Journal of Decisions and Operational Research

Journal of Decisions & Operations Research

Volume x, Issue x, Season xx

www.journal-dmor.ir

Journal of Decisions & Operations Research, Volume x, Issue x, Season xx, Page: x-x

Decision to Choose Optimal Trading Position in Future Contracts of Consumer Goods with Stochastic Control, based on Storage Theory and Convenience Yield

Mansour Momeni[1], Hanan Amoozad Mahdireji[2], Mohammad Hosein Pourkazemi[3], Mehdi Khajezadeh Dezfouli[4]*

[1] Professor, Department of Industrial Management, Management Faculty, Tehran University, Tehran, Iran

[2] Associate Professor, Department of Industrial Management, Management Faculty, Tehran University Tehran, Iran

[3] Associate Professor, Department of Economical science, Economyand Policy Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

[4] Ph.D student, Department of Industrial Management, Management Faculty, University of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract

The main theory governing the valuation of future contracts is the storage theory in which the most important factor for pricing contract is convenience yield. convenience yield is a factor that complicates the process of valuing futures contracts. Trying to determine the best trading position at different futures prices as well as forming an optimal portfolio of futures contracts on a specific time horizon and on contracts with different underlying assets and with different maturities by using stochastic control is a goal that in this article has been done and implemented in the Iranian Commodity Exchange market. The results show that the resulting model in the single commodity mode has been able to fully identify the correct trading position and in the two commodity mode has been 91.7% successful.

Keywords: Future contract, Stochastic control, Storage theory, Convenience yield

Paper Type: Original Article

Receive: Review: Revise: Accept:

Citation:

*** Corresponding Author**

Email Address: m.khajezadeh@ut.ac.ir

DOI: http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2021.261633.1284

Journal of Decisions and Operational Research

نشریه علمی
تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره x، شماره (x)، فصل xx

www.journal-dmor.ir

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره x، شماره x، فصل xx، صفحه: x-x

تصمیم در انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی با کنترل پویای تصادفی و بر مبنای تئوری ذخیره سازی و مفهوم ثمرات رفاهی

منصور مومنی[1]، حنان عموزاد مهدیرجی[2]، محمدحسین پورکاظمی[3]، مهدی خواجه زاده دزفولی[4]*

استاد گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران
دانشیار گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران
دانشیار گروه علوم اقتصادی، دانشکده اقتصاد و علوم سیاسی، دانشگاه شهید بهشتی
دانشجو دکتری تخصصی مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران

چکیده

اصلی‌ترین تئوری حاکم بر ارزش‌گذاری قراردادهای آتی، تئوری ذخیره‌سازی است که در آن مهمترین فاکتور دخیل در قیمت‌گذاری قرارداد، مفهومی تحت عنوان ثمرات رفاهی است. ثمرات رفاهی عاملی است که فرآیند ارزش‌گذاری قراردادهای آتی را با پیچیدگی‌های جدی مواجه کرده است. تلاش برای تعیین بهترین موضع معاملاتی در قراردادهای آتی با دارایی پایه گوناگون و با تاریخ سررسید مختلف با بهره‌گیری از بهینه‌سازی کنترل پویای تصادفی، هدفی است که در این مقاله انجام گرفته است و در بازار بورس کالای ایران پیاده‌سازی شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل حاصل در حالت تک کالایی به طور کامل توانسته است که موضع معاملاتی درست را تشخیص دهد و در حالت دو کالایی ۹۱/۷ درصد موفق عمل کرده است.

واژه‌های کلیدی: قراردادآتی، کنترل پویای تصادفی، تئوری ذخیره سازی، ثمرات رفاهی

مقاله پژوهشی

دریافت: داوری: اصلاح: پذیرش:

۱- مقدمه

قرارداد آتی توافق نامه‌ای مبنی بر خرید یا فروش دارایی پایه در زمان معینی در آینده و با قیمت مشخص است. در این قرادادها یکی از طرفین موافقت می‌کند تا دارایی معینی را در تاریخ و قیمتی از پیش تعیین شده در آینده خریداری نماید. طرف دیگر نیز موافقت می‌کند تا این دارایی را در تاریخ مقرر به قیمتی مشخص به وی تحویل دهد. در این قرارداد، تبادل کالا و پول به روز مبادله موکول می‌گردد و در آن طرفین، بدون توجه به قیمت روز دارایی پایه، به مبادله مبادرت می‌کنند. قیمتی که امروز برای پرداخت در سررسید تعیین می‌گردد، قیمت آتی نامیده می‌شود. در مقابل قیمت بازاری دارایی پایه که می‌توان آن را در زمان حاضر خریداری کرد، قیمت نقدی نامیده می‌شود. این که در یک تاریخ مشخص، بر روی قرارداد آتی چه موضع معاملاتی اتخاذ نمود، تا در سررسید سود حاصل مثبت باشد، موضوع پژوهش حاضر می‌باشد.

* نویسنده مسئول

آدرس رایانامه: m.khajezadeh@ut.ac.com

شناسه دیجیتال: http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2021.261633.1284

توجه شود که قراردادهای آتی را معمولا به دو گروه، قراردادهای آتی مالی و قراردادهای آتی کالا طبقه بندی می‌نمایند. دارایی پایه قراردادهای آتی مالی، ابزارهایی نظیر سهام، اوراق قرضه و ارز است، در حالی که دارایی پایه موضوع قرارداد در قراردادهای آتی کالا شامل مواردی همچون محصولات کشاورزی، فلزات و مواد نفتی است. تمرکز اصلی این مقاله بر قراردادهای آتی کالاست. دارایی‌های پایه قراردادهای آتی کالا، کالا هستند که به صورت فیزیکی تولید، انتقال، ذخیره و مصرف می‌شوند. بنابراین طبیعی است که این بازار متفاوت از بازار اوراق بهادار رفتار کند. هزینه‌های نگهداری، تاخیر در تحویل کالا، گردش کالاها در سراسر جهان، هزینه‌های حمل، صرف اقتصادی تولید، حجم تولید کالای پایه، حجم مبنای قرارداد پایه و... از موضوعات مطرح در بورس کالا هستند.

مدل‌های بسیاری برای تعیین ارزش قرارداد آتی توسعه یافته است که طی یک تقسیم بندی می‌توان آنها را به دو دسته، مدل‌های صرف ریسک و مدل های مبتنی بر تئوری ذخیره سازی تقسیم کرد. در مدل‌های صرف ریسک، با بهره‌گیری از ارزش دارایی پایه در بازار نقد، نرخ بهره پیش‌بینی شده و هزینه‌های گوناگون به ارزش‌گذاری قرارداد می‌پردازند. با این حال در تئوری ذخیره سازی، تفاوت بین قیمت فعلی و آتی دارایی را با درنظر گرفتن نرخ بهره، دوره ذخیره کالا، هزینه انبارداری و مفهومی تحت عنوان ثمرات رفاهی[۱] بیان می‌کنند.

ثمرات رفاهی، براساس تعریف برنان و شوارتز[۲](۱۹۸۵) عبارت از منفعت بیشتری است که مالکیت فیزیکی کالا، با وجود هزینه‌های ذخیره‌سازی، نسبت به داشتن قرارداد آتی آن کالا برای سرمایه‌گذار ایجاد می‌کند. یکی از مهمترین دلایل وجود ثمرات رفاهی مربوط به عدم ریسک‌پذیری معامله‌گران نسبت به کمبود آن کالا و علاقه فراوان آنان به در اختیار داشتن انبارهای مملو از کالای مورد معامله است. از آنجا که عمده بازیگران بورس کالا و انرژی در سطح جهان، دولت‌ها و شرکت‌های وابسته به آنها و یا تجار بزرگ هستند، هرگونه تغییر در ذخایر تجاری، آنان را با ریسک‌های متعددی روبرو می‌سازد و امکان تغییر قیمت‌ها را افزایش می‌دهد. به عنوان مثال، به صورت متعدد قیمت نفت خام و محصولات وابسته به دلایل کاهش (افزایش) ذخایر تجاری برخی از کشورها افزایش (کاهش) یافته است که این موضوع نشان‌دهنده اهمیت مفهوم ثمرات رفاهی است.

مفهوم ثمرات رفاهی نخستین بار در تئوری ذخیره‌سازی توسط کالدور[۳](۱۹۳۹)، ورکینگ[۴](۱۹٤۸و۱۹٤۹)، تلسر[۵](۱۹۵۸) و برنان[۶](۱۹۵۸) معرفی گردید. تئوری ذخیره‌سازی، رفتار ثمرات رفاهی را با مشاهده سطوح موجودی انبار دارایی‌ها توضیح می‌دهد. کالدور و ورکینگ، مفهوم ثمرات رفاهی را از موجودی انبار اقتباس نموده و آن را تابعی معکوس از سطوح موجودی انبار معرفی نمودند، به نحوی که با افزایش موجودی انبار، ثمرات رفاهی کاهش می‌یابد. براین اساس، در مواردی که موجودی انبار به اندازه کافی زیاد باشد، ارزش ثمرات رفاهی صفر یا نزدیک به صفر خواهد بود و برعکس، بالا بودن ثمرات رفاهی دلالت بر سطح پایین موجودی انبار است. پینداک[۷](۲۰۰۱) ثمرات رفاهی را منعکس کننده اطلاعات بازار آتی و نقدی دانسته و آن را به صورت تابعی از سطح فعلی ذخایر تجاری و خالص تقاضای مورد انتظار معامله گران در بازار آتی تعریف می‌نماید. در زمینه مطالعات تجربی، مطالعات اولیه درباره ثمرات رفاهی توسط تلسر(۱۹۵۸) انجام پذیرفت و در آن پژوهش، وی فرضیه تئوری ذخیره سازی که با افزایش موجودی انبار، ثمرات رفاهی کاهش می یابد، را تائید نمود. بعدتر بررسی‌ای در زمینه‌ي به کارگیري ثمرات رفاهی، توسط برنان و شوارتز (۱۹۸۵) انجام مي‌گيرد. آن‌ها مدلي را براي ارزش‌گذاري جريان‌هاي نقدي حاصل از سرمايه‌گذاري در منابع طبيعي استخراج مي‌نمايند. مهم‌ترین اقدام جهت مدل‌سازی

---

[۱] Convenience yield

[۲] Brennan & Schwartz

[۳] Kaldor

[٤] Working

[۵] Telser

[۶] Brennan

[۷] Pindyck

مفهوم ثمرات رفاهی توسط شوارتز[1](۱۹۹۷) انجام شد و سه مدل تک، دو و سه عاملی ارائه داد. با الگوگیری از این مدل‌ها، مطالعات متعددی انجام می‌شود. تاکید بیشتر این مدل‌ها در مورد اضافه کردن عامل‌هاي ریسکي، آزمون تئوری ذخیره سازی با بهره‌گیری از داده‌های موجودی انبار در بازار دارایی‌هایی همچون دانه‌های خوراکی، نفت خام، گاز طبیعی و فلزات مي‌باشد. به عنوان مثال در رابطه با بازار نفت می‌توان به مطالعات گیبسون و شوارتز[2](۱۹۹۰)، کورتزار و شوارتز[3](۱۹۹۳)، کارمونا و لوکوسکي[4](۲۰۰٤)، کاساسوس و کلین[5](۲۰۰۵)، لازو و همکاران[6](۲۰۰۷)، الکویسیت و کیلیان[7](۲۰۱۰) اشاره کرد. همچنین دونکان[8](۲۰۱۲) سان و همکاران[9](۲۰۱٤) ، باساک و پاولوا[10](۲۰۱٦)، میرانتس و همکاران[11] (۲۰۱۸)، انگشتری و لنگ[12](۲۰۱۹)، یان و سان[13](۲۰۲۰) با در نظر گرفتن مفهوم ثمرات رفاهی مدل‌هایی برای قیمت‌گذاری نقدی و رابطه بین قیمت نقدی و آتی ارائه دادند.

