



Two-level Efficiency Evaluation of Centralized Star Networks

Mohammad Afzalinejad^{a*}, Neda Afzalinejad^b

^a Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran

^b Department of Industrial Engineering, Tafresh University, Tafresh, Iran

Abstract

Conventional Data Envelopment Analysis (DEA) considers decision making units (DMUs) as black-boxes and ignores their internal structures in efficiency analysis. Network DEA includes the interrelations among a DMU's components in its efficiency assessment, and evaluates the contribution of each component to overall network performance. In this paper, the star network structure, which is a common structure in real world applications, is introduced and the Network DEA methodology is specialized for assessing these structures. Assuming centralized management in the network, the central component has the upper hand, and the efficiency assessment is performed by giving higher priority to it. In the first level, the performance of the central component is evaluated by ignoring the sub-components. The efficiency of the whole network is evaluated in the second level so that the efficiency score of the central component is maintained. Efficiency decomposition and frontier projection are described using multiplicative and envelopment forms of the proposed model. The theoretical features and practical merit of the model are justified by mathematical discussions and a numerical example.

Keywords: Network DEA, Star graph, Centralized management, two-level, Efficiency decomposition.

Paper Type: Original Article

Receive:

Review:

Revise:

Accept:

Citation:

* Corresponding Author

Email Address: afzalinejad@tafreshu.ac.ir

DOI: 0000-0003-1130-1573



ارزیابی کارایی دوسطحی در شبکه‌های ستاره‌ای متمرکز

محمد افزلی نژاد^۱، ندا افزلی نژاد^۲

^۱دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، ایران

^۲دانشکده صنایع، دانشگاه تفرش، ایران

چکیده

در تحلیل پوششی داده‌های (DEA) کلاسیک، واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) به عنوان جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شوند و ساختارهای داخلی آنها در ارزیابی کارایی نادیده گرفته می‌شوند. تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای (NDEA)، اجزای یک واحد و روابط آنها را در ارزیابی دخالت داده و عملکرد زیرواحدهای تصمیم‌گیرنده (DMSU) و نقش آنها در شبکه داخلی را نیز بررسی می‌نماید. مقاله حاضر ساختار ستاره‌ای را که یکی از ساختارهای رایج در کاربردهای DEA است مورد بررسی قرار می‌دهد و مدل‌های لازم برای ارزیابی چنین ساختارهایی را ارائه می‌دهد. با فرض مدیریت متمرکز، اولویت بالاتری به گره مرکزی شبکه در ارزیابی عملکرد واحدها داده می‌شود و ارزیابی کارایی کلی شبکه به گونه‌ای انجام می‌شود که کارایی گره مرکزی حفظ گردد. تجزیه کارایی کلی به کارایی زیرواحدها و تصویرسازی بر روی مرز کارایی بر اساس فرم‌های مضربی و پوششی مدل پیشنهادی شرح داده می‌شوند. با استفاده از تحلیل‌های نظری و عددی، ویژگی‌ها و نتایج مدل بررسی و اعتبارسنجی می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، گراف ستاره‌ای، مدیریت متمرکز، دوسطحی، تجزیه کارایی.

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت:

داوری:

اصلاح:

پذیرش:

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی است که توسط چارنر و همکاران^۱ (۱۹۷۸) برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) که چندین ورودی را به چندین خروجی تبدیل می‌کنند، ارائه گردید. مبنای ارزیابی در این روش، یک مرز کارایی قطعه‌ای-خطی است که داده‌ها را پوشش می‌دهد و از واحدهای شاخص یا کارا عبور می‌کند. کارایی واحدها بر اساس فاصله آنها با این مرز تعیین می‌گردد. روش DEA توجه زیادی را در بین پژوهشگران و مدیران به خود جلب نموده و مطالعات در این زمینه بسیار گسترده بوده است. در مدل‌های متعارف DEA، واحدها بر اساس ورودی‌های اولیه و خروجی‌های نهایی با یکدیگر مقایسه شده و عملیات داخلی و روابط بین اجزای تشکیل‌دهنده مورد ارزیابی قرار نمی‌گیرد. در بسیاری از کاربردها، DMUها دارای ساختار داخلی شبکه‌مانندی هستند که در طی آن، ورودی‌ها به محصولات میانی و سپس به خروجی‌های نهایی تبدیل می‌گردند. در چنین ساختارهایی، عملیات تولید از تعدادی فرآیند تشکیل

^۱ Charnes et al.

شده است که محصولات نهایی با گذر از این فرآیندها به دست می‌آیند. به هر یک از این فرآیندها، یک زیرواحد تصمیم گیرنده (Decision Making Sub-unit یا DMSU) می‌گویند.

فیر و گراسکوف^۱ (۱۹۹۶ و ۲۰۰۰) اولین مدل‌های شبکه‌ای کلی را در تحلیل پوششی داده‌ها مطرح کردند تا علاوه بر کارایی کلی یک سازمان، کارایی بخش‌هایش را نیز ارزیابی نمایند. کستلی و همکاران^۲ (۲۰۰۴) مدل‌هایی برای ارزیابی ساختارهای شبکه‌ای چندلایه که هر لایه از تعدادی زیرواحد موازی تشکیل شده است ارائه کردند. لوئیس و سکستون^۳ (۲۰۰۴)، ساختار شبکه‌ای را معرفی کردند که در آن یک زیرواحد می‌تواند یک ورودیش را از چندین زیرواحد دیگر دریافت کند. آنها مدل‌هایی برای ارزیابی کارایی شعاعی ارائه کردند و نشان دادند که اگر یک DMU کارایی کلی باشد مسیری متشکل از زیرواحدهایش از گره ابتدایی به گره انتهایی وجود دارد. تون و سوتسویی^۴ (۲۰۰۹) یک مدل مبتنی بر اسلک‌ها برای ارزیابی کارایی یک شبکه بر حسب کارایی اجزایش پیشنهاد دادند. آنها کارایی کلی DMU را به صورت میانگین وزن‌دار کارایی اجزای سازنده DMU بیان نمودند. کاربرد تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای در پیش‌بینی و رتبه‌بندی فاکتورهای جذب مشتری در شرکت‌های بیمه توسط کاوه و همکاران^۵ (۲۰۲۰) مورد پژوهش قرار گرفت. آنها برای این منظور از ابزار پویایی‌شناسی برای ایجاد داده‌های ورودی و خروجی مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای استفاده نمودند. کوک و همکاران^۶ (۲۰۱۰) ابتدا ساختارهای چندمرحله‌ای با ورودی و خروجی‌های داخلی و خارجی در هر مرحله را معرفی کرده و سپس آن را به شبکه‌های کلی‌تر توسعه دادند. برای ارزیابی فرآیندهای دومرحله‌ای، کائو و هوانگ^۷ (۲۰۰۸) شبکه‌ای متشکل از دو گره که به صورت سری به هم مرتبط هستند در نظر گرفته و کارایی DMU را با دو فرض مدیریت متمرکز و نامتمرکز محاسبه کردند. چن و همکاران^۸ (۲۰۰۹) کارایی ساختار دومرحله‌ای را به صورت مجموع کارایی مراحل تجزیه نمودند. ساختارهای دومرحله‌ای با برخی ورودی‌های اشتراکی از دیگر موضوعات مورد مطالعه در این زمینه است (امیر تیموری^۹، ۲۰۱۳). با تعیین توزیع بهینه ورودی‌های اشتراکی بین گره‌ها، بالاترین عملکرد کلی برای هر DMU به دست می‌آید. امیر تیموری و یانگ^{۱۰} (۲۰۱۴) ساختاری دومرحله‌ای را بررسی نمودند که در مرحله اول دو زیرواحد موازی و در مرحله دوم یک زیرواحد وجود دارد. زیرواحدهای مرحله اول دارای برخی ورودی‌های اشتراکی بوده و به صورت سری به زیرواحد مرحله دوم متصل گردیده‌اند. رحیمی و حسین‌زاده سلجوقی^{۱۱} (۲۰۱۷)، از برنامه‌ریزی چندهدفه برای ارزیابی کارایی زنجیره‌های تامین دومرحله‌ای استفاده نمودند. هر تابع هدف در مدل آنها، کارایی یکی از دومرحله را بیان می‌نماید.

