



Paper Type: Original Article



# Two Iterative Algorithms for Determining Strongly and Weakly Efficient Solutions of Interval Multi Objective Linear Fractional Programming Problem

Mehdi Allahdadi<sup>1\*</sup>, Fatemeh Salary Pour Sharif Abad<sup>1</sup>, Hassan Mishmast Nehi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mathematics Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran; [m\\_allahdadi@math.usb.ac.ir](mailto:m_allahdadi@math.usb.ac.ir); [fatemehsalari63@yahoo.com](mailto:fatemehsalari63@yahoo.com); [hmnehi@hamoon.usb.ac.ir](mailto:hmnehi@hamoon.usb.ac.ir).

**Citation:**



Allahdadi, M., Salary Pour Sharif Abad, F., & Mishmast Nehi, H. (2022). Two iterative algorithms for determining strongly and weakly efficient solutions of interval multi objective linear fractional programming problem. *Journal of decisions and operations research*, 7(1), 17-42.

Received: 20/09/2020

Reviewed: 30/10/2020

Revised: 17/02/2021

Accepted: 17/03/2021

## Abstract

**Purpose:** Determining efficient solutions of the Interval Multi Objective Linear Fractional Programming (IMOLFP) model is generally an NP-hard problem. For determining the efficient solutions, an effective method has not yet been proposed. So, we need to have an appropriate method to determine the efficient solutions of the IMOLFP. For the first time, we want to introduce algorithms in which the strongly and weakly efficient solutions of the IMOLFP are obtained.

**Methodology:** In this paper, we introduce two algorithms such that in one, strongly feasible of inequalities and in the other, weakly feasible of inequalities are considered (a system of inequalities is strongly feasible if and only if the smallest region is feasible, and a system of inequalities is weakly feasible if and only if the largest region is feasible). We transform the objective functions of the IMOLFP to real linear functions and then convert to a single objective linear model and then in each iteration of the algorithm, we add some new constraints to the feasible region. By selecting an arbitrary point of the feasible region as start point and using the proposed algorithms, we obtain the strongly and weakly efficient solutions of the IMOLFP.

**Findings:** In both proposed algorithms, we obtain an efficient solution by selecting the arbitrary points, and by changing the starting point, we obtain a new point as the efficient solution.

**Originality/Value:** In this research, for the first time, we have been able to obtain the strongly and weakly efficient solutions of the IMOLFP.

**Keywords:** Multi objective programming, Interval linear fractional programming, Strongly efficient solution, Weakly efficient solution.

Corresponding Author: [m\\_allahdadi@math.usb.ac.ir](mailto:m_allahdadi@math.usb.ac.ir)

<https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.1.2.7>



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی

6

## دو الگوریتم تکراری برای تعیین جواب‌های موثر قوی و ضعیف مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه بازه‌ای

مهدی الله‌دادی<sup>۱\*</sup>، فاطمه سالاری پور شریف آبادی<sup>۱</sup>، حسین میش‌مست نهی<sup>۱</sup>  
<sup>۱</sup>گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

### چکیده

**هدف:** در حالت کلی، تعیین جواب‌های موثر مدل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه بازه‌ای (*IMOLFP*) یک مسئله *PN*-سخت است. تاکنون روش کارآمدی برای تعیین جواب‌های موثر در این زمینه ارائه نشده است. بنابراین نیاز به یک روش مناسب برای تعیین جواب‌های موثر *IMOLFP* وجود دارد. ما می‌خواهیم الگوریتم‌هایی را معرفی کنیم که برای اولین بار جواب‌های موثر قوی و ضعیف *IMOLFP* بدست آیند.

**روش‌شناسی پژوهش:** در این مقاله، دو الگوریتم معرفی می‌کنیم به طوری که در یکی، شدنی قوی نامعادلات و در دیگری، شدنی ضعیف نامعادلات در نظر گرفته می‌شود (یک دستگاه نامعادلات، شدنی قوی است اگر و تنها اگر کوچک‌ترین ناحیه آن شدنی باشد و یک دستگاه نامعادلات، شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین ناحیه آن شدنی باشد). توابع هدف *IMOLFP* را به توابع هدف خطی حقیقی تبدیل نموده و سپس به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تک هدفه تبدیل می‌کنیم و در هر تکرار، محدودیت جدید به ناحیه شدنی اضافه می‌کنیم. با انتخاب یک نقطه دلخواه از ناحیه شدنی به‌عنوان نقطه شروع و استفاده از الگوریتم‌های پیشنهادی، جواب‌های موثر قوی و ضعیف *IMOLFP* را بدست می‌آوریم.

**یافته‌ها:** در هر دو الگوریتم پیشنهادی، با انتخاب نقاط دلخواه جواب موثر بدست می‌آوریم و با تغییر نقطه‌ی شروع، یک نقطه‌ی جدید به‌عنوان جواب موثر بدست می‌آوریم.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** در این پژوهش توانسته‌ایم برای اولین بار جواب‌های موثر قوی و ضعیف مدل *IMOLFP* بدست آوریم.

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی چند هدفه، برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای، جواب موثر قوی، جواب موثر ضعیف.

### ۱- مقدمه

دنیای امروز، دنیای منابع محدود و اهداف بی‌شمار است. مسلم این است که بشر باید به بهترین راه دستیابی به آرمان‌هایش براساس همین منابع محدود بیاندیشد و تمام تلاش خود را جهت اتخاذ بهترین تصمیم‌ها، به‌کار برد. این مهم در بسیاری از زمینه‌ها، باید بر مبنای روش‌های بهینه‌سازی جدید استوار شود.

