی فازی همه واحدها بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک به دست آورده می‌شود. ابراهیم‌نژاد و امانی^۷ (۲۰۲۱) از رویکرد حساب فازی برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی در حضور خروجی‌های نامطلوب بر اساس واحدهای تصمیم‌گیرنده ایده آل و آنتی ایده آل استفاده کرده‌اند.

محققینی که در زمینه‌ی تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی کار کرده‌اند، رویکردهای فازی مذکور را توسعه داده‌اند. کائو و لیو (۲۰۱۱) نوع فازی مدل دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها را معرفی کردند و رویکرد آلفا برش را برای یافتن کارایی فازی بکار بردند. لیو^۸ (۲۰۱۴a) روشی را برای رتبه‌بندی کارایی فازی زمانی که توابع عضویت دقیق کارایی کلی حاصل از مدل دومرحله‌ای فازی مشخص نیستند را ارائه داد. در این روش یک جفت برنامه غیرخطی برای رتبه‌بندی نمرات کارایی کلی فازی واحدها از طریق ترکیب مدل دومرحله‌ای فازی با روش رتبه‌بندی عدد فازی فرمول‌بندی می‌شود. لیو (۲۰۱۴b) روشی را برای یک مدل *DEA* دومرحله‌ای فازی که وزن‌ها در دامنه‌ها محدود شده‌اند، ارائه داد که در آن داده‌های ورودی-خروجی به صورت اعداد فازی بیان می‌شوند. در این روش با استفاده از اصل گسترش زاده و رویکرد ناحیه اطمینان یک جفت برنامه ریاضی دو-سطحی برای محاسبه کران بالا و کران پایین نمره کارایی فازی فرمول‌بندی شد. لوزانو^۹ (۲۰۱۴) رویکردی را برای محاسبه برآورد کارایی فرآیند در سیستم دومرحله‌ای با داده‌های فازی ارائه دادند. در مرحله اول کران‌های بالا و پایین آلفا برش‌های کارایی سیستم با استفاده از مدل کائو و لیو (۲۰۱۱) محاسبه می‌شود. سپس در مرحله دوم کران‌های بالا و پایین آلفا برش‌های کارایی هر فرآیند محاسبه می‌شود. در این روش کران بالای آلفا برش کارایی هر فرآیند با توجه به کران بالای کارایی سیستم محاسبه می‌شود درحالی‌که کران پایین کارایی فرآیند با توجه به کران پایین کارایی سیستم محاسبه می‌شود. حاتمی-ماربینی و همکاران (۲۰۱۸a) با تعمیم روش کائو و لیو (۲۰۱۱) روش جدیدی را برای تخمین کارایی فرآیندهای سیستم

¹ Guo

² Ruiz and Sirvent

³ Hatami-Marbini et al.

⁴ Bhardwaj et al.

⁵ Azar et al.

⁶ Kachouei et al.

⁷ Ebrahimnejad and Amani

⁸ Liu

⁹ Lozano





دومرحله‌ای با داده‌های فازی ارائه دادند. حاتمی-ماربینی و همکاران (۲۰۱۸b) مدل‌های *DEA* دومرحله‌ای ورودی و خروجی محور را برای محاسبه کارایی‌های تکنیکی با استفاده از مسئله برنامه‌ریزی احتمالی ارائه دادند که با استفاده از روش آلفا برش به مسئله برنامه‌ریزی بازه‌ای قطعی تبدیل می‌شود. همچنین، حاتمی-ماربینی و ساعتی^۱ (۲۰۱۸) روشی را برای ساختارهای دومرحله‌ای با استفاده از وزن‌های مشترک در یک محیط فازی هنگام ارزیابی کارایی سیستم و فرآیندهای مؤلفه ارائه دادند. در این روش ابتدا کران‌های بالای روی فاکتور وزن‌ها به دست می‌آید و سپس با حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی یک مجموعه از وزن‌های مشترک تعیین می‌شود.

لذا با توجه به نکات اشاره‌شده در ادبیات، سهم اصلی این تحقیق به‌این صورت دسته‌بندی می‌شود: (۱) برای نخستین بار از رویکرد حساب فازی برای حل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی استفاده می‌شود. (۲) رویکرد پیشنهادی، برخلاف رویکردهای موجود که بر روی مدل‌های خطی *DEA* دومرحله‌ای متمرکز است، بر اساس مدل کسری استوار است. (۳) با استفاده از رویکرد حساب فازی، مدل *DEA* دومرحله‌ای فازی به مدل کسری چندهدفه تبدیل می‌شود و از رویکرد الفبایی برای یافتن کارایی فازی هر مرحله و کارایی فازی سیستم استفاده می‌شود. (۴) برای اثبات اعتبار مدل پیشنهادی، عملکرد ۲۴ شرکت بیمه در تایوان مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد که تأثیر عدم قطعیت در داده‌های ورودی و خروجی را روی عملکرد شرکت‌ها نشان می‌دهد.

ادامه مقاله به شرح ذیل سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها فرمول‌بندی می‌شود. در بخش ۳ مدل کسری تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی آورده می‌شود و در بخش ۴ رویکرد حساب فازی برای یافتن کارایی فازی سیستم و کارایی فازی فرایندها تشریح می‌گردد. در بخش ۵ کاربرد رویکرد پیشنهادی روی یک مثال کاربردی برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های بیمه در تایوان بررسی می‌شود. سرانجام، در بخش ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای انجام تحقیقات آتی ارائه می‌شود.

۲- مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها

در این بخش ابتدا مدل تحلیل پوششی داده‌های سنتی و سپس مدل دومرحله‌ای ارائه‌شده توسط کائو و هوانگ (۲۰۰۸) فرمول‌بندی می‌شود.