در رابطه با کاربردهای تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، پژوهش‌های زیادی در ادبیات موضوع گزارش شده است. در میان این پژوهش‌ها می‌توان به ارزیابی کارایی شرکت‌های گاز در ایران (امیر تیموری و همکاران، ۲۰۱۵)، ارزیابی کارایی بانک‌های بنگلادش (اکتر و همکاران^{۱۲}، ۲۰۱۳)، بررسی عملکرد زنجیره تامین شرکت‌های رزین در ایران (رحیمی و حسین‌زاده سلجوقی، ۲۰۱۷)، ارزیابی تیم‌های بیسبال لیگ آمریکا (لوئیس و سکستون، ۲۰۰۴)، تحلیل عملکرد شرکت‌های برق (تن و سوتسویی، ۲۰۰۹)، ارزیابی فرودگاه‌های اسپانیا (مقبولی و همکاران^{۱۳}، ۲۰۱۴) و مقایسه رتبه‌بندی شعب یک بانک خصوصی در تهران (واعظی و معمارپور^{۱۴}، ۲۰۱۸) اشاره نمود.

ساختارهای شبکه‌ای، شکل‌های بسیار متنوعی مثل سری، موازی، سلسله مراتبی و غیره دارند. یک شکل خاص در ساختارهای شبکه‌ای، حالتی است که در آن مجموعه‌ای از زیرواحدها یا شعب یک سازمان، تحت نظارت یک بخش مرکزی یا هسته قرار دارند. چنین ساختاری تشکیل یک گراف ستاره‌ای می‌دهد که در این مقاله آن را ساختار ستاره‌ای می‌نامیم. در این ساختار، هر زیر واحد یک گره یا رأس گراف ستاره‌ای است. مسائل کاربردی زیادی را

^۱ Färe & Grosskopf

^۲ Castelli et al.

^۳ Lewis & Sexton

^۴ Tone & Tsutsui

^۵ Kaveh et al.

^۶ Cook et al.

^۷ Kao & Hwang

^۸ Chen et al.

^۹ Amirteimoori

^{۱۰} Amirteimoori & Yang

^{۱۱} Rahimi & Hosseinzadeh Saljooghi

^{۱۲} Akther

^۱ Maghbouli et al.

^۲ Vaezi & Memarpour



می‌توان مثال زد که دارای ساختار ستاره‌ای هستند. شعب یک بانک، دانشکده‌های یک دانشگاه، نمایندگی‌های یک تولیدکننده، شعب یک فروشگاه زنجیره‌ای و تیم‌های ورزشی یک باشگاه مثال‌هایی از ساختار ستاره‌ای هستند. به علاوه، یان و همکاران^۱ (۲۰۱۹) نشان دادند که می‌توان هر شبکه‌ای را به یک شبکه ستاره‌ای (خورشیدی) تبدیل نمود. آنها برای این کار از یک گره مجازی استفاده نمودند که دیگر گره‌ها از آن طریق با یکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند. بدین ترتیب با داشتن یک ساختار مشابه، می‌توان تمام شبکه‌ها را با مدلی مشابه ارزیابی نمود. یان و همکاران برای ارزیابی شبکه ستاره‌ای حاصل شده، مدل‌هایی مبتنی بر اسلک در حالت‌های ایستا و پویا ارائه نمودند. امانی و باقرزاده و لمی^۲ (۲۰۱۸) از روشی مشابه برای تبدیل یک ساختار شبکه‌ای کلی به ساختار ستاره‌ای استفاده نمودند و مدل‌هایی شعاعی و مبتنی بر اسلک پیشنهاد دادند. آنها با استفاده از این روش به ارزیابی کارایی شرکت‌های برق منطقه‌ای ایران پرداختند. اگر چه روش به کار رفته توسط یان و همکاران، و امانی و باقرزاده و لمی در تبدیل یک شبکه کلی به یک شبکه ستاره‌ای جالب به نظر می‌رسد ولی مدل به کار رفته برای ارزیابی کارایی شبکه ستاره‌ای حاصل دارای برخی ابهامات است.

در ارزیابی شبکه‌های ستاره‌ای، رعایت اولویت زیرواحدها ضروری است. در ساختارهای دومرحله‌ای این کار با در نظر گرفتن یک زیرواحد به عنوان پیشرو و دیگری به عنوان پیرو انجام می‌شود (لیانگ و همکاران^۳، ۲۰۰۸). اما در اینجا با توجه به اهمیت زیرواحد مرکزی، اولویت بالاتری به زیرواحد مرکزی داده می‌شود و ارزیابی کارایی کلی شبکه با حفظ کارایی زیرواحد مرکزی صورت می‌گیرد. با توجه به کاربرد زیاد شبکه‌های ستاره‌ای لازم است چنین ساختارهایی به طور خاص مورد مطالعه گیرند. در این مقاله، ساختارهای ستاره‌ای به عنوان حالت خاصی از DEA شبکه‌ای معرفی می‌شوند و با تعریف اولویت دوسطحی، مدل‌های لازم برای ارزیابی کارایی چنین ساختارهایی ارائه می‌گردند. همچنین، کارایی کلی ساختار ستاره‌ای به کارایی زیربخش‌هایش تجزیه شده و به شکل مجموع وزن‌داری از آنها تعریف می‌گردد. تصویرسازی بر روی مرز کارایی با استفاده از شکل پوششی مدل پیشنهادی، بیان شده و شرایط لازم برای کارایی قوی نقطه تصویر ارائه می‌شود. با استفاده از یک مثال عددی، نحوه به کارگیری مدل‌ها و تحلیل جواب‌ها بیان و صحت روابط ریاضی و نتایج نظری بررسی می‌گردند.

ترتیب ارائه مطالب در این مقاله به این شرح است: در بخش ۲، برخی از مدل‌های موجود برای ارزیابی کارایی ساختارهای شبکه‌ای مرور می‌گردند. بخش ۳، ساختار ستاره‌ای را معرفی می‌نماید و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها را برای ارزیابی آن توسعه می‌دهد. در بخش ۴، یک مثال عددی برای بررسی مدل‌های پیشنهادی شرح داده می‌شود. نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۵ آورده می‌شود.

۲- بیان مسأله

n واحد تصمیم‌گیرنده DMU_j با ساختار شبکه‌ای متجانس در نظر بگیرید ($j = 1, \dots, n$). هر واحد از h بخش یا زیرواحد (DMSU) تشکیل شده است که به صورت یک شبکه به هم مرتبطند (شکل ۱). $x_j^k \in R^{m_k}$ و $y_j^k \in R^{m_k}$ به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های بیرونی بخش k ام ($k = 1, \dots, h$) است. $z_j^{(t,k)} \in R^{d(t,k)}$ محصول میانی است که بخش t تولید و بخش k دریافت می‌کند ($t, k = 1, \dots, h$). همان طور که در مقدمه اشاره شد مدل‌های متنوعی برای ارزیابی کارایی ساختارهای شبکه‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد گردیده است. یکی از مدل‌های مورد توجه، مدل تن و سوتسویی (۲۰۰۸) است. این مدل یک مدل مبتنی بر اسلک‌هاست و به صورت زیر بیان می‌گردد که DMU_o واحد تحت ارزیابی است ($o = 1, \dots, n$)

^۱ Yan et al.

^۲ Amani & Bagherzadeh Valami

^۳ Liang et al.

$$\min \frac{\sum_{k=1}^h w^k \left(1 - \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_i^{k-}}{x_{io}^k}\right)}{\sum_{k=1}^h w^k \left(1 + \frac{1}{s_k} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^{k+}}{y_{ro}^k}\right)}$$

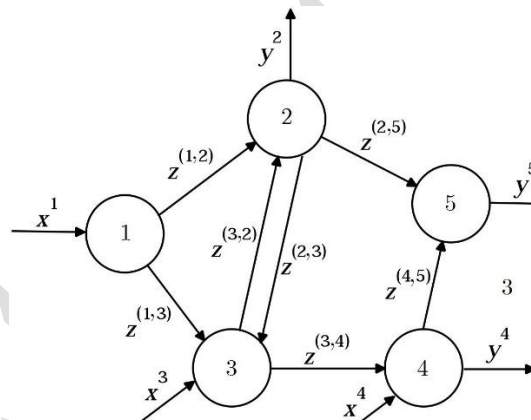
s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k x_j^k + s^{k-} = x_o^k, \quad k = 1, \dots, h$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k y_j^k - s^{k+} = y_o^k, \quad k = 1, \dots, h$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^t z_j^{(t,k)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k z_j^{(t,k)} \quad \forall (t, k)$$

$$\lambda^k \geq 0, s^{k-} \geq 0, s^{k+} \geq 0, \quad k = 1, \dots, h$$



شکل ۱- ساختار شبکه‌ای کلی.