\* نویسنده مسئول

m\_allahdadi@math.usb.ac.ir

<https://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.1.2.7>





برنامه‌ریزی کسری، یکی از انواع برنامه‌ریزی ریاضی است که از اهمیت زیادی برخوردار است. این نوع برنامه‌ریزی در زمینه‌های مختلف اقتصاد، بودجه‌ریزی، صنعت و... کاربرد دارد. مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ میلادی به شدت مورد توجه محققان واقع گردید و کاربردها و روش‌های متنوع و کارآمدی برای حل آن ارائه شده است (تقی نژاد و بابا کردی<sup>۱</sup>، ۲۰۱۹؛ داس و ماندال<sup>۲</sup>، ۲۰۱۷؛ کومار- داس<sup>۳</sup>، ۲۰۱۹). به طور مختصر می‌توان به مهم‌ترین روش‌ها برای حل این‌گونه مسائل اشاره کرد از جمله در سال ۱۹۶۲، چارلز و کوپر<sup>۴</sup> (۱۹۶۲) نشان دادند که با یک تغییر و متغیر غیر خطی و اضافه کردن یک محدودیت جدید می‌توان یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی را به مدل خطی تقلیل داد در حالی که در سال ۱۹۶۷، دینکل باخ<sup>۵</sup> (۱۹۶۷) با استفاده از روش پارامتری مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی را به مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد بدون این‌که ناحیه شدنی را تغییر دهد. نادقیقی که به طور طبیعی در داده‌های ورودی مسائل زندگی واقعی ظاهر می‌شود، می‌تواند به‌گونه‌های مختلف نمایش داده شود از این رو یکی از روش‌های اصلی برای بیان نادقیقی و ابهام در داده‌ها، استفاده از اعداد بازه‌ای هستند.

نظر به اهمیت مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای (*ILFP*)، پژوهشگران بسیاری توجه خود را به بررسی و حل این دسته از مسائل معطوف کرده‌اند. تحلیل و یافتن راه حل مناسب برای حل آن، معمولاً بسیار مشکل می‌باشد. این مسائل معمولاً در زمره‌ی مسائل *NP*-سخت قرار می‌گیرند. به طور مختصر می‌توان به مهم‌ترین روش‌ها برای حل این‌گونه مسائل اشاره کرد به طوری که تنها توانسته‌اند حدود مقدار بهینه تابع هدف را بدست آورند. از جمله لادیک<sup>۶</sup> (۲۰۱۰) یک روش برای محاسبه حدود مقدار بهینه تابع هدف *ILFP* تعمیم یافته ارائه کرد به طوری که برای محاسبه هر کران باید یکی از دو مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی حقیقی مقدار تعمیم یافته حل شود. برزا و همکارانش<sup>۷</sup> (۲۰۱۲) با استفاده از ترکیب محدب، مقدار بهینه تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب تابع هدف بازه‌ای را بدست آوردند. جیاکومار و همکارانش<sup>۸</sup> (۲۰۱۳) با استفاده از بهینه‌سازی قوی، بعضی از قضیه‌های دوگان را برای مینمکس *ILFP* توسعه دادند. سان و چای<sup>۹</sup> (۲۰۱۴) با استفاده از بهینه‌سازی قوی، دوگان قوی را برای حل *ILFP* به کار بردند. مصطفایی و لادیک<sup>۱۰</sup> (۲۰۲۰) روشی برای تعیین حدود مقدار واقعی تابع هدف *ILFP* پیشنهاد دادند در حالی که بعضی از ضرایب صورت و مخرج کسر، وابستگی خاص دارند.

نظر به این‌که مسائل دنیای واقعی معمولاً بیش از یک آرمان دارند در این صورت بهینه‌سازی چند هدف نسبت به قیود مختلف مورد نیاز می‌باشد. اما به دلیل سختی مضاعف مواجهه با مسائل چند هدفی شروع مطالعه‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه به سال‌ها بعد و آغاز دهه ۸۰ میلادی باز می‌گردد. مطالعات آکادمیک برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه با توجه به نیاز ایجاد مدل‌های کارآمدتر برای حل مسائل جهان حقیقی شروع شدند و لذا برای رسیدن به این منظور، الگوریتم‌های مختلف و روش‌های متعددی ابداع شده است از جمله فالک و پالوکسی<sup>۱۱</sup> (۱۹۹۴) از یک روش برای تعیین جواب موثر مدل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه به کار بردند به طوری که محدودیت‌هایی به ناحیه شدنی اضافه کردند سپس ولی پور و همکارانش<sup>۱۲</sup> (۲۰۱۴) یک روشی را ارائه کردند که از ترکیب چندین روش است به طوری که با پارامترسازی تابع هدف و اضافه کردن محدودیت‌هایی جدید به ناحیه شدنی بدست می‌آید و این روش همواره همگراست و بعد از تعداد متناهی تکرار جواب موثر بدست می‌آید.

نظر به اهمیت مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی با عدم قطعیت داده‌ها، پژوهشگران بسیاری توجه خود را به بررسی و حل این دسته از مسائل معطوف کرده‌اند. بر پایه دیدگاه فازی، چینادورای و موتوکومار<sup>۱۳</sup> (۲۰۱۶) با استفاده از  $\alpha$ -برش برای پارامترهای فازی تابع هدف و  $\beta$ -برش برای پارامترهای فازی محدودیت‌ها، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی (با اعداد فازی مثلثی) را به دو زیر مدل تبدیل کردند و با استفاده از حدود بدست آمده برای مقدار تابع هدف، تابع عضویت مقدار بهینه را ساختند. اما ابراهیم نژاد و همکارانش<sup>۱۴</sup> (۲۰۱۸) نشان دادند که روش نیز دارای نواقصی است و همواره منجر به جواب‌های بهینه فازی نامنفی نمی‌شود. لذا آنها این روش را اصلاح نمودند به طوری که جواب‌های بهینه فازی نامنفی را تولید می‌نمایند و این روش را برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم دادند. در روش مستقل دیگری نایاک و او جا<sup>۱۵</sup>

<sup>1</sup> Taghi-Nezhad and Babakordi

<sup>2</sup> Das and Mandal

<sup>3</sup> Kumar-Das

<sup>4</sup> Charnes and Cooper

<sup>5</sup> Dinkelbach

<sup>6</sup> Hladik

<sup>7</sup> Borza et al.