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است. کارایی نشان می‌دهد یک واحد چه میزان از ورودی‌ها را برای تولید خروجی‌ها به بهترین شکل استفاده کرده است. فرض کنید یک مجموعه از n واحد تحت ارزیابی هستند که در آن x_{ij} ($i=1, \dots, m$)، y_{rj} ($r=1, \dots, s$) به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های DMU_j ($j=1, \dots, n$) را نشان می‌دهند. مدل کسری برای ارزیابی DMU_k به‌صورت زیر است (چارنر و همکاران، ۱۹۷۸):

$$E_k = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}, \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

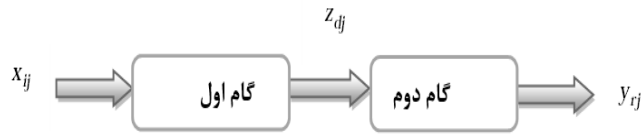
$$u_r, v_i \geq 0. \quad \forall i = 1, \dots, m \quad r = 1, \dots, S$$

در این مدل، v_i و u_r به ترتیب وزن‌هایی برای i امین ورودی و j امین خروجی هستند. مدل کسری (۱) به‌راحتی با استفاده از تبدیلات برنامه‌ریزی کسری به مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

¹ Hatami-Marbini and Saati



اکنون یک سیستم تولید دو مرحله‌ای را در نظر بگیرید که در آن هر واحد تصمیم‌گیرنده در مرحله اول با مصرف m ورودی و سپس در مرحله دوم، خروجی‌های تولیدشده در مرحله اول به‌عنوان p ورودی مصرف می‌شود تا s خروجی y_{rj} ($r=1, \dots, s$) را تولید کند. این ساختار در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱- یک ساختار دو مرحله‌ای.
Figure 1- A two-stage structure.

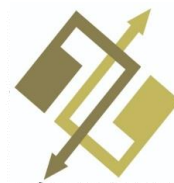
در اینجا از مدل دو مرحله‌ای گسترش‌یافته توسط کائو و هوانگ (۲۰۰۸) استفاده می‌کنیم. مدل کارایی کلی فرآیند دو مرحله‌ای تحت تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت برای ارزیابی DMU_k به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 E_k = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}, \\
 \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \\
 \frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \\
 \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}} \leq 1, \quad \forall j \\
 u_r, v_i, w_d \geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.
 \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن u_r ، w_d ، v_i به ترتیب وزن‌هایی برای i امین ورودی، d امین تولید میانی و r امین خروجی هستند. در این مدل محدودیت

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1$$

می‌توان به‌صورت مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر نوشت:



$$\begin{aligned}
 E_k &= \max_{u,w,v} \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}, \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1, \\
 & \sum_{d=1}^p w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad \forall j \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^p w_d z_{dj} \leq 0, \quad \forall j \\
 & u_r, u_d, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

که E_k کارایی کل سیستم تولید را نشان می‌دهد.

فرض کنید v_i^* , w_d^* و u_r^* مقادیر بهینه مدل (۳) باشند. کارایی مرحله ۱، مرحله ۲ و سیستم برای DMU_k به صورت $E_k^* = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rk}$ ،

یعنی $E_k^{2*} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rk}}{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{dk}}$ و $E_k^{1*} = \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{dk}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ik}}$ محاسبه می‌شوند. بدیهی است که کارایی سیستم محصول کارایی‌های فرآیند است یعنی $E_j^* = E_j^{1*} \times E_j^{2*}$ ؛ بنابراین یک سیستم کارا نامیده می‌شود اگر فرآیندهای آن کارا باشد.

۳- مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی

در این بخش، مدل کسری تحلیل پوششی داده‌های فازی و تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی فرمول‌بندی می‌شود.

روش‌های موجود در تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی از داده‌های ورودی و خروجی دقیق استفاده می‌کنند. این در حالی است که در مسائل دنیای واقعی داده‌هایی را مشاهده می‌کنیم که اغلب مبهم و نادقیق هستند؛ بنابراین مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها سنتی برای چنین مسائلی نمی‌تواند استفاده شود. برای رفع این مشکل مفهوم نظریه مجموعه‌های فازی در تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شد که در آن داده‌های ورودی و خروجی اعداد فازی هستند.

بدون اینکه در کلیت خللی وارد شود، از اعداد فازی مثلثی استفاده می‌شود. در این بخش ابتدا تعاریف و مفاهیمی از نظریه مجموعه‌های فازی را بیان می‌کنیم (ابراهیم‌نژاد و وردگای^۱، ۲۰۱۸).

تعریف ۱- یک عدد فازی \tilde{A} ، نشان داده‌شده به وسیله $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^R)$ ، یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود اگر تابع عضویت آن به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a^L}{a^M - a^L}, & a^L \leq x \leq a^M, \\ \frac{a^R - x}{a^R - a^M}, & a^M \leq x \leq a^R. \end{cases} \tag{۴}$$

تعریف ۲- یک عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^R)$ ، یک عدد فازی مثلثی مثبت نامیده می‌شود اگر $a^L > 0$.

تعریف ۳- عملیات حسابی روی دو عدد فازی مثلثی مثبت $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^R)$ و $\tilde{B} = (b^L, b^M, b^R)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\begin{aligned}
 \tilde{A} + \tilde{B} &= (a^L + b^L, a^M + b^M, a^R + b^R), \\
 \tilde{A} - \tilde{B} &= (a^L - b^R, a^M - b^M, a^R - b^L), \\
 t\tilde{A} &= (ta^L, ta^M, ta^R), \quad t \geq 0 \\
 t\tilde{A} &= (ta^R, ta^M, ta^L), \quad t < 0 \\
 \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} &= \left(\frac{a^L}{b^R}, \frac{a^M}{b^M}, \frac{a^R}{b^L}\right), \quad b^L > 0
 \end{aligned}
 \tag{۵}$$

فرض کنید یک مجموعه از n واحد تحت ارزیابی هستند که در آن $\tilde{x}_{ij} (i=1, \dots, m)$ ، $\tilde{y}_{rj} (r=1, \dots, s)$ به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های فازای $DMU_j (j=1, \dots, n)$ را نشان می‌دهند. مدل زیر برای ارزیابی کارایی فازای DMU_k به کار می‌رود:

$$\begin{aligned}
 \max E_k &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ik}}, \\
 \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} &\leq 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
 u_r, v_i &\geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad r = 1, \dots, S
 \end{aligned}
 \tag{۶}$$

که u_r و v_i به ترتیب وزن‌هایی برای i امین ورودی و r امین خروجی هستند.

