E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 7, No. 3 (2022) 438–452.

Paper Type: Original Article

Decision to Choose Optimal Trading Position in Future Contracts of Consumer Goods with Stochastic Control, Based on Storage Theory and Convenience Yield

Mehdi Khajezadeh Dezfouli[1], Mansour Momeni[1,*], Hanan Amoozad Mahdireji[1], Mohammad Hosein Pourkazemi[2]

[1] Department of Industrial Management, Management Faculty, Tehran University, Tehran, Iran; mehdezkh@gmail.com, mmomeni@ut.ac.ir; h.amoozad@ut.ac.ir.

[2] Department of Economical Science, Faculty of Economyand Policy, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran; m-pourkazemi@sbu.ac.ir.

Citation:

Momeni, M., Amoozad Mahdireji, H., Pourkazemi, M. H., & Khajezadeh Dezfouli, M. (2022). Decision to choose optimal trading position in future contracts of consumer goods with stochastic control, based on storage theory and convenience yield. *Journal of decisions and operations research, 7*(3), 438-.

Received: 15/12/2020 Reviewed: 12/03/2021 Revised: 23/05/2021 Accepted: 13/06/2021

Abstract

Purpose: The main theory governing the valuation of futures contracts is the Storage Theory, in which the concept of Convenience Yield is the most important factor involved in contract pricing. Convenience Yield is a factor that complicates the process of valuing futures contracts. Trying to determine the best trading position in futures contracts with different underlying assets and with different maturities is the goal of this article. In this article, using the theory of storage and the concept of welfare fruits and using the method of dynamic random control, a model for selecting the optimal trading position in futures contracts of consumer goods in both single and double goods is presented.

Methodology: In this article, the theory of storage and the concept of Convenience Yield are used. Also, by using the dynamic stochastic control method, a model for choosing the optimal trading position in the futures contracts of consumer goods is expressed in two modes of single commodity and dual commodity.

Findings: The results of the implementation of the model in the Iranian Commodity Exchange market show that the model in the single commodity mode has been able to fully identify the correct trading position and in the two commodity mode has been 91.7% successful.

Originality/Value: Presenting a model to determine the optimal trading position based on Storage Theory and the existence of two stochastic factors of Convenience Yield and stock price using dynamic stochastic control method in single and multi-commodity mode in a specific investment horizon on consumer goods is the most important innovation.

Keywords: Future contract, Stochastic control, Storage theory, Convenience yield.

Corresponding Author: mmomeni@ut.ac.ir

https://dorl.net/dor/ 20.1001.1.25385097.1401.7.3.4.3

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۷، شماره (۳)، (۱۴۰۱)، ۴۵۲-۴۳۸

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

تصمیم در انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی با کنترل پویای تصادفی و بر مبنای تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی

مهدی خواجه زاده دزفولی[1]، منصور مومنی[1،*]، حنان عموزاد مهدیرجی[1]، محمدحسین پورکاظمی[2]

[1]گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

[2]گروه علوم اقتصادی، دانشکده اقتصاد و علوم سیاسی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: اصلی‌ترین تئوری حاکم بر ارزش‌گذاری قراردادهای آتی، تئوری ذخیره‌سازی است که در آن مهمترین فاکتور دخیل در قیمت‌گذاری قرارداد، مفهومی تحت عنوان ثمرات رفاهی است. ثمرات رفاهی عاملی است که فرآیند ارزش‌گذاری قراردادهای آتی را با پیچیدگی‌های جدی مواجه کرده است. تلاش برای تعیین بهترین موضع معاملاتی در قراردادهای آتی با دارایی پایه گوناگون و با تاریخ سررسید مختلف هدفی است که در این مقاله انجام گرفته است.

روش‌شناسی پژوهش: در پژوهش حاضر سعی می‌شود که با استفاده از تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی و با بهره‌گیری از روش کنترل پویای تصادفی مدلی جهت انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی در دو حالت تک کالایی و دو کالایی ارائه شود.

یافته‌ها: نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل در بازار بورس کالای ایران نشان می‌دهد که مدل در حالت تک کالایی به طور کامل توانسته است که موضع معاملاتی درست را تشخیص دهد و در حالت دو کالایی ۹۱/۷ درصد موفق عمل کرده است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: ارائه مدلی جهت تعیین موضع بهینه معاملاتی با استفاده از تئوری ذخیره‌سازی و در نظر گرفتن دو عامل تصادفی ثمرات‌رفاهی و قیمت نقدی با استفاده از روش کنترل پویای تصادفی در حالت تک کالایی و چند کالایی در یک افق سرمایه گذاری مشخص آن هم فقط بر روی کالاهای مصرفی (و نه سرمایه‌ای) مهمترین نوآوری مقاله حاضر است.

کلیدواژه‌ها: قرارداد آتی، کنترل پویای تصادفی، تئوری ذخیره‌سازی، ثمرات رفاهی.

۱- مقدمه

قرارداد آتی توافق‌نامه‌ای مبنی بر خرید یا فروش دارایی پایه در زمان معینی در آینده و با قیمت مشخص است. در این قراردادها یکی از طرفین موافقت می‌کند تا دارایی معینی را در تاریخ و قیمتی از پیش تعیین شده در آینده خریداری نماید. طرف دیگر نیز موافقت می‌کند تا این دارایی را در تاریخ مقرر به قیمتی مشخص به وی تحویل دهد. در این قرارداد، تبادل کالا و پول به روز مبادله موکول می‌گردد و در آن طرفین، بدون توجه به قیمت روز دارایی پایه، به مبادله مبادرت می‌کنند. قیمتی که امروز برای پرداخت در سررسید تعیین می‌گردد، قیمت آتی نامیده می‌شود. در مقابل قیمت بازاری دارایی پایه که می‌توان آن را در زمان حاضر خریداری کرد، قیمت نقدی نامیده می‌شود. این که در یک تاریخ مشخص، بر روی قرارداد آتی چه موضع معاملاتی اتخاذ نمود تا در سررسید سود حاصل مثبت باشد، موضوع پژوهش حاضر می‌باشد. توجه شود که قراردادهای آتی را معمولا به دو گروه، قراردادهای آتی مالی و قراردادهای آتی کالا طبقه‌بندی می‌نمایند. دارایی پایه قراردادهای آتی مالی، ابزارهایی نظیر سهام، اوراق قرضه و ارز است، درحالی‌که دارایی پایه موضوع قرارداد در قراردادهای آتی کالا شامل مواردی همچون

* نویسنده مسئول

mmomeni@ut.ac.ir

https://dorl.net/dor/ 20.1001.1.25385097.1401.7.3.4.3

محصولات کشاورزی، فلزات و مواد نفتی است. تمرکز اصلی این مقاله بر قراردادهای آتی کالاست. دارایی‌های پایه قراردادهای آتی کالا، کالا هستند که به صورت فیزیکی تولید، انتقال، ذخیره و مصرف می‌شوند؛ بنابراین طبیعی است که این بازار متفاوت از بازار اوراق بهادار رفتار کند. هزینه‌های نگهداری، تاخیر در تحویل کالا، گردش کالاها در سراسر جهان، هزینه‌های حمل، صرف اقتصادی تولید، حجم تولید کالای پایه، حجم مبنای قرارداد پایه و... از موضوعات مطرح در بورس کالا هستند.

مدل‌های بسیاری برای تعیین ارزش قرارداد آتی توسعه یافته است که طی یک تقسیم‌بندی می‌توان آن‌ها را به دو دسته، مدل‌های صرف ریسک و مدل‌های مبتنی بر تئوری ذخیره‌سازی تقسیم کرد. در مدل‌های صرف ریسک، با بهره‌گیری از ارزش دارایی پایه در بازار نقد، نرخ بهره پیش‌بینی شده و هزینه‌های گوناگون به ارزش‌گذاری قرارداد می‌پردازند. بااین‌حال در تئوری ذخیره‌سازی، تفاوت بین قیمت فعلی و آتی دارایی را با در نظر گرفتن نرخ بهره، دوره ذخیره کالا، هزینه انبارداری و مفهومی تحت عنوان ثمرات رفاهی[۱] بیان می‌کنند.

ثمرات رفاهی، بر اساس تعریف برنان و شوارتز[۲] (۱۹۸۵) عبارت از منفعت بیشتری است که مالکیت فیزیکی کالا، با وجود هزینه‌های ذخیره‌سازی، نسبت به داشتن قرارداد آتی آن کالا برای سرمایه‌گذار ایجاد می‌کند. یکی از مهم‌ترین دلایل وجود ثمرات رفاهی مربوط به عدم ریسک‌پذیری معامله‌گران نسبت به کمبود آن کالا و علاقه فراوان آنان به در اختیار داشتن انبارهای مملو از کالای مورد معامله است. از آنجا که عمده بازیگران بورس کالا و انرژی در سطح جهان، دولت‌ها و شرکت‌های وابسته به آن‌ها و یا تجار بزرگ هستند، هرگونه تغییر در ذخایر تجاری، آنان را با ریسک‌های متعددی روبرو می‌سازد و امکان تغییر قیمت‌ها را افزایش می‌دهد. به‌عنوان مثال، به صورت متعدد قیمت نفت خام و محصولات وابسته به دلایل کاهش (افزایش) ذخایر تجاری برخی از کشورها افزایش (کاهش) یافته است که این موضوع نشان‌دهنده اهمیت مفهوم ثمرات رفاهی است.

