



Paper Type: Original Article



Revenue Efficiency Evaluation in a Two-Stage Network with Nonlinear Prices in Data Envelopment Analysis

Zohre Moghaddas ^{1,*} , Mohsen Vaez Ghasemi ²

¹ Department of Mathematics, Qazvin Islamic Azad University, Qazvin, Iran; zmoghaddas@qiau.ac.ir.

² Department of Mathematics, Rasht Islamic Azad University, Rasht, Iran; mohsen.vaez@gmail.com.

Citation:



Moghadda, Z., & Vaez Ghasemi, M. (2022). Revenue efficiency evaluation in a two-stage network with nonlinear prices in data envelopment analysis. *Journal of decisions and operations research*, 6 (Spec. Issue), 1-9.

Received: 30/01/2021

Reviewed: 22/02/2021

Revised: 12/03/2021

Accepted: 06/04/2021

Abstract

Purpose: Evaluating the cost efficiency of a network system using Data Envelopment Analysis (DEA) models can be improved from various aspects that exist in real applications. In this study, the aim is to consider a specific set of weights to evaluate cost efficiency in a two-stage network system.

Methodology: In this research, using data envelopment analysis method, an attempt is made to provide a model for evaluating the cost of the network system.

Findings: The results showed that considering the relationships between different stages in a network system can directly affect the results. This issue has been investigated from cost optimization assessments. Considering the set of weights from different aspects can affect the scores obtained.

Originality/Value: According to the models and methods in the literature, in this study, a model is presented that considers cost efficiency in a two-stage model.

Keywords: Data envelopment analysis, Two-Step network, Cost efficiency.

Corresponding Author: zmoghaddas@qiau.ac.ir

 <http://dx.doi.org/10.22105/dmor.2021.237515.1166>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



ارزیابی کارایی درآمد با قیمت غیر خطی در شبکه دومرحله‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها

زهرة مقدس^۱، محسن واعظ قاسمی^۲

^۱گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران.

^۲گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، رشت، ایران.

چکیده

هدف: ارزیابی کارایی هزینه در یک سیستم شبکه با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها می‌تواند از جنبه‌های مختلفی که در برنامه‌های واقعی وجود دارد، بهبود یابد. در این مطالعه، هدف آن است که یک مجموعه خاص از وزن‌ها را برای ارزیابی کارایی هزینه در یک سیستم شبکه دو مرحله‌ای در نظر بگیریم.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش، با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها، سعی در ارائه مدلی برای ارزیابی هزینه سیستم شبکه است.

یافته‌ها: نتایج نشان داد که در نظر گرفتن روابط بین مراحل مختلف در یک سیستم شبکه می‌تواند مستقیماً بر نتایج بدست آمده تأثیر بگذارد. این موضوع از ارزیابی بهینه‌سازی هزینه بررسی شده است. در نظر گرفتن مجموعه وزنه‌ها از جنبه‌های مختلف می‌تواند در امتیازات به دست آمده تأثیر بگذارد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: با توجه به مدل‌ها و روش‌های موجود در ادبیات، در این مطالعه مدلی ارائه شده است که کارایی هزینه را در یک مدل دو مرحله‌ای در نظر می‌گیرد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، شبکه دومرحله‌ای، کارایی هزینه.

۱- مقدمه

از مهم‌ترین دغدغه‌های مدیران ارشد سازمان‌ها، اندازه‌گیری کارایی هزینه می‌باشد. مدل کارایی درآمد، در پی یافتن واحدی است که با مصرف ورودی‌های برابر با ورودی‌های واحد تحت ارزیابی، بیشترین درآمد را از فروش خروجی‌های ناکمتر از خروجی‌های واحد تحت ارزیابی به دست آورد. روش تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری و تجزیه و تحلیل برخی مفاهیمی مانند کارایی اقتصادی، کارایی سود، کارایی هزینه و کارایی درآمد، بکارگرفته می‌شود. از آنجایی که از مهم‌ترین موارد تجزیه و تحلیل پروسه تولید در سازمان‌های مختلف ارزیابی کارایی درآمد است لذا تکنیک‌های مختلفی برای این امر معرفی و استفاده شده است (فارل^۱، ۱۹۵۷).