کائو و لیو (۲۰۱۱) با در نظر گرفتن عدم قطعیت در داده‌های ورودی و خروجی با ارائه مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای رابطه‌ای، ارتباط بین کارایی سیستم و کارایی فرایندها را در محیط فازای نشان دادند. فرض کنید هر یک از مقادیر ورودی، خروجی و میانی به ترتیب با اعداد فازای به صورت \tilde{x}_{ij} ، \tilde{y}_{rj} و \tilde{z}_{dj} بیان می‌شود. با اعمال اعداد فازای روی مدل (۲)، مدل کارایی تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای فازای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ik}}, \\
 \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} &\leq 1, \quad \forall j \\
 \frac{\sum_{d=1}^p w_d \tilde{z}_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} &\leq 1, \quad \forall j \\
 \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{d=1}^p w_d \tilde{z}_{dj}} &\leq 1, \quad \forall j \\
 u_r, w_d, v_i &\geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.
 \end{aligned}
 \tag{۷}$$

که در آن u_r و w_d ، v_i به ترتیب وزن‌هایی برای i امین ورودی، d امین تولید میانی و r امین خروجی هستند. همچنین ε یک عدد غیر ارشمیدسی است.

در این بخش با استفاده از رویکرد حساب فازی روشی برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای با داده‌های فازی پیشنهاد می‌شود.

فرض کنید اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^R)$ ، $\tilde{z}_{dj} = (z_{dj}^L, z_{dj}^M, z_{dj}^R)$ و $\tilde{y}_{rj}^s = (y_{rj}^{gL}, y_{rj}^{gM}, y_{rj}^{gR})$ به ترتیب اندازه‌های ورودی، تولیدات میانی و خروجی باشند. با جانشینی اعداد فازی مثلثی در مدل (۷)، مدل زیر به دست می‌آید:

$$E_k = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r (y_{rk}^L, y_{rk}^M, y_{rk}^R)}{\sum_{i=1}^m v_i (x_{ik}^L, x_{ik}^M, x_{ik}^R)},$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{d=1}^p w_d (z_{dj}^L, z_{dj}^M, z_{dj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{d=1}^p w_d (z_{dj}^L, z_{dj}^M, z_{dj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.$$

با انجام عملیات حساب فازی مدل (۸)، به مدل زیر تبدیل می‌شود:

$$E_k = \max \frac{(\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^L, \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M, \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R)}{(\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L, \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M, \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^R)},$$

$$s.t. \quad \frac{(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{(\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L, \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^M, \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{(\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L, \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^M, \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R)}{m} \leq 1, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.$$

با استفاده از مفهوم تقسیم اعداد فازی مدل (۹) به مدل زیر تبدیل می‌شود:





$$E_k = \max \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^R}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L} \right],$$

$$s.t. \quad \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^R}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \leq 1, \quad \forall j$$

$$\left[\frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^R}, \frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \leq 1, \quad \forall j$$

$$\left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L} \right] \leq 1, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.$$

در مدل فوق تا زمانی که کران‌های بالای $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R}$ و $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L}$ کمتر یا مساوی با یک باشند، آنگاه بقیه کران‌ها به‌طور خودبه‌خود برقرار خواهند بود؛ بنابراین، مدل (۱۰) به مدل زیر تبدیل می‌گردد:

$$E_k = \max \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^R}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L} \right],$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R}{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L} \leq 1, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, d, i.$$

با تبدیل قیود کسری به قیود خطی مدل زیر به دست می‌آید:

$$E_k = (E_k^L, E_k^M, E_k^R) = \max \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^R}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L} \right],$$

$$s.t. \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R - \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon. \quad \forall r, d, i.$$

مدل (۱۲) یک مسئله فازی با تابع هدف فازی و قیود خطی است که می‌توان آن را به‌صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه در نظر گرفت و از روش الفبایی برای حل آن استفاده کرد. برای این کار مراحل زیر انجام می‌شود:

مرحله اول. نخست مسئله کسری زیر حل می‌شود:

$$E_k^R = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L},$$

$$s.t. \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R - \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon. \quad \forall r, d, i.$$
(۱۳)

مدل (۱۳) به مدل خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$E_k^R = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R,$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^R - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^R - \sum_{d=1}^p w_d z_{dj}^L \leq 0, \quad \forall j$$

$$u_r, w_d, v_i \geq \varepsilon. \quad \forall r, d, i.$$
(۱۴)

مرحله دوم. با فرض این‌که E_k^{R*} مقدار بهینه مدل (۱۴) باشد مسئله کسری زیر حل می‌شود:

$$E_k^M = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M},$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L} = E_k^{R*}.$$
(۱۵)

Constraints of Model (13).

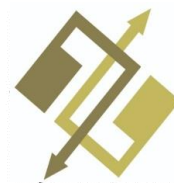
مدل (۱۵) به مدل زیر تبدیل می‌شود:

$$E_k^M = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M,$$

$$s.t. \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R - E_k^{R*} \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M = 1.$$
(۱۶)

Constraints of Model (13).



مرحله سوم. با فرض این که $E_k^{M^*}$ مقدار بهینه مدل (۱۶) باشد مسئله کسری زیر حل می شود:

$$E_k^M = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M, \quad (17)$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R}{m} = E_k^{R^*}, \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M}{m} = E_k^{M^*}.$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L}{m} = E_k^{L^*}, \quad \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M}{m} = E_k^{M^*}.$$

Constraints of Model (13).

مدل (۱۷) به مدل خطی زیر تبدیل می شود:

$$E_k^R = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R,$$

$$s.t. \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^R - E_k^{R^*} \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L = 0,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}^M - E_k^{M^*} \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^M = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}^L = 1.$$

Constraints of Model (13).