مفهوم ثمرات رفاهی نخستین بار در تئوری ذخیره‌سازی توسط کالدور[۳] (۱۹۳۹)، ورکینگ[۴] (۱۹۴۸، ۱۹۴۹)، تلسر[۵] (۱۹۵۸) و برنان[۶] (۱۹۵۸) معرفی گردید. تئوری ذخیره‌سازی، رفتار ثمرات رفاهی را با مشاهده سطوح موجودی انبار دارایی‌ها توضیح می‌دهد. کالدور (۱۹۳۹) و ورکینگ (۱۹۴۸، ۱۹۴۹) مفهوم ثمرات رفاهی را از موجودی انبار اقتباس نموده و آن را تابعی معکوس از سطوح موجودی انبار معرفی نمودند، به‌نحوی‌که با افزایش موجودی انبار، ثمرات رفاهی کاهش می‌یابد. براین اساس، در مواردی که موجودی انبار به اندازه کافی زیاد باشد، ارزش ثمرات رفاهی صفر یا نزدیک به صفر خواهد بود و برعکس، بالا بودن ثمرات رفاهی دلالت بر سطح پایین موجودی انبار است. پینداک[۷] (۲۰۰۱) ثمرات رفاهی را منعکس کننده اطلاعات بازار آتی و نقدی دانسته و آن را به صورت تابعی از سطح فعلی ذخایر تجاری و خالص تقاضای مورد انتظار معامله گران در بازار آتی تعریف می‌نماید. در زمینه مطالعات تجربی، مطالعات اولیه درباره ثمرات رفاهی توسط تلسر (۱۹۵۸) انجام پذیرفت و در آن پژوهش، وی فرضیه تئوری ذخیره‌سازی که با افزایش موجودی انبار، ثمرات رفاهی کاهش می‌یابد را تائید نمود. بعدتر بررسی‌ای در زمینه‌ی به‌کارگیری ثمرات رفاهی، توسط برنان و شوارتز (۱۹۸۵) انجام می‌گیرد. آن‌ها مدلی را برای ارزش‌گذاری جریان‌های نقدی حاصل از سرمایه‌گذاری در منابع طبیعی استخراج می‌نمایند. مهم‌ترین اقدام جهت مدل‌سازی مفهوم ثمرات رفاهی توسط شوارتز[۸] (۱۹۹۷) انجام شد و سه مدل تک، دو و سه عاملی ارائه داد. با الگو گیری از این مدل‌ها، مطالعات متعددی انجام می‌شود. تاکید بیشتر این مدل‌ها در مورد اضافه کردن عامل‌های ریسکی، آزمون تئوری ذخیره‌سازی با بهره‌گیری از داده‌های موجودی انبار در بازار دارایی‌هایی همچون دانه‌های خوراکی، نفت خام، گاز طبیعی و فلزات می‌باشد. به‌عنوان مثال در رابطه با بازار نفت می‌توان به مطالعات گیبسون و شوارتز[۹] (۱۹۹۰)، کورتزار و شوارتز[۱۰] (۱۹۹۳)، کارمونا و لوکوسکی[۱۱] (۲۰۰۴)، کاساسوس و کلین‌دوفرسن[۱۲] (۲۰۰۵)، لازو و همکاران[۱۳] (۲۰۰۷)، الکویسیت و کیلیان[۱۴] (۲۰۱۰) اشاره کرد. همچنین دونکان و پاسیک دونکان[۱۵] (۲۰۱۲)، سان و همکاران[۱۶] (۲۰۱۴)، باساک و پاولوا[۱۷] (۲۰۱۶)، میرانتس و همکاران[۱۸] (۲۰۱۸)،

[1] Convenience yield
[2] Brennan and Schwartz
[3] Kaldor
[4] Working
[5] Telser
[6] Brennan
[7] Pindyck
[8] Schwartz
[9] Gibson and Schwartz
[10] Cortazar and Schwartz
[11] Carmona and Ludkovski
[12] Casassus and Collin-Dufresne
[13] Lazo et al.
[14] Alquist and Kilian
[15] Duncan and Pasik-Duncan
[16] Sun et al.
[17] Basak and Poalva
[18] Mirantes et al.

انگشتری و لنگ[1] (۲۰۱۹) و یان و سان[2] (۲۰۲۰) با در نظر گرفتن مفهوم ثمرات رفاهی مدل‌هایی برای قیمت‌گذاری نقدی و رابطه بین قیمت نقدی و آتی ارائه دادند.

توجه شود برای درك بهتر اهمیت ثمرات رفاهی، باید میان دارایی‌های سرمایه‌ای و دارایی‌های مصرفی تمایز قائل شد. برخلاف دارایی‌های سرمایه‌ای که به‌منظور سرمایه‌گذاری نگهداری شده و در هر شرایطی سرمایه‌گذاران به دنبال بهره‌گیری و بهره‌برداری از فرصت‌های آربیتراژی می‌باشند، معامله‌گرانی که کالاهای مصرفی را در انبار نگهداری می‌کنند، حتی درصورتی‌که فرصت‌های آربیتراژی برای کسب سود داشته باشند، چنانچه موجودی انبار آن دارایی پائین باشد، تمایل چندانی به فروش آن و بهره‌گیری از فرصت آربیتراژی احتمالی ندارند؛ چرا که بر این باورند که مالکیت فیزیکی یک دارایی منافعی دارد که مالکیت قرارداد آتی آن دارایی فاقد آن است. دسترسی به دارایی فیزیکی، آن‌ها را قادر می‌سازد که به‌طور کارآمدتری نسبت به شوك‌های غیرمنتظره عرضه و تقاضا واکنش نشان داده و بتوانند از اختلالات هزینه‌بر در فرآیند تولید اجتناب نمایند؛ بنابراین تحلیل ثمرات رفاهی به‌عنوان مهم‌ترین رکن قیمت‌گذاری قراردادهای آتی کالایی و حلقه واسط بازار قراردادهای آتی و بازار نقدی ضرورت دارد.

روش‌های ارزش‌گذاری قراردادهای آتی مبتنی بر تئوری ذخیره‌سازی طیف وسیعی از روش‌های فرایندهای تصادفی پیچیده نظیر فرایندهای وینر، وینر تعمیم یافته، ایتو و... را در بر می‌گیرد. باچلیر[3] (۱۹۰۰) از اولین کسانی بود که نشان داد بازارهای مالی از فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کنند. در بررسی که توسط دکزیت و همکاران[4] (۱۹۹٤) بر روی قیمت‌های نقدی مس انجام شد، به این نتیجه رسیدند که باید فرضیه بازگشت به میانگین را پذیرفت. نتایج مشابه تحقیق آن‌ها را می‌توان در تحقیقات پیرنگ[5] (۲۰۱۱) مشاهده کرد. چیکیبوو و چین‌هامو[6] (۲۰۱۳) مدلی تصادفی برای قیمت نقدی ارائه دادند. بهره‌گیری از مدل حرکت براونی هندسی جهت شبیه سازی قیمت‌های آتی بازار را می‌توان در تحقیق بنس و لمپا[7] (۲۰۱٤) ملاحظه کرد. یان[8] (۲۰۰۲) در پژوهش «ارزش‌گذاری مشتقات کالایی در یک مدل چندعاملی جدید» مدل‌های قیمت‌گذاری موجود را از طریق اضافه کردن نوسانات تصادفی به قیمت نقد کالا توسعه می‌دهد. در مطالعه‌ای دیگر، الات و همکاران[9] (۲۰۱٦) سعی کردند مدلی برای قیمت‌گذاری نقدی ارائه دهند. همچنین گو و همکاران[10] (۲۰۱۸) در مورد مسئله شکاف قیمتی بین قراردادهای آتی و نقدی بر مبنای مدل‌های تصادفی پویا پژوهشی انجام داند. آن‌ها این موضوع را با حرکت براونی مدل‌سازی کردند. بااین‌حال ورود به موضوع انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی با استفاده از مدل‌های کنترل تصادفی، اقدامی نوین است که در این مقاله بدان پرداخته می‌شود.

محققین در پژوهش حاضر درصدد هستند که با استفاده از تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی و با بهره‌گیری از روش کنترل پویای تصادفی مدلی جهت انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی ارائه دهند و پاسخی برای پرسش اصلی «مدل بهینه انتخاب موضع معاملاتی صحیح در پرتفوی قراردادهای آتی کالاهای مصرفی بر مبنای تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی بر اساس روش کنترل پویای تصادفی چگونه است؟» بیابند.

در ادامه در ابتدا روش پژوهش، به اختصار مرور خواهد شد و پس از آن، مدل‌هایی برای یافتن بهترین موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه‌گذاری طراحی خواهد شد. مدل‌های طراحی شده، در بورس کالای ایران پیاده‌سازی می‌شوند و نتایج حاصل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲- روش پژوهش

بر اساس تقسیم‌بندی ساندرز و همکاران[11] (۲۰۰۹) می‌توان انواع جهت‌گیری‌های پژوهش را به سه دسته کاربردی، بنیادی و توسعه‌ای تقسیم نمود. هدف پژوهش حاضر توسعه مدلی جهت تعیین موضع مناسب ورود به قراردادهای آتی کالایی است و بر این اساس پژوهشی از نوع توسعه‌ای محسوب می‌گردد. همچنین پژوهش‌ها را از نظر ماهیت و کیفیت به سه دسته اکتشافی، توصیفی و تبیینی تقسیم می‌کنند.

[1] Angoshtari and Leung
[2] Yan and Sun
[3] Bachelier
[4] Dixit et al.
[5] Pirrong
[6] Chikobvu and Chinhamu
[7] Benth and Lempa
[8] Yan
[9] Elaut et al.
[10] Guo et al.
[11] Saunders et al.

پژوهش اکتشافی ابزار با ارزشی برای یافتن آنچه که در حال اتفاق است می‌باشد که درصدد یافتن بینش جدید، پاسخ به سؤالات و ارزیابی پدیده‌ها در نگاه جدید است (ساندرز و همکاران، ۲۰۰۹). این پژوهش به دلیل اینکه در تلاش برای ارائه مدلی جدید جهت بهینه‌سازی انتخاب موضع ورود به قراردادهای آتی کالایی است و نگاهی جدید به این مسئله دارد، از نوع اکتشافی است؛ به عبارت دیگر به دنبال کشف متغیرها، محدودیت‌ها و روابط ریاضی جدید در مدل است.

رویکردهای پژوهش به دو دسته قیاسی و استقرایی تقسیم می‌شود. در رویکرد قیاسی، نظریه یا فرضیه‌ای توسعه داده می‌شود و سپس یك استراتژی پژوهش جهت آزمون آن طراحی می‌شود. در رویکرد استقرایی، داده‌ها جمع‌آوری شده و نظریه‌ای به‌عنوان نتیجه تحلیل داده‌ها توسعه داده می‌شود. در این پژوهش، مدل‌سازی‌های ریاضی بر اساس رویکرد قیاسی انجام می‌گیرد، بنابراین پژوهش حاضر نیز دارای رویکردی قیاسی است. ساندرز و همکاران به استراتژی‌های پژوهشی چون تجربی، پیمایشی، اقدام‌پژوهی، نظریه داده‌بنیاد، قوم‌نگاری، بررسی موردی و بررسی تاریخی اشاره کرده‌اند؛ اما استراتژی پژوهش بکار رفته در اینجا یك استراتژی چهار گامی است. مراحل این استراتژی عبارتند از: ۱- بررسی موقعیت مسئله، ۲- ساخت مدل، ۳- مقایسه مدل و دنیای واقع و ٤- اعمال تغییرات.