^۱ Farrell



تصمیم‌گیری از مسائل مهم دنیای امروز است. ابزارهای جدیدی بر مبنای علوم ریاضی برای انجام این مهم در حوزه دانش معرفی و تعمیم داده شده‌اند. یکی از ابزارهای مهم که به کمک برنامه‌ریزی ریاضی به تصمیم‌گیری کمک می‌کند تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها است. گلیج^۱ (۲۰۱۸) در این مقاله خود یک مدل جدید برای تحلیل پوششی داده‌ها دومی مرحله‌ای فازی ارائه داده و به کمک آن عملکرد و کارایی کارگاه‌های صنعتی را مورد ارزیابی قرار داده است. نیل فروشان و طاهانیان^۲ (۲۰۱۷) در این مقاله‌ای شناسایی مهم‌ترین معیارها در فرآیند تصمیم‌گیری استراتژیک بر پایه‌ی مدیریت زنجیره تأمین سبز جهت انتخاب تأمین‌کنندگان پرداخته‌اند. آن‌ها در مطالعه خود با استفاده از معیارهای تصمیم‌گیری با استفاده از روش تاپسیس اولویت و رتبه شرکت‌های تولیدکننده رنگ مشخص کرده‌اند. پنتا و همکاران^۳ (۲۰۲۰) در مقاله خود به اهمیت افزایش آگاهی‌های زیست‌محیطی و اجتماعی که باعث شده است که صنایع متعددی مدیریت زنجیره تأمین پایدار را اتخاذ کنند اشاره کرده‌اند. آن‌ها اذعان می‌کنند که انتخاب تأمین‌کننده پایدار به‌عنوان یک گام بسیار مهم و اصلی در دستیابی به باید در نظر گرفته شود. انتخاب تأمین‌کننده پایدار یک مسئله تصمیم‌گیری چند معیاره است و از نظر ماهیت بسیار پیچیده است. آن‌ها در مطالعه خود با هدف ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان پایدار با استفاده از تحلیل پوششی داده که یک مدل محبوب برای اندازه‌گیری کارایی بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیری به‌طور مؤثر است و همچنین می‌تواند مشکلات تصمیم‌گیری چند معیاره را مدیریت کند استفاده کرده‌اند. حسن زاده و اصغری^۴ (۲۰۲۰) در مقاله خود به موضوع برنامه‌ریزی فروش و عملیات که شامل پیش‌بینی‌های به‌روز است که منجر به برنامه‌های فروش، برنامه‌های تولید، برنامه‌های موجودی، برنامه‌های تحویل مشتری، برنامه‌های توسعه محصول جدید و برنامه‌های مالی می‌شود اشاره کرده‌اند. هدف آن‌ها از این مطالعه شناسایی عوامل مؤثر در اجرای فرآیند برنامه‌ریزی فروش و عملیات و همچنین تعیین اهمیت هر یک از آن‌ها می‌باشد. آن‌ها همچنین به رتبه‌بندی بخش اجرای این فرآیند با استفاده از تحلیل سلسله مراتبی فازی و تاپسیس فازی پرداخته‌اند. منتظری^۵ (۲۰۱۹) در مقاله خود یکی از بهترین تکنیک‌ها برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده است که عملکرد نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده را بر اساس برنامه‌ریزی ریاضی مشخص می‌کند. مدل تحلیل پوششی داده‌ها کلاسیک در ابتدا برای ورودی و خروجی قطعی در نظر گرفته شده بودند، اما در مشکلات دنیای واقعی، مقادیر مشاهده شده از داده‌های ورودی و خروجی اغلب مبهم و تصادفی هستند. منتظری (۲۰۱۹) در مقاله خود اشاره دارد که تصمیم‌گیرندگان ممکن است با یک محیط ترکیبی خاص روبرو شوند که در آن فضای نامفهوم و تصادفی وجود داشته باشد. به این منظور او برای غلبه بر این مشکل، مدل‌های تجزیه و تحلیل پوشش داده در محیط فازی تصادفی ارائه کرده است. جهانتیغ و همکاران^۶ (۲۰۱۳) با استفاده از تاپسیس و مدل‌های مختلف تحلیل پوششی داده‌ها به روشی جدید و ترکیبی برای رتبه‌بندی معرفی کردند. سبت و همکاران^۷ (۲۰۱۸) در مقاله خود به افزایش نیاز صنعت به سرمایه‌گذاران و سرمایه‌گذاران به منظور ادغام و تشویق آن‌ها برای سرمایه‌گذاری در زمینه‌های مختلف صنعت، ضرورت وجود روشی برای کمک به سرمایه‌گذاران برای تصمیم‌گیری تأکید کرده‌اند. آن‌ها روشی را ارائه دادند که سعی می‌کند شخصاً از نظرات جزئی در تصمیم‌گیری برای اطمینان بیشتر بودن نتایج استفاده نکند. به این منظور در مقاله خود بر رتبه‌بندی فرصت‌های سرمایه‌گذاری تمرکز کرده‌اند. از ویژگی‌های مطالعه آن‌ها استفاده از استراتژی مختلف در تحلیل پوششی داده است. مائو و همکاران^۸ (۲۰۲۰) به ارائه یک روش بر مبنای نوتروسفیک در تحلیل پوششی داده‌ها با خروجی‌های نامطلوب پرداخته‌اند.

برای اولین بار فار و گراسکوف^۹ (۲۰۰۰) شیوه‌هایی برای اجرای تجربی کارایی‌های درآمد و هزینه توسعه دادند. برای ارزیابی کارایی از جنبه‌های گوناگون مسئله تحلیل حساسیت در *DEA* مورد بررسی بسیاری از محققین قرار گرفته است. آریف و لوک^{۱۰} (۲۰۰۸)، دلیس و همکاران^{۱۱} (۲۰۰۹)، ایسیک و حسن^{۱۲} (۲۰۰۲)، ری و داس^{۱۳} (۲۰۱۰) و اسراییری^{۱۴} (۲۰۱۰) به ارائه مدل کارایی سود به کمک تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته‌اند.