فرض کنید v_i^* , w_d^* و u_r^* مقادیر بهینه مدل (۱۸) باشند. کارایی فازی مرحله ۱، مرحله ۲ و سیستم برای DMU_k به صورت

$$\tilde{E}_k^* = \tilde{E}_k^{1*} \times \tilde{E}_k^{2*} \quad \text{و} \quad \tilde{E}_k^{2*} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* \tilde{y}_{rk}}{\sum_{d=1}^p w_d^* \tilde{z}_{dk}} \quad \text{و} \quad \tilde{E}_k^{1*} = \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* \tilde{z}_{dk}}{\sum_{i=1}^m v_i^* \tilde{x}_{ik}}$$

$$\tilde{E}_k^{1*} = \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* \tilde{z}_{dk}}{\sum_{i=1}^m v_i^* \tilde{x}_{ik}} = \left[\frac{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{dk}^L}{m}, \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{dk}^M}{m}, \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{dk}^R}{m} \right]$$

$$E_k^{2*} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* \tilde{y}_{rk}}{\sum_{d=1}^p w_d^* \tilde{z}_{dk}} = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rk}^L}{p}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rk}^M}{p}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rk}^R}{p} \right]$$

$$\tilde{E}_k^* = \tilde{E}_k^{1*} \times \tilde{E}_k^{2*}.$$

مزیت اصلی این روش نسبت به روش آلفا برش پیچیدگی محاسباتی کمتر هم از لحاظ تعداد قیود و هم تعداد مدلی که باید حل شود است. برای حل مدل پیشنهادی در مرحله اول مدل (۱۴) حل می شود و مقدار بهینه $E_k^{R^*}$ به دست می آید. در مرحله بعد با جایگذاری در مدل (۱۶) مقدار بهینه $E_k^{M^*}$ به دست می آید. سپس با جایگذاری $E_k^{R^*}$ و $E_k^{M^*}$ در مدل (۱۸) و حل آن وزن های بهینه v_i^* , w_d^* و u_r^* به دست می آید. برای به دست آوردن مقادیر کارایی، وزن های به دست آمده را در مدل (۱۹) قرار داده و مدل را حل می کنیم. برای حل این مدل کافی است $3m$ بار مدل را در سه مرحله حل کنیم. در حالی که در روش حاتمی - ماریینی و ساعتی (۲۰۱۸) در مرحله اول برای به دست آوردن کران بالایی وزن ها باید مدل $s+m+p$ حل شود. سپس در مرحله دوم، برای به دست آوردن CSW برای هر α باید n بار مدل حل شود. در نهایت، کران های بالا و پایین کارایی های سیستم و فرایندها محاسبه شود.

نکته حائز اهمیت این است استفاده از رویکرد حساب فازی برای حل تحلیل پوششی داده های دو مرحله ای فازی، کارایی فازی هر مرحله و کارایی فازی سیستم را به دست می دهد که برحسب اعداد فازی مثلی بیان می شوند. این رویکرد، واحدی را به عنوان واحد کارا یا واحد ناکارا مشخص نمی کند و تنها بر اساس کارایی فازی حاصل، می توان واحدهای تصمیم گیرنده را رتبه بندی نمود.





در این بخش، با استفاده از رویکرد پیشنهادی، عملکرد ۲۴ شرکت در تایوان ارائه شده در کائو و لیو (۲۰۱۱) مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. در این ارزیابی، عملکرد هر یک از شرکت‌ها شامل دو فرآیند مجزای خرید حق بیمه و تولید سود می‌باشد. ورودی‌های مرحله اول شامل هزینه‌ها (x_1) و هزینه‌های بیمه (x_2) می‌باشند. حق بیمه کتبی مستقیم (z_1) و حق بیمه اتکائی (z_2) به‌عنوان اندازه‌های میانی در نظر گرفته می‌شوند. در مرحله دوم با مصرف اندازه‌های میانی به‌عنوان ورودی‌ها، دو خروجی نهایی سود تعهدنامه (y_1) و سود سرمایه‌گذاری (y_2) تولید می‌شود. همچنین برای مقابله با عدم قطعیت، داده‌ها به‌صورت اعداد فازی مثلثی ارائه شده است. داده‌های ارائه شده توسط کائو و لیو (۲۰۱۱) در جدول ۱ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که اعداد فازی مثلثی ارائه شده در جدول ۱ به‌صورت (a, b, c) می‌باشند. در ابتدا با حل مدل (۱۴) مقدار بهینه E_k^{R*} را به دست می‌آوریم. سپس با جایگذاری E_k^{R*} در مدل (۱۶) و حل مدل (۱۶) مقدار بهینه E_k^{M*} را به دست می‌آوریم. در پایان مقادیر E_k^{R*} و E_k^{M*} در مدل (۱۸) جایگذاری کرده و مدل را حل می‌کنیم. وزن‌های بهینه ورودی‌های v_1^* و v_2^* ، وزن‌های بهینه اندازه‌های میانی w_1^* و w_2^* و وزن‌های بهینه خروجی‌های u_1^* و u_2^* به دست آمده از مدل (۱۸) در جدول ۲ ارائه شده است. کارایی‌های سیستم و کارایی‌های فرآیندهای فازی در جدول ۳ ارائه شده است. توجه داشته باشید که PI ، S ، $P2$ به ترتیب کارایی‌های سیستم، کارایی فرآیند ۱ و کارایی فرآیند ۲ را نشان می‌دهند که به‌صورت اعداد فازی مثلثی ارائه شده است. ارزیابی عملکرد شرکت‌ها در دو فرآیند انجام شده است. در فرآیند اول ۹ شرکت کارا، در فرآیند دوم ۱۰ شرکت کارا و در کل سیستم ۶ شرکت کارا می‌باشند. همچنین شکل‌های ۲، ۳ و ۴ به ترتیب کارایی‌های فرآیند ۱، ۲ و سیستم را نشان می‌دهند. شکل ۵ توابع عضویت کارایی سیستم و دو فرآیند فازی را برای واحد ۷ نشان می‌دهد. با توجه به این شکل رابطه بین کارایی‌های سیستم و کارایی‌های دو فرآیند مشاهده می‌شود. برای مثال، کران بالای واحد ۷ در فرآیند اول ۰/۹۹۹۴۴۶ و در فرآیند دوم ۰/۹۹۰۷۸۸ و در سیستم ۰/۹۹۰۲۳۹ می‌باشد. همچنین شکل ۶ توابع عضویت کارایی فازی سیستم و دو فرآیند واحد ۲۲ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۶ کران بالای کارایی فرآیند ۱، یک و کران بالای کارایی سیستم و فرآیند ۲، ۰/۲، ۹۹۷۹۲۱ می‌باشد. با توجه به جدول ۳ بر اساس کارایی‌های سیستم و فرآیندها هر یک از شرکت‌های بیمه رتبه‌بندی می‌شوند. در جدول ۴ رتبه‌بندی شرکت‌های بیمه نشان داده شده است. با توجه به جدول ۴، واحد ۲۰ در کارایی سیستم در هر دو رویکرد در رتبه هفتم قرار دارد. واحد ۴، با توجه به رتبه‌بندی مدل پیشنهادی در رتبه بیست و دوم قرار دارد در حالی که در روش حاتمی-مارینی و ساعتی (۲۰۱۸) در کارایی سیستم در رتبه بیستم، فرآیند ۱ در رتبه بیست و دوم و فرآیند ۲ در رتبه پانزدهم قرار دارد. واحد ۱۱ در فرآیندهای ۱ و ۲ مدل پیشنهادی و در فرآیند ۱ روش حاتمی-مارینی و ساعتی (۲۰۱۸) در رتبه هفدهم قرار دارد. واحد ۱۹ در فرآیند ۱ مطابق هر دو رویکرد در رتبه اول قرار دارد و در کارایی‌های سیستم و فرآیند ۲ در رتبه‌های پایانی قرار دارد. با توجه به جدول ۳، واحد ۱۴۴ بدترین کارایی سیستم را در بین شرکت‌ها دارد. برای بررسی اینکه چرا چنین اتفاقی افتاده است، می‌توان عملکرد خرید حق بیمه و تولید سود را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. طبق یافته‌های ما، ناکارایی در درجه اول از فرآیند ۱ و سپس از فرآیند ۲ ناشی می‌شود. این حاکی از آن است که این شرکت ضعیف‌ترین عملکرد را در مصرف هزینه‌ها و همچنین ضعیف‌ترین عملکرد را در تولید سود در مقایسه با سایر شرکت‌ها دارد و با توجه به جدول ۴ در رتبه آخر قرار دارد. همچنین واحد ۲ با توجه به کران بالای کارایی سیستم یعنی ۰/۹۶۰۱۱ در رتبه ماقبل آخر قرار دارد. این در حالی است که در فرآیند اول کران بالای ۰/۹۶۱۶۴۶ و در فرآیند دوم کران بالای ۰/۹۹۸۴۰۴ را دارد که نشان‌دهنده آن است که ناکارایی بیشتر از فرآیند اول نشأت گرفته است. با بررسی جدول ۳ مشاهده می‌شود که در فرآیند اول، واحدهای ۱، ۶، ۸، ۱۲، ۱۸، ۱۹، ۲۲ و ۲۳ بهترین عملکرد را در مصرف هزینه نسبت به سایر واحدها دارند. در فرآیند دوم، واحدهای ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۳ و ۲۴ بهترین عملکرد را در تولید سود نسبت به سایر واحدها دارا می‌باشند. همچنین در کارایی سیستم واحدهای ۸، ۹، ۱۸ و ۲۳ بهترین عملکرد را در کل سیستم دارند.