توجه شود براي درك بهتر اهمیت ثمرات رفاهی، باید میان دارایی‌هاي سرمایه‌ای و دارایی‌های مصرفی تمایز قائل شد. برخلاف دارایی‌های سرمایه‌ای که به منظور سرمایه‌گذاری نگهداري شده و در هر شرایطی سرمایه‌گذاران به دنبال بهره‌گیری و بهره برداري از فرصت‌های آربیتراژي مي‌باشند، معامله‌گرانی که کالاهاي مصرفی را در انبار نگهداري می‌کنند، حتی درصورتی که فرصت‌های آربیتراژي براي کسب سود داشته باشند، چنانچه موجودي انبار آن دارایی پائین باشد، تمایل چندانی به فروش آن و بهره‌گیری از فرصت آربیتراژي احتمالی ندارند؛ چرا که بر این باورند که مالکیت فیزیکی یک دارایی منافعی دارد که مالکیت قرارداد آتی آن دارایی فاقد آن است. دسترسی به دارایی فیزیکی، آن‌ها را قادر می‌سازد که به طور کارآمدتري نسبت به شوك‌های غیرمنتظره عرضه و تقاضا واکنش نشان داده و بتوانند از اختلالات هزینه‌بر در فرآیند تولید اجتناب نمایند. بنابراین تحلیل ثمرات رفاهی به عنوان مهم‌ترین رکن قیمت‌گذاری قراردادهای آتی کالایی و حلقه واسط بازار قراردادهای آتی و بازار نقدی ضرورت دارد.

روش‌های ارزش‌گذاری قراردادهای آتی مبتنی بر تئوری ذخیره‌سازی طیف وسیعی از روش‌های فرایندهای تصادفی پیچیده نظیر فرایندهای وینر، وینر تعمیم یافته، ایتو و... را در بر می‌گیرد. لوئیس باچلیر[14](۱۹۰۰) از اولین کساني بود که نشان داد، بازارهای مالي از فرایند گام تصادفي تبعیت مي‌کنند. در بررسی که توسط دکزیت و پندایك[15](۱۹۹٤) بر روی قیمت‌های نقدی مس انجام شد، به این

---

[1] Schwartz

[2] Gibson & Schwartz

[3] Cortazar & Schwartz

[4] Carmona & Ludkovski

[5] Casassus & Collin

[6] Lazo et al

[7] Alquist & Kilian

[8] Duncan

[9] Sun et al

[10] Basak & Poalva

[11] Mirantes et al

[12] Angoshtari & Leung

[13] Yan & Sun

[14] Bachelier

[15] Dexit & Pindyck

نتیجه رسیدند که باید فرضیه بازگشت به میانگین را پذیرفت. نتایج مشابه تحقیق آن‌ها را می‌توان در تحقیقات پیرنگ[1](۲۰۱۱) مشاهده کرد. چیکیبوو[2]و همکاران(۲۰۱۳) مدلی تصادفی برای قیمت نقدی ارائه دادند. بهره‌گیری از مدل حرکت براوني هندسی جهت شبیه سازی قیمت‌های آتي بازار را مي‌توان در تحقیق بنس و لمپا[3](۲۰۱٤) ملاحظه کرد. یان (۲۰۱٤) در پژوهش «ارزشگذاری مشتقات کالایی در یک مدل چندعاملی جدید» مدل‌های قیمت گذاری موجود را از طریق اضافه کردن نوسانات تصادفی به قیمت نقد کالا توسعه می‌دهد. در مطالعه‌ای دیگر، الات[4] و همکاران (۲۰۱٦) سعی کردند مدلی برای قیمت‌گذاری نقدی ارائه دهند. همچنین گو و همکاران[5](۲۰۱۸) در مورد مساله شکاف قیمتی بین قراردادهای آتی و نقدی بر مبنای مدل‌های تصادفی پویا پژوهشی انجام داند. آن‌ها این موضوع را با حرکت براونی مدل‌سازی کردند. با این حال ورود به موضوع انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی با استفاده از مدل‌های کنترل تصادفی، اقدامی نوین است که در این مقاله بدان پرداخته می‌شود.

محققین در پژوهش حاضر درصدد هستند که با استفاده از تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی و با بهره‌گیری از روش کنترل پویای تصادفی مدلی جهت انتخاب موضع معاملاتی بهینه در قراردادهای آتی کالاهای مصرفی ارائه دهند و پاسخی برای پرسش اصلی «مدل بهینه انتخاب موضع معاملاتی صحیح در پرتفوی قراردادهای آتی کالاهای مصرفی بر مبنای تئوری ذخیره سازی و مفهوم ثمرات رفاهی براساس روش کنترل پویای تصادفی چگونه است؟» بیابند.

در ادامه در ابتدا روش پژوهش، به اختصار مرور خواهد شد و پس از آن، مدل‌هایی برای یافتن بهترین موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه‌گذاری طراحی خواهد شد. مدل‌های طراحی شده، در بورس کالای ایران پیاده‌سازی می‌شوند و نتایج حاصل مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲- روش پژوهش

براساس تقسیم‌بندی ساندرز و همکاران(۲۰۰۹) می‌توان انواع جهت‌گیری‌های پژوهش را به سه دسته کاربردی، بنیادی و توسعه‌ای تقسیم نمود. هدف پژوهش حاضر توسعه مدلی جهت تعیین موضع مناسب ورود به قراردادهای آتی کالایی است و بر این اساس پژوهشی از نوع توسعه‌ای محسوب می‌گردد. همچنین پژوهش‌ها را از نظر ماهیت و کیفیت به سه دسته اکتشافي، توصیفي و تبییني تقسیم مي‌کنند. پژوهش اکتشافي ابزار با ارزشي براي یافتن آنچه که در حال اتفاق است می باشد که درصدد یافتن بینش جدید، پاسخ به سؤالات و ارزیابي پدیده‌ها در نگاه جدید است (ساندرز و همکاران، ۲۰۰۹). این پژوهش به دلیل اینکه در تلاش براي ارائه مدلي جدید جهت بهینه‌سازی انتخاب موضع ورود به قراردادهای آتی کالایی است و نگاهي جدید به این مسئله دارد، از نوع اکتشافي است. به عبارت دیگر به دنبال کشف متغیرها، محدودیت‌ها و روابط ریاضي جدید در مدل است.

رویکردهای پژوهش به دو دسته قیاسی و استقرایی تقسیم می‌شود. در رویکرد قیاسی، نظریه یا فرضیه‌اي توسعه داده می‌شود و سپس يك استراتژي پژوهش جهت آزمون آن طراحی می‌شود. در رویکرد استقرایی، داده‌ها جمع‌آوری شده و نظریه‌اي به عنوان نتیجه تحلیل داده‌ها توسعه داده می‌شود. در این پژوهش، مدل‌سازي‌هاي ریاضی براساس رویکرد قیاسی انجام می‌گیرد، بنابراین پژوهش حاضر نیز داراي رویکردي قیاسی است. ساندرز و همکاران به استراتژی‌های پژوهشی چون تجربی، پیمایشی، اقدام‌پژوهی، نظریه داده‌بنیاد، قوم‌نگاري، بررسی موردي و بررسی تاریخی اشاره کرده‌اند. اما استراتژي پژوهش بکار رفته در اینجا يك استراتژي چهار گامي است. مراحل این استراتژي عبارتند از: ۱.بررسی موقعیت مساله. ۲.ساخت مدل. ۳.مقایسه مدل و دنیای واقع. ٤.اعمال تغییرات.

[10]Pirrong

[1]Chikibvu & Chinhamu

[2]Benth & Lempa

[3]Elaut et al

[4]Guo et al

گزینه‌های پژوهش نیز به سه دسته تك‌روشی، چندروشی و آمیخته تقسیم می‌شوند. اگر در انتخاب روش‌هاي پژوهش از يك روش جمع‌آوری داده و يك رويه تحلیل داده متناظر با آن بهره‌گیری شود، گزینه پژوهش تك‌روشی نامیده می‌شود. در صورتي‌که از بیش از يك روش جمع‌آوری داده و رویه‌هاي تحلیل براي پاسخگویی به پرسش پژوهش بهره‌گیری شود، گزینه پژوهش چندروشی خواهیم داشت. در روش پژوهش آمیخته از روش‌هاي گردآوری داده کمی و کیفی و رویه‌هاي تحلیل مرتبط با آن‌ها، به شیوه‌هاي موازي (در يك زمان) و يا ترتیبی (یکی پس از دیگري) بهره‌گیری می‌شود، اما با هم ترکیب نمی‌گردند. به این معنا که، اگرچه روش پژوهش آمیخته از هر دو دیدگاه کمی و کیفی بهره‌گیری می‌کند، با این حال داده‌هاي کمی به شیوه‌اي کمی و داده‌هاي کیفی به شیوه‌اي کیفی تحلیل می‌شوند. پژوهش حاضر تک روشی است، زیرا در آن از يك روش جمع‌آوری داده و يك رویه تحلیل داده متناظر با آن بهره‌گیری می‌شود. افق زمانی پژوهش نیز به دو دسته مقطعی و طولی تقسیم می‌شود. در پژوهش مقطعی، پدیده‌اي خاص در يك زمان خاص بررسی می‌گردد. اما در پژوهش طولی رویدادها در طول زمان بررسی می‌شوند و امکان بررسی تغییر و توسعه در آن‌ها وجود دارد. پژوهش حاضر به لحاظ افق زمانی مقطعی محسوب می‌شود، زیرا در يك مقطع زمانی مورد آزمون قرار می‌گیرد. روش و ابزارجمع‌آوری داده‌ها در این پژوهش، بررسی کتابخانه‌اي است که مدل در بورس کالای ایران پیاده سازی می‌شود. داده‌هاي مورد نیاز (داده‌های روزانه قیمت آتی و گواهی سپرده کالایی)، فی مابین سال‌های ۱۳۹۷ الی ۱۳۹۹ از سایت اطلاع رسانی بورس کالای ایران (www.ime.co.ir) جمع‌آوری و تحلیل می‌شوند. کالاها و قراردادهای مورد رجوع مربوط به محصولات کشاورزی (زعفران، زیره، پسته) است که در بازه مورد نظر دارای وضعیت معاملاتی فعالی بوده باشند. داده‌های مربوط به گواهی سپرده کالایی به عنوان قیمت نقدی بهره‌گیری می‌شوند و داده‌های مربوط به قیمت پایانی قرارداد آتی جهت قیمت آتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳- مدل سازی

در این بخش، مدلی مبتنی بر رویکرد کنترل پویای تصادفی جهت تعیین موضع معاملاتی درست و میزان سرمایه گذاری در یک و یا پرتفویی دو کالایی از قراردادهای آتی، ارائه می‌شود. در رویکرد مورد استفاده، برای ساخت مدلی جهت یافتن موضع معاملاتی درست، از مدل قیمت نقدی تصادفی و به طور خاص، مدل شناخته شده دو عاملی شوارتز(۱۹۹۷) و ثمرات رفاهی استفاده شده است. با حل معادلات مرتبط، استراتژی معاملات آتی بهینه تعیین می‌شود.