مدل‌های کارایی درآمد معرفی شده توسط فار و گراسکوف (۲۰۰۰) نه تنها به مقادیر ورودی و خروجی نیاز دارند، همچنین قیمت‌ها نیز بایستی مشخص باشند. اما از آنجایی که در فرآیند تولید و یا خصوصیات خروجی‌ها در سازمان‌هایی با اندازه بزرگ، متفاوت از سازمان‌ها با

¹ Goleij

² Nilforoushan and Tahanian

³ Pantha et al.

⁴ Hassanzadeh and Asghari

⁵ Montazeri

⁶ Jahantigh et al.

⁷ Sebt et al.

⁸ Mao et al.

⁹ Fare and Grosskopf

¹⁰ Ariff and Luc

¹¹ Delis et al.

¹² Isik and Hassan

¹³ Ray and Das

¹⁴ Srairi



اندازه‌های کوچک می‌باشند لذا قیمت‌ها می‌توانند از یکدیگر متفاوت باشد. اما این قبیل شرایط در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها لحاظ نشده است. پس در مواردی که خروجی‌ها به‌گونه‌ای باشند که قیمت خروجی‌ها با توجه به مقدار مختلفشان متفاوت باشد، مدل کارایی درآمد باید در فضای وزن‌ها با شرایط جدید فرموله شود. این شرایط در سیستم شبکه‌ای لحاظ شده است و مدل کارایی درآمد در شبکه به‌وسیله تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها فرموله شده است. از نکات جدید در این مدل‌سازی در نظر گرفتن ارزش غیرخطی خروجی‌ها است. همیشه در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ارزش‌گذاری خطی انجام می‌شود ولی در بسیاری از مثال‌های دنیای اطراف ما این نوع ارزش‌گذاری ماهیت شرایط را در نظر نمی‌گیرد. این موضوع را لطفی و همکاران^۱ (۲۰۱۰) در مقاله‌ای با مدل‌سازی با تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها مطرح کردند و به بررسی واحدهای الگو پرداختند. را لطفی و همکاران (۲۰۲۰) به بررسی ارزش‌گذاری غیرخطی در مدل کارایی هزینه پرداختند. مقدس و همکاران^۲ (In Press) به بررسی کارایی درآمد و قیمت‌گذاری غیرخطی پرداختند. در این تحقیق مدل کارایی درآمد شبکه‌ای فار و گراسکوف (۲۰۰۰) در چنین شرایطی را در نظر گرفته شده است.

در بخش بعد به مقدمات تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته شده است. سپس مدل شبکه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی درآمد شبکه‌ای معرفی شده سپس مدل ارزش‌گذاری غیرخطی معرفی می‌شود. در بخش بعد به ارائه مقاله کاربردی از بانک می‌پردازیم و در بخش آخر نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲- مقدمه تحلیل پوششی داده‌ها

واحد تصمیم‌گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند (x_1, \dots, x_m) ، بردار خروجی (y_1, \dots, y_s) را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های با جنس مشابه، خروجی‌های با جنس مشابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی. کارایی در لغت به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون‌سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل است.

در تکنیک *DEA* مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \{ (X, Y) \in R^{m+s} : X \geq 0 \text{ بتواند به‌وسیله } Y \geq 0 \text{ تولید شود} \}. \quad (1)$$

مدل‌های *DEA* هرکدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به‌طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود. مدل *CCR* اولین مدل *DEA* برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که توسط چارنر و همکاران^۳ (۱۹۷۸) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & (\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR}. \end{aligned} \quad (2)$$

مدل فوق به مدل *CCR* در فرم پوششی با ماهیت ورودی معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جواب بهین در شرط $0 < \theta' \leq 1$ صدق می‌کند.

قابلیت یک واحد تصمیم‌گیرنده برای مصرف همان سطح از ورودی با معلوم بودن قیمت‌های خروجی‌ها به‌منظور تولید خروجی‌هایی با بیشترین درآمد نشان‌دهنده کارایی درآمد آن واحد است (آپاریسیو و همکاران^۴، ۲۰۱۵). مدل زیر به مدل بیشترین درآمد معروف است که با مفروض بودن قیمت خروجی‌ها به دنبال بیشترین درآمد از تولید خروجی‌ها می‌پردازد.

¹ Lotfi et al.

² Moghaddas et al.

³ Charnes et al.

⁴ Aparicio et al.