جدول ۱- داده‌های فازی شرکت بیمه.

Table 1- Fuzzy data of insurance company.

	X_1	X_2	Z_1	Z_2	Y_1	Y_2
1	(1113,1178,1256)	(636,673,717)	(7041,7451,7943)	(809,856,912)	(930,984,1049)	(644,681,726)
2	(1305,1381,1472)	(1278,1352,1441)	(9469,10020,10681)	(1712,1812,1932)	(1160,1228,1309)	(788,833,889)
3	(1112,1117,1255)	(559,592,631)	(4513,4776,5091)	(529,560,597)	(277,293,312)	(622,658,701)
4	(568,601,641)	(561,594,633)	(2999,3174,3383)	(351,371,395)	(234,248,264)	(167,177,189)
5	(6331,6699,7141)	(3167,3351,3572)	(35335,37362,39680)	(1657,1753,1869)	(7419,7851,8369)	(3709,3925,4184)

جدول ۱- ادامه.
Table 1- Continued.

	X ₁	X ₂	Z ₁	Z ₂	Y ₁	Y ₂
6	(2483,2627,2800)	(631,668,712)	(9211,9747,10390)	(900,952,1015)	(1619,1713,1826)	(392,415,442)
7	(1853,1942,2047)	(1377,1443,1521)	(10193,10685,11262)	(613,643,678)	(2136,2239,2360)	(419,439,463)
8	(3615,3789,3994)	(1778,1873,1974)	(16473,17267,18199)	(1083,1134,1195)	(3720,3899,4110)	(593,622,656)
9	(1495,1567,1652)	(906,950,1001)	(10945,11473,12093)	(521,546,575)	(995,1043,1099)	(252,264,278)
10	(1243,1303,1373)	(1238,1298,1368)	(7832,8210,8653)	(481,504,531)	(1619,1697,1789)	(529,554,584)
11	(1872,1962,2068)	(641,672,708)	(6890,7222,7612)	(613,643,678)	(1418,1486,1566)	(17,18,19)
12	(2473,2592,2732)	(620,650,685)	(9000,9434,9943)	(1067,1118,1178)	(1502,1574,1652)	(867,909,958)
13	(2481,2609,2739)	(1301,1368,1436)	(13239,13921,14617)	(771,811,852)	(3432,3609,3789)	(212,223,234)
14	(1328,1369,1466)	(940,988,1037)	(7034,7396,7766)	(442,465,488)	(1332,1401,1471)	(316,332,349)
15	(2077,2184,2293)	(619,651,687)	(9911,10422,10943)	(712,749,786)	(3191,3355,3523)	(528,555,583)
16	(1152,1211,1272)	(395,415,436)	(5331,5606,5886)	(382,402,422)	(812,854,897)	(187,197,207)
17	(1382,1453,1526)	(1032,1085,1139)	(7318,7695,8080)	(325,342,359)	(2990,3144,3301)	(353,371,390)
18	(720,757,795)	(520,547,574)	(3453,3631,3813)	(947,995,1045)	(685,692,727)	(155,163,171)
19	(151,159,167)	(173,182,191)	(1083,1141,1196)	(458,483,506)	(493,519,544)	(44,46,48)
20	(138,145,152)	(50,53,56)	(300,316,331)	(124,131,137)	(337,355,372)	(25,26,27)
21	(80,84,88)	(25,26,27)	(214,225,236)	(38,40,42)	(48,51,53)	(6,6,6)
22	(14,15,16)	(9,10,10)	(49,52,54)	(13,14,15)	(78,82,86)	(4,4,4)
23	(51,54,57)	(27,28,29)	(233,245,257)	(47,49,51)	(1,1,1)	(17,18,19)
24	(155,163,171)	(223,235,246)	(449,452,476)	(611,644,675)	(135,142,149)	(15,16,17)

جدول ۲- وزن‌های بدست آمده از مدل (۱۸).