گزینه‌های پژوهش نیز به سه دسته تك‌روشی، چندروشی و آمیخته تقسیم می‌شوند. اگر در انتخاب روش‌های پژوهش از یك روش جمع‌آوری داده و یك رویه تحلیل داده متناظر با آن بهره‌گیری شود، گزینه پژوهش تك‌روشی نامیده می‌شود. در صورتی‌که از بیش از یك روش جمع‌آوری داده و رویه‌های تحلیل برای پاسخگویی به پرسش پژوهش بهره‌گیری شود، گزینه پژوهش چندروشی خواهیم داشت. در روش پژوهش آمیخته از روش‌های گردآوری داده کمی و کیفی و رویه‌های تحلیل مرتبط با آن‌ها، به شیوهای موازی (در یك زمان) و یا ترتیبی (یکی پس از دیگری) بهره‌گیری می‌شود، اما با هم ترکیب نمی‌گردند. به این معنا که، اگرچه روش پژوهش آمیخته از هر دو دیدگاه کمی و کیفی بهره‌گیری می‌کند، بااین‌حال داده‌های کمی به شیوه‌ای کمی و داده‌های کیفی به شیوه‌ای کیفی تحلیل می‌شوند. پژوهش حاضر تك روشی است، زیرا در آن از یك روش جمع‌آوری داده و یك رویه تحلیل داده متناظر با آن بهره‌گیری می‌شود. افق زمانی پژوهش نیز به دو دسته مقطعی و طولی تقسیم می‌شود. در پژوهش مقطعی، پدیده‌ای خاص در یك زمان خاص بررسی می‌گردد؛ اما در پژوهش طولی رویدادها در طول زمان بررسی می‌شوند و امکان بررسی تغییر و توسعه در آن‌ها وجود دارد. پژوهش حاضر به لحاظ افق زمانی مقطعی محسوب می‌شود، زیرا در یك مقطع زمانی مورد آزمون قرار می‌گیرد. روش و ابزار جمع‌آوری داده‌ها در این پژوهش، بررسی کتابخانه‌ای است که مدل در بورس کالای ایران پیاده‌سازی می‌شود. داده‌های مورد نیاز (داده‌های روزانه قیمت آتی و گواهی سپرده کالایی)، فی مابین سال‌های ۱۳۹۷ الی ۱۳۹۹ از سایت اطلاع رسانی بورس کالای ایران[1] جمع‌آوری و تحلیل می‌شوند. کالاها و قراردادهای مورد رجوع مربوط به محصولات کشاورزی (زعفران، زیره و پسته) است که در بازه مورد نظر دارای وضعیت معاملاتی فعالی بوده باشند. داده‌های مربوط به گواهی سپرده کالایی به‌عنوان قیمت نقدی بهره‌گیری می‌شوند و داده‌های مربوط به قیمت پایانی قرارداد آتی جهت قیمت آتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳- مدل‌سازی

در این بخش، مدلی مبتنی بر رویکرد کنترل پویای تصادفی جهت تعیین موضع معاملاتی درست و میزان سرمایه‌گذاری در یک و یا پرتفویی دو کالایی از قراردادهای آتی، ارائه می‌شود. در رویکرد مورد استفاده، برای ساخت مدلی جهت یافتن موضع معاملاتی درست، از مدل قیمت نقدی تصادفی و به‌طور خاص، مدل شناخته شده دو عاملی شوارتز (۱۹۹۷) و ثمرات رفاهی استفاده شده است. با حل معادلات مرتبط، استراتژی معاملات آتی بهینه تعیین می‌شود.

۱-۳- مدل تک کالایی با دو عامل تصادفی

هدف از ارائه این مدل، بیان اثرات دینامیکی ثمرات رفاهی و وابستگی قیمت نقدی و ثمرات رفاهی است؛ بنابراین ثمرات رفاهی ($(\delta_t)_{t\geq0}$) به‌عنوان یک عامل تصادفی و قیمت نقدی ($(S_t)_{t\geq0}$) به‌عنوان عامل دیگر تصادفی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت با دو عامل تصادفی وابسته به هم روبرو هستیم که سرعت رشد عامل قیمت نقدی $(S_t)_{t\geq0}$ – که با یک حرکت براونی هندسی ارائه می‌شود – با یک عامل

[1] www.ime.co.ir

ثمرات رفاهی $(\delta_t)_{t\geq 0}$ – که عامل تصادفی بازگشت به میانگین است– اصلاح می‌شود. بنابراین اگر لگاریتم قیمت دارایی پایه را با X_t نشان دهیم، آنگاه رابطه زیر بین قیمت نقدی که با ثمرات رفاهی پیوسته تصادفی هدایت می‌شود برقرار است:

$$X_t=log(S_t). \tag{۱}$$

$$dX_t=\left(\mu-\frac{\eta^2}{2}-\delta_t\right)dt+\eta dZ_t^s. \tag{۲}$$

$$d\delta_t=\kappa(\alpha-\delta_t)dt+\overline{\eta}dZ_t^\delta. \tag{۳}$$

در معادلات بالا، Z_t^s و Z_t^δ دو حرکت براونی استاندارد، تحت معیار فیزیکی P با همبستگی پیوسته $\rho\epsilon(-1,1)$، μ نرخ رانش[1] و η نرخ واریانس است. ثمرات رفاهی تصادفی از مدل ارنشتین–اولنبک پیروی می‌کند که در واقع به صورت بازگشت به میانگین با سطح تعادل ثابت α، نوسانات $\overline{\eta}$ و سرعت بازگشت به میانگین κ است و لازم است که $\kappa,\overline{\eta},\eta>0$ و $\mu,\alpha\epsilon R$.

دقت شود در صورتی که $0\leq\rho$ باشد، در این صورت نرخ بازگشت به میانگین ثمرات رفاهی نزدیک صفر خواهد بود. همان‌گونه در **رابطه‌های (۲)** و **(۳)** مشاهده می‌شود هنگامی که S_t به دلیل افزایش dZ_t^s افزایش می‌یابد، به لطف نرخ مثبت ρ، نرخ ثمرات رفاهی δ_t نیز افزایش می‌یابد. این موضوع به نوبه خود، نرخ رانش قیمت نقدی را کاهش می‌دهد. از منظر مالی این رابطه نشان‌دهنده پیوند اقتصادی درون‌زا بین سطح موجودی کالا و قیمت نقدی است. هنگامی که ذخایر تجاری کالا کم است، کمبود احتمالا باعث افزایش قیمت‌ها می‌شود و نگهداری فیزیکی کالا ارزشمندتر می‌شود.

مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذار تحت معیار فیزیکی P فرمول‌بندی خواهد شد، اما برای قیمت‌گذاری آتی‌های کالایی نیاز است که از معیار قیمت‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک Q بهره‌گیری نمود. Q معیار مارتینگل معادل است که برای قیمت‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک استفاده می‌شود. برای این منظور، نرخ بهره ثابت $r\geq 0$ را فرض و تغییر اندازه از P به Q را انجام می‌دهیم. در این صورت پویایی حرکات براونی Z_t^s و Z_t^δ از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$d\tilde{Z}_t^s=\frac{\mu-r}{\eta}dt+dZ_t^s. \tag{۴}$$

$$d\tilde{Z}_t^\delta=\frac{\lambda}{\overline{\eta}}dt+dZ_t^\delta. \tag{۵}$$

لگاریتم قیمت نقدی تصادفی در حالت بی‌تفاوتی نسبت به ریسک برابر است با:

$$dX_t=(r-\delta_t-\frac{\eta^2}{2})dt+\eta d\overline{Z}_t^s. \tag{۶}$$

$$d\delta_t=\kappa(\overline{\alpha}-\delta_t)dt+\overline{\eta}d\overline{Z}_t^\delta. \tag{۷}$$

همچنین در این حالت سطح تعادل برای ثمرات رفاهی در مدل ارنشتین–اولنبک را با $\overline{\alpha}$ نشان می‌دهیم که در این صورت برابر است با:

$$\overline{\alpha}\equiv\alpha-\frac{\lambda}{\kappa}. \tag{۸}$$

که λ ریسک قیمت بازار است که در ارتباط با Z_t^δ و سرعت بازگشت به میانگین κ به دست می‌آید. با بهره‌گیری از ثابت λ، ثمرات رفاهی همچنان از مدل ارنشتین–اولنبک تحت اندازه Q پیروی می‌کند که در مقایسه با اندازه P دارای یک سطح تعادل متفاوت $(\overline{\alpha})$ است.

حال یک بورس کالا با n قراردادهای آتی با سررسید $T_i,\ i=1,\ldots,n$ را در نظر بگیرید. در این بازار قیمت قرارداد آتی کالای i در زمان t با سررسید در T_i را با $F_t^{(i)}$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$F_t^{(i)}\equiv F^{(i)}(t,X_t,\delta_t)=E\left[e^{X_T}:X_t,\delta_t\right]. \tag{۹}$$

در این معادله قیمت قرارداد آتی $F_t^{(i)}$ تابعی از زمان t، لگاریتم قیمت نقدی (X_t) و ثمرات رفاهی (δ_t) است. برای هر $i=1,\ldots,n$، تابع قیمت $F^{(i)}(t,X_t,\delta_t)$، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{\eta^2}{2}\ \frac{\partial^2F^{(i)}}{\partial X^2}+\rho\eta\overline{\eta}\frac{\partial^2F^{(i)}}{\partial X\partial\delta}+\frac{\overline{\eta}^2}{2}\ \frac{\partial^2F^{(i)}}{\partial\delta^2}+\left(r-\delta-\frac{\eta^2}{2}\right)\frac{\partial F^{(i)}}{\partial X}+\kappa(\tilde{\alpha}-\delta)\frac{\partial F^{(i)}}{\partial\delta}=-\frac{\partial F^{(i)}}{\partial t}. \tag{۱۰}$$

که $(t,x,\delta)\epsilon[0,T_i)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$ است. شرایط انتهایی نیز برابر $F_t^{(i)}(T_i,X,\delta)=exp(X)$ که $x\epsilon R$ است.

[1] Drift Rate

مدل پایه تعریف شده در **رابطه‌های (۱)** و **(۲)** در انطباق با نمودار قراردادهای آتی پایدار نیست. در بورس کالا در هر روز خاص، نمودار قراردادهای آتی، ساختار جدیدی برای قراردادها مبتنی بر $F_t^{(i)}$ و T تعریف می‌کند. برای حل این مسئله، شوارتز (۱۹۹۷) و کورتازور و نارانجو[1] (۲۰۰۶) در مدل بی تفاوت نسبت به ریسک که در **رابطه‌های (۶)** و **(۷)** بیان گردید، ثابت کردند که ثمرات رفاهی (حداقل به‌طور مشروط) یک فرایند گاوسی است و امید ریاضی شرطی که مقدار **رابطه (۹)** را بیان می‌کند را به‌طور صریح محاسبه می‌نماید. بنابراین قیمت قراردادهای آتی، فرم آفین نمایی زیر را می‌پذیرد:

$$F_t^{(i)}=exp(X_t+A_i(t)+B_i(t)\delta_t). \tag{۱۱}$$

در برخی از توابع $A_i(t)$ و $B_i(t)$ فقط به متغیرهای زمان بستگی دارند و وابستگی به متغیرهای وضعیت ندارند. توابع $A_i(t)$ و $B_i(t)$ از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم یافت می‌شوند:

$$r+\frac{\overline{\eta}^2}{2}B_i(t)^2+B_i(t)(\alpha\kappa+\rho\eta\overline{\eta})+A_i'(t)=0. \tag{۱۲}$$

$$B_i'(t)-\kappa B_i(t)-1=0. \tag{۱۳}$$

که در آن $t\in[0,T_i)$ و با شرایط انتهایی $A_i(T_i)=0$ و $B_i(T_i)=0$ است. **معادلات (۱۲)** و **(۱۳)** پاسخ‌های صریح زیر را می‌پذیرند:

$$A_i(t)=\left(r-\tilde{\alpha}+\frac{\overline{\eta}^2}{2\kappa^2}-\frac{\rho\eta\overline{\eta}}{\kappa}\right)(T_i-t)+\frac{\overline{\eta}^2}{4}\frac{1-e^{-2\kappa(T_i-t)}}{\kappa^3}+(\tilde{\alpha}\kappa+\rho\eta\overline{\eta}-\frac{\overline{\eta}^2}{\kappa})\frac{1-e^{-\kappa(T_i-t)}}{\kappa^2}. \tag{۱۴}$$

$$B_i(t)=-\frac{1-e^{-\kappa(T_i-t)}}{\kappa}. \tag{۱۵}$$

با بهره‌گیری از فرمول ایتو بر روی **معادله (۱۱)**، قیمت قرارداد آتی با سررسید در T_i طبق معادلات دیفرانسیل تصادفی استنتاج می‌شود:

$$\frac{dF_t^{(i)}}{F_t^{(i)}}=\mu_i(t)dt+\eta dZ_t^s+\overline{\eta}B_i(t)dZ_t^\delta. \tag{۱۶}$$

تحت اندازه فیزیکی P، نرخ رانش به گونه زیر به دست می‌آید:

$$\mu_i(t)=(\lambda+\tilde{\alpha}\kappa+\rho\eta\overline{\eta})B_i(t)+\frac{\overline{\eta}^2}{2}B_i(t)^2+\mu+A_i'(t)+\delta\left(B_i'(t)-\kappa B_i(t)-1\right)=\mu-r-\frac{\lambda(1-e^{-\kappa(T_i-t)})}{\kappa}. \tag{۱۷}$$

که عبارت اخیر از **معادلات (۱۲)** و **(۱۵)** به دست می‌آید. از عبارت بالا یک نتیجه بسیار مهم به دست می‌آید و آن این که نرخ رانش $F_t^{(i)}$ مستقل از X_t و δ_t است، به این معنی که تابع ارزش سرمایه‌گذار مستقل از X_t و δ_t است. این یک نتیجه مهم کاربردی است که به طرز عجیبی مسئله بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذار را ساده می‌کند و در نهایت منجر به یک پاسخ صریح می‌شود.