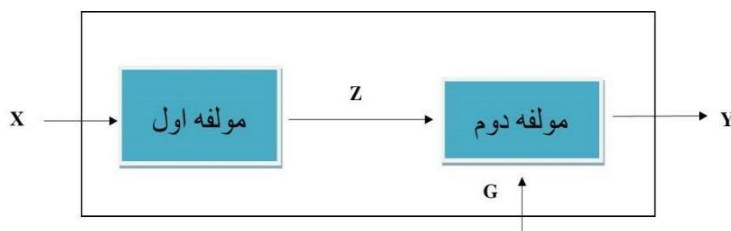
$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{r=1}^s w_r y_r \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_r \quad r = 1, \dots, s, \\
 & y_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

با توجه به جواب بهین به دست آمده از مدل (۳) از رابطه زیر مقدار کارایی در آمد واحدهای تصمیم گیرنده نتیجه می شود.

$$R.E_o = \frac{\sum_{i=1}^s w_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^s w_r y_r^*} \tag{۴}$$

در اکثر مسائل دنیای پیرامون ما ارزش ورودی و خروجی ها به صورت غیر خطی می باشد. امروزه مدل های تحلیل پوششی داده ها در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده بسیار به کار گرفته شده اند و نتایج خوبی به دست داده اند. آنچه در این رساله حائز اهمیت است این است که در مسائل حقیقی اطراف ما داده های باارزش غیر خطی وجود دارند لذا معرفی مدل های مناسبی که بتوان به کمک آن ها ارزیابی عملکرد را تحت این شرایط با دقت بیشتری انجام شود ضروری به نظر می رسد. در نتیجه معرفی مدل های مناسبی برای به دست آوردن مقدار کارایی، مشخص نمودن واحدهای کارا و ناکارا و معرفی واحدهای الگو ضروری به نظر می رسد.

در شرایطی که خروجی هایی باارزش غیر خطی موجود است برای ارزیابی و الگویابی ابتدا بازه تغییرات آن خروجی را به زیر بازه هایی افزایش و فرض می شود که رفتار آن خروجی در هر زیر بازه خطی است. بده بستان های مناسبی برای قطعات خروجی مدنظر در هر یک از زیر بازه های تعریف شده توسط کارشناسان سیستم در نظر گرفته می شود. آنچه حائز اهمیت است این است که متغیرهای متناظر زیر بازه های تعریف شده به ترتیب و در محدوده تعریف شده شان مقدار بگیرند. به این ترتیب کارایی واحدها و الگوی مناسب برای واحدهای ناکارا به دست می آید. با توجه به این که مدل های غیر شعاعی تمامی ناکارایی واحد تحت ارزیابی را در نظر می گیرد، برخلاف مدل های شعاعی که فقط ناکارایی تکنیکی را مدنظر قرار می دهند، لذا با در نظر گرفتن این داده ها می توان مدل مناسبی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده معرفی کرد. در این شرایط بازه تغییرات آن دسته از ورودی ها و خروجی هایی که ارزش غیر خطی دارند به زیر بازه هایی افزایش می شود و فرض می شود که رفتار آن ورودی ها و خروجی ها در هر یک از زیر بازه ها خطی است. بده بستان های مناسبی برای قطعات ورودی و خروجی مدنظر در هر یک از زیر بازه های تعریف شده توسط کارشناسان مربوطه در نظر گرفته می شود. در شکل ۱ یک شبکه را به صورت زیر در نظر بگیرید.



شکل ۱- شبکه دومرحله ای.
Figure 1- Two-stage network.

برای ارزیابی کارایی در آمد این سیستم شبکه ای درحالی که y ارزش غیر خطی (دنباله صعودی از وزن ها) داشته باشد مدل خطی زیر را خواهیم داشت. این مدل بر اساس مدل پیشنهادی لطفی و همکاران (۲۰۱۰) و مقدس و همکاران (*In Press*) در شبکه دومرحله ای سری معرفی و تعمیم داده شده است.



$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{r=1}^s w_r y_r + \sum_{f=1}^q t_f z_f \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_{rj} = y_{r0} \quad r = 1, \dots, s, \quad (a) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 z_{fj} = z_f \quad f = 1, \dots, q, \quad (b) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij} \leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, m, \quad (c)
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 z_{fj} \leq z_{f0} \quad f = 1, \dots, q, \quad (d)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 g_{lj} \leq g_{l0} \quad l = 1, \dots, p, \quad (e)$$

$$y_r \geq 0, z_f \geq 0 \quad r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, q,$$

$$\lambda_j^1 \geq 0, \lambda_j^2 \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

از آنجایی که در دنیای پیرامون ما بسیاری از ورودی و خروجی‌ها ارزش غیرخطی دارند بهتر است در ارزیابی‌ها سعی شود که نتایج دقیق‌تری به دست آید. در این بخش به ارزیابی کارایی درآمد در حالتی که ارزش‌گذاری غیرخطی است پرداخته می‌شود. در مدل‌های کلاسیک *DEA* محاسبه کارایی درآمد در چنین شرایطی با دقت انجام نشده است زیرا در مدل‌های *DEA* ارزش‌گذاری به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود ولی در حقیقت امر ارزش این خروجی بر مبنای مقدار مصرف‌شده آن تعیین می‌گردد.

فرض کنید y_j مقدار تولیدی کالای r توسط واحد j است. همچنین فرض کنید w_r مقدار قیمت به ازای یک واحد از این کالا باشد. اگر فروش این کالا به صورتی باشد که به ازای فروش مقادیر بیشتر آن قیمت نیز افزایش یابد بایستی ارزش غیرخطی این کالا را در ارزیابی در نظر بگیریم. شکل زیر را در نظر بگیرید. در این شکل یک تابع محدب به نمایش درآمده است.