Table 2- The obtained weights of model (18).

	V ₁	V ₂	W ₁	W ₂	U ₁	U ₂
1	0	1.57E-3	0	1.09E-3	0	1.22E-3
2	7.66E-4	0	9.36E-5	0	6.77E-4	0
3	0	1.79E-3	0	1.67E-3	0	1.26E-3
4	0	1.78E-4	0	2.52E-4	0	4.7E-4
5	1.58E-4	0	2.52E-5	0	1.06E-4	0
6	0	1.58E-3	0	9.54E-4	0	0.2E-2
7	5.4E-4	0	8.88E-5	0	3.83E-4	0
8	0	5.6E-4	0	8.4E-4	0	1.38E-3
9	0	1.1E-3	0	1.74E-3	0	3.26E-3
10	0	8.08E-4	0	1.88E-3	0	1.55E-3
11	5.34E-4	0	1.31E-4	0	5.78E-4	0
12	0	1.61E-3	0	8.49E-4	0	9.45E-4
13	4.03E-4	0	6.84E-5	0	2.39E-4	0
14	0	1.17E-3	0	2.26E-3	0	2.7E-3
15	0	1.62E-3	0	1.27E-3	0	1.55E-3
16	8.68E-4	0	1.7E-4	0	1.01E-3	0
17	0	9.69E-4	0	2.78E-3	0	2.32E-3
18	0	1.92E-3	0	9.56E-4	0	5.3E-3
19	6.62E-3	0	8.36E-4	0	1.66E-3	0
20	7.25E-3	0	3.02E-3	0	2.44E-3	0
21	1.25E-2	0	4.23E-3	0	1.71E-2	0
22	0	1.11E-1	0	6.66E-2	0	2.16E-1
23	1.99E-2	0	3.97E-3	0	9.24E-1	0
24	0	4.48E-3	0	1.48E-3	0	5.32E-2

جدول ۳- کارایی فرایندها و سیستم.

Table 3- Efficiency of system and processes.

DMU	Efficiency	DMU	Efficiency
1	S (0.619128,0.786307,0.999848)	5	S (0.620681,0.786256,0.995902)
	P1 (0.786944,0.887101,1)		P1 (0.789204,0.889536,0.999638)
	P2 (0.78675,0.886378,0.999848)		P2 ("0.7864640.883894,0.996263)
2	S (0.592825,0.754552,0.960111)	6	S (0.617953,0.786402,0.997713)
	P1 (0.755805,0.852487,0.961646)		P1 (0.784028,0.883954,0.997713)
	P2 (0.784363,0.885119,0.998404)		P2 (0.788177,0.889642,1)
3	S (0.614836,0.782387,0.996190)	7	S (0.664599,0.811325,0.990239)
	P1 (0.782149,0.882531,0.996382)		P1 (0.818848,0.904783,0.999446)
	P2 (0.786086,0.886527,0.999808)		P2 (0.811627,0.896706,0.990788)
4	S (0.605844,0.77006,0.979776)	8	S (0.671481,0.819822,1)
	P1 (0.778795,0.877218,0.988904)		P1 (0.819737,0.905461,1)
	P2 (0.777924,0.877844,0.990769)		P2 (0.819143,0.90542,1)
9	S (0.674184,0.821339,1)	17	S (0.671052,0.8178250,0.996983)



جدول ۳- ادامه.
Table 3- Continued.

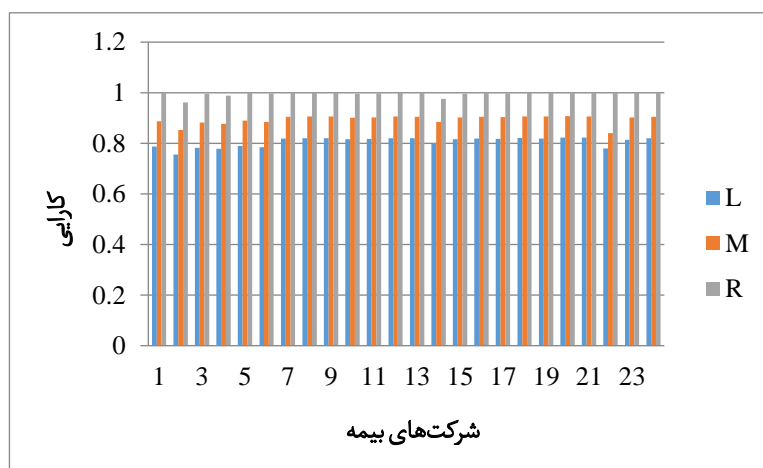
DMU	Efficiency	DMU	Efficiency
10	P1 (0.820121,0.905614,1)	18	P1 (0.817773,0.903378,0.996983)
	P2 (0.822054,0.906941,1)		P2 (0.820585,0.905297,1)
	S (0.670296,0.816736,0.995512)		S (0.675504,0.822574,1)
11	P1 (0.816078,0.901216,0.995512)	19	P1 (0.821476,0.905717,1)
	P2 (0.821363,0.906261,1)		P2 (0.822306,0.9082021)
	S (0.667491,0.814552,0.99395)		S (0.670313,0.818503,0.99)
12	P1 (0.817215,0.902872,0.997379)	20	P1 (0.818955,0.906227,1)
	P2 (0.816787,0.902179,0.996561)		P2 (0.818498,0.903199,0.99)
	S (0.669344,0.816493,0.995252)		S (0.676288,0.823971,0.99912)
13	P1 (0.820434,0.905938,1)	21	P1 (0.822142,0.907795,0.99912)
	P2 (0.815842,0.901268,0.995252)		P2 (0.822593,0.907662,1)
	S (0.67023,0.81693,0.995802)		S (0.676622,0.830571,0.99828)
14	P1 (0.820139,0.905358,0.999668)	22	P1 (0.822927,0.906429,0.99828)
	P2 (0.817216,0.902328,0.996133)		P2 (0.822214,0.916312,1)
	S (0.636926,0.775459,0.945961)		S (0.674595,0.778378,0.997921)
15	P1 (0.801457,0.884978,0.976177)	23	P1 (0.78,0.84,1)
	P2 (0.794709,0.876246,0.969046)		P2 (0.864865,0.926641,0.997921)
	S (0.66904,0.815697,0.994803)		S (0.738528,0.859855,1)
16	P1 (0.816042,0.901965,0.995453)	24	P1 (0.813436,0.902848,1)
	P2 (0.819859,0.904355,0.999348)		P2 (0.907912,0.952381,1)
	S (0.671212,0.818683,0.998053)		S (0.655431,0.808511,0.99996)
	P1 (0.818938,0.904563,0.998384)		P1 (0.820521,0.905319,0.99996)
	P2 (0.819612,0.90506,0.999669)		P2 (0.798799,0.893067,1)