برای ساده‌سازی متن عبارات، با استفاده از ترکیب خطی dZ_t^s و dZ_t^δ **رابطه (١٦)** را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sigma_i(t)dZ_t^{(i)}\equiv\eta dZ_t^s+\overline{\eta}B_i(t)dZ_t^\delta. \tag{۱۸}$$

که $Z_t^{(i)}$ یک حرکت براونی استاندارد است و

$$\sigma_i(t)^2=\eta^2+2\rho\overline{\eta}\eta B_i(t)+\overline{\eta}^2B_i(t)^2. \tag{۱۹}$$

ضریب نوسانات آتی است. بر اساس این مدل، قیمت‌های آتی مستقل نیستند و یک ساختار همبستگی خاص را می‌پذیرند. به‌عنوان مثال، دو قرارداد آتی با سررسید T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. معادلات دیفرانسیل تصادفی برای قیمت آتی عبارت است از:

$$\frac{dF_t^{(i)}}{F_t^{(i)}}=\mu_i(t)dt+\sigma_i(t)dZ_t^{(i)},\ \ i\epsilon\{1,2\}. \tag{۲۰}$$

که دو حرکت براونی $Z_t^{(1)}$ و $Z_t^{(2)}$ با هم همبستگی دارند:

$$Z_t^{(1)}Z_t^{(2)}=\rho_{12}(t)dt. \tag{۲۱}$$

که

$$\rho_{12}(t)=\frac{\overline{\eta}^2B_1(t)B_2(t)+(B_1(t)+B_2(t)\rho\eta\overline{\eta}+\eta^2)}{\sigma_1(t)\sigma_2(t)}. \tag{۲۲}$$

که نه تنها به پارامترهای نقدی $(\rho,\eta,\overline{\eta})$ بلکه به دو تابع قیمت آتی از طریق $B_1(t)$ و $B_2(t)$ بستگی دارد.

حال با بهره‌گیری از نتایج حاصل می‌توان فرایند بهینه ثروت و انتخاب موضع معاملاتی را به دست آورد. فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تنها به مبادله قراردادهای آتی می‌پردازد و مورد معامله تعداد $\tilde{\pi}_1(t,F_1)$ واحد قرارداد آتی در زمان t با تاریخ سررسید T_1 است. بنابراین

[1] Cortazar and Naranjo

فرایند تغییرات ثروت سرمایه‌گذار به صورت $d\widetilde{W}_t=\widetilde{\pi}_1(t,F_t^{(1)})dF_t^{(1)}$ است. با بهره‌گیری از **معادلات قیمت آتی (۱۱)** و **(۲۰)**، می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر را برای روند ثروت و قیمت آتی بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} d\widetilde{W}_t \\ dF_t^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\pi}_1\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \widetilde{\pi}_t\ \eta F_t^{(1)} & \widetilde{\pi}_t\ \tilde{\eta} B_1(t)F_t^{(1)} \\ \eta F_t^{(1)} & \tilde{\eta} B_1(t) F_t^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_t^{s} \\ dZ_t^{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\pi}_1\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \widetilde{\pi}_1\ \sigma_1(t)F_t^{(1)} \\ \sigma_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix} dZ_t^{(1)}. \quad (۲۳)$$

متغیر کنترل $\widetilde{\pi}_1$ قابل قبول[1] است اگر $\widetilde{\pi}_1$ قابل اندازه‌گیری باشد و دستگاه **معادلات (۲۳)** یک پاسخ منحصر به فرد برای $(\widetilde{W}_t,F_t^{(1)})$ با شرایط $E(\int_t^T \widetilde{\pi}_1(s,F_s^{(1)})^2(F_s^{(1)})^2ds)<\infty$ را پذیرفته باشد. مجموعه استراتژی‌های قابل قبول در هنگام اتخاذ موضع معاملاتی در زمان t را با $\widetilde{A}_1$ نشان می‌دهیم. اگر اولویت ریسک سرمایه‌گذار با تابع نمایی زیر توصیف شود:

$$U(\omega)=-e^{-\gamma\omega}, \quad \omega\epsilon R. \quad (۲۴)$$

که در آن $\gamma>0$ پارامتر ریسک پذیری ثابت است، آنگاه برای یک افق معاملاتی $[0,T]$، سرمایه‌گذار به دنبال یک استراتژی قابل قبول است که سود مورد انتظار در زمان T را با حل مسئله بهینه‌سازی به حداکثر رساند:

$$\tilde{u}(t,\omega,F_1)=Sup_{\widetilde{\pi}_1\epsilon\widetilde{A}_t}\, E\left(U(\widetilde{W}_T)\middle|\widetilde{W}_t=\omega,F_t^{(1)}=F_1\right). \quad (۲۵)$$

توجه شود که تابع ارزش فقط تابعی از زمان t، ثروت فعلی ω و قیمت فعلی قرارداد آتی F_1 است و به قیمت نقدی یا ثمرات رفاهی بستگی ندارد.

جهت سهولت در بیان، مشتقات جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{u}_t=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}, \quad \tilde{u}_\omega=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\omega}, \quad \tilde{u}_{\omega\omega}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\omega^2},$$
$$\tilde{u}_1=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial F_1}, \quad \tilde{u}_{11}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial F_1^2}, \quad \tilde{u}_{\omega 1}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\omega\partial F_1}. \quad (۲۶)$$

انتظار داریم تابع ارزش $\tilde{u}(t,\omega,F_1)$ در معادله HJB صدق کند:

$$\tilde{u}_t+Sup_{\widetilde{\pi}_1}\{\widetilde{\pi}_1\,\mu_1(t)F_1\tilde{u}_\omega+\widetilde{\pi}_1\sigma_1(t)^2F_1^2\tilde{u}_{\omega 1}+\frac{1}{2}\widetilde{\pi}_1^{\,2}\sigma_1(t)^2F_1^2\tilde{u}_{\omega\omega}\}+\frac{\sigma_1(t)^2}{2}F_1^2\tilde{u}_{11}+\mu_1(t)F_1\tilde{u}_1=0. \quad (۲۷)$$

برای $(t,\omega,F_1)\epsilon[0,T]\times R\times R_+$ با شرایط انتهایی $\tilde{u}(T,\omega,F_1)=e^{-\gamma\omega}$ برای $(\omega,F_1)\epsilon R\times R_+$ با بهینه‌سازی انجام شده در معادله پیش رو، می‌توان کنترل بهینه $\widetilde{\pi}_1$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\widetilde{\pi}_1^{*}(t,F_1)=\frac{\tilde{u}_\omega\mu_1(t)+F_1\tilde{u}_{\omega 1}\sigma_1(t)^2}{F_1\tilde{u}_{\omega\omega}\sigma_1(t)^2}. \quad (۲۸)$$

با جایگزین کردن آن، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{u}_t-\frac{\tilde{u}^2_{\ \omega}\mu_1(t)^2}{2\tilde{u}_{\omega\omega}\sigma_1(t)^2}-\frac{F_1\tilde{u}_\omega\tilde{u}_{\omega 1}\mu_1(t)}{\tilde{u}_{\omega\omega}}+\frac{F_1\left(2\tilde{u}_1\tilde{u}_{\omega\omega}\mu_1(t)-F_1\left(\tilde{u}_{\omega 1}^{\ 2}-\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{\omega\omega}\right)\sigma_1(t)^2\right)}{2\tilde{u}_{\omega\omega}}=0. \quad (۲۹)$$

که $\tilde{u}$ فقط به t و ω وابسته است و بنابراین داریم:

$$\tilde{u}(t,\omega)=-e^{-\gamma\omega-\phi(t)}. \quad (۳۰)$$

که با جایگذاری مستقیم و برخی محاسبات، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\widetilde{\Phi}}{dt}=-\frac{\mu_1(t)^2}{2\sigma_1(t)^2}=-\frac{1}{2}\frac{(\lambda(1-e^{-\kappa(T_1-t)})-\kappa(\mu-r))^2}{(1-e^{-\kappa(T_1-t)})^2\bar{\eta}^2-2(1-e^{-\kappa(T_1-t)})\kappa\rho\eta\bar{\eta}+\kappa^2\eta^2}. \quad (۳۱)$$

هدف آن است که $\tilde{\phi}(T)=0$ شود. مقدار $\tilde{\phi}(T)=0$ را می‌توان با انتگرال زیر به دست آورد:

$$\widetilde{\Phi}(t)=\int_t^T\frac{\mu_1(\acute{t})^2}{2\sigma_1(\acute{t})^2}d\acute{t}, \qquad 0\leq t\leq T. \quad (۳۲)$$

حال با استفاده از **رابطه‌های (۲۸)** و **(۳۰)** می‌توان استراتژی بهینه را به دست می‌آورد:

$$\widetilde{\pi}_1^{*}(t,F_1)=\frac{\mu_1(t)-\sigma_1(t)^2\widetilde{\Phi}_1}{\Upsilon F_1\sigma_1(t)^2}=\frac{\mu_1(t)}{\Upsilon F_1\sigma_1(t)^2}. \quad (۳۳)$$

---

[1] Admissible

در نهایت با بهره‌گیری از **رابطه‌های (۱۵)، (۱۷)** و **(۱۹)** استراتژی بهینه $\tilde{\pi}_1^*$ در قراردادی آتی با تاریخ سررسید مشخص به صراحت توسط **رابطه (۳٤)** به دست می‌آید:

$$\tilde{\pi}_1^*(t,F_1)=\frac{1}{\Upsilon F_1}\frac{\kappa(\lambda(1-e^{-\kappa(T_1-t)}-\kappa(\mu-r))^2}{(1-e^{-\kappa(T_1-t)})^2\bar{\eta}^2-2(1-e^{-\kappa(T_1-t)})\kappa\rho\eta\bar{\eta}+\kappa^2\eta^2}. \quad (۳۴)$$