۳-۱- مدل تک کالایی با دو عامل تصادفی

هدف از ارائه این مدل، بیان اثرات دینامیکي ثمرات رفاهی و وابستگي قیمت نقدي و ثمرات رفاهی است. بنابراین ثمرات رفاهی $((\delta_t)_{t\geq 0})$ به عنوان یک عامل تصادفي و قیمت نقدی $((S_t)_{t\geq 0})$ به عنوان عامل دیگر تصادفی در نظر گرفته ميشود. در این حالت با دوعامل تصادفی وابسته به هم روبرو هستیم که سرعت رشد عامل قیمت نقدی $(S_t)_{t\geq 0}$ - که با یک حرکت براونی هندسی ارائه می‌شود - با یک عامل ثمرات رفاهی $(\delta_t)_{t\geq 0}$ - که عامل تصادفی بازگشت به میانگین است- اصلاح می‌شود. بنابراین اگر لگاریتم قیمت دارایی پایه را با X_t نشان دهیم، آنگاه رابطه زیر بین قیمت نقدی که با ثمرات رفاهی پیوسته تصادفی هدایت می‌شود برقرار است:

$$X_t = \log(S_t) \quad (۱)$$

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\eta^2}{2} - \delta_t\right) dt + \eta dZ_t^s \quad (۲)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)\, dt + \bar{\eta}\, dZ_t^\delta \quad (۳)$$

در معادلات بالا، Z_t^s و Z_t^δ دو حرکت براونی استاندارد، تحت معیار فیزیکی P با همبستگی پیوسته $\rho\in(-1,1)$ ، μ نرخ رانش[۱] و η نرخ واریانس است. ثمرات رفاهی تصادفی از مدل ارنشتین-اولنبک پیروی می‌کند که در واقع به صورت بازگشت به میانگین با سطح تعادل ثابت α، نوسانات $\bar{\eta}$ و سرعت بازگشت به میانگین κ است و لازم است که $\kappa,\bar{\eta},\eta>0$ و $\mu,\alpha\in R$.

---

[۱] Drift Rate

دقت شود در صورتی که $0\leq\rho$ باشد، در این صورت نرخ بازگشت به میانگین ثمرات رفاهی نزدیک صفر خواهد بود. همان‌گونه در عبارات (۲) و (۳) مشاهده می شود هنگامی که S_t به دلیل افزایش dZ_t^s افزایش می‌یابد، به لطف نرخ مثبت ρ ، نرخ ثمرات رفاهی δ_t نیز افزایش می‌یابد. این موضوع به نوبه خود، نرخ رانش قیمت نقدی را کاهش می‌دهد. از منظر مالی این رابطه نشان‌دهنده پیوند اقتصادی درون زا بین سطح موجودی کالا و قیمت نقدی است. هنگامی که ذخایر تجاری کالا کم است، کمبود احتمالا باعث افزایش قیمت‌ها می‌شود و نگهداری فیزیکی کالا ارزشمندتر می‌شود.

مساله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذار تحت معیار فیزیکی P فرمول‌بندی خواهد شد، اما برای قیمت‌گذاری آتی‌های کالایی نیاز است که از معیار قیمت‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک Q بهره‌گیری نمود. Q معیار مارتینگل معادل است که برای قیمت‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک استفاده می‌شود. برای این منظور، نرخ بهره ثابت $r\geq0$ را فرض و تغییر اندازه از P به Q را انجام می‌دهیم. در این صورت پویایی حرکات براونی Z_t^s و Z_t^δ از فرمول‌های زیر بدست می‌آید:

$$d\tilde{Z}_t^s=\frac{\mu-r}{\eta}dt+dZ_t^s \tag{۴}$$

$$d\tilde{Z}_t^\delta=\frac{\lambda}{\bar{\eta}}dt+dZ_t^\delta \tag{۵}$$

در نتیجه، لگاریتم قیمت نقدی تصادفی در حالت بی‌تفاوتی نسبت به ریسک برابر است با:

$$dX_t=(r-\delta_t-\frac{\eta^2}{2})dt+\eta d\bar{Z}_t^s \tag{۶}$$

$$d\delta_t=\kappa(\bar{\alpha}-\delta_t)dt+\bar{\eta}d\bar{Z}_t^\delta \tag{۷}$$

همچنین در این حالت سطح تعادل برای ثمرات رفاهی در مدل ارنشتین-اولنبک را با $\bar{\alpha}$ نشان می‌دهیم که در این صورت برابر است با:

$$\bar{\alpha}\equiv\alpha-\frac{\lambda}{\kappa} \tag{۸}$$

که λ ریسک قیمت بازار است که در ارتباط با Z_t^δ و سرعت بازگشت به میانگین κ بدست می‌آید. با بهره‌گیری از ثابتλ ، ثمرات رفاهی همچنان از مدل ارنشتین-اولنبک تحت اندازه Q پیروی می‌کند که در مقایسه با اندازه P دارای یک سطح تعادل متفاوت $(\bar{\alpha})$ است.
حال یک بورس کالا با n قراردادهای آتی با سررسید $T_i,\ i=1,\ldots,n$ را در نظر بگیرید. در این بازار قیمت قرارداد آتی کالای i در زمان t با سررسید در T_i را با $F_t^{(i)}$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$F_t^{(i)}\equiv F^{(i)}(t,X_t,\delta_t)=E[e^{X_T}:X_t,\delta_t] \tag{۹}$$

در این معادله قیمت قرارداد آتی $F_t^{(i)}$ تابعی از زمان t، لگاریتم قیمت نقدی (X_t) و ثمرات رفاهی (δ_t) است. برای هر $i=1,\ldots,n$ ، تابع قیمت $F^{(i)}(t,X_t,\delta_t)$، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{\eta^2}{2}\ \frac{\partial^2F^{(i)}}{\partial X^2}+\rho\eta\bar{\eta}\frac{\partial^2F^{(i)}}{\partial X\partial\delta}+\frac{\overline{\eta^2}}{2}\ \frac{\partial^2F^{(i)}}{\partial\delta^2}+\left(r-\delta-\frac{\eta^2}{2}\right)\frac{\partial F^{(i)}}{\partial X}+\kappa(\tilde{\alpha}-\delta)\frac{\partial F^{(i)}}{\partial\delta}=-\frac{\partial F^{(i)}}{\partial t} \tag{۱۰}$$

که $(t,x,\delta)\epsilon[0,T_i)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$ که است. شرایط انتهایی نیز برابر $F_t^{(i)}(T_i,X,\delta)=\exp(X)$ که $x\epsilon R$ است.

مدل پایه تعریف شده در عبارت های (۱) و (۲) در انطباق با نمودار قراردادهای آتی پایدار نیست. در بورس کالا در هر روز خاص، نمودار قراردادهای آتی، ساختار جدیدی برای قراردادها مبتنی بر $F_t^{(i)}$ و T تعریف می‌کند. برای حل این مساله، شوارتز (۱۹۹۷) و کورتازور و نارانجو[۱] (۲۰۰۶) در مدل بی تفاوت نسبت به ریسک که در عبارت‌های (۶) و (۷) بیان گردید، ثابت کردند که ثمرات رفاهی (حداقل به طور مشروط) یک فرایند گاوسی است و امید ریاضی شرطی که مقدار عبارت (۹) را بیان می‌کند را به طور صریح محاسبه می‌نماید. بنابراین قیمت قراردادهای آتی، فرم آفین نمایی زیر را می‌پذیرد:

$$F_t^{(i)}=\exp(X_t+A_i(t)+B_i(t)\delta_t) \tag{۱۱}$$

در برخی از توابع $A_i(t)$ و $B_i(t)$ فقط به متغیرهای زمان بستگی دارند و وابستگی به متغیرهای وضعیت ندارند. توابع $A_i(t)$ و $B_i(t)$ از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم یافت می‌شوند:

[۱] Cortazar & Naranjo

$$r+\frac{\bar{\eta}^2}{2}B_i(t)^2+B_i(t)(\alpha\kappa+\rho\eta\bar{\eta})+A_i'(t)=0 \quad (۱۲)$$

$$B_i'(t)-\kappa B_i(t)-1=0 \quad (۱۳)$$

که در آن $t\in[0,T_i)$ و با شرایط انتهایی $A_i(T_i)=0$ و $B_i(T_i)=0$ است. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم (۱۲) و (۱۳) پاسخ‌های صریح زیر را می‌پذیرند:

$$A_i(t)=\left(r-\tilde{\alpha}+\frac{\bar{\eta}^2}{2\kappa^2}-\frac{\rho\eta\bar{\eta}}{\kappa}\right)(T_i-t)+\frac{\bar{\eta}^2}{4}\frac{1-e^{-2\kappa(T_i-t)}}{\kappa^3}+\left(\tilde{\alpha}\kappa+\rho\eta\bar{\eta}-\frac{\bar{\eta}^2}{\kappa}\right)\frac{1-e^{-\kappa(T_i-t)}}{\kappa^2} \quad (۱۴)$$

$$B_i(t)=-\frac{1-e^{-\kappa(T_i-t)}}{\kappa} \quad (۱۵)$$

با بهره‌گیری از فرمول ایتو بر روی معادله (۱۱)، قیمت قرارداد آتی با سررسید در T_i طبق معادلات دیفرانسیل تصادفی استنتاج می‌شود:

$$\frac{dF_t^{(i)}}{F_t^{(i)}}=\mu_i(t)dt+\eta dZ_t^s+\bar{\eta}B_i(t)dZ_t^\delta \quad (۱۶)$$

تحت اندازه فیزیکی P، نرخ رانش به گونه زیر بدست می‌آید:

$$\mu_i(t)=(\lambda+\tilde{\alpha}\kappa+\rho\eta\bar{\eta})B_i(t)+\frac{\bar{\eta}^2}{2}B_i(t)^2+\mu+\acute{A}_i(t)+\delta\left(\acute{B}_i(t)-\kappa\acute{B}_i(t)-1\right)=\mu-r-\frac{\lambda(1-e^{-\kappa(T_i-t)})}{\kappa} \quad (۱۷)$$

که عبارت اخیر از معادلات (۱۲) و (۱۵) بدست می‌آید. از عبارت بالا یک نتیجه بسیار مهم بدست می آید و آن این که، نرخ رانش $F_t^{(i)}$ مستقل از X_t و δ_t است، به این معنی که تابع ارزش سرمایه‌گذار مستقل از X_t و δ_t است. این یک نتیجه مهم کاربردی است که به طرز عجیبی مساله بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذار را ساده می‌کند و در نهایت منجر به یک پاسخ صریح می‌شود.