جدول ۴- مقایسه رتبه‌بندی.

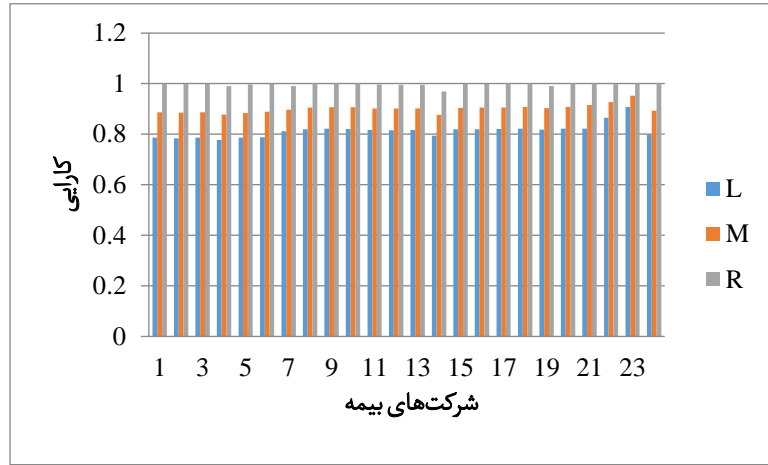
Table 4- Ranking comparison.

23>18>9>8>24>1>20>21>16>22>6>17>3>5>13>10>12>15>11>7>19>4>2>14	S	رویکرد پیشنهادی
19>12>18>9>8>23>1>22>24>13>5>7>20>16>21>6>11>17>3>10>15>4>14>2	P1	
23>21>18>20>9>10>8>17>24>6>1>3>16>15>2>22>11>5>13>12>7>4>19>14	P2	
12>22>5>1>3>15>20>2>17>19>10>23>6>14>7>16>8>18>13>4>9>21>11>24	S	رویکرد حاتمی-ماربینی
19>24>1>2>18>23>9>15>12>16>20>6>5>22>13>3>11>21>8>7>14>4>10>17	P1	
22>5>3>17>12>20>10>1>15>2>14>7>8>6>4>16>23>13>19>18>21>9>11>24	P2	و ساعتی (۲۰۱۸)



شکل ۲- کارایی فرایند اول شرکت‌های بیمه.

Figure 2- Efficiency of process 1 for insurance companies.



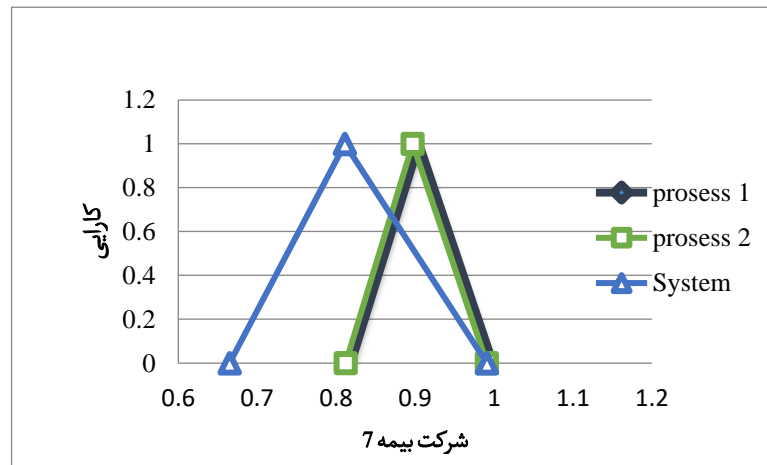
شکل ۳- کارایی فرایند دوم شرکت‌های بیمه.

Figure 3- Efficiency of process 2 for insurance companies.



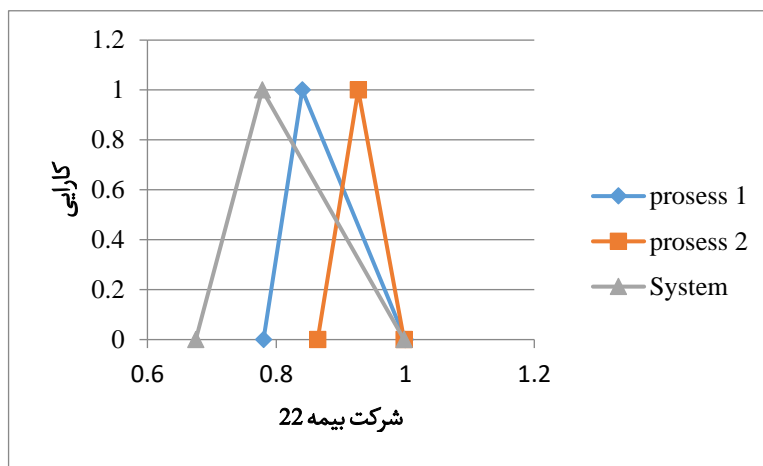
شکل ۴- کارایی سیستم شرکت‌های بیمه.

Figure 4- Efficiency of system for insurance companies.



شکل ۵- نمودار کارایی فازی فرآیندها و سیستم شرکت بیمه ۷.

Figure 5- Fuzzy efficiency of processes and system 1 for insurance company 7.



شکل ۶- نمودار کارایی فازی فرآیندها و سیستم شرکت بیمه ۱۲.