۲-۳- مدل پرتفوی دو کالایی با عامل تصادفی قیمت نقدی و ثمرات رفاهی

این مدل شامل پرتفویی با دو قرارداد آتی کالایی است که یکی از این عوامل تصادفی، قیمت نقدی کالا (s) و دیگری ثمرات رفاهی (δ) است. فرض می‌شود که قیمت نقدی کالای i از فرآیند تصادفی براونی هندسی پیروی نماید و برای ثمرات رفاهی کالای *ith*، فرض می‌شود که از حرکت تصادفی برگشت به سطح بلندمدت پیروی می‌کند. بنابراین مدل دو عاملی برای دو کالای (کالای ۱) و (کالای ۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dS_1=(\mu_1-\delta_1)dt+\eta_1 dZ_t^s.$$

$$d\delta_1=\kappa_1(\alpha_1-\delta_1)dt+\bar{\eta}_1 dZ_t^\delta.$$

$$dS_2=(\mu_2-\delta_2)dt+\eta_2 dZ_t^s. \quad (۳۵)$$

$$d\delta_2=\kappa_2(\alpha_2-\delta_2)t+\bar{\eta}_2 dZ_t^\delta.$$

که پارامترهای μ_i بیانگر نرخ رانش (سطح بلندمدت قیمت) کالای *ith*، σ_i بیانگر نوسان قیمت برای کالای *ith*، δ_i بیانگر ثمرات رفاهی کالای *ith*، $\bar{\eta}_i$ واریانس ثمرات رفاهی برای کالای *ith*، κ_i سرعت برگشت به میانگین بلندمدت برای ثمرات رفاهی، α_i بیانگر سطح بلندمدت ثمرات رفاهی، dZ بیانگر تغییرات فرآیند وینر و d بیانگر علامت دیفرانسیل می‌باشند. فرض می‌شود که در سیستم **معادلات تصادفی (۳۵)** تغییرات حرکت وینر با همدیگر همبستگی دارند. ماتریس همبستگی بین آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$dZ\,dZ^T=\begin{bmatrix}\bar{\eta}_1^2 & \rho_{12} & \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2}\\ \rho_{12} & \bar{\eta}_2^2 & \rho_{1\delta_1} & \rho_{2\delta_2}\\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_1} & \bar{\eta}_{\delta_1}^2 & \rho_{\delta_1\delta_2}\\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} & \rho_{\delta_1\delta_2} & \bar{\eta}_{\delta_2}^2\end{bmatrix}dt=\Omega. \quad (۳۶)$$

که Ω بیانگر ماتریس همبستگی میان اجزا وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفی بالا می‌باشد. حال تحت فرض احتمال ریسک خنثی، رفتار قیمت نقدی و ثمرات رفاهی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dZ\,dZ^T=\begin{bmatrix}\bar{\eta}_1^2 & \rho_{12} & \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2}\\ \rho_{12} & \bar{\eta}_2^2 & \rho_{1\delta_1} & \rho_{2\delta_2}\\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_1} & \bar{\eta}_{\delta_1}^2 & \rho_{\delta_1\delta_2}\\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} & \rho_{\delta_1\delta_2} & \bar{\eta}_{\delta_2}^2\end{bmatrix}dt=\Omega. \quad (۳۷)$$

که Ω ماتریس همبستگی میان اجزا وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفی بالا می‌باشد. حال تحت فرض احتمال ریسک خنثی، رفتار قیمت نقدی و ثمرات رفاهی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dS_i=(r-\delta_i)S_i dt+\eta_i\left(\frac{\mu_i-r}{\eta_i}+dZ_i^s\right)=(r-\delta_i)S_i dt+\eta_i dZ_i^s. \quad (۳۸)$$

$$d\delta_i=\kappa_i(\hat{\alpha}_i-\delta_i)dt+\bar{\eta}_i\left(\frac{\lambda_i-r}{\bar{\eta}_i}dt+dZ_i^\delta\right)dZ_i^\delta=\kappa_i(\hat{\alpha}_i-\delta_i)dt+\bar{\eta}_i dZ_i^\delta,\quad i=2,$$

که r نرخ بهره بدون ریسک و ثابت، λ_i قیمت بازاری ریسک ثمرات رفاهی و $\hat{\alpha}_i=\frac{\alpha_i-\lambda_i}{\kappa_i}$ می‌باشد. چون معادلات دیفرانسیل تصادفی رفتار قیمت نقدی غیرخطی هستند با بهره‌گیری از لم ایتو و تغییر متغیر $X_i=Ln(S_i(t))$ آن‌ها را خطی می‌نماییم:

$$dX_i=\left(r-\frac{\eta_i^2}{2}-\delta_i\right)dt+\eta_i Z_i^s. \quad (۳۹)$$

$$d\delta_i=\kappa_i(\hat{\alpha}_i-\delta_i)dt+\bar{\eta}_i dZ_i^\delta.$$

حال مسئله حداکثر انتفاع را برای یک جفت آتی با سررسیدهای گوناگون، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم T_1 و T_2 تاریخ سررسید دو قرارداد آتی در پرتفو باشند که افق معاملات T شرط، $T\leq min\{T_1,T_2\}$ را راضی می‌کند. سرمایه‌گذار به‌طور مداوم فقط دو قرارداد آتی معامله می‌کند و دارایی مالی خود را با بهره‌گیری از معادله زیر محاسبه می‌کند:

$$dW_t=\pi_1\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)dF_t^{(1)}+\pi_2\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)dF_t^{(2)}. \quad (۴۰)$$

که در آن $\pi_i\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right),i=1,2$، تعداد معاملات آتی i را نشان می‌دهد که اگر منفی باشد، موقعیت اتخاذ شده فروش است. برای سادگی $\pi_i\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)$ را به صورت π_i می‌نویسیم. با نوشتن دارایی مالی سرمایه‌گذار و دو قرارداد آتی در کنار یکدیگر به لحاظ دو منبع اساسی تصادفی $(Z_t^{(1)},Z_t^{(2)})$، داریم:

$$\begin{bmatrix} dW_t \\ dF_t^{(1)} \\ dF_t^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pi_1\,\mu_1(t)F_t^{(1)}+\pi_2\,\mu_2(t)F_t^{(2)} \\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \\ \mu_2(t)F_t^{(2)} \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \pi_1\sigma_1(t)F_t^{(1)} & \pi_2\sigma_2(t)F_t^{(2)} \\ \sigma_1(t)F_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2(t)F_t^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ_t^1 \\ dZ_t^2 \end{bmatrix}. \quad (۴۱)$$

یک جفت کنترل (π_1,π_2) قابل قبول است اگر ارزش واقعی قابل اندازه‌گیری باشد و دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی بالا پاسخی یکتا برای $(W_t,F_t^{(1)},F_t^{(2)})$ قبول کند و شرایط انتگرال‌گیری $E(\int_t^T[\pi_i\left(s,F_s^{(1)},F_s^{(2)}\right)]^2ds)<\infty$، برای $i=1,2$ فراهم شود. مجموعه متغیرهای کنترل قابل قبول در هنگام اتخاذ موضع معاملاتی در زمان اولیه سرمایه‌گذاری را با A_t، نشان می‌دهیم. در گام بعد، تابع ارزش $u(t,\omega,F_1,F_2)$ را برای مسئله بهینه‌سازی پرتفو سرمایه‌گذار تعریف می‌کنیم. سرمایه‌گذار به دنبال یک استراتژی قابل قبول (π_1,π_2) است که مطلوبیت مورد انتظار از ثروت را در زمان T به حداکثر رساند، یعنی:

$$u(t,\omega,F_1,F_2)=sup_{(\pi_1,\pi_2)\epsilon A_t}E\left(U(W_T)\middle|W_t=\omega,F_t^{(1)}=F_1,F_t^{(2)}=F_2\right). \quad (۴۲)$$

برای ساده‌سازی ارائه، مشتقات جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t},\quad u_\omega=\frac{\partial u}{\partial\omega},\quad u_{\omega\omega}=\frac{\partial^2u}{\partial\omega^2},$$

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial F_1},\quad u_{11}=\frac{\partial^2u}{\partial F_1{}^2},\quad u_2=\frac{\partial u}{\partial F_2},\quad u_{22}=\frac{\partial^2u}{\partial F_2{}^2}, \quad (۴۳)$$

$$u_{\omega1}=\frac{\partial^2u}{\partial\omega\partial F_1},\quad u_{\omega2}=\frac{\partial^2u}{\partial\omega\partial F_2},\quad u_{12}=\frac{\partial^2u}{\partial F_1\partial F_2}.$$

با حل معادله HJB تابع ارزش $u(t,\omega,F_1,F_2)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u_t+Sup_{\pi_1.\pi_2}\Big[&(\pi_1\,\mu_1(t)F_1+\pi_2\,\mu_2(t)F_2)u_\omega+\left(\pi_1\sigma_1(t)^2F_1^2+\pi_2\rho_{12}(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)F_1F_2\right)u_{\omega1} \\ &+\left(\pi_2\sigma_2(t)^2F_2^2+\pi_1\rho_{12}(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)F_1F_2\right)u_{\omega2} \\ &+\frac{1}{2}\left(\pi_1{}^2\sigma_1(t)^2F_1^2+\pi_2{}^2\sigma_2(t)^2F_2^2+\rho_{12}(t)\pi_1\pi_2\sigma_1(t)\sigma_2(t)F_1F_2\right)u_{\omega\omega}\Big]. \end{aligned} \quad (۴۴)$$

برای $(t,\omega,F_1,F_2)\epsilon[0,T)\times R\times R_+\times R_+$ همراه با شرایط انتهایی

$$u(T,\omega,F_1,F_2)=-e^{-\gamma\omega},\quad (\omega,F_1,F_2)\epsilon R\times R_+\times R_+. \quad (۴۵)$$

قابل قبول است. در گام بعد، با تغییر شکل داریم:

$$u(t,\omega,F_1,F_2)=-e^{-\gamma\omega-\phi(t,f_1,f_2)}. \quad (۴۶)$$

که $f_1=log\,F_1$ و $f_1=log\,F_2$ است. با جایگزینی **رابطه (٤٦)** در **رابطه (٤٤)**، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی برای ϕ به دست می‌آید:

$$0=\phi_t+\left(\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2}{(1-\rho_{12}^2)\sigma_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\mu_2^2}{(1-\rho_{12}^2)\sigma_2^2}-\frac{\rho_{12}\mu_1\mu_2}{(1-\rho_{12}^2)\sigma_1\sigma_2}\right)+\frac{\sigma_1{}^2}{2}(\phi_{11}-\phi_1)+\frac{\sigma_2{}^2}{2}(\phi_{22}-\phi_2)+\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\phi_{12}. \quad (۴۷)$$