برای ساده‌سازی متن عبارات، با استفاده از ترکیب خطی dZ_t^s و dZ_t^δ عبارت (۱٦) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sigma_i(t)dZ_t^{(i)}\equiv\eta dZ_t^s+\bar{\eta}B_i(t)dZ_t^\delta \quad (۱۸)$$

که $Z_t^{(i)}$ یک حرکت براونی استاندارد است و

$$\sigma_i(t)^2=\eta^2+2\rho\bar{\eta}\eta B_i(t)+\bar{\eta}^2B_i(t)^2 \quad (۱۹)$$

ضریب نوسانات آتی است. براساس این مدل، قیمت‌های آتی مستقل نیستند و یک ساختار همبستگی خاص را می‌پذیرند. به عنوان مثال، دو قرارداد آتی با سررسید T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. معادلات دیفرانسیل تصادفی برای قیمت آتی عبارت است از:

$$\frac{dF_t^{(i)}}{F_t^{(i)}}=\mu_i(t)dt+\sigma_i(t)dZ_t^{(i)} \qquad i\in\{1,2\} \quad (۲۰)$$

که دو حرکت براونی $Z_t^{(1)}$ و $Z_t^{(2)}$ با هم همبستگی دارند:

$$Z_t^{(1)}Z_t^{(2)}=\rho_{12}(t)dt \quad (۲۱)$$

که

$$\rho_{12}(t)=\frac{\bar{\eta}^2B_1(t)B_2(t)+(B_1(t)+B_2(t)\rho\eta\bar{\eta}+\eta^2)}{\sigma_1(t)\sigma_2(t)} \quad (۲۲)$$

که نه تنها به پارامترهای نقدی $(\rho,\eta,\bar{\eta})$ بلکه به دو تابع قیمت آتی از طریق $B_1(t)$ و $B_2(t)$ بستگی دارد.

حال با بهره‌گیری از نتایج حاصل می‌توان فرایند بهینه ثروت و انتخاب موضع معاملاتی را بدست آورد. فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تنها به مبادله قراردادهای آتی می‌پردازد و مورد معامله تعداد $\tilde{\pi}_1(t,F_1)$ واحد قرارداد آتی در زمان t با تاریخ سررسید T_1 است. بنابراین فرایند تغییرات ثروت سرمایه‌گذار به صورت $d\widetilde{W}_t=\tilde{\pi}_1(t,F_t^{(1)})dF_t^{(1)}$ است. با بهره‌گیری از معادلات قیمت آتی (۱۱) و (۲۰)، می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر را برای روند ثروت و قیمت آتی بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} d\widetilde{W}_t \\ dF_t^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \widetilde{\pi_1}\,\mu_1(t)F_t^{(1)} \\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \tilde{\pi}_t\,\eta F_t^{(1)} & \tilde{\pi}_t\,\tilde{\eta}B_1(t)F_t^{(1)} \\ \eta F_t^{(1)} & \tilde{\eta}B_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ_t^s \\ dZ_t^\delta \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \widetilde{\pi_1}\,\mu_1(t)F_t^{(1)} \\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \widetilde{\pi_1}\,\sigma_1(t)F_t^{(1)} \\ \sigma_1(t)F_t^{(1)} \end{bmatrix}dZ_t^{(1)} \quad (۲۳)$$

متغیر کنترل $\widetilde{\pi_1}$ قابل قبول[1] است اگر $\widetilde{\pi_1}$ قابل اندازه‌گیری باشد و دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی (۲۳) یک پاسخ منحصر به فرد برای $(\widetilde{W}_t,F_t^{(1)})$ با شرایط $E(\int_t^T \widetilde{\pi_1}(s,F_s^{(1)})^2(F_s^{(1)})^2 ds)<\infty$ را پذیرفته باشد. مجموعه استراتژی‌های قابل قبول در هنگام اتخاذ موضع معاملاتی در زمان t را با $\widetilde{A_1}$ نشان می‌دهیم. اگر اولویت ریسک سرمایه‌گذار با تابع نمایی زیر توصیف شود:

$$U(\omega)=-e^{-\gamma\omega} \qquad \text{برای } \omega\epsilon R \tag{۲۴}$$

که در آن $\gamma>0$ پارامتر ریسک پذیری ثابت است، آنگاه برای یک افق معاملاتی $[0,T]$، سرمایه‌گذار به دنبال یک استراتژی قابل قبول است که سود مورد انتظار در زمان T را با حل مساله بهینه سازی به حداکثر رساند:

$$\tilde{u}(t,\omega,F_1)=\mathrm{Sup}_{\widetilde{\pi_1}\,\epsilon\widetilde{A_t}}\, E\big(U(\widetilde{W}_T)\big|\widetilde{W}_t=\omega,F_t^{(1)}=F_1\big) \tag{۲۵}$$

توجه شود که تابع ارزش فقط تابعی از زمان t، ثروت فعلی ω و قیمت فعلی قرارداد آتی F_1 است و به قیمت نقدی نقدی یا ثمرات رفاهی بستگی ندارد.

جهت سهولت در بیان، مشتقات جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{u}_t=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} \qquad \tilde{u}_\omega=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\omega} \qquad \tilde{u}_{\omega\omega}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\omega^2}$$
$$\tilde{u}_1=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial F_1} \qquad \tilde{u}_{11}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial {F_1}^2} \qquad \tilde{u}_{\omega1}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\omega\partial F_1} \tag{۲۶}$$

انتظار داریم تابع ارزش $\tilde{u}(t,\omega,F_1)$ در معادله HJB صدق کند:

$$\tilde{u}_t+\mathrm{Sup}_{\widetilde{\pi_1}}\{\widetilde{\pi_1}\,\mu_1(t)F_1\tilde{u}_\omega+\widetilde{\pi_1}\sigma_1(t)^2F_1^2\tilde{u}_{\omega1}+\frac{1}{2}\widetilde{\pi_1}^2\sigma_1(t)^2F_1^2\tilde{u}_{\omega\omega}\}+\frac{\sigma_1(t)^2}{2}F_1^2\tilde{u}_{11}+\mu_1(t)F_1\tilde{u}_1=0 \tag{۲۷}$$

برای $(t,\omega,F_1)\epsilon[0,T]\times R\times R_+$ با شرایط انتهایی $\tilde{u}(T,\omega,F_1)=e^{-\gamma\omega}$ برای $(\omega,F_1)\epsilon R\times R_+$ با بهینه سازی انجام شده در معادله پیش رو، می‌توان کنترل بهینه $\widetilde{\pi_1}$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\widetilde{\pi_1}^*(t,F_1)=\frac{\tilde{u}_\omega\mu_1(t)+F_1\tilde{u}_{\omega1}\sigma_1(t)^2}{F_1\tilde{u}_{\omega\omega}\sigma_1(t)^2} \tag{۲۸}$$

با جایگزین کردن آن، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{u}_t-\frac{\tilde{u}^2{}_\omega\mu_1(t)^2}{2\tilde{u}_{\omega\omega}\sigma_1(t)^2}-\frac{F_1\tilde{u}_\omega\tilde{u}_{\omega1}\mu_1(t)}{\tilde{u}_{\omega\omega}}+\frac{F_1\big(2\tilde{u}_1\tilde{u}_{\omega\omega}\mu_1(t)-F_1\big({\tilde{u}_{\omega1}}^2-\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{\omega\omega}\big)\sigma_1(t)^2\big)}{2\tilde{u}_{\omega\omega}}=0 \tag{۲۹}$$

که $\tilde{u}$ فقط به t و ω وابسته است و بنابراین داریم:

$$\tilde{u}(t,\omega)=-e^{-\gamma\omega-\phi(t)} \tag{۳۰}$$

که با جایگذاری مستقیم و برخی محاسبات، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\widetilde{\Phi}}{dt}=-\frac{\mu_1(t)^2}{2\sigma_1(t)^2}=-\frac{1}{2}\frac{(\lambda(1-e^{-\kappa(T_1-t)})-\kappa(\mu-r))^2}{(1-e^{-\kappa(T_1-t)})^2\bar{\eta}^2-2(1-e^{-\kappa(T_1-t)})\kappa\rho\eta\bar{\eta}+\kappa^2\eta^2} \tag{۳۱}$$

هدف آن است که $\widetilde{\phi}(T)=0$ شود. مقدار $\widetilde{\phi}(T)=0$ را می‌توان با انتگرال زیر بدست آورد:

$$\widetilde{\Phi}(t)=\int_t^T\frac{\mu_1(t)^2}{2\sigma_1(t)^2}d\acute{t} \qquad 0\leq t\leq T \tag{۳۲}$$

حال با استفاده از عبارت‌های (۲۸) و (۳۰) می‌توان استرتژی بهینه را بدست می‌آورد:

$$\widetilde{\pi}_1^*(t,F_1)=\frac{\mu_1(t)-\sigma_1(t)^2\widetilde{\Phi_1}}{\Upsilon F_1\sigma_1(t)^2}=\frac{\mu_1(t)}{\Upsilon F_1\sigma_1(t)^2} \tag{۳۳}$$

در نهایت با بهره‌گیری از عبارت‌های (۱۵)، (۱۷) و (۱۹) استراتژی بهینه $\widetilde{\pi}_1^*$ در قراردادی آتی با تاریخ سررسید مشخص به صراحت توسط عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\widetilde{\pi}_1^*(t,F_1)=\frac{1}{\Upsilon F_1}\frac{\kappa(\lambda(1-e^{-\kappa(T_1-t)}-\kappa(\mu-r))^2}{(1-e^{-\kappa(T_1-t)})^2\bar{\eta}^2-2(1-e^{-\kappa(T_1-t)})\kappa\rho\eta\bar{\eta}+\kappa^2\eta^2} \tag{۳۴}$$

[1] admissible

۳-۲- مدل پرتفوی دو کالایی با عامل تصادفی قیمت نقدی و ثمرات رفاهی

این مدل شامل پرتفویی با دو با قرارداد آتی کالایی است که یکي از این عوامل تصادفی، قیمت نقدي کالا (s) و دیگری ثمرات رفاهی (δ) است. فرض مي‌شود که قیمت نقدي کالاي i از فرآیند تصادفي براوني هندسي پیروي نماید و براي ثمرات رفاهی کالاي iام، فرض مي‌شود که از حرکت تصادفي برگشت به سطح بلند مدت پیروي مي‌کند. بنابراین مدل دو عاملي براي دو کالاي (کالاي ۱) و(کالاي ۲) به صورت زیر نوشته مي‌شود:

$$\begin{aligned} dS_1&=(\mu_1-\delta_1)dt+\eta_1 dZ_t^s \\ d\delta_1&=\kappa_1(\alpha_1-\delta_1)dt+\bar{\eta}_1 dZ_t^\delta \\ dS_2&=(\mu_2-\delta_2)dt+\eta_2 dZ_t^s \\ d\delta_2&=\kappa_2(\alpha_2-\delta_2)t+\bar{\eta}_2 dZ_t^\delta \end{aligned} \tag{۳۵}$$