Figure 6- Fuzzy efficiency of processes and system for insurance company 12.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، رویکردی جدیدی مبتنی بر حساب فازی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای فازی ارائه گردید. رویکرد پیشنهادی برخلاف رویکردهای موجود که بر روی مدل‌های خطی تحلیل پوششی داده‌ها متمرکز می‌شوند، بر روی مدل کسری در محیط فازی کار می‌کند. مطابق رویکرد پیشنهادی، مدل دومرحله‌ای فازی تحت بررسی به یک مدل کسری با تابع هدف فازی و قیود خطی تبدیل شده است. برای حل مدل حاصل از رویکرد الفبایی استفاده شده است که با حل سه مدل خطی کارایی فازی فرآیندها و کارایی فازی سیستم را برای هر واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی محاسبه می‌کند. مزیت اصلی رویکرد پیشنهادی نسبت به رویکرد آلفا برش این است که مدل‌های کمتری برای یافتن کارایی فازی حل می‌کند و علاوه بر این مدل‌های حاصل این رویکرد قیود به مراتب کمتری از رویکردهای موجود دارند. از کاستی‌های رویکرد پیشنهادی می‌توان به عدم یافتن وزن مشترک اشاره نمود که زمینه را برای انجام تحقیقات آتی فراهم می‌سازد. علاوه بر این، رویکرد پیشنهادی واحدهای کارا و ناکار را از هم تمیز نمی‌دهد؛ بنابراین توسعه رویکرد حساب فازی برای برطرف نمودن این کاستی از جمله تحقیقات آتی است.

منابع

- Amirteimoori, A. (2013). A DEA two-stage decision processes with shared resources. *Central european journal of operations research*, 21(1), 141-151.
- Amirteimoori, A. R., Shahroodi, K. & Mahmoodkiani, F. S. (2015). Network data envelopment analysis: application to Gas companies in Iran. *International journal of applied operational research*, 5(1), 1-16.
- Azar, A., Zarei Mahmoudabadi, M., & Emrouznejad, A. (2016). A new fuzzy additive model for determining the common set of weights in Data Envelopment Analysis. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 30(1), 61-69.
- Bhardwaj, B., Kaur, J., & Kumar, A. (2018). A new fuzzy CCR data envelopment analysis model and its application to manufacturing enterprises. *Soft computing applications for group decision-making and consensus modeling* (pp. 345-368). Springer, Cham.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- Ebrahimnejad, A., & Amani, N. (2021). Fuzzy data envelopment analysis in the presence of undesirable outputs with ideal points. *Complex & intelligent systems*, 7(1), 379-400.
- Ebrahimnejad, A., & Verdegay, J. L. (2018). *Fuzzy sets-based methods and techniques for modern analytics* (Vol. 364). Springer.
- Guo, P. (2009). Fuzzy data envelopment analysis and its application to location problems. *Information sciences*, 179(6), 820-829.
- Guo, P., & Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy sets and systems*, 119(1), 149-160.
- Hatami-Marbini, A., & Saati, S. (2018). Efficiency evaluation in two-stage data envelopment analysis under a fuzzy environment: a common-weights approach. *Applied soft computing*, 72, 156-165.
- Hatami-Marbini, A., Beigi, Z. G., Hougard, J. L., & Gholami, K. (2018a). Measurement of returns-to-scale using interval data envelopment analysis models. *Computers & industrial engineering*, 117, 94-107.
- Hatami-Marbini, A., Ebrahimnejad, A., & Lozano, S. (2017). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis using lexicographic multiobjective approach. *Computers & industrial engineering*, 105, 362-376.
- Hatami-Marbini, A., Saati, S., & Sajadi, S. M. (2018b). Efficiency analysis in two-stage structures using fuzzy data envelopment analysis. *Central European journal of operations research*, 26(4), 909-932.



- Kachouei, M., Ebrahimnejad, A., & Bagherzadeh-Valami, H. (2020). A common-weights approach for efficiency evaluation in fuzzy data envelopment analysis with undesirable outputs: application in banking industry. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 39(5), 1-18.
- Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: an application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, 185(1), 418-429.
- Kao, C., & Liu, S. T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy sets and systems*, 113(3), 427-437.
- Kao, C., & Liu, S. T. (2003). A mathematical programming approach to fuzzy efficiency ranking. *International journal of production economics*, 86(2), 145-154.
- Kao, C., & Liu, S. T. (2011). Efficiencies of two-stage systems with fuzzy data. *Fuzzy sets and systems*, 176(1), 20-35.
- Liu, S. T. (2014a). Fuzzy efficiency ranking in fuzzy two-stage data envelopment analysis. *Optimization letters*, 8(2), 633-652.
- Liu, S. T. (2014b). Restricting weight flexibility in fuzzy two-stage DEA. *Computers & industrial engineering*, 74, 149-160.
- Lozano, S. (2014). Process efficiency of two-stage systems with fuzzy data. *Fuzzy sets and systems*, 243, 36-49.
- Puri, J., & Yadav, S. P. (2014). A fuzzy DEA model with undesirable fuzzy outputs and its application to the banking sector in India. *Expert systems with applications*, 41(14), 6419-6432.
- Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2017). Fuzzy cross-efficiency evaluation: a possibility approach. *Fuzzy optimization and decision making*, 16(1), 111-126.
- Saati, S. M., Memariani, A., & Jahanshahloo, G. R. (2002). Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data. *Fuzzy optimization and decision making*, 1(3), 255-267.
- Tsai, M. C., Cheng, C. H., Nguyen, V. T., & Tsai, M. I. (2020). The theoretical relationship between the CCR model and the two-stage DEA model with an application in the efficiency analysis of the financial industry. *Symmetry*, 12(5), 712. <https://doi.org/10.3390/sym12050712>
- Wang, Q., Wu, Z., & Chen, X. (2019). Decomposition weights and overall efficiency in a two-stage DEA model with shared resources. *Computers & industrial engineering*, 136, 135-148.
- Wang, Y. M., Luo, Y., & Liang, L. (2009). Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises. *Expert systems with applications*, 36(3), 5205-5211.
- Zhang, J., Wu, Q., & Zhou, Z. (2019). A two-stage DEA model for resource allocation in industrial pollution treatment and its application in China. *Journal of cleaner production*, 228, 29-39.