Figure 1- General network structure.

در مدل فوق فرض شده است که تولیدات میانی از نوع آزاد هستند. اگر پیوند بین بخش‌ها از نوع ثابت باشند به جای قیود $\sum_{j=1}^n \lambda_j^k z_j^{(t,k)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^t z_j^{(t,k)}$ از قیود $z_o^{(t,k)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k z_j^{(t,k)}$ و $z_o^{(t,k)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^t z_j^{(t,k)}$ استفاده می‌شود. فوکویاما و میردهقان^۱ (۲۰۱۲)، با توجه به خروجی بودن محصولات $z_j^{(t,k)}$ برای بخش t و ورودی بودن برای بخش k ، قیود نامساوی زیر را برای نمایش پیوندها پیشنهاد دادند:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^t z_j^{(t,k)} \geq z_o^{(t,k)}, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^k z_j^{(t,k)} \leq z_o^{(t,k)} \quad (1)$$

از آنها یک

روش دومرحله‌ای برای محاسبه کارایی کلی و کارایی هر یک از بخش‌ها استفاده نمودند؛ بدین ترتیب که کارایی کلی با ماکسیمم کردن اندازه کارایی SBM متشکل از اسلک‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌های بیرونی محاسبه می‌گردد و کارایی بخش‌ها با ماکسیمم کردن اندازه کارایی SBM متشکل از کلیه اسلک‌های میانی و با جایگذاری مقدار بهینه اسلک‌های خارجی حاصل از مدل کلی در قیود به دست می‌آید.

یک حالت خاص و پرکاربرد ساختارهای شبکه‌ای، ساختار دومرحله‌ای است که در آن شبکه شامل دو گره است که توسط پیوندها یا محصولات میانی z_{dj} ($d = 1, \dots, D$) به هم متصل گردیده‌اند. x_j ورودی‌های مرحله اول و y_j خروجی‌های مرحله دوم در نظر گرفته می‌شود. لیانگ و همکاران (۲۰۰۸) دو حالت مدیریت غیرمتمرکز (یا مشارکتی) و مدیریت متمرکز (یا مدل پیشرو-پیرو یا بازی استکلبرگ) را برای ساختارهای دومرحله‌ای فرض

^۱ Fukuyama & Mirdehghan



کرده و مدل‌هایی را برای هر دو حالت پیشنهاد نمودند. در حالت مدیریت غیر متمرکز، مشابه مدل‌های شبکه‌ای، عملکرد DMU در تبدیل ورودی‌های بیرونی به خروجی‌های بیرونی با در نظر گرفتن پیوندهای میان مراحل ارزیابی می‌گردد. به عبارت دیگر، مدل غیر متمرکز مشابه مدل‌های شبکه‌ای کلی فرموله می‌گردد و پیوندها مستقیماً در تابع هدف نقشی ندارند. در حالت متمرکز، یکی از مراحل، پیشرو بوده و در تصمیم‌گیری‌ها دارای اولویت است و مرحله دیگر پیرو بوده و دارای اولویت پایین‌تر است. بنابراین لازم است که این اولویت‌ها در ساخت مدل نیز لحاظ گردد. با فرض این که مرحله اول پیشرو و مرحله دوم پیرو باشد مدل‌های مضربی زیر کارایی مراحل را برآورد می‌کند.

$$e_1 = \max wz_o$$

$$s.t.$$

$$vx_o = 1$$

$$wz_j - vx_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v \geq 0, w \geq 0$$

$$e_2 = \max uy_o$$

$$s.t.$$

$$wz_o = 1$$

$$uy_j - wz_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$wz_j - vx_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

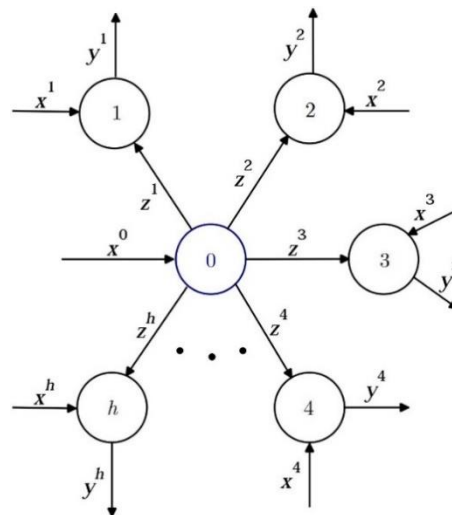
$$wz_o - e_1 vx_o = 1$$

$$u \geq 0, w \geq 0$$

که v ، u و w به ترتیب بردار وزن ورودی‌ها، خروجی‌ها و پیوندها هستند و e_1 کارایی مرحله اول و e_2 کارایی مرحله دوم است. در محاسبه کارایی مرحله پیشرو، وزن‌ها به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که کارایی مرحله اول حفظ گردد. پس از محاسبه کارایی مراحل می‌توان کارایی کلی یک واحد را با محاسبه میانگین (حسابی یا هندسی) e_1 و e_2 به دست آورد.

۳- شبکه‌های ستاره‌ای با مدیریت متمرکز

در این بخش، ساختار شبکه‌ای ستاره‌ای معرفی می‌گردد که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی دیده می‌شود و لازم است به طور خاص مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد. ساختار ستاره‌ای از یک گره یا زیر واحد مرکزی و تعدادی گره فرعی تشکیل گردیده است. معمولاً گره مرکزی مدیریت کلی شبکه و نظارت بر آن را انجام می‌دهد و در تصمیم‌گیری‌ها دست بالا را دارد. گره‌های فرعی مستقیماً با گره مرکزی در ارتباط بوده و فقط در محدوده همان زیر واحد، دارای قدرت تصمیم‌گیری هستند. برای بیان و مدل‌سازی مسأله، فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده با ساختار متجانس جهت ارزیابی مد نظر قرار دارد. هر DMU دارای ساختار شبکه‌ای ستاره‌ای متشکل از $n+1$ زیر واحد



شکل ۲- ساختار شبکه‌ای ستاره‌ای.
Figure 2- Star network structure.

وابسته است. شبکه مورد نظر در شکل ۲ نمایش داده شده است که در آن گره 0 زیرواحد مرکزی و گره‌های 1، 2، ... و h زیرواحدهای فرعی هستند. زیرواحد مرکزی دارای یک بردار ورودی x^0 و h بردار خروجی z^t به زیرواحدهای t ($t=1, \dots, h$) است. بردارهای $z^t \in R^d$ در واقع، محصولات میانی هستند که بخشی از ورودی‌های زیرواحدهای فرعی را تشکیل می‌دهد. در ساختار مورد بحث در این مقاله، بردارهای z^t برای همه t ها هم‌جنس بوده که به این معنی است که زیرواحد مرکزی خروجی‌های مشابهی را به زیرواحدهای فرعی ارسال می‌کند. هر زیرواحد فرعی t دارای m_t ورودی بیرونی و s_t خروجی است. این ورودی‌ها و خروجی‌ها را به ترتیب با بردارهای x^t و y^t نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم بردارهای x^0 ، z^t ، x^t و y^t برای هر t نامنفی و ناصفر باشند. نقش واحد مرکزی، تصمیم‌گیری‌های کلان و در اختیار گذاشتن برخی از منابع است. زیرواحدهای فرعی با استفاده از منابعی که از واحد مرکزی دریافت و برخی ورودی‌های دیگر که خود مسئول تأمین آن هستند و با رعایت مقررات وضع شده توسط واحد مرکزی، اقدام به تولید خروجی‌های نهایی سیستم می‌نمایند. با فرض اینکه هر زیرواحد فقط با زیرواحد مرکزی در ارتباط باشد چنین ساختاری شباهت‌هایی با ساختار دومرحله‌ای دارد؛ زیرا محصول نهایی، پس از گذر از دو مرحله یعنی مدیریت مرکزی و مدیریت محلی تولید می‌گردد. از طرفی چون شبکه این ساختار، متشکل از بیش از دو گره است نمی‌توان آن را دقیقاً یک ساختار دومرحله‌ای دانست.