که $\phi(T,f_1,f_2)=0$ است. حال مشتقات جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\phi_t=\frac{\partial\phi}{\partial t},\quad \phi_1=\frac{\partial\phi}{\partial f_1},\quad \phi_2=\frac{\partial\phi}{\partial f_2}, \quad (۴۸)$$

$$\phi_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial f_1^2},\quad \phi_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial f_2^2},\quad \phi_{12}=\frac{\partial^2\phi}{\partial f_1\partial f_2}.$$

حال می‌توانیم این معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی ϕ را با بهره‌گیری از فرض زیر حل کنیم:

$$\phi(t,f_1,f_2)=a_{11}(t)f_1^2+a_1(t)f_1+a_{22}(t)f_2^2+a_2(t)f_2+a_{12}(t)f_1f_2+a(t). \quad (۴۹)$$

که با حل آن داریم:

$$\acute{a}_{11}(t)=\acute{a}_{22}(t)=\acute{a}_{12}(t)=0, \quad (۵۰)$$

مومنی و همکاران/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۴۵۲-۴۳۸

$$a_{11}(t)=a_{22}(t)=a_{12}(t)=0,$$

$$\acute{a}_1(t)=\acute{a}_2(t)=0,$$

$$a_1(t)=a_2(t)=0.$$

از این نتیجه می‌شود که ϕ تنها تابعی از t است و از f_1 و f_2 مستقل است و معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_1(t)^2\sigma_2(t)^2+\mu_2(t)^2\sigma_1(t)^2-2\rho_{12}\mu_1(t)\mu_2(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)}{2(1-\rho_{12}(t)^2)\sigma_1(t)^2\sigma_2(t)^2}. \tag{۵۱}$$

با حل این مسئله و با به‌کارگیری **رابطه‌های (۱۷)، (۱۹)** و **(۲۲)**، یک عبارت بسته برای ϕ به دست می‌آوریم:

$$d\Phi=\frac{(T-t)((r-\mu)^2\bar{\eta}^2+2\lambda(r-\mu)\rho\bar{\eta}\eta+\lambda^2\eta^2)}{2(1-\rho^2)\bar{\eta}^2\eta^2}. \tag{۵۲}$$

با به‌کارگیری **رابطه (۵۲)** در **رابطه (٤٦)** تابع ارزش برابر می‌شود با:

$$u(t,\omega)=-e^{-\gamma\omega-\phi(t)}. \tag{۵۳}$$

حال با به‌کارگیری **رابطه (٤٦)** و **(۵۲)** در **رابطه (٤٤)** می‌توان استراتژی‌های بهینه معاملات را به دست می‌آورد:

$$\pi_1^*(t,F_1,F_2)=\frac{1}{\gamma 1-\rho_{12}(t)^2)\sigma_1(t)F_1}\left(\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1(t)}-\rho_{12}(t)\frac{\mu_2(t)}{\sigma_2(t)}\right),$$

$$\pi_2^*(t,F_1,F_2)=\frac{1}{\gamma(1-\rho_{12}(t)^2)\sigma_2(t)F_2}\left(\frac{\mu_2(t)}{\sigma_2(t)}-\rho_{12}(t)\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1(t)}\right). \tag{۵۴}$$

در این حالت با دو قرارداد آتی، برای $i=1,2$، استراتژی بهینه مربوطه $\pi_i{}^*$ تابعی از F_i است و F_j برای $j\neq i$بستگی به قیمت سایر معاملات آتی ندارد. همچنین توجه داشته باشید که اگر $\rho_{12}(t)$ صفر باشد، استراتژی بهینه سبد با دو قرارداد آتی به استراتژی بهینه تک قرارداد آتی تبدیل می‌شود.

حال با بهره‌گیری از **رابطه‌های (۱۷)، (۱۹)** و **(۲۲)** استراتژی‌های بهینه صریحاً از نظر پارامترهای مدل به دست می‌آید:

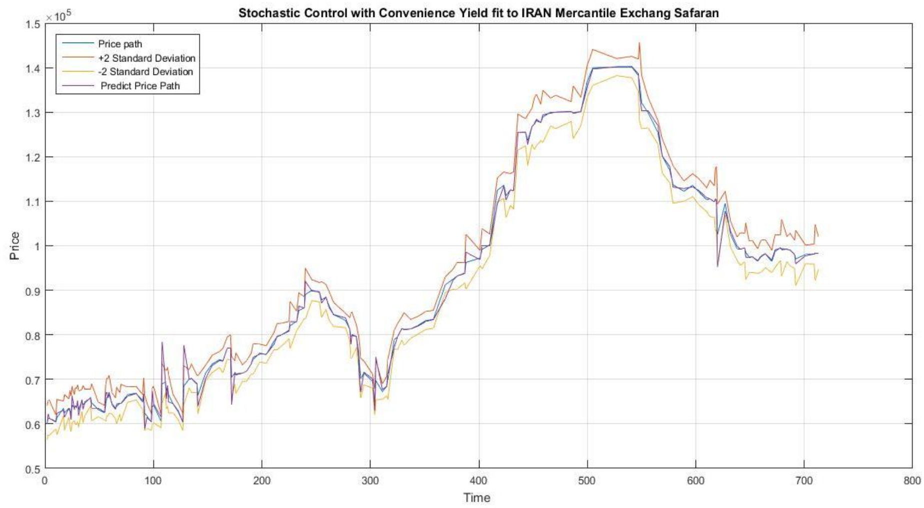
$$\pi_1^*=\frac{e^{\kappa(T_1-t)}((e^{t\kappa}-e^{\kappa T_2})(r-\mu)\bar{\eta}^2+\left(e^{t\kappa}\lambda+e^{\kappa T_2}(r\kappa-\lambda-\kappa\mu)\right)\rho\eta\bar{\eta}+e^{\kappa T_2}\kappa\lambda\eta^2}{F_1(e^{\kappa T_1}-e^{\kappa T_2})\gamma(1-\rho^2)\bar{\eta}^2\eta^2},$$

$$\pi_2^*=\frac{e^{\kappa(T_2-t)}((e^{t\kappa}-e^{\kappa T_1})(r-\mu)\bar{\eta}^2+\left(e^{t\kappa}\lambda+e^{\kappa T_1}(r\kappa-\lambda-\kappa\mu)\right)\rho\eta\bar{\eta}+e^{\kappa T_1}\kappa\lambda\eta^2}{F_2(e^{\kappa T_1}-e^{\kappa T_2})\gamma(1-\rho^2)\bar{\eta}^2\eta^2}. \tag{۵۵}$$

بر اساس نتایج به دست آمده در **رابطه (۵۵)** میزان بهینه متغیرهای کنترل π_1^* و π_2^* وابسته به قیمت نقدی فعلی یا میزان ثمرات رفاهی نیست. از سوی دیگر در **رابطه (٥٤)** هنگامی که ρ_{12} برابر صفر باشد، π_1^* در حالت دو کالایی برابر با $\widetilde{\pi_1^*}$ در حالت تک کالایی می‌شود. به همین ترتیب می‌توان پرتفوهایی با بیش از دو قرارداد آتی را نیز تصور کرد که در این حالت نیز بر اساس همین مدل، موضوع قابل بررسی است که جهت جلوگیری از اطاله مطلب، از ذکر آن خودداری شده است.

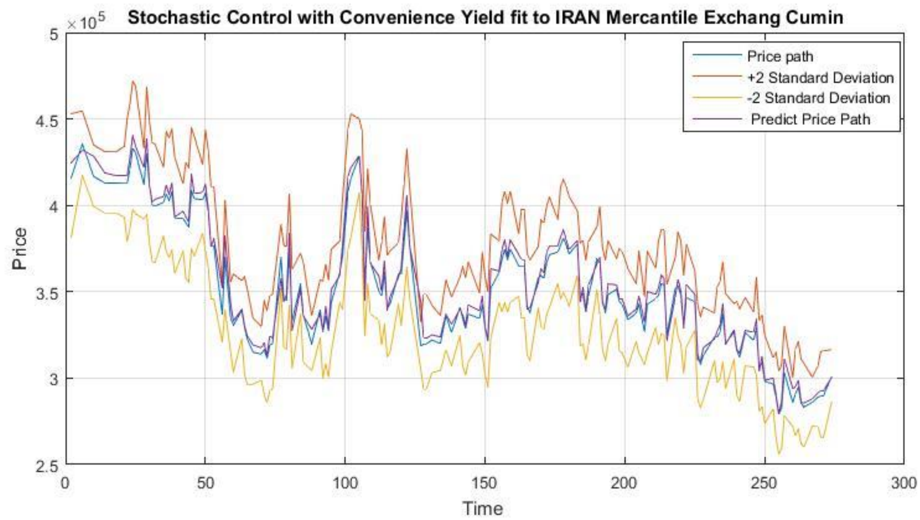
۴- یافته‌های پژوهش

پس از مدل‌سازی و جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز از بورس کالای ایران و تخمین پارامترهای مورد نیاز در نرم‌افزار متلب، پیش‌بینی مسیر قیمتی را برای قیمت زعفران نگین طی دوره فروردین ۱۳۹۷ الی اسفند ۱۳۹۸، قیمت پسته فندقی در طی دوره مهر ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸ و قیمت زیره در طی دوره تیرماه ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸ را در نرم‌افزار متلب شبیه سازی نمودیم که نتایج در اشکال زیر نمایان است. همان‌گونه که در اشکال زیر مشخص است، مسیر قیمت نقد (ناشی از یافته‌های مدل) در طی دوره زمانی مشخص برای سه کالای زعفران نگین، پسته فندقی و زیره سبز شبیه‌سازی شده است. خط آبی رنگ مربوط به رفتار واقعی قیمت نقد، خطوط قرمز و زرد مقادیر دو انحراف معیار بالا و پایین از قیمت نقد را نشان می‌دهد و خط بنفش بیانگر مقدار پیش‌بینی قیمت نقد است که با همبستگی بالایی با قیمت واقعی منطبق است. همان‌گونه که مشخص است مدل توانسته با دقت بالایی مسیر قیمت نقد را پیش‌بینی کند و کلیه نتایج پیش‌بینی شده، در حدفاصل دو انحراف معیار از قیمت‌های واقعی قرار دارند



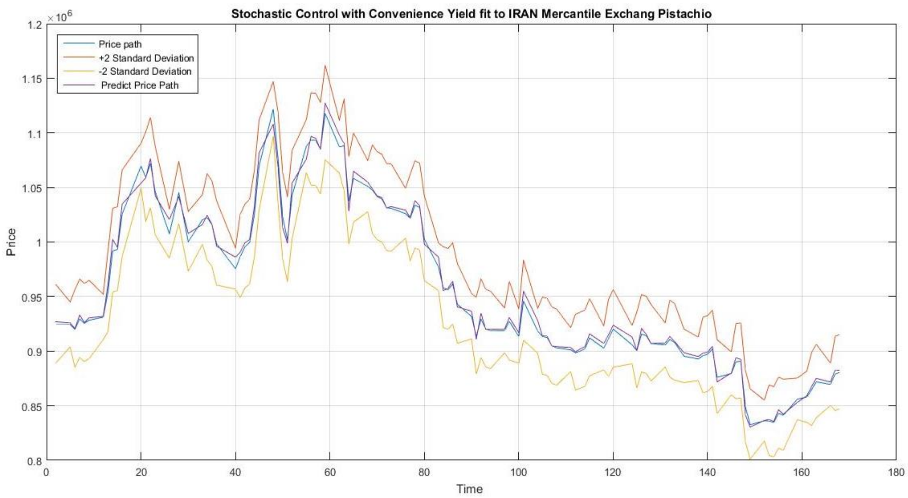
شکل ۱- شبیه سازی پیش‌بینی قیمت نقدی زعفران در بورس کالای ایران دوره فروردین ۱۳۹۷ الی اسفند ۱۳۹۸.