<sup>8</sup> Jeyakumar et al.

<sup>9</sup> Sun and Chai

<sup>10</sup> Mostafae and Hladik

<sup>11</sup> Falk and Palocsay

<sup>12</sup> Valipour et al.

<sup>13</sup> Chinnadurai and Muthukumar

<sup>14</sup> Ebrahimnejad et al.

<sup>15</sup> Nayak and Ojha



(۲۰۱۵) مجدداً از  $\alpha$ -برش برای پارامترهای فازی تابع هدف و  $\beta$ -برش برای پارامترهای فازی محدودیت‌ها، برای مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه کسری خطی فازی (با اعداد مثلثی) به کار بردند و هر هدف مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را به دو زیر مدل تبدیل کردند و از روش چارنز و کوپر برای خطی‌سازی زیر مدل‌ها استفاده کردند و بر اساس بسط تیلور حول جواب‌های بدست آمده از روش چارنز و کوپر و استفاده از روش مجموع وزن‌دار توانستند مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه کسری خطی فازی را به دو زیر مدل خطی با داده‌های حقیقی تبدیل کنند و حدود مقدار بهینه تابع هدف را بدست آورند.

به جز روش‌های فوق، یکی از دسته‌های برنامه‌ریزی کسری چند هدفه که در ادامه به آن خواهیم پرداخت، مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه بازه‌ای (*IMOLFP*) است که روش‌های اندکی برای حل این مسائل ارائه شده است از جمله نایاک و اوجا (۲۰۱۵) یک روش برای محاسبه جواب‌های بهینه مدل *IMOLFP* معرفی کردند به طوری که در این روش، از روش *constraint-ε* برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه استفاده کردند و یک دنباله‌ای از جواب‌های بهینه را تولید می‌کنند که با توجه به نظر تصمیم‌گیرنده، از دنباله جواب‌های بهینه تولید شده می‌توان ارجح‌ترین جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه را انتخاب کرد. در روشی دیگر بورجی و پاندا<sup>۱</sup> (۲۰۱۵) برای تعیین جواب‌های موثر مدل برنامه‌ریزی کسری چند هدفه بازه‌ای، ابتدا با استفاده از تعریف ترکیب محذب، تمام بازه‌ها را به صورت پارامتری تبدیل کرده و سپس با استفاده از روش مجموع وزن‌دار یک مدل برنامه‌ریزی خطی بدست آورند و جواب موثر مدل برنامه‌ریزی کسری چند هدفه بازه‌ای را تعیین می‌کنند.

یک نقطه بدست آمده بهینه است اگر جواب حداقل یک مدل مشخص باشد. این مقاله، تعمیم روش ارائه شده توسط ولی پور و همکارانش (۲۰۱۴) برای مدل *IMOLFP* است. یک مدل *IMOLFP* از اجتماع بی‌شمار مدل مشخص تشکیل شده است لذا در این دو الگوریتم، در یکی با استفاده از تعریف شدنی قوی و در دیگری با استفاده از تعریف شدنی ضعیف، مدل *IMOLFP* را به یک مدل مشخص تبدیل می‌کنیم بنابراین با توجه به روش ولی پور و همکارانش، این الگوریتم‌های پیشنهادی همگرا هستند و بعد از تعداد متناهی تکرار جواب موثر بدست می‌آید و با تغییر نقطه شروع می‌توانیم جواب‌های موثر متعددی بدست آوریم.

## ۲- نمادها و تعاریف

در این قسمت به معرفی برخی از قضایا و تعاریف مهم که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌پردازیم.

**تعریف ۱-** (آلفلد و هرزبرگر<sup>۲</sup>، ۱۹۸۳) دو عدد  $a^-, a^+ \in \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. بازه بسته حقیقی مقدار را به صورت  $a^\pm = [a^-, a^+]$  تعریف می‌کنیم به طوری که  $a^\pm = \{a \in \mathbb{R} \mid a^- \leq a \leq a^+\}$ . مقادیر  $a^-, a^+$  را به ترتیب کران بالا و پایین بازه  $a^\pm$  می‌نامیم. اگر  $a^- = a^+$  در این صورت  $a^\pm$  را بازه تباهیده می‌نامیم و  $a^\pm$  مثبت (منفی) است اگر و تنها اگر  $a^- \geq 0$  ( $a^+ \leq 0$ ).

در این مقاله، الگوریتم‌های پیشنهادی برای بازه‌های بسته که نامثبت یا نامنفی باشند ارائه شده است و چون بازه‌هایی که بخشی از آن مثبت و بخشی از آن منفی باشند دارای نوسان هستند و رفتار ثابتی ندارند لذا از این گونه بازه‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. و هم‌چنین این دو الگوریتم را می‌توان برای محدودیت‌هایی با قيود مساوی نیز به کار برد.

**تعریف ۲-** (آلفلد و هرزبرگر، ۱۹۸۳) دو ماتریس  $A^-, A^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$  با درایه‌های حقیقی را در نظر بگیرید به طوری که  $a_{ij}^- \leq a_{ij}^+$  برای هر  $i, j$ . ماتریس بازه‌ای حقیقی مقدار را به صورت  $A^\pm = [A^-, A^+]$  تعریف می‌کنیم به طوری که  $A^\pm = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A^- \leq A \leq A^+\}$ . مقادیر  $A^-, A^+$  را به ترتیب کران بالا و پایین بازه  $A^\pm$  می‌نامیم. یک حالت خاص از ماتریس بازه‌ای، بردار بازه‌ای است به طوری که  $b_i^- \leq b_i^+$  و  $b^- = (b_i^-), b^+ = (b_i^+) \in \mathbb{R}^n$  برای هر  $i$ . بردار بازه‌ای حقیقی مقدار را به صورت  $b^\pm = [b^-, b^+]$  تعریف می‌کنیم به طوری که  $b^\pm = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b^- \leq b \leq b^+\}$ .