در مدل‌سازی این مساله می‌خواهیم ارزیابی کارایی در دو سطح صورت گیرد: الف) زیرواحد مرکزی ب) کل سیستم. به عبارت دیگر هدف اولیه، تعیین وزن‌ها به گونه‌است که کارایی زیرواحد مرکزی در مقایسه با دیگر واحدهای مرکزی ماکسیمم گردد و هدف ثانویه یافتن نمره کارایی کلی شبکه است به طوری که نمره کارایی گره مرکزی حفظ شود. بنابراین مساله دوهدفه زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 & \text{که} \\
 & \text{وزن بردار} \\
 & \max \frac{w \sum_{t=1}^h z_o^t}{v^0 x_o^0} \\
 & \max \frac{\sum_{t=1}^h u^t y_o^t}{v^0 x_o^0 + \sum_{t=1}^h v^t x_o^t} \quad (2) \\
 & \text{s.t.} \\
 & \frac{u^t y_j^t}{w z_j^t + v^t x_j^t} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, h \\
 & \frac{w \sum_{t=1}^h z_j^t}{v^0 x_j^0} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\
 & v^t \geq 0, \quad t = 0, \dots, h \\
 & u^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, h \\
 & w \geq 0.
 \end{aligned}$$

ورودی‌های گره مرکزی، v^t و u^t بردارهای وزن ورودی‌ها و خروجی‌های گره فرعی t ($t=1, \dots, h$) و w بردار وزن پیوند میان گره مرکزی و گره‌های فرعی است. توجه شود که چون همه گره‌های فرعی، ورودی‌های مشابهی را از گره مرکزی دریافت می‌کنند پس بردار وزن یکسانی برای آنها در نظر گرفته شده است. برای حالتی که پیوندهای میان گره مرکزی و گره‌های فرعی هم‌جنس نیستند توسعه مدل‌ها و نتایج مشابه است. چون در این مساله چندهدفه، توابع هدف دارای اولویت هستند و تابع هدف اول (کارایی مرکزی) دارای اولویت بالاتر است، مساله دوهدفه فوق به دو مساله تک هدفه زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned}
 e^0 = \max & \frac{w \sum_{t=1}^h z_o^t}{v^0 x_o^0} \\
 \text{s.t.} & \\
 & \frac{w \sum_{t=1}^h z_j^t}{v^0 x_j^0} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3) \\
 & v^0 \geq 0 \\
 & w \geq 0.
 \end{aligned}$$



$$e^* = \max \frac{\sum_{t=1}^h u^t y_o^t}{v^0 x_o^0 + \sum_{t=1}^h v^t x_o^t}$$

s.t.

$$\frac{u^t y_j^t}{w z_j^t + v^t x_j^t} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, h$$

$$\frac{w \sum_{t=1}^h z_j^t}{v^0 x_j^0} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{w \sum_{t=1}^h z_o^t}{v^0 x_o^0} \geq e^0$$

$$v^t \geq 0, \quad t = 0, \dots, h$$

$$u^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, h$$

$$w \geq 0.$$

(۴)

مقادیر e^* و e^0 به ترتیب کارایی کلی شبکه و کارایی زیر واحد مرکزی هستند. چون قیدهای مربوط به کارایی گره‌های فرعی در مدل (۳) زائد هستند از مدل حذف گردیده‌اند. قید $w \sum_{t=1}^h z_o^t \geq e^0 v^0 x_o^0$ در مدل (۴) تضمین می‌کند که نمره کارایی کلی شبکه در محاسبه کارایی گره مرکزی حفظ گردد. بنابراین برای ارزیابی کارایی شبکه، ابتدا کارایی گره مرکزی را بدون در نظر گرفتن مابقی شبکه، محاسبه می‌نماییم و سپس کارایی کلی شبکه با در نظر گرفتن روابط داخلی اجزای شبکه ارزیابی می‌گردد. چون ممکن است جواب‌های بهینه چندگانه برای گره مرکزی وجود داشته باشد وزن‌های بهینه حاصل از حل مدل (۳) مستقیماً در مدل (۴) جای‌گذاری نمی‌شود و به مدل (۴) آزادی عمل داده می‌شود تا انتخاب وزن‌ها را طوری انجام دهد که ضمن حفظ کارایی گره مرکزی، کارایی کلی شبکه نسبت به دیگر شبکه‌ها ماکسیمم گردد.

اگرچه در مدل (۴)، کارایی گره مرکزی و گره‌های فرعی با کران بالای ۱ محدود شده‌اند هیچ کران بالایی برای کارایی کلی شبکه تعریف نشده است. نتیجه زیر تضمین می‌کند که کارایی کلی شبکه هم دارای کران بالای ۱ است.

نتیجه ۱. نمره کارایی شبکه (e^*) در مدل (۴) بزرگتر از یک نیست.

اثبات: برای هر j با جمع کردن قیود $w z_j^t + v^t x_j^t \leq u^t y_j^t$ روی $t = 1, \dots, h$ داریم

$$\sum_{t=1}^h u^t y_j^t \leq w \sum_{t=1}^h z_j^t + \sum_{t=1}^h v^t x_j^t \leq v^0 x_j^0 + \sum_{t=1}^h v^t x_j^t$$

که در آن از نامساوی $w \sum_{t=1}^h z_j^t \leq v^0 x_j^0$ مربوط به دسته قیود دوم مدل (۴) استفاده شده است. پس برای هر واحد تصمیم‌گیری j از جمله

$$o, \quad \text{کارایی شبکه کوچکتر یا مساوی یک است یعنی } e^* \leq 1. \quad \square$$

۳-۱- خطی سازی

مدل‌های (۳) و (۴) مدل‌های کسری هستند؛ اما مشابه مدل‌های کلاسیک DEA به مدل‌های خطی تبدیل می‌گردند. مدل (۳) با تعریف

$$v^0 x_o^0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{و} \quad v^t x_o^t = \frac{1}{\tau} \quad \text{با تعریف} \quad \tau = \frac{1}{v^0 x_o^0 + \sum_{t=1}^h v^t x_o^t} \quad \text{و انجام تغییر متغیر به مسأله}$$

برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌گردد. شکل خطی مدل‌های (۳) و (۴) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$e^0 = \max \sum_{t=1}^h z_o^t$$

s.t.

$$v^0 x_o^0 = 1$$

$$w \sum_{t=1}^h z_j^t - v^0 x_j^0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v^0 \geq 0$$

$$w \geq 0.$$

(5)

$$e^* = \max \sum_{t=1}^h u^t y_o^t$$

s.t.

$$v^0 x_o^0 + \sum_{t=1}^h v^t x_o^t = 1$$

$$u^t y_j^t - w z_j^t - v^t x_j^t \leq 0, \quad t = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, n$$

$$w \sum_{t=1}^h z_j^t - v^0 x_j^0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$-w \sum_{t=1}^h z_o^t + e^0 v^0 x_o^0 \leq 0$$

$$v^t \geq 0, \quad t = 0, \dots, h$$

$$u^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, h$$

$$w \geq 0.$$

(6)

اعمال شرطهای $u^t \geq \varepsilon$ ، $v^t \geq \varepsilon$ و $w \geq \varepsilon$ برای هر t می‌توان کارایی قوی را برای واحدها ارزیابی نمود که ε برداری با طول مناسب از اعداد غیرارشمیدسی بینهایت کوچک است.