Figure 1- Simulation of forecasting Safaron in the Iran Commodity Exchange.



شکل ۲- شبیه سازی پیش‌بینی قیمت نقدی زیره در بورس کالای ایران دوره تیر ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸.

Figure 2- Simulation of forecasting Cumin in the Iran Commodity Exchange.



شکل ۳- شبیه سازی پیش‌بینی قیمت نقدی پسته در بورس کالای ایران طی دوره مهر ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸.

Figure 3- Simulation of forecasting Pistachio prices in the Iran Commodity Exchange.

۴-۱- پیاده‌سازی مدل تک کالایی با دو عامل تصادفی

در بازار قراردادهای آتی زعفران، پسته و زیره در هر دوره برای هر محصول عموما یک یا دو قرارداد فعال با سررسید حداقل سه ماهه وجود دارد. برای پیاده‌سازی مدل، برای هر یک از محصولات زعفران، پسته و زیره، نخست پارامترهای مدل را تخمین زده و سپس دو قرارداد متاخر را انتخاب کرده و در سه مقطع زمانی نسبت به پیش‌بینی موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه‌گذاری مبادرت شد. به‌عنوان مثال در بازار آتی پسته، دو قرارداد آتی مربوط به تحویل ۲۶ فروردین ۱۳۹۹ و ۲۵ خرداد ۱۳۹۹ را انتخاب کرده و مقدار بهینه و نوع موضع معاملاتی را در سه زمان گوناگون ورود (با فواصل ۳۰ روز) توسط مدل تخمین زده شد.

جدول ۱- تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی

Table 1- Estimation of parameters of one-factor dual commodity.

μ	κ	η	$\bar{\eta}$	ρ	R	γ
تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی در بازار زعفران						
0.00068387	0.0022	0.016	0.008	0.9979	0.000329	0.001
تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی در بازار پسته						
-0.00026	0.0103	0.0158	0.0129	0.9977	0.000329	0.001
تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی در بازار زیره						
-0.001	0.0688	0.0342	0.0288	0.972	0.000329	1E-15

*منبع: محاسبات پژوهشگر

سوال این است که سرمایه‌گذار در زمان ورود، نسبت به قراردادهای مطرح شده چه موضع معاملاتی اتخاذ کند و میزان سرمایه‌گذاری وی در قرارداد چقدر باشد؟ بر همین اساس مدل پیشنهاد خود را در مورد موضع معاملاتی و میزان سرمایه‌گذاری بیان کرده است که نتایج آن در **جدول ۲** آمده است.

جدول ۲- نتایج حاصل از اجرای مدل تک کالایی دو عاملی.

Table 2- The results of a single commodity, two-factor model.

نام محصول	تاریخ ورود به قرارداد	قیمت قرارداد (ریال)	قیمت نقدی روز معامله (ریال)	قیمت نقدی در سررسید (ریال) (مجهول)	موضع معاملات صحیح	موضع معاملاتی پیشنهاد مدل	تعداد بهینه پیشنهادی	سود حاصل از اتخاذ موضع معاملاتی پیشنهادی
آتی زعفران نگین تحویل 1399/02/21	1399/01/21	91209	93910	77743	فروش	فروش	0.0265	428.4
	1398/12/21	92188	98124	77743	فروش	فروش	0.0056	114.1
	1398/11/21	105776	99354	77743	فروش	فروش	0.002	43.2
	1398/10/21	102628	97450	77743	فروش	فروش	0.0007385	14.6
آتی زعفران نگین تحویل 1399/04/22	1399/03/23	93000	87848	101691	خرید	خرید	0.026	225.97
	1399/02/22	85751	79168	101691	خرید	خرید	0.006	95.64
	1399/01/21	99390	89444	101691	خرید	خرید	0.0019	4.37
	1398/12/22	102196	98257	101691	فروش	فروش	0.00074	3.51
پسته فندقی تحویل 1399/01/26	1398/12/26	847687	880683	1048443	خرید	خرید	0.000877	176.06
	1398/11/26	945980	892835	1048443	خرید	خرید	0.000319	32.69
	1398/10/26	986321	904883	1048443	خرید	خرید	0.000201	12.49
پسته فندقی تحویل 1399/03/25	1399/02/25	859571	870000	998041	خرید	خرید	0.000865	119.78
	1399/01/25	961035	1000304	998041	خرید	خرید	0.000314	11.62
	1398/12/25	898074	879081	998041	خرید	خرید	0.000221	22.09
زیره سبز تحویل 1399/01/24	1398/12/24	306200	301282	326695	خرید	خرید	477260000	9.781.443.700.000
	1398/11/24	330000	316378	326695	فروش	فروش	348780000	4.751.081.160.000
	1398/10/24	344850	334153	326695	فروش	فروش	324430000	3.470.427.710.000
زیره سبز تحویل 1399/03/18	1399/02/18	348000	319927	328555	فروش	فروش	419940000	3.623.242.320.000
	1399/01/18	321750	312270	328555	فروش	فروش	357720000	3.391.185.600.000
	1398/12/18	319900	287500	328555	فروش	فروش	349740000	11.331.576.000.000

همان‌گونه که در **جدول ۲** مشخص است مدل در ۲۰ حالت گوناگون پیاده‌سازی شد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل توانسته است که موضع معاملاتی را در تمام موارد به درستی پیش‌بینی نماید. نکته حایز اهمیت این است که میزان پیشنهاد مدل، جهت سرمایه‌گذاری در محصولات گوناگون با توجه به پارامترهای به دست آمده از میزان نرخ رانش و پراکنش و ریسک بازار گوناگون بوده است. به این معنی میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول پسته با میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول زیره تفاوت دارد. بااین‌حال در هر سه محصول با طولانی‌تر شدن مدت زمان حضور در قرارداد، میزان بهینه سرمایه‌گذاری پیشنهادی مدل کمتر می‌شود و مدل اصطلاحا ریسک گزیرتر می‌شود.از سوی دیگر با توجه به پیش‌بینی مدل از میزان ریسک محصول، پیشنهاد مدل جهت تعداد بهینه سرمایه‌گذاری متفاوت است.

۲-۴- پیاده‌سازی مدل دو کالایی با دو عامل تصادفی

در این حالت با دو قرارداد آتی کالایی با تاریخ ورود یکسان و تاریخ‌های سررسید گوناگون روبرو هستیم که مدت زمان حضور در قراردادها شرط کوچک‌تر یا مساوی بودن نخستین سررسید را ارضا می‌کند. برای انتخاب موضع معاملاتی درست، پس از گردآوری داده‌های مورد نیاز در نخست پارامترهای معادله را تخمین می‌زنیم که نتایج آن در **جدول ۳** آمده است.

جدول ۳- تخمین پارامترهای مدل دو کالایی دو عاملی در بازار.

Table 3- Estimation of parameters of two-factor dual commodity.

تخمین پارامترهای مدل دو کالایی (زعفران و پسته) دو عاملی در بازار						
μ_1	κ_1	η_1	$\bar{\eta}_1$	ρ_1	R_1	γ_1
0.0006838	-0.0059	0.016	0.0079	0.000867	0.12	24
μ_2	κ_2	η_2	$\bar{\eta}_2$	ρ_2	R_2	γ_2
-0.000261	0.0103	0.0158	0.0129	-0.0587	0.12	0.0001
تخمین پارامترهای مدل دو کالایی (زعفران و زیره) دو عاملی در بازار						
μ_1	κ_1	η_1	$\bar{\eta}_1$	ρ_1	R_1	γ_1
0.000684	0.0022	0.016	0.008	-0.0065	0.12	10.5
μ_2	κ_2	η_2	$\bar{\eta}_2$	ρ_2	R_2	γ_2
-0.001	0.0688	0.0342	0.0288	0.137	0.12	0.001
تخمین پارامترهای مدل دو کالایی (پسته و زیره) دو عاملی در بازار						
μ_1	κ_1	η_1	$\bar{\eta}_1$	ρ_1	R_1	γ_1
-0.00026	0.0103	0.0158	0.0129	-0.0265	0.12	0.0001
μ_2	κ_2	η_2	$\bar{\eta}_2$	ρ_2	R_2	γ_2
-0.001	0.0977	0.0342	0.0294	0.1614	0.12	0.001

*منبع: محاسبات پژوهشگر

سپس از هر محصول، دو قرارداد متاخر را انتخاب کرده و در سه مقطع زمانی نسبت به تعیین موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه‌گذاری مبادرت شد. به‌عنوان مثال در بازار آتی زعفران و پسته، در تاریخ‌های ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۹، ۲۵ فروردین ۱۳۹۸ و ۲۵ اسفند ۱۳۹۵ امکان ورود به قرارداد آتی زعفران نگین تحویل ۲۲ تیرماه ۱۳۹۹ و قرارداد آتی پسته تحویل ۲۵ خرداد ۱۳۹۹ و خروج از قرارداد در تاریخ ۲٤ خردادماه ۱۳۹۹ وجود دارد. براین اساس مقدار بهینه و نوع موضع معاملاتی در سه زمان گوناگون ورود توسط مدل تخمین زده شد که در **جدول ٤** نتایج حاصل از اجرای مدل دو کالایی با دو عامل تصادفی آمده است. در واقع سوال این است که سرمایه‌گذار در زمان ورود، نسبت به قراردادهای مطرح شده چه موضع معاملاتی اتخاذ کند و میزان سرمایه‌گذاری وی در قرارداد چقدر باشد؟ بر همین اساس مدل پیشنهاد خود را در مورد موضع معاملاتی و میزان سرمایه‌گذاری بیان کرده است.

نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل توانسته است در ۳۳ مورد از ۳٦ حالت ممکن یعنی ۹۱/۷% موضع معاملاتی را به درستی پیش‌بینی نماید. بااین‌حال مجموع سود حاصل از سرمایه‌گذاری در پرتفوی دو کالایی در هیچ حالتی منفی گزارش نشده بود و تنها در یک مورد میزان سود از سرمایه‌گذاری در نرخ بهره بدون ریسک (۱۲% پیوسته سالانه) کمتر بود.

نکته حایز اهمیت این است که میزان پیشنهاد مدل جهت سرمایه‌گذاری در محصولات گوناگون با توجه به مقادیر به دست آمده از میزان نرخ رانش، پراکنش و ریسک بازار گوناگون بوده است. به این معنی میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول زعفران با میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول پسته یا زیره تفاوت دارد. بااین‌حال در هر سه محصول با طولانی‌تر شدن مدت زمان حضور در قرارداد، میزان بهینه سرمایه‌گذاری پیشنهادی مدل کمتر می‌شود و مدل اصطلاحا ریسک گزیرتر می‌شود.