<sup>2</sup> Bhurjee and Panda

<sup>3</sup> Alefeld and Herzberger

مدل IMOLFP را به صورت زیر فرمول بندی می کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & z^\pm = (z_1^\pm, \dots, z_p^\pm)^t \\ \text{subject to: } & A^\pm x^\pm \leq b^\pm, \\ & x^- \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که  $z_i^\pm = \frac{N_i^\pm}{D_i^\pm} = \frac{c_i^\pm x^\pm + \alpha_i^\pm}{d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm}$  برای  $i = 1, \dots, p$

مدل مشخص مدل (۱) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & z^\circ = (z_1^\circ, \dots, z_p^\circ)^t \\ \text{subject to: } & A^\circ x \leq b^\circ, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

به طوری که  $z_i^\circ = \frac{N_i^\circ}{D_i^\circ} = \frac{c_i^\circ x + \alpha_i^\circ}{d_i^\circ x + \beta_i^\circ}$  برای  $i = 1, \dots, p$

مدل (۱) یک مدل بازه ای است لذا تمام مولفه های آن به صورت بازه های بسته می باشند در حالی که مدل (۲) مدل مشخص از مدل (۱) می باشد و تمام مولفه های آن اعداد حقیقی هستند.

قضیه ۱- (شواچنگ<sup>۱</sup>، ۱۹۹۴) در مدل (۱)، بزرگ ترین ناحیه شدنی (LFR) و کوچک ترین ناحیه شدنی (SFR) به ترتیب به صورت

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j \leq b_i^- \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}^- x_j \leq b_i^+ \quad \text{است. برای } i = 1, \dots, m$$

نظر به این که مخرج کسر مدل (۱) یک چند جمله ای بر حسب  $x^\pm$  با ضرایب بازه ای است و تعیین ناحیه ای که علامت مخرج کسر مثبت، منفی و یا صفر باشد دشوار است. برای جلوگیری و ممانعت از صفر شدن مخرج کسر فرض می کنیم که در مدل (۱) برای هر جواب شدنی  $x^\pm$ ،  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm > 0$  برای  $i = 1, \dots, p$  مثبت باشد.

لم زیر نشان می دهد این فرض باعث از دست دادن کلیت مسئله نمی شود.

لم ۱- برای هر جواب شدنی  $x^\pm$ ،  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm > 0$  برای  $i = 1, \dots, p$  اگر و تنها برای هر  $x$ ، در LFR،  $d_i^\pm x + \beta_i^\pm > 0$ .

اثبات. فرض کنید برای هر جواب شدنی  $x^\pm$ ،  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm > 0$  از جمله برای  $d_i^-$ ،  $\beta_i^-$  و  $x$ . در این صورت برای هر جواب شدنی  $x$ ،  $d_i^- x + \beta_i^- > 0$ .

برعکس، فرض کنید برای هر  $x$ ، در LFR،  $d_i^- x + \beta_i^- > 0$  از طرفی ما داریم:  $d_i^\circ x + \beta_i^\circ > d_i^- x + \beta_i^- > 0$  در این صورت برای هر  $x$ ،  $d_i^\circ x + \beta_i^\circ > 0$  بنابراین برای هر جواب شدنی  $x^\pm$ ،  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm > 0$ .

هم چنین می توان برای جلوگیری از صفر شدن مخرج کسر، فرض کنیم تمام ضرایب بازه ای مخرج کسر هم علامت باشند لذا

الف) اگر تمام ضرایب بازه ای را مثبت در نظر بگیریم ( $d_i^- \geq 0, \beta_i^- > 0$  برای  $i = 1, \dots, p$ ) در این صورت طبق لم ۱ داریم

$$d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm > 0$$

<sup>1</sup> Shaocheng



ب) اگر تمام ضرایب بازه‌ای را منفی در نظر بگیریم ( $d_i^+ \leq 0, \beta_i^+ < 0$  برای  $i=1, \dots, p$ )، از علامت منفی فاکتور می‌گیریم و مسئله ماکسیم‌سازی  $ILFP$  به مسئله مینیم‌سازی  $ILFP$  تبدیل می‌شود و لذا طبق لم ۱ داریم  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm >_S 0$ .

فرض کنید مقدار بهینه تابع هدف مدل

$$\begin{aligned} \min \quad & d_i^- x + \beta_i^- \\ \text{subject to: } \quad & A^- x \leq b^+, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

برای  $i=1, \dots, p$  برابر با  $\eta_i$  باشد.

بنابراین با توجه به موارد الف و ب، برای هر جواب شدنی  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm >_S 0, x^\pm$  اگر و تنها اگر برای  $i=1, \dots, p, \eta_i > 0$ .

در سر تا سر این مقاله، فرض کنید  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^- x \leq b^+, x \geq 0\}$ .

لم ۲- بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان شرط  $d_i^\pm x^\pm + \beta_i^\pm \geq 1, \forall i$  را برای هر  $x^\pm$  در نظر گرفت.

اثبات. یک مدل  $IMOLFP$  از اجتماع بی‌شمار مدل برنامه‌ریزی کسری خطی تشکیل شده است. لذا این لم را برای مدل (۲) ثابت می‌کنیم.

مدل (۲) یک مسئله ماکسیم‌سازی است لذا با ضرب کردن یک مقدار مثبت مانند  $M^- > 0$  در تابع هدف، جواب‌های موثر مدل (۲) با مدل

$$\begin{aligned} \max \quad & M^- z^\circ = (M^- z_1^\circ, \dots, M^- z_p^\circ)^t \\ \text{subject to: } \quad & A^\circ x \leq b^\circ, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

یکسان هستند.