۲-۳- تجزیه کارایی

مدل‌های (5) و (6) کارایی زیرواحد مرکزی و کارایی کلی شبکه را محاسبه می‌نمایند. اگر یک واحد کارا نباشد تعیین منشأ ناکارایی از اهمیت زیادی برخوردار است. در مدل‌های شبکه‌ای این کار با تعیین نمره کارایی زیرواحدها انجام می‌گیرد. اگر $(v^{0*}, \dots, v^{h*}, w^*, u^{1*}, \dots, u^{h*})$ یک جواب بهینه مدل (6) باشد نمره کارایی زیرواحد فرعی t به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$e^t = \frac{u^{t*} y_j^t}{w^* z_j^t + v^{t*} x_j^t} \quad t = 1, \dots, h.$$

کارایی کلی شبکه به شکل زیر به کارایی بخش‌هایش تجزیه می‌شود. داریم:

$$u^{t*} y_o^t = \frac{u^{t*} y_o^t}{v^{t*} x_o^t + w^* z_o^t} \times (v^{t*} x_o^t + w^* z_o^t) = e^t (v^{t*} x_o^t + w^* z_o^t) \quad t = 1, \dots, h \quad (7)$$

با

تعریف $\alpha_t = v^{t*} x_o^t + w^* z_o^t$ برای $t = 1, \dots, h$ و جمع کردن رابطه (7) روی t ، تجزیه زیر را برای کارایی کلی خواهیم داشت:

برای

$$e^* = \sum_{t=1}^h u^{t*} y_o^t = \sum_{t=1}^h \alpha_t e^t$$

 α_t

داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^h \alpha_t &= \sum_{t=1}^h v^{t*} x_o^t + w^* \sum_{t=1}^h z_o^t = \sum_{t=1}^h v^{t*} x_o^t + e^0 v^{0*} x_o^0 = 1 - v^{0*} x_o^0 + e^0 v^{0*} x_o^0 \\ &= 1 - (1 - e^0) v^{0*} x_o^0 \leq 1\end{aligned}$$

که در آن از $v^{0*} x_o^0 + \sum_{t=1}^h v^{t*} x_o^t = 1$ استفاده شده است. بنابراین با تعریف

$$\alpha'_t = \frac{\alpha_t}{1 - (1 - e^0) v^{0*} x_o^0} \quad t = 1, \dots, h$$

تجزیه کامل کارایی کلی شبکه را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$e^* = \sum_{t=1}^h \alpha'_t (1 - (1 - e^0) v^{0*} x_o^0) e^t = (1 - (1 - e^0) v^{0*} x_o^0) \sum_{t=1}^h \alpha'_t e^t \quad (8)$$

که در آن $(0 \leq \alpha'_t \leq 1)$ و در نتیجه کارایی کلی، حاصل ضرب عبارتی بر حسب کارایی گره مرکزی در ترکیب محدبی از کارایی گره‌های فرعی است. اگر گره مرکزی کارا باشد یعنی $e^0 = 1$ آنگاه کارایی کلی شبکه، صرفاً ترکیب محدبی از کارایی گره‌های فرعی است. بنابراین اگر همه گره‌های شبکه، کارا باشند کل شبکه کارا خواهد بود. با فرض اینکه هیچ یک از α'_t ها صفر نباشند و ترکیب محدب فوق، یک ترکیب محدب اکید باشد در اینصورت عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی اگر یک واحد ستاره‌ای، کارا باشد تمام بخش‌هایش کاراست. مثلاً در ارزیابی کارایی قوی، تمام وزن‌ها ناصفر بوده و در نتیجه تمام α'_t ها ناصفر می‌باشند. در این حالت، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱: یک واحد تصمیم‌گیرنده کارایی قوی است اگر و فقط اگر تمام زیرواحدهایش کارایی قوی باشند.

در صورتی که DMU کارا نباشد با استفاده از تجزیه فوق می‌توان منشأ ناکارایی را مشخص و نسبت به اصلاح آن چاره‌اندیشی کرد که این موضوع بزرگترین حسن تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ایست.

۳-۳- شکل پوششی

مدل‌های بخش‌های قبل در شکل مضربی بیان گردیدند. با به دست آوردن دوگان مدل‌های (۵) و (۶) می‌توان این مدل‌ها را در شکل پوششی بیان نمود. شکل پوششی در تعیین نقطه تصویر و مجموعه مرجع اهمیت دارد. به علاوه حل شکل پوششی به روش سیمپلکس از نظر محاسباتی می‌تواند مناسب‌تر باشد. مدل‌های پوششی تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی شبکه‌های ستاره‌ای به صورت زیرند.

$$\min \theta$$

s.t.

$$-\sum_{j=1}^n \mu_j x_j^0 + \theta x_o^0 \geq 0 \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \left(\sum_{t=1}^h z_j^t \right) \geq \sum_{t=1}^h z_o^t$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$



فرض کنید
 $(s^{-t},$
 $t=0, \dots, h)$
 $(s^{+t},$
 $t=1, \dots, h)$
متغیرهای
اسلک به
ترتیب نظیر
قیود x^t و y^t
باشند. اگر
یک جواب
بهینه مدل

$$\min \varphi$$

s.t.

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^n \mu_j x_j^0 + (e^0 \eta + \varphi) x_o^0 \geq 0 \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j \left(\sum_{t=1}^h z_j^t \right) - \sum_{t=1}^h \sum_{j=1}^n \lambda_j^t z_j^t - \eta \left(\sum_{t=1}^h z_o^t \right) \geq 0 \\ & -\sum_{j=1}^n \lambda_j^t x_j^t + \varphi x_o^t \geq 0, \quad t=1, \dots, h \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^t y_j^t \geq y_o^t, \quad t=1, \dots, h \\ & \mu_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n \\ & \lambda_j^t \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \quad t=1, \dots, h \\ & \eta \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) در اختیار باشد نقطه تصویر نظیر واحد تصمیم گیرنده o به صورت زیر تعیین می شود:

که

$$\begin{pmatrix} x_o^0 \\ \dots \\ z_o^t \\ \dots \\ x_o^t \\ \dots \\ y_o^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \mu_j^* x_j^0 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{t*} z_j^t \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{t*} x_j^t \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{t*} y_j^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi^* + e^0 \eta^*) x_o^0 - s^{-0*} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{t*} z_j^t \\ \dots \\ \varphi^* x_o^t - s^{-t*} \\ \dots \\ y_o^t + s^{+t*} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

نمایش فوق نظیر هر یک از \hat{x}_o^t و \hat{y}_o^t ، تعداد h مولفه وجود دارد. اگر s^{-t*} ، s^{+t*} و $(t=0, \dots, h)$ و $(t=1, \dots, h)$ ماکسیم مقادیر بهینه خود را داشته باشند؛ مثلاً اگر از مدل \mathcal{E} دار یا مدل ماکسیم-اسلک حاصل شده باشند در این صورت نقطه تصویر تعریف شده در (11) تحت شرایط مساله یک نقطه کارای قوی است. باید توجه داشت که کارایی مدل (10) مستقیماً نسبت به مجموعه امکان تولید شبکه ستاره ای یعنی

$$\begin{aligned} T = \{ & (x^0, z^1, \dots, z^h, x^1, \dots, x^h, y^1, \dots, y^h) \mid x^0 \geq \sum_{j=1}^n \mu_j x_j^0, \\ & \sum_{t=1}^h z^t \leq \sum_{j=1}^n (\mu_j \sum_{t=1}^h z_j^t), z^t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^t z_j^t, x^t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^t x_j^t, \\ & y^t \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j^t y_j^t, \mu_j \geq 0, \lambda_j^t \geq 0, t=1, \dots, h, j=1, \dots, n \} \end{aligned} \quad (12)$$

محاسبه نمی گردد. به عبارت دیگر در مدل (10) ارزیابی کارایی با اولویت دهی به گره مرکزی صورت می گیرد و در نتیجه تصویرسازی روی مجموعه (12) به شکل آزادانه نمی باشد. با این حال، تحت شرایط قضیه ذیل، کارایی نسبت به مجموعه امکان تولید کلی نیز حاصل می گردد:

قضیه ۲: اگر $\eta^* = 0$ و اسلک ها ماکسیم مقادیر بهینه خود را داشته باشند نقطه تصویر (11) کاراست.