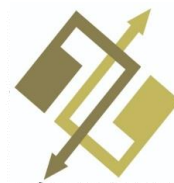
با توجه به برنامه‌ریزی قطعه‌ای خطی می‌توان برای بهتر تخمین زدن این تابع بازه تغییرات آن را به زیر بازه‌هایی افزایش داد. فرض کنید بازه تغییرات خروجی r ام به k_r زیر بازه افزایش شده است. در این صورت می‌توان رفتار این تابع را در هر یک از زیر بازه‌ها به صورت خطی در نظر گرفت. بهتر است برای مشخص کردن تعداد و طول این زیر بازه‌ها از نظر کارشناسان استفاده شود و هیچ دست‌ورالعملی از پیش تعیین‌شده‌ای در این مورد وجود ندارد.

با توجه به زیر بازه‌های تعیین‌شده حال می‌توان معادل قطعه‌ای خطی این تابع را به ازای مقادیر متفاوت خروجی در نظر گرفت. همان‌طور که مشخص است به ازای $y = 400$ و $y = 750$ دو تابع خطی متفاوت در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید k_r زیر بازه افزایش شده متناظر خروجی r ام به صورت زیر باشد:

$$[0, L_1), [L_1, L_2), \dots, [L_{k_r-1}, L_{k_r}]. \tag{6}$$

در این صورت $t_r^{k_r}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$t_r^{k_r} = \begin{cases} L_{k_r}, & \text{if } k_r = 1, \\ L_{k_r} - L_{k_r-1}, & \text{if } k_r = 2, \dots, k_r. \end{cases} \tag{7}$$



اگر به ازاء هر $y_r (r \in R_2)$ بردار قیمت متناظرش را w_r در باشد حال برای $y_r^{k_r} (r \in R_2)$ با توجه به زیربازه‌های تعریف‌شده در بالا قیمت متناظر هر یک را به صورت زیر $w_r^{k_r}$ نظر بگیرید که $w_r^{k_r} < w_r^{k_{r+1}}$. در نهایت به جای w_r, y_r عبارت $\sum_{k_r=1}^{l_{k_r}} w_r^{k_r} y_{rk_r}$ را قرار داده می‌شود.

به عنوان مثال فرض کنید که $y_r = 800$ ، $k_r = 3$ و $[700, 1000]$ ، $[300, 700]$ ، $[0, 300]$. در این مثال بردار خروجی و بردار قیمت به صورت $(y_r^1, y_r^2, y_r^3) = (300, 400, 100)$ و $(w_r^1, w_r^2, w_r^3) = (650, 700, 750)$ است. به این ترتیب بایستی ۳۰۰ واحد اول با قیمت ۶۵۰ واحد پول، ۴۰۰ واحد بعدی با قیمت ۷۰۰ واحد پول و در نهایت ۱۰۰ واحد آخر با قیمت ۷۵۰ واحد پول به فروش برسد. آنچه حائز اهمیت است این است که زیربازه‌های $t_r^{k_r}$ بایستی در محدوده تعریف و به ترتیب مقدار اختیار کنند.

به این منظور مدل زیر معرفی می‌شود. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید که v یک متغیر دودویی و M یک عدد مثبت بسیار بزرگ است. همان طور که عنوان شد k_r معرف تعداد زیربازه‌های $[L_{k_r-1}, L_{k_r}]$ است. متغیر دودویی v_{k-1} ، $y_r^{k_r}$ را طوری هدایت می‌کند که هرگاه $v_{k-1} = 1$ آنگاه $y_r^{k_r} = 0$ و هرگاه $v_{k-1} = 0$ آنگاه $y_r^{k_r}$ بتواند مقدار مثبت اختیار کند. این متغیر دودویی کمک می‌کند که $y_r^{k_r}$ در محدوده تعریف شده خود مقدار اختیار کند و این که زیربازه‌ها به ترتیب مقدار بگیرند. در مدل زیر محدودیت‌های $(a), (b), (c)$ را در مدل زیر در نظر بگیرید. به منظور این که قیمت خروجی به صورت صعودی افزایش یابد وزن‌های $W_r^1, \dots, W_r^{k_r}$ در تابع هدف مدل در نظر گرفته شده است که در صورتی که بازه‌ای مقدار مثبت اختیار کرده باشد قیمت متناظرش در تابع هدف در نظر گرفته شود. به منظور ارزیابی کارایی درآمد DMU_0 مدل زیر را در نظر بگیرید. در مدل زیر R_1 و R_2 معرف خروجی‌های با ارزش خطی و غیرخطی است. در مدل فوق قرار دهید $v_0 = 0$ و M را یک عدد مثبت بزرگ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_{r \in R_1} w_r y_r + \sum_{r \in R_2} (w_r^1 y_r^1 + w_r^2 y_r^2 + \dots + w_r^{k_r} y_r^{k_r}) + \sum_{f=1}^q t_f z_f \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 z_{fj} = z_f \quad f = 1, \dots, q, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_{rj} = y_r \quad r \in R_1, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{k_r, j}^2 y_{rj}^{k_r} = y_r^{k_r} \quad r \in R_2, k_r = 1, \dots, l_{k_r}, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij} \leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 z_{fj} \leq z_{f0} \quad f = 1, \dots, q, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 g_{lj} \leq g_{l0} \quad l = 1, \dots, p, \\
 & \quad \quad y_r^{k_r} \leq t_r^{k_r} (1 - v_{k_r-1}) \quad r \in R_2, k_r = 1, \dots, l_{k_r}, \quad (a) \\
 & \quad \quad v_{k_r} \leq (t_r^{k_r} - y_r^{k_r}) \cdot M \quad r \in R_2, k_r = 1, \dots, l_{k_r}, \quad (b) \\
 & \quad \quad (t_r^{k_r} - y_r^{k_r}) \leq v_{k_r} \cdot M \quad r \in R_2, k_r = 1, \dots, l_{k_r}, \quad (c) \\
 & \quad \quad \lambda_j \geq 0, y_r \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, r \in R_1, \\
 & \quad \quad \lambda_{k_r, j}^2 \geq 0, y_r^{k_r} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, r \in R_2, k_r = 1, \dots, l_{k_r}, \\
 & \quad \quad v_{k_r} \in \{0, 1\} \quad r \in R_2, k_r = 1, \dots, l_{k_r}.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