اکنون  $M^-$  را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که مخرج کسر در تابع هدف مدل (۴)، بزرگ‌تر یا مساوی یک خواهد بود.

اگر مینیمم  $d_i^\circ x + \beta_i^\circ$  برای  $i=1, \dots, p$  در  $LFR$  را  $M_i^\circ$  بنامیم در این صورت  $M_i^\circ = \min_{x \in X} d_i^\circ x + \beta_i^\circ$  برای  $i=1, \dots, p$ ، لذا

در این صورت  $0 < M_i^\circ \leq d_i^\circ x + \beta_i^\circ$  اگر  $\frac{d_i^\circ x + \beta_i^\circ}{M_i^\circ} \geq 1$ . اگر مینیمم  $d_i^- x + \beta_i^-$  برای  $i=1, \dots, p$  در  $LFR$  را  $M_i^-$  بنامیم در

این صورت  $M_i^- = \min_{x \in X} d_i^- x + \beta_i^-$ . از طرفی فرض کنید  $M^- = \min_{1 \leq i \leq p} M_i^-$ ، در این صورت  $M^- \leq M_i^- \leq M_i^\circ$  بنابراین

چون  $d_i^\circ x + \beta_i^\circ > 0$  در این صورت  $\frac{d_i^\circ x + \beta_i^\circ}{M_i^\circ} \geq 1$  و لذا  $\frac{d_i^\circ x + \beta_i^\circ}{M^-} \geq 1$  و بنابراین مدل (۴) را

می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & M^- z^\circ = \left( \frac{N_1^\circ}{D_1^\circ / M^-}, \dots, \frac{N_p^\circ}{D_p^\circ / M^-} \right)^t \\ \text{subject to: } \quad & A^\circ x \leq b^\circ, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

نوشت در حالی که مخرج کسر بزرگ‌تر یا مساوی یک است.



از این رو به وسیله لم ۱، بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید منجر کسر مدل (۲) بزرگتر یا مساوی یک است.

قضیه ۲- (فیدلر و همکارانش<sup>۱</sup>، ۲۰۰۶) نامعادله بازه‌ای  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{\pm} x_j \leq_s b_i^{\pm}$  شدنی قوی است اگر و تنها اگر نامعادله  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^+ x_j \leq b_i^-$  برای هر  $i$  شدنی باشد.

قضیه ۳- (فیدلر و همکارانش، ۲۰۰۶) نامعادله بازه‌ای  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{\pm} x_j \leq_w b_i^{\pm}$  شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر نامعادله  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^- x_j \leq b_i^+$  برای هر  $i$  شدنی باشد.

قضیه ۴- (فیدلر و همکارانش، ۲۰۰۶) یک دستگاه  $A^{\pm}x = b^{\pm}$  شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر دستگاه  $A^-x \leq b^+, A^+x \geq b^-$  شدنی باشد.

لازم به ذکر است در این مقاله، الگوریتم‌های پیشنهادی برای بازه‌های بسته که نامثبت یا نامنفی باشند ارائه شده است و چون بازه‌هایی که بخشی از آن مثبت و بخشی از آن منفی باشند دارای نوسان هستند و رفتار ثابتی ندارند لذا از این گونه بازه‌ها استفاده نمی‌کنیم و هم چنین *LFR* باید ناتهی باشد. برای مطالعه قوانین حساب بازه‌ای می‌توانید به آلفلد و هرزبرگر (۱۹۸۳) مراجعه کنید.

تعریف ۳- (ارگات<sup>۲</sup>، ۲۰۰۵) نقطه‌ای  $\hat{x} \in X$  موثر قوی مدل (۲) است اگر وجود نداشته باشد  $x \in X$  به طوری که  $Z_i^{\circ}(x) \geq Z_i^{\circ}(\hat{x})$  برای  $i = 1, \dots, p$  و  $Z_q^{\circ}(x) > Z_q^{\circ}(\hat{x})$  برای حداقل یک  $1 \leq q \leq p$ .

تعریف ۴- (ارگات، ۲۰۰۵) نقطه‌ای  $\hat{x} \in X$  موثر ضعیف مدل (۲) است اگر وجود نداشته باشد  $x \in X$  به طوری که  $Z_i^{\circ}(x) > Z_i^{\circ}(\hat{x})$  برای همه  $i = 1, \dots, p$ .

تعریف ۵- (ریواز و یعقوبی<sup>۳</sup>، ۲۰۱۳) نقطه‌ای  $\hat{x} \in X$  موثر قوی مدل (۱) است اگر  $\hat{x}$  جواب موثر قوی هر مدل مشخص دلخواه (۲) باشد.

تعریف ۶- (ریواز و یعقوبی، ۲۰۱۳) نقطه‌ای  $\hat{x} \in X$  موثر ضعیف مدل (۱) است اگر  $\hat{x}$  جواب موثر ضعیف حداقل یک مدل مشخص دلخواه (۲) باشد.

در واقع جواب موثر *IMOLF* به عنوان جواب‌های موثر مدل‌های مشخص تعریف می‌شوند.

### ۳- مرور روش حل *IMOLF*

نایاک و اوچا (۲۰۱۵) یک روش برای محاسبه جواب بهینه مدل *IMOLF* معرفی کردند به طوری که از روش *constraint* -  $\mathcal{E}$  استفاده کردند. در ادامه، روش *constraint* -  $\mathcal{E}$  برای حل مدل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه را به صورت مختصر شرح خواهیم داد.