اثبات: ابتدا شدنی بودن $(\hat{x}^0, \hat{z}^1, \dots, \hat{z}^h, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^h, \hat{y}^1, \dots, \hat{y}^h)$ در مجموعه امکان تولید را ثابت می کنیم. همه قیود (12) بجز

$$\sum_{t=1}^h z^t \leq \sum_{j=1}^n (\mu_j \sum_{t=1}^h z_j^t)$$

برای این قید با توجه به تعریف نقطه تصویر و قیود مدل داریم:

$$\sum_{t=1}^h \hat{z}^t = \sum_{t=1}^h \sum_{j=1}^n \lambda_j^{t*} z_j^t \leq \sum_{j=1}^n \mu_j^* \sum_{t=1}^h z_j^t - \eta^* \left(\sum_{t=1}^h z_o^t \right) = \sum_{j=1}^n \mu_j^* \sum_{t=1}^h z_j^t.$$



اگر نقطه تعریف شده در (۱۱) کارا نباشد پس نقطه دیگری مثل $\Omega = (\bar{x}^0, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^h, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^h, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^h)$ در Ω (۱۲) موجود است که آن را مغلوب نماید. یعنی $\bar{x}^0 \leq \bar{x}^0$ ، $\bar{x}^t \leq \bar{x}^t$ و $\bar{y}^t \geq \bar{y}^t$ ، $t = 1, \dots, h$ و نامساوی در حداقل یک عبارت و یک مؤلفه اکید است. توجه کنید که چون داده‌های واسطه دارای دو نقش متضاد ورودی و خروجی هستند در تعریف مغلوب بودن، محدودیتی برای z_j ها در نظر گرفته نمی‌شود. پس اگر $\bar{\lambda}_j \geq 0$ و $\bar{\mu}_j \geq 0$ ، $(j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, h)$ ضرایب نظیر نقطه Ω در (۱۲) باشد و تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} s^{-0} &= \bar{x}^0 - \hat{x}^0 = (\varphi^* + e^0 \eta^*) x_o^0 - s^{-0*} - \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_j x_j^0 \\ s^{-t} &= \bar{x}^t - \hat{x}^t = \theta^* x_o^t - s^{-t*} - \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j x_j^t, \quad t = 1, \dots, h \\ s^{+t} &= \bar{y}^t - \hat{y}^t = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y_j^t - y_o^t - s^{+t*}, \quad t = 1, \dots, h \end{aligned}$$

آنگاه این بردارهای اسلک نامنفی بوده و حداقل یکی از آنها ناصفر است. با تعریف $\bar{s}^{-t} = s^{-t} + s^{-t*}$ و $\bar{s}^{+t} = s^{+t} + s^{+t*}$ برای $t = 1, \dots, h$ و $\bar{\eta} = \eta^* = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_j x_j^0 + \bar{s}^{-0} &= (\varphi^* + e^0 \eta^*) x_o^0 = (\varphi^* + e^0 \bar{\eta}) x_o^0 \\ \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j x_j^t + \bar{s}^{-t} &= \theta^* x_o^t, \quad t = 1, \dots, h \\ \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j y_j^t - \bar{s}^{+t} &= y_o^t, \quad t = 1, \dots, h \\ \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_j \left(\sum_{t=1}^h z_j^t \right) - \sum_{t=1}^h \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j z_j^t - \bar{\eta} \left(\sum_{t=1}^h z_o^t \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین به جواب $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\varphi} = \varphi^*, \bar{\eta}, \bar{s}^{-0}, \dots, \bar{s}^{-h}, \bar{s}^{+1}, \dots, \bar{s}^{+h})$ که یک جواب بهینه مدل (۱۰) است می‌رسیم که مجموع اسلک‌هایش بزرگتر است و این تناقض اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

در مقایسه با مدل‌های پیشنهادی توسط یان و همکاران (۲۰۱۹) و امانی و باقرزاده هلمی (۲۰۱۸) که دارای مجموعه امکان

$$\begin{aligned} T = \{ (x^1, \dots, x^h, z^1, \dots, z^h, y^1, \dots, y^h) \mid x^t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^t, t = 0, \dots, h, \\ y^t \leq \sum_{j=1}^h \lambda_j y_j^t, (z^t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^t \text{ or } z^t \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^t), t = 1, \dots, h, \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \} \end{aligned} \quad (13)$$

هستند مدل (۱۰) نمایش دقیقی از شبکه ستاره‌ای دارد. در واقع مجموعه امکان تولید (۱۳)، ساختار شبکه‌ای و روابط بین زیرواحدها را در نظر نمی‌گیرد و ارزیابی شبکه در مدل حاصل از آن با ارزیابی گره مرکزی مجازی به انجام می‌رسد. بدین ترتیب بر خلاف مدل (۱۰) و دیگر مدل‌های DEA شبکه‌ای، تنها یک مجموعه متغیر λ_j برای کلیه گره‌های شبکه وجود دارد و قیود پیوند دهنده گره‌ها نیز وجود ندارد. در نتیجه، مدل شبکه‌ای حاصل از (۱۳) به یک مدل ساده (جعبه سیاه) تبدیل می‌شود که تنها به آن ورودی یا خروجی‌هایی از جنس محصولات میانی (z) اضافه شده است. ماهیت ورودی یا خروجی این محصولات توسط مدل به گونه‌ای تعیین می‌شود که بیشترین نمره کارایی برای واحد تحت بررسی به دست آید. از آنجا که در ساختار شبکه‌ای، پیوندها نقش خروجی برای یک گره و ورودی برای یک گره دیگر را دارد، این عمل موجب دور شدن از واقعیت مساله و نیز استفاده از معیارهای متفاوت در ارزیابی DMU‌های متفاوت می‌گردد. به علاوه، نمایش (۱۲) برای مجموعه امکان تولید، آزادی عملی بیشتری برای مدل‌سازی مسائل دنیای واقعی مثل ارزیابی دوسطحی، داده‌های اشتراکی و ... می‌دهد.

مدل‌های توسعه داده شده در این بخش، مدل‌های شعاعی در ماهیت ورودی و با بازده به مقیاس ثابت بودند. به طور مشابه می‌توان برای ماهیت خروجی و یا بازده به مقیاس متغیر، مدل‌های DEA با ساختار ستاره‌ای را به دست آورد. مثلاً با اضافه کردن قیود زیر به مدل‌های (۹) و (۱۰) می‌توان مدل‌ها را برای بازده به مقیاس متغیر به دست آورد.

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^t = I, \quad t = 1, \dots, h.$$

۴- مثال عددی

در این بخش با استفاده از یک مثال عددی، عملکرد مدل‌های پیشنهادی و اعتبار نتایج به دست آمده در بخش‌های قبلی بررسی می‌گردند. مسأله مورد نظر، شبکه‌ای شامل یک گره مرکزی و سه گره فرعی است. گره مرکزی دارای دو ورودی (x_1^0 و x_2^0) و سه خروجی (z^1 ، z^2 و z^3) است که هر خروجی به یکی از گره‌های فرعی ارسال می‌گردد. گره‌های فرعی علاوه بر این ورودی یک ورودی نیز از جهان بیرون دریافت می‌نمایند (x^1 ، x^2 و x^3) و با استفاده از این دو ورودی، محصول نهایی را تولید می‌نمایند (y^1 ، y^2 و y^3). تعداد ۱۶ شبکه با ساختار فوق در نظر گرفته شده است. کلیه داده‌ها به صورت تصادفی تولید گردیده‌اند که در جدول ۱ دیده می‌شوند. برای ارزیابی کارایی شبکه ستاره‌ای از مدل‌های (۹) و (۱۰) استفاده شده است. نتایج ارزیابی کارایی گره مرکزی و کل شبکه در جدول ۲ گزارش گردیده است.

چهار واحد دارای گره مرکزی کارا هستند که در میان آنها فقط یکی دارای کارایی کلی شبکه است. دو واحد نیز بدون اینکه دارای کارایی در گره مرکزی باشند به کارایی شعاعی کلی می‌رسند. برعکس، برخی از واحدها مثل واحدهای ۳ و ۴ که دارای کارایی در گره مرکزی هستند از نمره پایینی در کارایی کلی برخوردارند. در جدول ۲ رتبه‌بندی واحدها نیز ارائه شده است. واحدهای ۱، ۳، ۴ و ۶ بیشترین کارایی و واحد ۱۱ کمترین کارایی را در گره مرکزی دارند. واحدهای ۲، ۶ و ۹ بالاترین کارایی و واحد ۱۰ پایین‌ترین کارایی را در عملکرد کلی شبکه دارند. در صورتی که بخواهیم رتبه بندی بر اساس هر دو نمره کارایی مرکزی و کلی انجام شود شبکه ۶ بیشترین کارایی را دارد و موفق شده است هم گره مرکزی کارا و هم شبکه کارا داشته باشد. این معیار، مجدداً شبکه ۱۰ را به عنوان ناکارترین شبکه انتخاب می‌نماید که هم در گره مرکزی و هم کل شبکه عملکرد نامناسبی دارد.