که پارامترهاي μ_i بیانگر نرخ رانش (سطح بلند مدت قیمت) کالاي iام، σ_i بیانگر نوسان قیمت براي کالايi ام، δ_i بیانگر ثمرات رفاهی کالاي i ام، $\bar{\eta}_i$ واریانس ثمرات رفاهی براي کالايiام، κ_i سرعت برگشت به میانگین بلندمدت براي ثمرات رفاهی، α_i بیانگر سطح بلند مدت ثمرات رفاهی، dZ بیانگر تغیرات فرآیند وینر و d بیانگر علامت دیفرانسیل مي‌باشند. فرض مي‌شود که در سیستم معادلات تصادفي (۳۵) تغییرات حرکت وینر با همدیگر همبستگي دارند. ماتریس همبستگي بین آنها به صورت زیر بیان مي‌شود:

$$dZ\,dZ^T=\begin{bmatrix} \bar{\eta}^2{}_1 & \rho_{12} & \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} \\ \rho_{12} & \bar{\eta}^2{}_2 & \rho_{1\delta_1} & \rho_{2\delta_2} \\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_1} & \bar{\eta}^2{}_{\delta_1} & \rho_{\delta_1\delta_2} \\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} & \rho_{\delta_1\delta_2} & \bar{\eta}^2{}_{\delta_2} \end{bmatrix}dt=\Omega \tag{۳۶}$$

که Ω بیانگر ماتریس همبستگي میان اجزا وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفي بالا مي‌باشد. حال تحت فرض احتمال ریسک خنثي، رفتار قیمت نقدي و ثمرات رفاهی به صورت زیر نوشته مي‌شود:

$$dZ\,dZ^T=\begin{bmatrix} \bar{\eta}^2{}_1 & \rho_{12} & \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} \\ \rho_{12} & \bar{\eta}^2{}_2 & \rho_{1\delta_1} & \rho_{2\delta_2} \\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_1} & \bar{\eta}^2{}_{\delta_1} & \rho_{\delta_1\delta_2} \\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} & \rho_{\delta_1\delta_2} & \bar{\eta}^2{}_{\delta_2} \end{bmatrix}dt=\Omega \tag{۳۷}$$

که Ω ماتریس همبستگي میان اجزا وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفي بالا مي‌باشد. حال تحت فرض احتمال ریسک خنثي، رفتار قیمت نقدي و ثمرات رفاهی به صورت زیر نوشته مي‌شود:

$$\begin{gathered} dS_i=(r-\delta_i)S_i dt+\eta_i\left(\frac{\mu_i-r}{\eta_i}+dZ_i^s\right)=(r-\delta_i)S_i dt+\eta_i dZ_i^s \\ d\delta_i=\kappa_i(\hat{\alpha}_i-\delta_i)dt+\bar{\eta}_i\left(\frac{\lambda_i-r}{\bar{\eta}_i}dt+dZ_i^\delta\right)dZ_i^\delta=\kappa_i(\hat{\alpha}_i-\delta_i)dt+\bar{\eta}_i dZ_i^\delta \\ i=1,2 \end{gathered} \tag{۳۸}$$

که r نرخ بهره بدون ریسک و ثابت، λ_i قیمت بازاري ریسک ثمرات رفاهی و$\hat{\alpha}_i=\frac{\alpha_i-\lambda_i}{\kappa_i}$ مي‌باشد. چون معادلات دیفرانسیل تصادفي رفتار قیمت نقدی غیر خطي هستند با بهره‌گیری از لم ایتو و تغییر متغیر $X_i=Ln(S_i(t))$ آنها را خطي مي‌نماییم:

$$\begin{gathered} dX_i=\left(r-\frac{{\eta_i}^2}{2}-\delta_i\right)dt+\eta_i Z_i^s \\ d\delta_i=\kappa_i(\hat{\alpha}_i-\delta_i)dt+\bar{\eta}_i dZ_i^\delta \end{gathered} \tag{۳۹}$$

حال مساله حداکثر انتفاع را برای یک جفت آتی با سررسیدهای گوناگون، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم T_1 و T_2 تاریخ سررسید دو قرارداد آتی در پرتفو باشند که افق معاملاتT شرط، $T\leq\min\{T_1,T_2\}$ را راضی می‌کند. سرمایه‌گذار به طور مداوم فقط دو قرارداد آتی معامله می‌کند و دارایی مالی خود را با بهره‌گیری از معادله زیر محاسبه می‌کند:

$$dW_t=\pi_1\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)dF_t^{(1)}+\pi_2\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)dF_t^{(2)} \qquad (۴۰)$$

که در آن $\pi_i\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right),i=1,2$، تعداد معاملات آتی i را نشان می‌دهد که اگر منفی باشد، موقعیت اتخاذ شده فروش است. برای سادگی $\pi_i\left(t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)$ را به صورت π_i می‌نویسیم. با نوشتن دارایی مالی سرمایه‌گذار و دو قرارداد آتی در کنار یکدیگر به لحاظ دو منبع اساسی تصادفی $\left(Z_t^{(1)},Z_t^{(2)}\right)$، داریم:

$$\begin{bmatrix} dW_t \\ dF_t^{(1)} \\ dF_t^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pi_1\,\mu_1(t)F_t^{(1)}+\pi_2\,\mu_2(t)F_t^{(2)} \\ \mu_1(t)F_t^{(1)} \\ \mu_2(t)F_t^{(2)} \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} \pi_1\sigma_1(t)F_t^{(1)} & \pi_2\sigma_2(t)F_t^{(2)} \\ \sigma_1(t)F_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2(t)F_t^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ_t^1 \\ dZ_t^2 \end{bmatrix} \qquad (۴۱)$$

یک جفت کنترل (π_1,π_2) قابل قبول است اگر ارزش واقعی قابل اندازه‌گیری باشد و دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی بالا پاسخی یکتا برای $\left(W_t,F_t^{(1)},F_t^{(2)}\right)$ قبول کند و شرایط انتگرال‌گیری $E\left(\int_t^T[\pi_i\left(s,F_s^{(1)},F_s^{(2)}\right]^2ds\right)<\infty$، برای $i=1,2$ فراهم شود. مجموعه متغیرهای کنترل قابل قبول در هنگام اتخاذ موضع معاملاتی در زمان اولیه سرمایه‌گذاری را با A_t، نشان می‌دهیم. در گام بعد، تابع ارزش $u(t,\omega,F_1,F_2)$ را برای مساله بهینه‌سازی پرتفو سرمایه‌گذار تعریف می‌کنیم. سرمایه‌گذار به دنبال یک استراتژی قابل قبول (π_1,π_2) است که مطلوبیت مورد انتظار از ثروت را در زمان T به حداکثر رساند، یعنی:

$$u(t,\omega,F_1,F_2)=\sup_{(\pi_1,\pi_2)\in A_t}E\left(U(W_T)\middle|W_t=\omega,F_t^{(1)}=F_1\,,F_t^{(2)}=F_2\right) \qquad (۴۲)$$

برای ساده‌سازی ارائه، مشتقات جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{llll} u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t} & u_\omega=\dfrac{\partial u}{\partial \omega} & u_{\omega\omega}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} & \\ u_1=\dfrac{\partial u}{\partial F_1} & u_{11}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial {F_1}^2} & u_2=\dfrac{\partial u}{\partial F_2} & u_{22}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial {F_2}^2} \\ u_{\omega 1}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\omega\partial F_1} & u_{\omega 2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\omega\partial F_2} & u_{12}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial F_1\partial F_2} & \end{array} \qquad (۴۳)$$

با حل معادله HJB تابع ارزش $u(t,\omega,F_1,F_2)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u_t + Sup_{\pi_1.\pi_2}\Big[&(\pi_1\,\mu_1(t)F_1+\pi_2\,\mu_2(t)F_2)u_\omega+(\pi_1\sigma_1(t)^2F_1^2+\pi_2\rho_{12}(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)F_1F_2)u_{\omega 1} \\ &+(\pi_2\sigma_2(t)^2F_2^2+\pi_1\rho_{12}(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)F_1F_2)u_{\omega 2} \\ &+\frac{1}{2}({\pi_1}^2\sigma_1(t)^2F_1^2+{\pi_2}^2\sigma_2(t)^2F_2^2+\rho_{12}(t)\pi_1\pi_2\sigma_1(t)\sigma_2(t)F_1F_2)u_{\omega\omega}\Big] \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

برای $(t,\omega,F_1,F_2)\in[0,T)\times R\times R_+\times R_+$ همراه با شرایط انتهایی

$$u(T,\omega,F_1,F_2)=-e^{-\gamma\omega} \qquad \text{برای}\ (\omega,F_1,F_2)\in R\times R_+\times R_+ \qquad (۴۵)$$

قابل قبول است. در گام بعد، با تغییر شکل داریم:

$$u(t,\omega,F_1,F_2)=-e^{-\gamma\omega-\phi(t,f_1,f_2)} \qquad (۴۶)$$

که $f_1=log\,F_1$ و $f_1=log\,F_2$ است. با جایگزینی عبارت (٤٦) در عبارت (٤٤)، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی برای ϕ بدست می‌آید:

$$0=\phi_t+\left(\frac{1}{2}\frac{\mu_1^2}{(1-\rho_{12}^2)\sigma_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\mu_2^2}{(1-\rho_{12}^2)\sigma_2^2}-\frac{\rho_{12}\mu_1\mu_2}{(1-\rho_{12}^2)\sigma_1\sigma_2}\right)+\frac{{\sigma_1}^2}{2}\left(\phi_{11}-\phi_1\right)+\frac{{\sigma_2}^2}{2}\left(\phi_{22}-\phi_2\right)+\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\phi_{12} \qquad (۴۷)$$

که $\phi(T,f_1,f_2)=0$ است. حال مشتقات جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\phi_t=\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad \phi_1=\frac{\partial\phi}{\partial f_1} \qquad \phi_2=\frac{\partial\phi}{\partial f_2}$$
$$\phi_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial f_1^2} \qquad \phi_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial f_2^2} \qquad \phi_{12}=\frac{\partial^2\phi}{\partial f_1\partial f_2} \tag{۴۸}$$

حال می‌توانیم این معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی ϕ را با بهره‌گیری از فرض زیر حل کنیم:

$$\phi(t,f_1,f_2)=a_{11}(t)f_1^2+a_1(t)f_1+a_{22}(t)f_2^2+a_2(t)f_2+a_{12}(t)f_1f_2+a(t) \tag{۴۹}$$

که با حل آن داریم:

$$\acute{a}_{11}(t)=\acute{a}_{22}(t)=\acute{a}_{12}(t)=0 \quad a_{11}(t)=a_{22}(t)=a_{12}(t)=0 \quad \acute{a}_1(t)=\acute{a}_2(t)=0 \quad a_1(t)=a_2(t)=0 \tag{۵۰}$$