برای پیدا کردن جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه به روش *constraint* -  $\mathcal{E}$  ابتدا با توجه به نظر تصمیم گیرنده، یکی از اهداف برای ماکزیمایز شدن انتخاب می‌شود و برای دیگر توابع هدف، یک کران پایین به صورت جداگانه در نظر می‌گیریم و مدل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه به مدل تک هدفه کسری خطی زیر تبدیل می‌شود:



<sup>1</sup> Fiedler  
<sup>2</sup> Ehrgott

<sup>3</sup> Rivaz and Yaghoobi

$$\text{subject to: } A^{\circ} x \leq b^{\circ},$$

$$Z_i^{\circ} \geq \varepsilon_i, i = 1, \dots, l-1, l+1, k,$$

$$x \geq 0.$$

به طوری که  $\varepsilon_i^l \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^u$  است و  $\varepsilon_i^l = \min Z_i^{\circ}$  و  $\varepsilon_i^u = \max Z_i^{\circ}$ .

از آنجایی که مدل (۱) بی نهایت جواب بهینه دارد لذا در این روش، برای هر تابع هدف مدل بدترین را در نظر می‌گیرد و برای محدودیت‌ها دو حالت در نظر گرفته شده است:

الف) اگر بردار  $b_i^{\pm}$  یک بردار تباهیده باشد در این صورت محدودیت‌های روش ارائه شده به صورت  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{\pm} x_j \leq b_i^+ = b_i^-$  در نظر گرفته می‌شود.

ب) اگر بردار  $b_i^{\pm}$  یک بردار بازه‌ای باشد در این صورت محدودیت‌های روش ارائه شده به صورت  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{\pm} x_j \geq b_i^-, \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\pm} x_j \leq b_i^+$  در نظر گرفته می‌شود.

الگوریتم نایاک و اوچا مختصراً به صورت زیر تعریف می‌شود:

مراحل الگوریتم نایاک و اوچا:

گام ۱. ابتدا مدل بدترین را به صورت

$$\max \left( \frac{N_1^-}{D_1^+}, \dots, \frac{N_k^-}{D_k^+} \right) t \quad (5)$$

$$\text{subject to: } A^- x \leq b^- = b^+ \text{ (or } A^- x \geq b^-, A^+ x \leq b^+),$$

$$x \geq 0.$$

در نظر می‌گیریم و به دنبال جواب‌های بهینه این مدل مشخص هستیم.

گام ۲. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید و جواب بهینه آن را  $x_i^{N^*}$  و مقدار بهینه تابع هدف را  $Z_i^N(x)$  بنامید.

$$\max N_i^-, i = 1, \dots, k \quad (6)$$

$$\text{subject to: } A^- x \leq b^- = b^+ \text{ (or } A^- x \geq b^-, A^+ x \leq b^+),$$

$$x \geq 0.$$

گام ۳. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید و جواب بهینه آن را  $x_i^{D^*}$  و مقدار بهینه تابع هدف را  $Z_i^D(x)$  بنامید.

$$\min D_i^+, i = 1, \dots, k \quad (7)$$

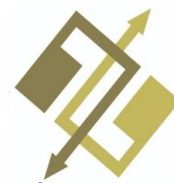
$$\text{subject to: } A^- x \leq b^- = b^+ \text{ (or } A^- x \geq b^-, A^+ x \leq b^+),$$

$$x \geq 0.$$

گام ۴. جدول *pay-off* برای تعیین مقدار مینیمم و ماکزیمم صورت کسر توابع هدف  $Z_j^N(x)$  برای  $j = 1, \dots, k$  را به صورت زیر تشکیل دهید:







$$Z_j^{N^-} = \min \left\{ Z_j^N(x_i^{N^*}) \mid i = 1, \dots, k \right\},$$

$$Z_j^{N^+} = Z_j^N(x_j^{N^*}).$$

گام ۵. جدول *pay-off* برای تعیین مقدار مینیمم و ماکزیمم مخرج کسر توابع هدف  $Z_j^D(x)$  برای  $j = 1, \dots, k$  را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$Z_j^{D^+} = \max \left\{ Z_j^D(x_i^{D^*}) \mid i = 1, \dots, k \right\},$$

$$Z_j^{D^-} = Z_j^D(x_j^{D^*}).$$

گام ۶. با استفاده از قوانین حساب بازه‌ای  $\left[ \frac{Z_i^{N^-}, Z_j^{N^+}}{Z_i^{D^-}, Z_j^{D^+}} \right]$  برای  $j = 1, \dots, k$  را بدست آورید و کران بالا و پایین را به ترتیب  $\varepsilon_i^-$  و  $\varepsilon_i^+$  بنامید و متناظر با هر هدف  $\varepsilon_j$  در نظر بگیرید به طوری که  $\varepsilon_i^- \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^+$ . سپس با استفاده از روش *-constraint*  $\varepsilon$ ، مدل (۵) را به مدل برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \quad \frac{N_l^-}{D_l^+} \\ & \text{subject to: } A^-x \leq b^- = b^+ \text{ (or } A^-x \geq b^-, A^+x \leq b^+ \text{),} \\ & \frac{N_i^-}{D_i^+} \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, k, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{۸}$$

به طوری که  $\frac{N_l^-}{D_l^+} = \frac{c_l^-x + \alpha_l^-}{d_l^+x + \beta_l^+}$ . سپس با استفاده از روش چارنز و کوپر مدل (۸) به یک مدل خطی تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \max \quad c_l^-y + \alpha_l^-t \\ & \text{subject to: } A^-y - b^-t \leq 0 \text{ (or } A^-y - b^-t \geq 0, A^-y - b^+t \leq 0 \text{),} \\ & \frac{c_i^-y + \alpha_i^-t}{d_i^+y + \beta_i^+t} - \varepsilon_i t \leq 0, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, k, \\ & y, t \geq 0, \end{aligned} \tag{۹}$$

با تغییر مقدار  $\varepsilon_i$  در بازه  $[\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]$  در مدل (۹)، یک دنباله‌ای از جواب‌های بهینه به صورت  $(y_1^*, \dots, y_n^*, t^*)^t$  تولید می‌شود و لذا

$$\left( \frac{y_1^*}{t^*}, \dots, \frac{y_n^*}{t^*} \right)^t = (x_1^*, \dots, x_n^*)^t$$

گیرنده، از دنباله جواب‌های بهینه تولید شده می‌توان ارجح‌ترین جواب مدل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه را انتخاب کرد.