برای ارزیابی کارایی قوی، لازم است علاوه بر ناکارایی شعاعی، وجود ناکارایی غیرشعاعی (ترکیبی) هم بررسی شود. روش‌های مختلفی برای ارزیابی کارایی قوی وجود دارد. در اینجا ما از مدل پوششی با ضرایب E - برای متغیرهای اسلک در تابع هدف استفاده می‌کنیم. مقدار استفاده شده برای E ، 10^{-7} است. بدین ترتیب اولویت اول مدل، تصویرسازی شعاعی واحد تحت ارزیابی است و با اولویت پایین‌تر، ماکسیم‌سازی متغیرهای اسلک انجام می‌شود. هر مقدار ناصفر برای اسلک‌ها باعث کاهش نسبتاً جزئی نمره کارایی واحد می‌گردد. همان‌طور که از جدول ۲ مشاهده می‌شود با اضافه کردن اسلک‌ها به تابع هدف، کارایی هیچ یک از واحدها تغییر نمی‌کند. دلیل این نتیجه آنست که در ارزیابی کارایی گره مرکزی، کلیه واحدها بر روی مرز کارایی قوی تصویر می‌گردند و اسلک‌های بهینه در کلیه واحدها صفر است. این موضوع با بررسی جواب‌های بهینه دوگان یعنی متغیرهای v^1 ، v^2 و w و u^1 نیز تایید می‌شود و هیچ یک از این وزن‌ها در جواب بهینه فرم مضربی صفر نمی‌گردند. اما در ارزیابی کارایی کلی شبکه‌ها، شرایط تغییر می‌کند و کارایی کلی بسیاری از واحدها با کاهش روبرو می‌شود. به خصوص در مورد واحدهای کارا مشاهده می‌شود که هیچ یک از واحدها نمی‌توانند کارایی خود را حفظ نمایند و نمره کارایی همه آنها از یک کاهش می‌یابد. بیشترین نمره کارایی در این حالت به واحد ۶ می‌رسد که دارای کارایی مرکزی نیز هست. کارا بودن هیچ‌یک از شبکه‌ها، یک تفاوت مهم روش به کار رفته در این مقاله نسبت به روش‌های موجود است. در اینجا لازم است کارایی کلی شبکه با حفظ کارایی گره مرکزی محاسبه گردد. لذا این روش ارزیابی نسبت به روش‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، سختگیرانه‌تر است. یک حسن این روش، دستیابی به تمایز بیشتری بین نمره کارایی واحدها بدون نیاز به متوسل شدن به روش‌های رتبه‌بندی نظیر روش ابرکارایی است. این موضوع در این مثال نیز به روشنی دیده می‌شود و یک رتبه بندی کامل از همه واحدها به دست می‌آید که در آن، واحد ۶ دارای بالاترین رتبه و واحد ۱۴ دارای پایین‌ترین رتبه است.

برای بررسی صحت مدل پیشنهادی، نتایج را برای چند DMU بررسی می‌کنیم. جواب بهینه مدل مضربی (۶) با $E = 10^{-7}$ برای واحد ۱ عبارت

است از:

$$(u_1^0, u_2^0, w, u^1, u^2, u^3, v^1, v^2, v^3) =$$

$$(0.001374, 10^{-7}, 0.003882, 10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-7}, 0.0000022, 0.00000216, 0.00007314)$$

جدول ۱- داده‌های مسأله.

Table 1- Example data.

زیر واحد ۳		زیر واحد ۲		زیر واحد ۱		داده های میانی			زیر واحد مرکزی		واحد
y^3	x^3	y^2	x^2	y^1	x^1	z^3	z^2	z^1	x_2^0	x_1^0	
9710.6	93.87	7300	67.98	873	202.8	227.25	27.55	2.81	96	727.78	1
1801	11.83	45238.1	50.12	1471.4	48.51	69.24	84.5	5.66	87	970.51	2
2260	75.93	34210	611.5	1350	262	181.26	183.6	6.25	24	3624	3
863.2	65.49	6773.3	109.6	767.82	139.26	147.25	122.7	5.57	19	1399.26	4
914.9	10.37	844.21	130.72	808.01	89.88	26.26	97.19	6.86	89	890.88	5
2070.9	14.94	69012	68	1710	73	273.93	72.07	4.69	37	1037	6
5620	46.23	75020	413.2	4750	430.6	165.11	41.83	2.68	33	3303.6	7
1058	3.96	33543	410.8	1335.2	241.8	104.94	93.85	5.39	41	1410.8	8
6100.9	6.93	2107.8	667.49	621	157.24	114.95	27.93	7.74	17	1706.24	9
2900	92.37	7500.5	891	375	593	126.64	59.99	3.17	49	4992	10
1837	71.12	29137	503.3	1291.3	183	72.56	35.25	7.17	63	1463	11
964.8	50.04	80200.4	83	1080	105	57.3	122	8.15	91	951	12
1570	76.14	9504	281.82	1395	278.87	102.46	159.5	3.89	28	2788.87	13
1345	22.37	34550.5	801.44	1345	68.57	178.99	94.48	6.55	83	883.57	14
909	66.72	26110	89.18	1260	81.59	77.68	38.43	5.72	79	709.59	15
3023.2	42.85	3046.7	892.14	300.04	228.31	73.97	52.64	6.19	11	1982.31	16

جدول ۲- نتایج کارایی.

Table 2- Efficiency results.

رتبه بندی		کارایی ماکسیمم-اسلک		کارایی شعاعی			شماره واحد
کل شبکه	گروه مرکزی	کارایی کلی	کارایی گروه مرکزی	η^*	کارایی کلی	کارایی گروه مرکزی	
3	1	0.72793	1	0	0.72794	1	1
1	9	0.99853	0.47328	0	1	0.47328	2
11	1	0.19753	1	0	0.19753	1	3
12	1	0.18038	1	0	0.18177	1	4
9	11	0.29237	0.41947	0	0.29638	0.41946	5
1	1	0.99884	1	0.19753	1	1	6
6	10	0.39166	0.42833	0	0.39166	0.42833	7
8	8	0.29664	0.48915	0	0.30348	0.48915	8
1	5	0.98201	0.59730	0	1	0.59730	9
14	12	0.08111	0.26080	0	0.08112	0.26080	10
10	13	0.22785	0.23157	0	0.23264	0.23157	11
2	6	0.95083	0.56636	0	0.9521	0.56636	12
13	4	0.16252	0.64050	0	0.16492	0.64050	13
4	2	0.63066	0.91138	0	0.64668	0.91138	14
5	7	0.50684	0.48972	0	0.50914	0.48972	15
7	3	0.34582	0.78073	0.44299	0.34587	0.78075	16



کارایی واحد مرکزی به ازای این وزن‌ها برابر است با ۱ که همان نتیجه‌ای است که از مدل (۵) حاصل گردیده است. به عبارت دیگر تعیین وزن‌ها توسط مدل (۶) با حفظ کارایی گره مرکزی و ماکسیم نمودن کارایی کلی شبکه صورت می‌گیرد. تجزیه کارایی برای این واحد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 e^1 + \alpha'_2 e^2 + \alpha'_3 e^3 &= 0.0109278 \times 0.175686 + 0.106948 \times 0.147773 + 0.882125 \times 0.805106 \\ &= 0.727928. \end{aligned}$$

توجه کنید که در اینجا عبارت $(1 - (1 - e^0)v^{0*}x_0^0)$ دارای مقدار ۱ است و رابطه (۸) برقرار است. مشابهاً برای واحد ۷ جواب بهینه زیر را داریم:

$$(u_1^0, u_2^0, w, u^1, u^2, u^3, v^1, v^2, v^3) = (0.00002134, 0.0233118, 0.00171595, 0.00019487, 0.00018468, 10^{-7}, 0.00001303, 0.00000197, 0.00003233)$$