از این نتیجه می‌شود که ϕ تنها تابعی از t است و از f_1و f_2 مستقل است و معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_1(t)^2\sigma_2(t)^2+\mu_2(t)^2\sigma_1(t)^2-2\rho_{12}\mu_1(t)\mu_2(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)}{2(1-\rho_{12}(t)^2)\sigma_1(t)^2\sigma_2(t)^2} \tag{۵۱}$$

با حل این مسئله و با بکارگیری عبارت‌های (۱۷)، (۱۹) و (۲۲)، یک عبارت بسته برای ϕ بدست می‌آوریم:

$$d\Phi=\frac{(T-t)((r-\mu)^2\bar{\eta}^2+2\lambda(r-\mu)\rho\bar{\eta}\eta+\lambda^2\eta^2)}{2(1-\rho^2)\bar{\eta}^2\eta^2} \tag{۵۲}$$

با بکارگیری عبارت (۵۲) در عبارت (٤٦)تابع ارزش برابر می‌شود با:

$$u(t,\omega)=-e^{-\gamma\omega-\phi(t)} \tag{۵۳}$$

حال با بکارگیری عبارت (٤٦) و (۵۲) در عبارت (٤٤)می‌توان استراتژی‌های بهینه معاملات را بدست می‌آورد:

$$\pi_1^*(t,F_1,F_2)=\frac{1}{\gamma 1\text{-}\rho_{12}(t)^2)\sigma_1(t)F_1}\left(\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1(t)}\text{-}\rho_{12}(t)\frac{\mu_2(t)}{\sigma_2(t)}\right)$$
$$\pi_2^*(t,F_1,F_2)=\frac{1}{\gamma(1-\rho_{12}(t)^2)\sigma_2(t)F_2}\left(\frac{\mu_2(t)}{\sigma_2(t)}-\rho_{12}(t)\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1(t)}\right) \tag{۵۴}$$

در این حالت با دو قرارداد آتی، برای $i=1,2$، استراتژی بهینه مربوطه $\pi_i{}^*$ تابعی از F_i است و F_j برای $i\neq j$بستگی به قیمت سایر معاملات آتی ندارد. همچنین توجه داشته باشید که اگر $\rho_{12}(t)$ صفر باشد، استراتژی بهینه سبد با دو قرارداد آتی به استراتژی بهینه تک قرارداد آتی تبدیل می‌شود.

حال با بهره‌گیری از عبارت های (۱۷)، (۱۹) و (۲۲) استراتژی‌های بهینه صریحاً از نظر پارامترهای مدل بدست می‌آید:

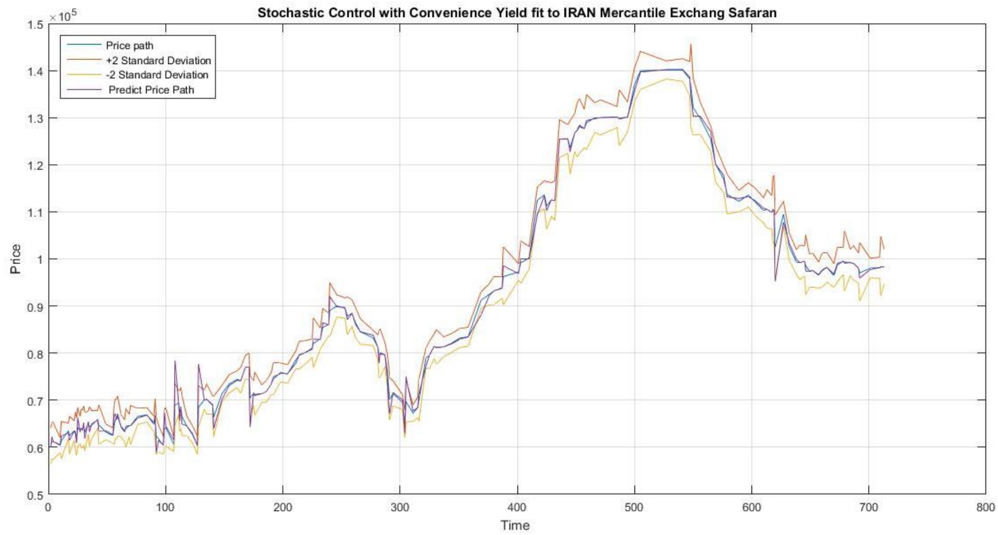
$$\pi_1^*=\frac{e^{\kappa(T_1-t)}((e^{t\kappa}-e^{\kappa T_2})(r-\mu)\bar{\eta}^2+\left(e^{t\kappa}\lambda+e^{\kappa T_2}(r\kappa-\lambda-\kappa\mu)\right)\rho\eta\bar{\eta}+e^{\kappa T_2}\kappa\lambda\eta^2}{F_1(e^{\kappa T_1}-e^{\kappa T_2})\gamma(1-\rho^2)\bar{\eta}^2\eta^2}$$
$$\pi_2^*=\frac{e^{\kappa(T_2\text{-}t)}((e^{t\kappa}\text{-}e^{\kappa T_1})(r\text{-}\mu)\bar{\eta}^2+\left(e^{t\kappa}\lambda+e^{\kappa T_1}(r\kappa\text{-}\lambda\text{-}\kappa\mu)\right)\rho\eta\bar{\eta}+e^{\kappa T_1}\kappa\lambda\eta^2}{F_2(e^{\kappa T_1}\text{-}e^{\kappa T_2})\gamma(1\text{-}\rho^2)\bar{\eta}^2\eta^2} \tag{۵۵}$$

براساس نتایج بدست آمده در عبارت (۵۵) میزان بهینه متغیرهای کنترل π_1^* و π_2^* وابسته به قیمت نقدی فعلی یا میزان ثمرات رفاهی نیست. از سوی دیگر در عبارت (٥٤) هنگامی که ρ_{12} برابر صفر باشد، π_1^* در حالت دو کالایی برابر با $\widetilde{\pi_1^*}$ در حالت تک کالایی می‌شود. به همین ترتیب می‌توان پرتفوهایی با بیش از دو قرارداد آتی را نیز تصور کرد که در این حالت نیز براساس همین مدل، موضوع قابل بررسی است که جهت جلوگیری از اطاله مطلب، از ذکر آن خودداری شده است.

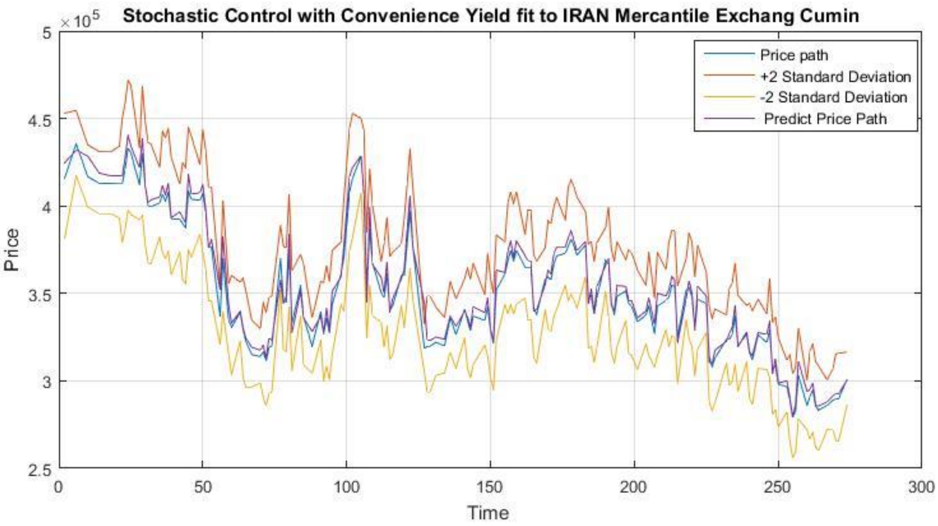
٤- یافته های پژوهش

پس از مدل‌سازی و جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز از بورس کالای ایران و تخمین پارامترهای مورد نیاز در نرم افزار متلب، پیش‌بینی مسیر قیمتی را برای قیمت زعفران نگین طی دوره فروردین ۱۳۹۷ الی اسفند ۱۳۹۸، قیمت پسته فندقي در طی دوره مهر ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸ و قیمت زیره در طی دوره تیرماه ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸ را در نرم افزار متلب شبیه سازی نمودیم که نتایج در اشکال زیر نمایان است.

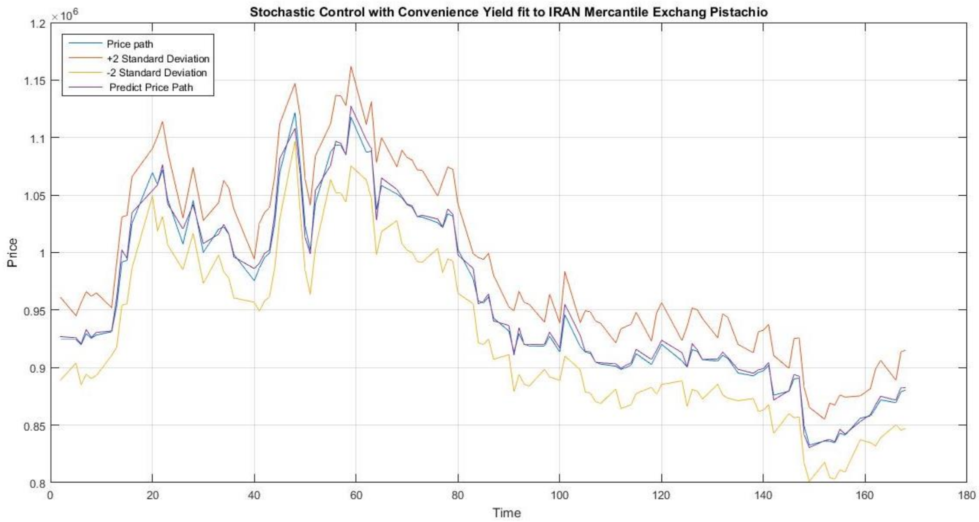
همان‌گونه که در اشکال زیرمشخص است، مسیر قیمت نقد (ناشی از یافته‌های مدل) در طی دوره زمانی مشخص برای سه کالای زعفران نگین، پسته فندقی و زیره سبز شبیه‌سازی شده است. خط آبی رنگ مربوط به رفتار واقعی قیمت نقد، خطوط قرمز و زرد مقادیر دو انحراف معیار بالا و پایین از قیمت نقد را نشان می‌دهد و خط بنفش بیانگر مقدار پیش بینی قیمت نقد است که با همبستگی بالایی با قیمت واقعی منطبق است. همان‌گونه که مشخص است مدل توانسته با دقت بالایی مسیر قیمت نقد را پیش‌بینی کند و کلیه نتایج پیش‌بینی شده، در حدفاصل دو انحراف معیار از قیمت‌های واقعی قرار دارند.



شکل ۱- شبیه سازی پیش بینی قیمت نقدی زعفران در بورس کالای ایران دوره فروردین ۱۳۹۷ الی اسفند ۱۳۹۸.
Figure1- Simulation of forecasting Safaron in the Iran Commodity Exchange.