مثال ۱- *IMOLFP* زیر را در نظر بگیرید:



$$\begin{aligned} \max \quad z_1^\pm &= \frac{[1,2]x_1^\pm + [1,4]}{-[0.5,1]x_2^\pm + [3,3.75]} \\ \max \quad z_2^\pm &= \frac{-[0.9,1]x_1^\pm + [5,5.2]}{[1,2.9]x_2^\pm + [1,3.4]} \quad (10) \\ \text{subject to: } &-[0.1,1]x_1^\pm + [4,6]x_2^\pm \leq [0,0], \\ &[1,2]x_1^\pm - [0.2,0.5]x_2^\pm \leq [4,4], \\ &x_1^-, x_2^- \geq 0. \end{aligned}$$

فرآیند پیدا کردن جواب بهینه توسط الگوریتم نایاک و اوجا به صورت زیر است:

گام ۱. ابتدا مدل بدترین را مطابق با مدل (۵) تشکیل دهید.

گام ۲. با تشکیل مدل (۶) و حل آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_1^N &= 5.5714, X_1^{N*} = (4.5714, 1.1429), \\ z_2^N &= 5, X_2^{N*} = (0, 0). \end{aligned}$$

گام ۳. با تشکیل مدل (۷) و حل آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_1^D &= 3.1786, X_1^{D*} = (4.5714, 1.1429), \\ z_2^D &= 3.4, X_2^{D*} = (3.1225, 0). \end{aligned}$$

گام ۴. لذا

$$\begin{aligned} z_1^{N+} &= 5.5714, z_1^{N-} = 1, \\ z_2^{N+} &= 5, z_2^{N-} = 0.4286. \end{aligned}$$

گام ۵. لذا

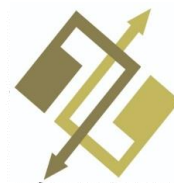
$$\begin{aligned} z_1^{D+} &= 3.75, z_1^{D-} = 3.1786, \\ z_2^{D+} &= 6.7144, z_2^{D-} = 3.4. \end{aligned}$$

گام ۶. بنابراین

$$\begin{aligned} [\varepsilon_1^-, \varepsilon_1^+] &= [0.2667, 1.7528], \\ [\varepsilon_2^-, \varepsilon_2^+] &= [0.0638, 1.4706]. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از روش  $\varepsilon$ -constraint اولین هدف را برای ماکزیمایز شدن انتخاب می‌کنیم و دومین هدف را به قید تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad f_1 &= \frac{x_1 + 1}{-0.5x_2 + 3.75} \\ \text{subject to: } &\frac{-x_1 + 5}{2.9x_2 + 3.4} \leq \varepsilon_2, \varepsilon_2 \in [0.0638, 1.4706], \\ &-x_1 + 4x_2 \leq 0, \\ &x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 4, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



اکنون با استفاده از روش چارنز و کوپر و تغییر مقدار  $\varepsilon_2$  در بازه  $[0.0638, 1.4706]$ ، یک دنباله از جواب‌های بهینه تولید می‌شود و جوابی را به‌عنوان جواب بهینه انتخاب می‌کنیم که  $|\varepsilon_2 - f_1^*|$  مینیمم باشد. لذا با انتخاب  $\varepsilon_2 = 1.4706$ ، ما داریم:

$$x_1 = 4.5715, x_2 = 1.1430.$$

#### ۴- الگوریتم‌های تکراری برای تعیین جواب‌های موثر قوی و ضعیف مسئله IMOLFP

در این بخش، ابتدا الگوریتم تکراری بر مبنای تعریف شدنی قوی برای پیدا کردن جواب موثر قوی IMOLFP ارائه می‌کنیم و سپس الگوریتمی دیگر بر مبنای تعریف شدنی ضعیف برای پیدا کردن جواب موثر ضعیف IMOLFP معرفی می‌کنیم. از آنجایی که مدل (۱) یک مدل بازه‌ای است و تمام مولفه‌های آن بازه هستند اما فضای بهین یک بازه نیست زیرا در چند هدفه‌های کسری، یک پال ممکن است بخشی از آن موثر و بخشی از آن موثر نباشد بنابراین نمی‌توان برای مدل‌های چند هدفه کسری خطی بازه‌ای یک مجموعه جواب موثر بدست آورد.

##### ۴-۱- جواب موثر قوی

هدفمان در این زیر بخش معرفی یک الگوریتم تکراری، برای بدست آوردن جواب موثر IMOLFP است به‌گونه‌ای که این الگوریتم، یک نقطه به‌عنوان جواب موثر قوی معرفی می‌کند.