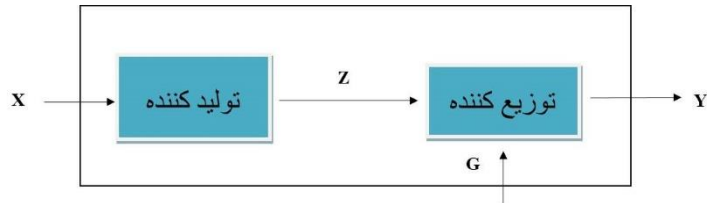
با توجه به جواب بهین مدل فوق می‌توان کارایی درآمد را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$R.E_o = \frac{\sum_{r \in R_1} w_r y_r^* + \sum_{r \in R_2} (w_r^1 y_r^{1*} + w_r^{2*} y_r^{2*} + \dots + w_r^{k_r} y_r^{*k_r}) + \sum_{f=1}^q t_f^* z_f}{\sum_{r \in R_1} w_r y_{r_o} + \sum_{r \in R_2} (w_r^1 y_{r_o}^1 + w_r^2 y_{r_o}^2 + \dots + w_r^{k_r} y_{r_o}^{k_r}) + \sum_{f=1}^q t_f z_f} \quad (9)$$

۳- مثال کاربردی

در ابتدای این مطالعه کاربردی ابتدا به شناخت مؤثر پارامترها در قلمرو کاری این تحقیق شرایط غیررقابتی می‌پردازیم. بدین منظور به شناخت و استخراج عوامل مؤثر ورودی و خروجی و میانی بر ارزیابی کارایی نسبی نیروگاه‌های برق پرداخته و با انجام مطالعات ای بر روی این سیستم، شبکه دومرحله‌ای شامل مرحله تولید و مرحله توزیع، مدل مفهومی تحلیل پوششی داده‌ها را مطابق شکل ۲ در نظر گرفتیم.



شکل ۲- مدل مفهومی شبکه‌ای.

Figure 2- Network conceptual model.

ورودی‌های مرحله اول عبارت‌اند از: ظرفیت نصب، مصرف داخلی، و مصرف سوخت. خروجی‌های مرحله اول عبارت‌اند از: تولید ویژه. ورودی‌های مرحله دوم عبارت‌اند از: تولید ویژه و هزینه شبکه انتقال و توزیع. خروجی‌های مرحله دوم عبارت‌اند از: برق تولیدشده. جدول ۱ اطلاعات آماری ده نیروگاه برق را به صورت زیر در نظر بگیرید.

جدول ۱- اطلاعات آماری داده‌ها.

Table 1- Statistical description of data.

شاخص‌ها	انحراف معیار	میانگین	حداکثر	حداقل	انحراف معیار
ظرفیت نصب	2/04	6/4	1890	50	2/04
مصرف داخلی	19/17	142	796262	13039	19/17
مصرف سوخت	3/702	1/05	107/1448	3/412765	3/702
تولید ویژه	198/856	18872	11000000	212403	198/856
هزینه شبکه انتقال و توزیع	128/95	641	2000	500	128/95
برق تولیدشده	198/856	18872	11000000	212403	198/856

قیمت برق تولیدشده از نیروگاه که خروجی مرحله دوم (توزیع) می‌باشد بسته به مقدار آن متفاوت است. هر چه نیروگاه برق تولیدشده بیشتری ارائه دهد و مصرف‌کننده آن مقدار بیشتری مصرف کند آنگاه درآمد نیروگاه از این فعالیت بیشتر خواهد بود. لذا می‌توان برای مقدار برق تولیدشده بازه‌هایی را در نظر گرفت که ارزش آن بازه‌ها با توجه به بیشتر شدن مقدار برق تولیدشده افزایش یابد. با اعمال روش پیشنهادی در مدل ارائه‌شده در این تحقیق بازه‌های متناظر آن طبق نظر کارشناسان مربوطه برحسب میلیون ریال به صورت تعریف‌شده است.