که به کارایی مرکزی 0.428326 و تجزیه کارایی زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} (1 - (1 - e^0)v^{0*}x_0^0)(\alpha'_1 e^1 + \alpha'_2 e^2 + \alpha'_3 e^3) &= (0.519921)(0.170235 \times 0.699026 + 0.284825 \times 1 + 0.544941 \times 0.641317) \\ &= 0.519921 \times 0.753303 = 0.391658. \end{aligned}$$

تجزیه فوق سهم زیر واحد مرکزی و زیر واحدهای فرعی را در کارایی کلی نشان می‌دهد و بدین ترتیب تصمیم‌گیران می‌توانند برای افزایش کارایی شبکه، اولویت‌گذاری‌های لازم را انجام دهند. تصویرسازی با استفاده از فرمول (۱۱) انجام می‌شود. برای واحد ۱ با داده‌های

$$(727.78, 96, 2.81, 27.55, 227.25, 202.8, 67.98, 93.87, 873, 7300, 9710.6)$$

نقطه تصویر به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} (\hat{x}_1^0, \hat{x}_2^0, \hat{z}^1, \hat{z}^2, \hat{z}^3, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{y}^1, \hat{y}^2, \hat{y}^3) = \\ (529.781, 69.8824, 0.492556, 4.07037, 182.962, 79.1397, 40.2074, 11.0303, 873, 7300, 9710.6) \end{aligned}$$

که چون $\eta^* = 0$ ، این نقطه، یک نقطه کارایی قوی در مجموعه امکان تولید است. برای بررسی صحت این موضوع، این نقطه را به مجموعه داده‌ها اضافه می‌کنیم و مجدداً واحدها را ارزیابی می‌نماییم که نشان می‌دهد نقطه تصویر، هم دارای کارایی مرکزی و هم کارایی کلی است. بررسی نقاط تصویر دیگر DMUها نیز صحت قضیه ۲ را تایید می‌نماید.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی شبکه‌های ستاره‌ای مورد بحث قرار گرفت. شبکه ستاره‌ای تعریف و یک روش دوسطحی برای ارزیابی کارایی آن ارائه گردید. در شبکه‌های ستاره‌ای یک گره مرکزی با تعدادی گره فرعی وجود دارند و فرآیند تولید از گره مرکزی آغاز می‌گردد. گره مرکزی، محصولات میانی را تولید می‌کند که این محصولات به گره‌های فرعی برای تکمیل فرآیند ارسال می‌گردند. با توجه به نقش کلیدی گره مرکزی در شبکه ستاره‌ای، لازم است ارزیابی کارایی با اولویت‌دهی به گره مرکزی انجام شود. در روش پیشنهادی، ابتدا کارایی گره مرکزی بدون در نظر گرفتن گره‌های فرعی محاسبه می‌گردد و سپس در سطح دوم، کارایی کلی شبکه با حفظ نمره کارایی مرکزی ارزیابی می‌شود.

یک گام مهم در ارزیابی شبکه‌ها، تجزیه کارایی کلی به کارایی زیر واحدها است. در این مقاله، فرمول‌های لازم برای تجزیه کارایی شبکه ستاره‌ای ارائه گردید و نشان داده شد که چگونه می‌توان کارایی کلی را به صورت ترکیبی از کارایی گره مرکزی و گره‌های فرعی بیان نمود. مجموعه امکان تولید شبکه ستاره‌ای تعریف و نحوه به دست آوردن نقطه تصویر بر اساس جواب بهینه مدل‌های پوششی شرح داده شد. با استفاده از یک مثال عددی، مدل پیشنهادی مورد آزمون قرار گرفت و صحت نتایج، روابط و قضایای بیان شده در مقاله مورد بررسی و تایید شد. شبکه ستاره‌ای معرفی شده در این مقاله نیاز به پژوهش و توسعه بیشتر در موضوعاتی نظیر ابرکارایی، ارزیابی دومرزی، اندازه کارایی مبتنی بر اسلک‌ها و غیره دارد.

نویسنده اول، طرح مسأله، مدل‌سازی و تحلیل ریاضی مدل‌ها را بر عهده داشته است. نویسنده دوم، جمع‌آوری مقالات مرتبط، پیاده‌سازی مدل‌ها و انجام برخی اصلاحات روی مدل‌ها را به انجام رسانیده است.

سپاسگزاری

نویسندگان مقاله، مراتب قدردانی و سپاس خود را از وقت و دقتی که دبیران و داوران برای ارزیابی مقاله صرف کرده‌اند ابراز می‌نمایند. نکات و پیشنهادات ارائه شده، به بهبود مقاله کمک نمود.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این مقاله وجود ندارد.

منابع

- Akther, S., Fukuyama, H., & Weber, W. L. (2013). Estimating two-stage network slacks-based inefficiency: An application to Bangladesh banking. *Omega*, 41, 88-96.
- Amani, N., & Bagherzadeh Valami, H. (2018). Efficiency evaluation of regional electronic companies in Iran by Network DEA: A based on the conversion of the structures into a uniform structure. *Decisions and operations research*, 3(3), 249-280. (In Persian). [10.22105/DMOR.2018.81213](https://doi.org/10.22105/DMOR.2018.81213)
- Amirteimoori, A. (2013). A DEA two-stage decision processes with shared resources. *Central European journal of operations research*, 21, 141-151.
- Amirteimoori, A. & Yang, F. (2014). A DEA model for two-stage parallel-series production processes. *RAIRO-Operations research*, 48, 123-134.
- Amirteimoori, A., Shahroodi, K., & Shaker Mahmoodkiani, F. (2015). Network Data Envelopment Analysis: Application to gas companies in Iran. *International journal of applied operational research*, 5(1), 1-16.
- Castelli, L., Pesenti, R., & Ukovich, W. (2004). DEA-like models for the efficiency evaluation of hierarchically structured units. *European journal of operational research*, 154(2), 465-476.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European journal of operational research*, 196, 1170-1176.
- Cook, W. D., Zhu, J., Bi, G., & Yang, F. (2010). Network DEA: Additive efficiency decomposition. *European journal of operational research*, 207, 1122-1129.
- Färe, R., & Grosskopf, S. (1996). Productivity and intermediate products: A frontier approach. *Economics letters*, 50, 65-70.
- Färe, R., & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-Economic planning sciences*, 34, 35-49.
- Fukuyama, H. & Mirdehghan, S. M. (2012). Identifying the efficiency status in network DEA, *European journal of operational research*, 220(1), 85-92.
- Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, 185(1), 418-429.
- Kaveh, M., Ardakani, S. S., Shafiee, M., & Tabataba'i Nasab, S. M. (2020). Predicting and benchmarking the factors of customer attraction in insurance companies by the model of network data envelopment analysis and the theory of dynamics of bass publishing. *Decisions and operations research*, 5(3), 382-401. (In Persian). [10.22105/DMOR.2020.237734.1188](https://doi.org/10.22105/DMOR.2020.237734.1188)
- Lewis, H. F., & Sexton, T. R. (2004). Network DEA: Efficiency analysis of organizations with complex internal structure. *Computers and operations research*, 31, 1365-1410.
- Liang, L., Cook, W. D., & Zhu, J. (2008). DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. *Naval research logistics*, 55, 643-653.
- Maghbooli, M., Amirteimoori, A., & Kordrostami, S. (2014). Two-stage network structures with undesirable outputs: A DEA based approach. *Measurement*, 48, 109-118.
- Rahimi, A., & Hosseinzadeh Saljooghi, F. (2017). Multi-objective programming model for determining the efficiency and returns to scale in supply chain management of two-stage: a case study of resin companies in Iran. *Decisions and operations research*, 2(3), 213-227. (In Persian). [10.22105/DMOR.2018.57124](https://doi.org/10.22105/DMOR.2018.57124)
- Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European journal of operational research*, 197(1), 243-252.
- Vaezi, H., & Memarpour, M. (2018). Evaluation of the performance and ranking of the efficiency of Tehran branches of a private bank using two-stage data envelope analysis and Borda ranking technique. *Decisions and operations research*, 2(2), 116-129. (In Persian). [10.22105/DMOR.2018.55774](https://doi.org/10.22105/DMOR.2018.55774)
- Yan, Q., Zhao, F., Wang, X. et al. (2019). The network data envelopment analysis models for non-homogenous decision making units based on the sun network structure. *Central European journal of operations research*, 27, 1221-1244.