شکل ۲- شبیه سازی پیش بینی قیمت نقدی زیره در بورس کالای ایران دوره تیر ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸.
Figure2- Simulation of forecasting Cumin in the Iran Commodity Exchange



شکل ۳- شبیه سازی پیش بینی قیمت نقدی پسته در بورس کالای ایران طی دوره مهر ۱۳۹۸ الی اسفند ۱۳۹۸.
Figure3- Simulation of forecasting Pistachio prices in the Iran Commodity Exchange.

٤-۱-پیاده سازی مدل تک کالایی با دو عامل تصادفی

در بازار قراردادهای آتی زعفران، پسته و زیره در هر دوره برای هر محصول عموما یک یا دو قرارداد فعال با سررسید حداقل سه ماهه وجود دارد. برای پیاده سازی مدل، برای هر یک از محصولات زعفران، پسته و زیره، نخست پارامترهای مدل را تخمین زده و سپس دو قرارداد متاخر را انتخاب کرده و در سه مقطع زمانی نسبت به پیش بینی موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه گذاری مبادرت شد. به عنوان مثال در بازار آتی پسته، دو قرارداد آتی مربوط به تحویل ۲٦ فروردین ۱۳۹۹ و ۲۵ خرداد ۱۳۹۹ را انتخاب کرده و مقدار بهینه و نوع موضع معاملاتی را در سه زمان گوناگون ورود (با فواصل ۳۰ روز) توسط مدل تخمین زده شد.

جدول ۱- تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی.

Table1- Estimation of Parameters of One-Factor Dual Commodity.

تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی در بازار زعفران						
μ	κ	η	$\bar{\eta}$	ρ	R	γ
0.00068387	0.0022	0.016	0.008	0.9979	0.000329	0.001
تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی در بازار پسته						
μ	κ	η	$\bar{\eta}$	ρ	R	γ
-0.00026	0.0103	0.0158	0.0129	0.9977	0.000329	0.001
تخمین پارامترهای مدل تک کالایی دو عاملی در بازار زیره						
μ	κ	η	$\bar{\eta}$	ρ	R	γ
-0.001	0.0688	0.0342	0.0288	0.972	0.000329	1E-15

(منبع: محاسبات پژوهشگر)

سوال این است که سرمایه گذار در زمان ورود، نسبت به قراردادهای مطرح شده چه موضع معاملاتی اتخاذ کند و میزان سرمایه گذاری وی در قرارداد چقدر باشد؟ بر همین اساس مدل پیشنهاد خود را در مورد موضع معاملاتی و میزان سرمایه گذاری بیان کرده است که نتایج آن در **جدول ۲** آمده است.

جدول ۲- نتایج حاصل از اجرای مدل تک کالایی دو عاملی.

Table2- The results of a single commodity, two-factor model.

سود حاصل از اتخاذ موضع معاملاتی پیشنهادی	تعداد بهینه پیشنهادی	موضع معاملاتی پیشنهاد مدل	موضع معاملات صحیح	قیمت نقدی در سررسید (ریال) (مجهول)	قیمت نقدی روز معامله (ریال)	قیمت قرارداد (ریال)	تاریخ ورود به قرارداد	نام محصول
428.4	0.0265	فروش	فروش	77743	93910	91209	1399/01/21	آتی زعفران نگین تحویل 1399/02/21
114.1	0.0056	فروش	فروش	77743	98124	92188	1398/12/21	
43.2	0.002	فروش	فروش	77743	99354	105776	1398/11/21	
14.6	0.0007385	فروش	فروش	77743	97450	102628	1398/10/21	
225.97	0.026	خرید	خرید	101691	87848	93000	1399/03/23	آتی زعفران نگین تحویل 1399/04/22
95.64	0.006	خرید	خرید	101691	79168	85751	1399/02/22	
4.37	0.0019	خرید	خرید	101691	89444	99390	1399/01/21	
3.51	0.00074	فروش	فروش	101691	98257	102196	1398/12/22	
176.06	0.000877	خرید	خرید	1048443	880683	847687	1398/12/26	پسته فندقی تحویل 1399/01/26
32.69	0.000319	خرید	خرید	1048443	892835	945980	1398/11/26	
12.49	0.000201	خرید	خرید	1048443	904883	986321	1398/10/26	
119.78	0.000865	خرید	خرید	998041	870000	859571	1399/02/25	پسته فندقی تحویل 1399/03/25
11.62	0.000314	خرید	خرید	998041	1000304	961035	1399/01/25	
22.09	0.000221	خرید	خرید	998041	879081	898074	1398/12/25	
9.781.443.700.000	477260000	خرید	خرید	326695	301282	306200	1398/12/24	زیره سبز تحویل 1399/01/24
4.751.081.160.000	348780000	فروش	فروش	326695	316378	330000	1398/11/24	
3.470.427.710.000	324430000	فروش	فروش	326695	334153	344850	1398/10/24	
3.623.242.320.000	419940000	فروش	فروش	328555	319927	348000	1399/02/18	زیره سبز تحویل 1399/03/18
3.391.185.600.000	357720000	فروش	فروش	328555	312270	321750	1399/01/18	
11.331.576.000.000	349740000	فروش	فروش	328555	287500	319900	1398/12/18	

همان گونه که در **جدول ۲** مشخص است مدل در ۲۰ حالت گوناگون پیاده‌سازی شد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل توانسته است که موضع معاملاتی را در تمام موارد به درستی پیش‌بینی نماید. نکته حایز اهمیت این است که میزان پیشنهاد مدل، جهت سرمایه‌گذاری در محصولات گوناگون با توجه به پارامترهای بدست آمده از میزان نرخ رانش و پراکنش و ریسک بازار گوناگون بوده است. به این معنی میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول پسته با میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول زیره تفاوت دارد. با این حال در هر سه محصول با طولانی‌تر شدن مدت زمان حضور در قرارداد، میزان بهینه سرمایه‌گذاری پیشنهادی مدل کمتر می‌شود و مدل اصطلاحا

ریسک گریزتر می‌شود. از سوی دیگر با توجه به پیش بینی مدل از میزان ریسک محصول، پیشنهاد مدل جهت تعداد بهینه سرمایه‌گذاری متفاوت است.

۴-۲- پیاده سازی مدل دو کالایی با دو عامل تصادفی

در این حالت با دو قرارداد آتی کالایی با تاریخ ورود یکسان و تاریخ های سررسید گوناگون روبرو هستیم که مدت زمان حضور در قراردادها شرط کوچکتر یا مساوی بودن نخستین سررسید را ارضا می‌کند. براي انتخاب موضع معاملاتی درست، پس از گردآوری داده‌های مورد نیاز در نخست پارامترهاي معادله را تخمین مي‌زنيم که نتایج آن در **جدول ۳** آمده است.

جدول ۳-تخمین پارامترهای مدل دو کالایی دو عاملی در بازار.
Table3- Estimation of Parameters of Two-Factor Dual Commodity.

تخمین پارامترهای مدل دو کالایی (زعفران و پسته) دو عاملی در بازار						
μ_1	κ_1	η_1	$\overline{\eta}_1$	ρ_1	R_1	γ_1
0.0006838	-0.0059	0.016	0.0079	0.000867	0.12	24
μ_2	κ_2	η_2	$\overline{\eta}_2$	ρ_2	R_2	γ_2
-0.000261	0.0103	0.0158	0.0129	-0.0587	0.12	0.0001
تخمین پارامترهای مدل دو کالایی (زعفران و زیره) دو عاملی در بازار						
μ_1	κ_1	η_1	$\overline{\eta}_1$	ρ_1	R_1	γ_1
0.000684	0.0022	0.016	0.008	-0.0065	0.12	10.5
μ_2	κ_2	η_2	$\overline{\eta}_2$	ρ_2	R_2	γ_2
-0.001	0.0688	0.0342	0.0288	0.137	0.12	0.001
تخمین پارامترهای مدل دو کالایی (پسته و زیره) دو عاملی در بازار						
μ_1	κ_1	η_1	$\overline{\eta}_1$	ρ_1	R_1	γ_1
-0.00026	0.0103	0.0158	0.0129	-0.0265	0.12	0.0001
μ_2	κ_2	η_2	$\overline{\eta}_2$	ρ_2	R_2	γ_2
-0.001	0.0977	0.0342	0.0294	0.1614	0.12	0.001

(منبع: محاسبات پژوهشگر)

سپس از هر محصول، دو قرارداد متاخر را انتخاب کرده و در سه مقطع زمانی نسبت به تعیین موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه‌گذاری مبادرت شد. به عنوان مثال در بازار آتی زعفران و پسته، در تاریخ های ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۹، ۲۵ فروردین ۱۳۹۸ و ۲۵ اسفند ۱۳۹۵ امکان ورود به قرارداد آتی زعفران نگین تحویل ۲۲ تیرماه ۱۳۹۹ و قرارداد آتی پسته تحویل ۲۵ خرداد ۱۳۹۹ و خروج از قرارداد در تاریخ ۲٤ خردادماه ۱۳۹۹ وجود دارد. براین اساس مقدار بهینه و نوع موضع معاملاتی در سه زمان گوناگون ورود توسط مدل تخمین زده شد که در **جدول ٤** نتایج حاصل از اجرای مدل دو کالایی با دوعامل تصادفی آمده است. در واقع سوال این است که سرمایه‌گذار در زمان ورود، نسبت به قراردادهای مطرح شده چه موضع معاملاتی اتخاذ کند و میزان سرمایه‌گذاری وی در قرارداد چقدر باشد؟ بر همین اساس مدل پیشنهاد خود را در مورد موضع معاملاتی و میزان سرمایه‌گذاری بیان کرده است.

نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل توانسته است در ۳۳ مورد از ۳٦ حالت ممکن یعنی ۹۱/۷ درصد موضع معاملاتی را به درستی پیش‌بینی نماید. با این حال مجموع سود حاصل از سرمایه‌گذاری در پرتفوی دو کالایی در هیچ حالتی منفی گزارش نشده بود و تنها در یک مورد میزان سود از سرمایه‌گذاری در نرخ بهره بدون ریسک (۱۲ درصد پیوسته سالانه) کمتر بود.

نکته حایز اهمیت این است که میزان پیشنهاد مدل جهت سرمایه‌گذاری در محصولات گوناگون با توجه به مقادیر بدست آمده از میزان نرخ رانش، پراکنش و ریسک بازار گوناگون بوده است. به این معنی میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول زعفران با میزان پیشنهاد سرمایه‌گذاری مدل در محصول پسته یا زیره تفاوت دارد. با این حال در هر سه محصول با طولانی‌تر شدن مدت زمان حضور در قرارداد، میزان بهینه سرمایه‌گذاری پیشنهادی مدل کمتر می‌شود و مدل اصطلاحا ریسک گزیرتر می‌شود.

جدول ٤- نتایج حاصل از اجرای مدل دو کالایی دو عاملی.
Table4- The results of a two commodity, two-factor model.