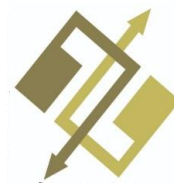
$$[0, 3000000), [3000000, 8000000), [8000000, \infty) \quad (10)$$

ارزش متناظر هر یک از این بازه‌ها را نیز به صورت ۴۲۰۰، ۸۷۰۰، ۱۹۰۰۰ برحسب واحد پولی ریال در نظر بگیرید.

نتایج ارزیابی کارایی درآمد ده نیروگاه برق به کمک مدل دومرحله‌ای تعمیم‌یافته در جدول زیر گردآوری شده است. در جدول ۲ نتایج مدل کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها نیز آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در برخی واحدها نتایج متفاوتی به دست آمده است که در آن برای برق تولیدشده تنها یک مقدار ۸۷۰۰ برحسب واحد پولی ریال در نظر گرفته شده است.

Table 2- Results.

نیروگاه برق	کارایی درآمد رابطه (۴)	کارایی درآمد رابطه (۹)
1	1	1
2	1	0/85
3	0/93	0/93
4	0/82	1
5	0/86	0/73
6	0/59	0/65
7	1	0/9
8	0/71	0/71
9	1	0/85
10	0/76	0/87



همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود کارایی درآمد حاصل از ارزیابی به‌وسیله دو مدل (۳) و (۸) که در آن‌ها به ترتیب ارزش‌گذاری خطی و غیرخطی لحاظ شده است دارای مقادیر یکسان نمی‌باشند. در بسیاری از نیروگاه‌های برق مقدار کارایی درآمد تغییر کرده است. در ارزیابی کارایی درآمد با ارزش‌گذاری غیرخطی دسته‌بندی واحدهای کارا و ناکارا تغییر کرده است که از اهمیت زیادی برخوردار است. زیرا واحدهای کارا الگویی برای واحدهای ناکارا هستند که به کمک آن‌ها مدیران می‌توانند استراتژی‌های متفاوتی برای هدایت واحدها در نظر بگیرند. در این نوع قیمت‌گذاری برای مقادیر بیشتر خروجی قیمت بیشتر لحاظ شده است. این نوع قیمت‌گذاری در دنیای پیرامون ما در مسائل مختلف به‌کرات وجود دارد. به‌این ترتیب واضح است مدل‌سازی دقیق‌تر برای در نظر گرفتن قیمت متغیر میزان برق تولیدشده به نتایج دقیق‌تری می‌رسد. برای تحقیق بیشتر و مدل‌سازی متنوع‌تر پیشنهاد می‌شود بررسی و مدل‌سازی مدل شبکه پویا با در نظر گرفتن زمان نیز تحقیق شود.

۴- نتیجه‌گیری

مدیران ارشد سیستم‌های مختلف به‌منظور بهتر ارزیابی کردن و تصمیم‌گیری در مورد عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده تحت مدیریت آن‌ها بایستی از ابزارهای موجود استفاده بهین بکنند. از آنجایی که مهم‌ترین وظیفه مدیریت تصمیم‌گیری درست به‌منظور هدایت سیستم است لذا از جمله ابزارهای معروف و کارآمد در این امر روش تحلیل پوششی داده‌ها است. این روش به‌عنوان یک ابزار قدرتمند بر پایه برنامه‌ریزی ریاضی است که مدیران و محققین می‌توانند برای ارزیابی عملکرد کمک بسزایی کند. این تکنیک به‌کرات در رشته‌های مختلف و مثال‌های کاربردی مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. از جمله مدل‌های کاربردی و مهم در تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌های شبکه‌ای سری و موازی است. زیرا زیر واحدهای یک واحد تصمیم‌گیرنده که همان مراحل موجود در آن واحد تأثیر زیادی در عملکرد آن واحد دارند. در نظر نگرفتن این زیر واحدها و ارتباطات آن‌ها می‌تواند منجر به نتایج دور از واقعیت گردد. لذا در نظر گرفتن یک واحد به‌صورت جعبه سیاه و ارزیابی آن نتایج دقیقی به دست نمی‌دهد. در این مقاله به معرفی مدل جدیدی برای ارزیابی کارایی درآمد در یک شبکه وقتی قیمت خروجی به‌صورت یک دنباله صعودی معرفی می‌شود پرداخته شده است. در این مدل کارایی درآمد شبکه‌ای جدید قیمت خروجی بسته به مقدار آن خروجی تغییر می‌کند و برای مقادیر بیشتر، قیمت بیشتر توسط سیستم در نظر گرفته می‌شود. در این شرایط دیگر قیمت‌گذاری خطی برای خروجی‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. این نوع قیمت‌گذاری غیرخطی در بسیاری از مسائل دنیای اطراف ما وجود دارد. به‌وسیله مدل ارائه‌شده می‌توان کارایی درآمد را در شرایطی که قیمت خروجی‌ها بسته به مقدار آن‌ها تغییر می‌کند، بیشتر می‌شود، دقیق‌تر ارزیابی کرد. مثالی از نیروگاه برق برای نشان دادن کاربرد مدل معرفی شده نیز در این مقاله آورده شد که در آن نتایج به‌دست‌آمده از نتایج مدل‌های کلاسیک ارزیابی کارایی درآمد دقیق‌تر است. برای مطالعات آتی می‌توان این نوع قیمت‌گذاری را در کارایی هزینه و یا سود و یا در مدل‌های دیگر ارزیابی و تصمیم‌گیری در نظر گرفت.