جدول ۴- نتایج حاصل از اجرای مدل دو کالایی دو عاملی.

Table4- The results of a two commodity, two-factor model.

نام محصول	تاریخ ورود به قرارداد	زمان خروج	قیمت قرارداد (ریال)	قیمت نقدی در سررسید (ریال) (مجهول)	موضع معاملاتی صحیح	موضع معاملاتی پیشنهادی مدل	تعداد بهینه پیشنهادی	سود حاصل از اتخاذ موضع معاملاتی پیشنهادی
زعفران	1398/12/26	1399/01/25	91763	89772	فروش	فروش	17.3205	2542311949
پسته			847687	1030901	خرید	خرید	13876	
زعفران	1398/11/26	1399/01/25	103635	89772	فروش	فروش	14.4976	449832199
پسته			945980	1030901	خرید	خرید	5294.7	
زعفران	1398/10/26	1399/01/25	102549	89772	فروش	فروش	12.1348	117235500
پسته			986321	1030901	خرید	خرید	2626.3	
زعفران	1399/02/25	1399/03/24	83661	97600	خرید	خرید	16.8867	1833430360
پسته			859571	1006603	خرید	خرید	12486	
زعفران	1399/01/25	1399/03/24	96850	97600	خرید	خرید	14.0571	217301551
پسته			961035	1006603	خرید	خرید	4768.5	
زعفران	1398/12/25	1399/03/24	105268	97600	فروش	فروش	11.8503	293281962
پسته			898074	1006603	خرید	خرید	2701.5	
زعفران	1398/12/24	1399/01/23	95392	91766	فروش	فروش	11.9086	44273
زیره			326200	321890	فروش	فروش	0.0076	
زعفران	1398/11/24	1399/01/23	103783	91766	فروش	فروش	12.7244	154549
زیره			330000	321890	فروش	فروش	0.0626	
زعفران	1398/10/24	1399/01/23	103314	91766	فروش	فروش	13.5965	169569
زیره			344850	321890	فروش	فروش	0.4942	
زعفران	1399/02/18	1399/03/17	84381	86163	خرید	خرید	12.0969	21923
زیره			348000	300440	فروش	فروش	0.0077	
زعفران	1399/01/18	1399/03/17	100266	86163	فروش	فروش	13.0086	184890
زیره			321750	300440	فروش	فروش	0.0761	
زعفران	1398/12/18	1399/03/17	96116	86163	فروش	خرید	13.8315	11632
زیره			319900	300440	فروش	فروش	7.672	
پسته	1398/12/24	1399/01/23	864220	936309	خرید	خرید	14.5964	1052314
زیره			326200	321890	فروش	فروش	0.0171	
پسته	1398/11/24	1399/01/23	946131	936309	فروش	خرید	8.3344	38.2
زیره			330000	321890	فروش	فروش	9.3261	
پسته	1398/10/24	1399/01/23	1002690	936309	فروش	خرید	2.6939	3086
زیره			344850	321890	فروش	فروش	7.9229	
پسته	1399/02/18	1399/03/17	859333	906273	خرید	خرید	15.2971	719040
زیره			348000	300440	فروش	فروش	0.0209	
پسته	1399/01/18	1399/03/17	886591	906273	خرید	خرید	13.986	284589
زیره			321750	300440	فروش	فروش	0.4372	
پسته	1398/12/18	1399/03/17	896017	906273	خرید	خرید	13.788	286287
زیره			319900	300440	فروش	فروش	7.4449	

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله دو مدل کنترل پویای تصادفی موضع معاملاتی بهینه قراردادهای آتی کالاهای مصرفی بر مبنای تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی توسعه داده شد و در بورس کالای ایران با موفقیت پیاده‌سازی شد. نتایج نشان می‌دهد که مدل تک کالایی با دو عامل تصادفی ثمرات رفاهی و قیمت نقدی تصادفی توانسته است در همه موارد موضع معاملاتی درست را انتخاب کند. مدل دو کالایی با دو عامل تصادفی ثمرات رفاهی و قیمت نقدی تصادفی نیز توانسته است در ۹۱/۷% موارد موضع معاملاتی درست را انتخاب کند. در مدل‌های مذکور نوع موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه‌گذاری ($\tilde{\pi}^*$) متناسب با معکوس پارامتر ریسک پذیری ثابت (Υ) و قیمت

قرارداد آتی و مدت زمان حضور در قرارداد است. این بدان معنی است که ریسک‌پذیری بالاتر و مدت زمان حضور بیشتر در قرارداد باعث کاهش موقعیت سرمایه‌گذار می‌شود. قیمت آتی بالاتر نیز همین اثر را خواهد داشت. همچنین این امر به سرعت بازگشت به میانگین (κ)، نوسانات ($\bar{\eta}$) و (η)، قیمت بازار ریسک (λ)، نرخ بهره (r)، نرخ رانش (μ) و نرخ همبستگی (ρ) نیز بستگی دارد. از سوی دیگر توجه داشته باشید که موقعیت سرمایه‌گذار مستقل از سطح تعادل ثمرات رفاهی (α) یا ($\tilde{\alpha}$)، قیمت فعلی (S_t) و یا ثمرات رفاهی (δ_t) است. از منظر کاربردهای عملی، این استقلال نیاز به برآورد یا پیگیری مداوم قیمت نقدی یا ثمرات رفاهی را از بین می‌برد و استراتژی بهینه، به‌طور مؤثر، تصادفی بودن ثمرات رفاهی در بیشینه‌سازی مطلوبیت مورد انتظار سرمایه‌گذار را از بین می‌برد. پیشنهاد می‌گردد در پژوهش‌های آتی مطالعاتی برای حالات مختلف که پرتفو ترکیبی از قراردادهای آتی کالایی، سهام و اختیارات معامله است، مدل‌سازی و نتایج بررسی شود. همچنین در حالاتی که در بازار با جهش‌های ناگهانی قیمت‌ها روبرو است، مدل مورد ارزیابی قرار گیرد.

منابع

Alquist, R., & Kilian, L. (2010). What do we learn from the price of crude oil futures? *Journal of applied econometrics*, *25*(4), 539-573. https://doi.org/10.1002/jae.1159

Angoshtari, B., & Leung, T. (2019). Optimal dynamic basis trading. *Annals of finance*, *15*(3), 307-335. https://doi.org/10.1007/s10436-019-00348-x

Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (Vol. 17, pp. 21-86). http://www.numdam.org/item/10.24033/asens.476.pdf

Basak, S., & Pavlova, A. (2016). A model of financialization of commodities. *The journal of finance*, *71*(4), 1511-1556. https://doi.org/10.1111/jofi.12408

Benth, F. E., & Lempa, J. (2014). Optimal portfolios in commodity futures markets. *Finance and stochastics*, *18*(2), 407-430. https://doi.org/10.1007/s00780-013-0224-5

Brennan, M. J. (1976). The supply of storage. In *The economics of futures trading* (pp. 100-107). Palgrave Macmillan, London.

Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1985). Evaluating natural resource investments. *Journal of business*, *58*(2) 135-157. https://www.jstor.org/stable/2352967

Carmona, R., & Ludkovski, M. (2004). Spot convenience yield models for the energy markets. *Contemporary mathematics*, *351*, 65-80.

Casassus, J., & Collin-Dufresne, P. (2005). Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates. *The journal of finance*, *60*(5), 2283-2331. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2005.00799.x

Chikobvu, D., & Chinhamu, K. (2013). Random walk or mean reversion? empirical evidence from the crude oil market. *Istatistik journal of the Turkish statistical association*, *6*(1), 1-9.

Cortazar, G., & Naranjo, L. (2006). An N-factor Gaussian model of oil futures prices. *Journal of futures markets: futures, options, and other derivative products*, *26*(3), 243-268. https://doi.org/10.1002/fut.20198

Cortazar, G., & Schwartz, E. S. (1993). A compound option model of production and intermediate inventories. *Journal of business*, 517-540. https://www.jstor.org/stable/2353185

Dixit, R. K., Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton University Press.

Duncan, T. E., & Pasik-Duncan, B. (2012). A direct method for solving stochastic control problems. *Communications in information and systems*, *12*(1), 1-14. https://dx.doi.org/10.4310/CIS.2012.v12.n1.a1

Elaut, G., Erdős, P., & Sjödin, J. (2016). An analysis of the risk-return characteristics of serially correlated managed futures. *Journal of futures markets*, *36*(10), 992-1013. https://doi.org/10.1002/fut.21773

Gibson, R., & Schwartz, E. S. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The journal of finance*, *45*(3), 959-976. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1990.tb05114.x

Guo, W., Zhang, Q., & Rong, L. (2018). A stochastic epidemic model with nonmonotone incidence rate: sufficient and necessary conditions for near-optimality. *Information sciences*, *467*, 670-684. https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.03.054

Kaldor, N. (1939). Speculation and economic stability. *The review of economic studies*, *7*(1), 1–27. https://doi.org/10.2307/2967593

Lazo, J. G. L., Vellasco, M. M. B., Pacheco, M. A. C., & Dias, M. A. G. (2007). Real options value by Monte Carlo simulation and fuzzy numbers. *International journal of business*, *12*(2), 181.

Mirantes, A. G., Población, J., & Serna, G. (2012). The stochastic seasonal behaviour of natural gas prices. *European financial management*, *18*(3), 410-443. https://doi.org/10.1111/j.1468-036X.2009.00533.x

Pindyck, R. S. (2001). The dynamics of commodity spot and futures markets: a primer. *The energy journal*, *22*(3), 1-29. DOI: 10.5547/ISSN0195-6574-EJ-Vol22-No3-1

Pirrong, C. (2011). *Commodity price dynamics: a structural approach*. Cambridge University Press.

Saunders, M., Lewis, P., & Thornhill, A. (2009). *Research methods for business students*. Pearson Education.

Schwartz, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging. *The journal of finance*, *52*(3), 923-973. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb02721.x

Skabar, A., & Cloete, I. (2002, January). Neural networks, financial trading and the efficient markets hypothesis. *The twenty-fifth Australasian computer science conference (ACSC2002)* (Vol. 2, pp. 241-249). Melbourne, Australia. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.19.4881&rep=rep1&type=pdf

Sun, S., Sun, Y., Zhang, G., & Liu, X. (2017). Dynamical behavior of a stochastic two-species Monod competition chemostat model. *Applied mathematics and computation*, *298*, 153-170. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.11.005

Telser, L. G. (1958). Futures trading and the storage of cotton and wheat. *Journal of political economy*, *66*(3), 233-255.

Working, H. (1948). Theory of the inverse carrying charge in futures markets. *Journal of farm economics*, *30*(1), 1-28. https://doi.org/10.2307/1232678

Working, H. (1949). The theory of price of storage. *The American economic review*, *39*(6), 1254-1262.

Yan, R., & Sun, S. (2020). Stochastic characteristics of a chemostat model with variable yield. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, *537*, 122681. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122681

Yan, X. S. (2002). Valuation of commodity derivatives in a new multi-factor model. *Review of derivatives research*, *5*(3), 251-271.