نام محصول	تاریخ ورود به قرارداد	زمان خروج	قیمت قرارداد (ریال)	قیمت نقدی در سررسید (ریال) (مجهول)	موضع معاملاتی صحیح	موضع معاملاتی پیشنهادی مدل	تعداد بهینه پیشنهادی	سود حاصل از اتخاذ موضع معاملاتی پیشنهادی
زعفران	1398/12/26	1399/01/25	91763	89772	فروش	فروش	17.3205	2542311949
پسته			847687	1030901	خرید	خرید	13876	
زعفران	1398/11/26	1399/01/25	103635	89772	فروش	فروش	14.4976	449832199
پسته			945980	1030901	خرید	خرید	5294.7	
زعفران	1398/10/26	1399/01/25	102549	89772	فروش	فروش	12.1348	117235500
پسته			986321	1030901	خرید	خرید	2626.3	
زعفران	1399/02/25	1399/03/24	83661	97600	خرید	خرید	16.8867	1833430360
پسته			859571	1006603	خرید	خرید	12486	
زعفران	1399/01/25	1399/03/24	96850	97600	خرید	خرید	14.0571	217301551
پسته			961035	1006603	خرید	خرید	4768.5	
زعفران	1398/12/25	1399/03/24	105268	97600	فروش	فروش	11.8503	293281962
پسته			898074	1006603	خرید	خرید	2701.5	
زعفران	1398/12/24	1399/01/23	95392	91766	فروش	فروش	11.9086	44273
زیره			326200	321890	فروش	فروش	0.0076	
زعفران	1398/11/24	1399/01/23	103783	91766	فروش	فروش	12.7244	154549
زیره			330000	321890	فروش	فروش	0.0626	
زعفران	1398/10/24	1399/01/23	103314	91766	فروش	فروش	13.5965	169569
زیره			344850	321890	فروش	فروش	0.4942	
زعفران	1399/02/18	1399/03/17	84381	86163	خرید	خرید	12.0969	21923
زیره			348000	300440	فروش	فروش	0.0077	
زعفران	1399/01/18	1399/03/17	100266	86163	فروش	فروش	13.0086	184890
زیره			321750	300440	فروش	فروش	0.0761	
زعفران	1398/12/18	1399/03/17	96116	86163	فروش	خرید	13.8315	11632
زیره			319900	300440	فروش	فروش	7.672	
پسته	1398/12/24	1399/01/23	864220	936309	خرید	خرید	14.5964	1052314
زیره			326200	321890	فروش	فروش	0.0171	
پسته	1398/11/24	1399/01/23	946131	936309	فروش	خرید	8.3344	38.2
زیره			330000	321890	فروش	فروش	9.3261	
پسته	1398/10/24	1399/01/23	1002690	936309	فروش	خرید	2.6939	3086
زیره			344850	321890	فروش	فروش	7.9229	
پسته	1399/02/18	1399/03/17	859333	906273	خرید	خرید	15.2971	719040
زیره			348000	300440	فروش	فروش	0.0209	
پسته	1399/01/18	1399/03/17	886591	906273	خرید	خرید	13.986	284589
زیره			321750	300440	فروش	فروش	0.4372	
پسته	1398/12/18	1399/03/17	896017	906273	خرید	خرید	13.788	286287
زیره			319900	300440	فروش	فروش	7.4449	

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله دو مدل کنترل پویای تصادفی موضع معاملاتی بهینه قراردادهای آتی کالاهای مصرفی بر مبنای تئوری ذخیره‌سازی و مفهوم ثمرات رفاهی توسعه داده شد و در بورس کالای ایران با موفقیت پیاده‌سازی شد. نتایج نشان می‌دهد که مدل تک کالایی با دو عامل تصادفی ثمرات رفاهی و قیمت نقدی تصادفی توانسته است در همه موارد موضع معاملاتی درست را انتخاب کند. مدل دو کالایی با دو عامل تصادفی ثمرات رفاهی و قیمت نقدی تصادفی نیز توانسته است در ۹۱٫۷ درصد موارد موضع معاملاتی درست را انتخاب کند. در مدل‌های مذکور نوع موضع معاملاتی و مقدار بهینه سرمایه گذاری ($\bar{\pi}^*$) متناسب با معکوس پارامتر ریسک پذیری ثابت (Υ) و

قیمت قرارداد آتی و مدت زمان حضور در قرارداد است. این بدان معنی است که ریسک‌پذیری بالاتر و مدت زمان حضور بیشتر در قرارداد باعث کاهش موقعیت سرمایه‌گذار می‌شود. قیمت آتی بالاتر نیز همین اثر را خواهد داشت. همچنین این امر به سرعت بازگشت به میانگین (κ)، نوسانات ($\bar{\eta}$) و (η)، قیمت بازار ریسک(λ) ، نرخ بهره (r) ، نرخ رانش (μ) و نرخ همبستگی (ρ) نیز بستگی دارد. از سوی دیگر توجه داشته باشید که موقعیت سرمایه‌گذار مستقل از سطح تعادل ثمرات رفاهی (α) یا ($\tilde{\alpha}$)، قیمت فعلی (S_t) و یا ثمرات رفاهی (δ_t) است. از منظر کاربردهای عملی، این استقلال نیاز به برآورد یا پیگیری مداوم قیمت نقدی یا ثمرات رفاهی را از بین می‌برد و استراتژی بهینه، به طور مؤثر، تصادفی بودن ثمرات رفاهی در بیشینه سازی مطلوبیت مورد انتظار سرمایه گذار را از بین می‌برد. پیشنهاد می‌گردد در پژوهش‌های آتی مطالعاتی براي حالات مختلف که پرتفو ترکیبی از قراردادهای آتی کالایی، سهام واختیارات معامله است، مدل‌سازی و نتایج بررسي شود. همچنین در حالاتی که در بازار با جهش‌های ناگهانی قیمت‌ها روبرو است، مدل مورد ارزیابی قرار گیرد.

منابع

Alquist, R., & Kilian, L. (2010). What do we learn from the price of crude oil futures?. *Journal of applied econometrics*, *25*(4), 539–573.

Angoshtari, B., & Leung, T. (2019). Optimal dynamic basis trading. *Annals of finance*, 15(3), 307–335.

Bachelier, L. (1900). Th'eorie de la sp'eculation. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Sup'erieure, (English Translation: In P. H. Cootner, editor, Random Character of Stock Market Prices). *Massachusetts institute of technology*, 18(1), 17-78.

Basak, S., & Pavlova, A. (2016). A Model of Financialization of Commodities. *Journal of finance*, 71(4), 1511–1556.

Benth, F., & Lempa, J. (2014). Optimal portfolios in commodity futures markets. *Finance and stochastics*, 18(2),407–430.

Brennan, M., & Schwartz, E. (1985). Evaluating natural resource investments. *Journal of business*, 19(2),135-157.

Brennan, M., (1958). The supply of storage. *American economic review*, 48(1), 50–72.

Carmona, R., & Ludkovski, M. (2004). Spot convenience yield models for the energy markets. *Contemporary mathematics*, 351, 65-80.

Casassus, J., & COLLIN-DUFRESNE, P. (2005). Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates. *The journal of finance*, 60(5), 2283-2331.

Chen, Y., & Wang, X. (2015). A hybrid stock trading system using genetic network programming and mean conditional value-at-risk. *European journal of operational esearch*, 240(3),861- 871.

Chikibvu, D., & Chinhamu, K. (2013). Random Walk or Mean Reversion? Empirical Evidence from the Crude Oil Market. *Journal of the turkish statistical association*, 6(1), 1-9.

Cortazar, G., & Naranjo, L. (2006). An N-factor Gaussian model of oil futures prices. *Journal of futures markets*, 26(3), 243-268.

Cortazar, G., & Schwartz, E. (1993). A compound option model of production and intermediate inventories. *Journal of business*, 11, 517-540.

Diebold, F., & Yilmaz, K. (2009). Measuring financial asset return and volatility spillovers, with application to global equity markets. *The economic journal*, 119, 158-171.

Duncan, T., & Duncan P. (2012). A Direct Method for Solving Stochastic Control Problems. *Communications in information and systems*, 12, 1-14.

Elaut, G., Erdoss, P., & Sjodin, J. (2016). An analysis of the risk-return characteristics of serially correlated managed futures. *Journal of futures markets*, 36(10), 992–1013.

Gibson, R., & Schwartz, E. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of finance*, 45, 959-976.

Guo, W., Zhang, Q., & Rong, L. (2018). stochastic epidemic model with nonmonotone incidence rate, sufficient and necessary conditions for near-optimality. *Information sciences*, 467, 670–684.

Haugom, E., Langeland, H., Molnár, P., & Westgaard, S. (2014). Forecasting volatility of the US oil market. *Journal of banking & finance*, 47, 1-14.

Inoue, A., Jin, L., Rossi, B. (2017). Rolling window selection for out-of-sample forecasting with time-varying parameters. *Journal of econometrics*,196, 55-67.

Kaldor, N. (1939). Speculation and economic stability. *Review of economic studies*, 7(1), 1–27.

Koop, G., & Korobilis, D. (2012). Forecasting inflation using dynamic model averaging. *International economic review*, 53, 867-886.

Lazo, G., Vellasco, M., Pacheco, C. & Dias, G. (2007). Real Options Value by Monte Carlo Simulation and Fuzzy Numbers. *Inrernational journal of business*,53,11-21.

Lin, Q., (2018). Technical analysis and stock return predictability: An aligned approach. *Journal of financial markets*, 38,103-123.

Liu, T., & Gong, X., (2020). Analyzing time-varying volatility spillovers between the crude oil markets using a new method. *Energy economics*, 87, 104711.

Mirantes, A., Población, J. & Serna, G. (2018). The Stochastic Seasonal Behavior of Natural Gas Prices. *European financial management*, 18(3), 410-443.

Pirrong, C. (2011). Commodity price dynamics: A structural approach. *Journal of banking & finance*, 11(4), 39-48.

Pindyck, R. (2016). The Simple Economics of Commodity Price Speculation. *American economic journal: macroeconomics*,8(2), 85–110.

Pindyck, R. (2001). The dynamics of commodity spot and futures markets: a primer. *The energy journal*, 22(3), 1–30.

Schwartz, E. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *Journal of finance*, 52, 923–973.

Schwartz, E., & Smith, E. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management science*, 46, 893–911.

Skabar, A., & Cloete, I. (2002). Neural networks, financial trading and the efficient markets hypothesis. *Australian computer science communications*, 24(1),241-249.

Sun, S., & Sun, Y., & Zhang, G., & Liu, X. (2014). Dynamical behavior of a stochastic two-species Monod competition chemostat model. *Applied mathematics and computation*, 298,153–170.

Telser, G. (1958). Futures Trading and the Storage of Cotton and Wheat. *Journal of political economy*, 66(3)-233-255.

Wang, J., Lin, L., Cao, L. & Zhang, C. (2007). The applications of genetic algorithms in stock market data mining optimization. *WIT Transactions on Information and Communication Technologies,* 33,41-57.

Working, H. (1948). Theory of the Inverse Carrying Charge in Futures Markets. *Journal of farm economics*, 30,1-28.

Working, H. (1949). The Theory of Price of Storage. *American economic review*, 39(6),1254-1262.

Yan, R. & Sun, S., (2020). Stochastic characteristics of a chemostat model with variable yield. *Physical statistical mechanics and Its applications*, 537,26-35.