- Aparicio, J., Borrás, F., Pastor, J. T., & Vidal, F. (2015). Measuring and decomposing firm 's revenue and cost efficiency: the Russell measures revisited. *International journal of production economics*, 165, 19-28.
- Ariff, M., & Luc, C. (2008). Cost and profit efficiency of Chinese banks: a non-parametric analysis. *China economic review*, 19(2), 260-273.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- Delis, M. D., Koutsomanoli-Fillipaki, A., Staikouras, C. K., & Katerina, G. (2009). Evaluating cost and profit efficiency: a comparison of parametric and nonparametric methodologies. *Applied financial economics*, 19(3), 191-202.
- Fare, R., & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-economic planning sciences*, 34, 35-49.
- Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society: series A (general)*, 120(3), 253-281.
- Goleij, M. J. (2018). A new model of fuzzy two-stage data envelopment analysis with variable-return to scale. *Journal of decisions and operations research*, 2(2), 130-146. (In Persian). DOI: [10.22105/DMOR.2018.54145](https://doi.org/10.22105/DMOR.2018.54145)
- Hassanzadeh, R., & Asghari, H. (2020). Identification and ranking of affecting factors on sales and operations planning (S&OP) process implementation by using fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS approach (case study: dairy industry). *Journal of applied research on industrial engineering*, 7(1), 57-78. (In Persian). http://www.journal-aprie.com/article_106125_ec58396c339be2dd85e2de4a4348ea0d.pdf
- Isik, I., & Hassan, M. K. (2002). Cost and profit efficiency of the Turkish banking industry: an empirical investigation. *Financial review*, 37(2), 257-279.
- Jahantigh, M., Hosseinzadeh, L. F., & Moghaddas, Z. (2013). Ranking of DMUs by using TOPSIS and different ranking models in DEA. *International journal of industrial mathematics*, 5(3), 217-225. (In Persian). <https://www.sid.ir/en/journal/ViewPaper.aspx?id=312152>
- Lotfi, F. H., Amirteimoori, A., Moghaddas, Z., & Vaez-Ghasemi, M. (2020). Cost efficiency measurement with price uncertainty: a data envelopment analysis. *Mathematical sciences*, 14(4), 387-396. (In Persian). <https://doi.org/10.1007/s40096-020-00349-2>
- Lotfi, F. H., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Moghaddas, Z. (2010). Modified piecewise linear DEA model. *European journal of operational research*, 205(3), 729-733. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.01.002>
- Mao, X., Guoxi, Z., Fallah, M., & Edalatpanah, S. A. (2020). A Neutrosophic-based approach in data envelopment analysis with undesirable outputs. *Mathematical problems in engineering*. <https://doi.org/10.1155/2020/7626102>
- Moghaddas, Z., Vaez-Ghasemi, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Farzipoor Saen, R. (In Press). Stepwise pricing in evaluating revenue efficiency in data envelopment analysis: a case study in power plants. *Scientia iranica*. (In Persian). DOI: [10.24200/SCI.2020.55350.4184](https://doi.org/10.24200/SCI.2020.55350.4184)
- Montazeri, F. Z. (2019). The survey of data envelopment analysis models in fuzzy stochastic environments. *International journal of research in industrial engineering*, 8(4), 366-383. (In Persian). DOI: [10.22105/RIEJ.2020.219518.1121](https://doi.org/10.22105/RIEJ.2020.219518.1121)
- Nilforoushan, N., & Tahanian, A. R. (2017). Choose suppliers in the supply chain green (sustainable) required to purchase color surface marking case study: department of transport and engineering company Nik Andish. *Journal of decisions and operations research*, 1(2), 112-131. (In Persian). DOI: [10.22105/DMOR.2017.44886](https://doi.org/10.22105/DMOR.2017.44886)
- Pantha, R. P., Islam, M., Akter, N., & Islam, E. (2020). Sustainable supplier selection using integrated data envelopment analysis and differential evolution model. *Journal of applied research on industrial engineering*, 7(1), 25-35.
- Ray, S. C., & Das, A. (2010). Distribution of cost and profit efficiency: Evidence from Indian banking. *European journal of operational research*, 201(1), 297-307.
- Sebt, M. V., Juybari, M. N., & Soleymannfar, V. R. (2018). Investment projects ranking with DEA method considering feasibility study results. *International journal of research in industrial engineering*, 7(3), 320-335. (In Persian). [10.22105/RIEJ.2018.147016.1058](https://doi.org/10.22105/RIEJ.2018.147016.1058)
- Srairi, S. A. (2010). Cost and profit efficiency of conventional and Islamic banks in GCC countries. *Journal of productivity analysis*, 34(1), 45-62.