مدل (۱) را در نظر بگیرید چون یک مدل ماکزیم‌سازی است لذا یک کران پایین برای هر یک از توابع هدف در نظر می‌گیریم برای این منظور فرض کنید  $x^0$  یک نقطه دلخواه در LFR باشد. مقدار هر تابع هدف مدل (۱) به‌ازای این نقطه را  $\psi_i^\pm$  برای  $i = 1, \dots, p$  بنامید. فرض کنید توابع هدف مدل (۱) از عدد بازه‌ای  $\psi_i^\pm$  برای  $i = 1, \dots, p$  به‌طور قوی بزرگ‌تر مساوی باشند یعنی

$$\frac{N_i^\pm}{D_i^\pm} \geq_s \psi_i^\pm. \quad (11)$$

در این مقاله، مدل (۱) به‌صورت ماکزیم‌سازی است و یک کران پایین برای هر یک از توابع هدف در نظر گرفته‌ایم لذا اگر مدل (۱) به‌صورت مینیم‌سازی باشد لذا باید یک کران بالا برای هر یک از توابع هدف در نظر بگیریم و توجه زیر را خواهیم داشت:

توجه ۱- اگر مدل (۱) یک مدل مینیم‌سازی باشد در این صورت باید فرض کنیم توابع هدف مدل (۱) از عدد بازه‌ای  $\psi_i^\pm$  برای

$$i = 1, \dots, p \text{ به‌طور قوی کوچک‌تر مساوی باشند، در این صورت داریم: } \frac{N_i^\pm}{D_i^\pm} \leq_s \psi_i^\pm.$$

در این جا فرض بر این است که مخرج کسرها در LFR بزرگ‌تر یا مساوی یک باشد، با این فرض دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول این است که مینیم کران پایین صورت کسر در LFR نامنفی باشد ( $\min_{x \in X} N_i \geq 0$ ) که در این صورت با توجه به قضیه ۲ در

LFR برای هر  $i = 1, \dots, p$  داریم:

$$\left( \frac{N_i^\pm}{D_i^\pm} \right)^- \geq \psi_i^\pm. \quad (12)$$

اکنون با استفاده از قوانین حساب بازه‌ای داریم:

$$\frac{N_i^-}{D_i^+} \geq \psi_i^+ \geq \psi_i^- \quad (13)$$

$$N_i^- - \psi_i^- D_i^+ \geq 0 \quad (14)$$

حالت دوم این است که ماکزیمم کران بالا صورت کسر در LFR نامشیت باشد ( $\max_{x \in X} N_i^+ \leq 0$ ). در این صورت با توجه به قضیه ۲ در LFR و استفاده از قوانین حساب بازای برای هر  $i = 1, \dots, p$  داریم:

$$\frac{N_i^-}{D_i^-} \geq \psi_i^+ \geq \psi_i^- \quad (15)$$

$$N_i^- - \psi_i^- D_i^- \geq 0 \quad (16)$$

با توجه به دو حالت، با پارامتری کردن توابع هدف به صورت نامعادله (۱۴) (و یا نامعادله (۱۶)) و استفاده از روش مجموع وزن دار و افزودن نامعادله (۱۴) (و یا نامعادله (۱۶)) به LFR، مدل (۱) به مدل تک هدفه پارامتری زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad G_S(x) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^- - \psi_i^- D_i^\nabla) \\ \text{subject to:} \quad & A^- x \leq b^+, \end{aligned} \quad (17)$$

$$N_i^- - \psi_i^- D_i^\nabla \geq 0,$$

$$x \geq 0,$$

به طوری که  $\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$  و

$$D_i^\nabla = \begin{cases} D_i^+ & \min N_i^- \geq 0, \\ D_i^- & \max N_i^+ \leq 0. \end{cases} \quad (18)$$

با انتخاب مقادیر مختلف  $\lambda_i$  برای  $i = 1, \dots, p$  می توان جواب های موثر متعددی بدست آورد در صورتی که ممکن است جواب موثر با انتخاب های متفاوت بهتر یا بدتر شود.

در این مقاله فرض کنید

$$X_S(\psi_i^-) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A^- x \leq b^+, N_i^- - \psi_i^- D_i^\nabla \geq 0, x \geq 0, i = 1, \dots, p \}, \quad (19)$$

$$X_S(\psi_i^-) \subseteq X.$$

در الگوریتم جواب موثر قوی، که آن را شرح خواهیم داد، مشاهده خواهید کرد که در تکرار اول مقدار بهینه توابع هدف مدل (۱۷) نامنفی بدست می آید و در تکرارهای بعدی،  $\psi_i^\pm$  به گونه ای پیدا می شود که بعد از تعداد متناهی تکرار، مقدار بهینه مدل (۱۷) به صفر میل می کند. اکنون لم زیر نشان می دهد مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱۷) همواره نامنفی است.

لم ۳- اگر فضای شدنی  $X_S(\psi_i^-)$  غیر تهی باشد آنگاه مقدار بهینه مدل (۱۷) نامنفی است.

اثبات. از قید دوم مدل (۱۷) نتیجه حاصل می شود.



قضیه ۵- فرض کنید  $z_i^+(\hat{x}) = \hat{\psi}_i^+$  و  $z_i^-(\hat{x}) = \hat{\psi}_i^-$ ,  $\hat{x} \in X_S(\psi_i^-)$ ، جواب موثر قوی مدل (۱) است اگر و تنها اگر  $\hat{x}$  جواب بهینه مدل (۱۷) با مقدار بهینه صفر باشد.

اثبات. فرض کنید  $\hat{x} \in X_S(\psi_i^-)$  جواب موثر قوی مدل (۱) باشد لذا به ازای هر  $x \in X_S(\psi_i^-)$ :

$$\hat{\psi}_i^\pm \geq_s \frac{N_i^\pm(x)}{D_i^\pm(x)}; \text{ for } i=1, \dots, p,$$

$$\hat{\psi}_q^\pm \geq_s \frac{N_q^\pm(x)}{D_q^\pm(x)}; \quad 1 \leq q \leq p.$$

در این صورت طبق قضیه ۲ داریم:

$$\left( \frac{N_i^\pm(x)}{D_i^\pm(x)} \right)^- \leq \left( \frac{N_i^\pm(x)}{D_i^\pm(x)} \right)^+ \leq \hat{\psi}_i^\pm; \text{ for } i=1, \dots, p,$$

و

$$\left( \frac{N_q^\pm(x)}{D_q^\pm(x)} \right)^- \leq \left( \frac{N_q^\pm(x)}{D_q^\pm(x)} \right)^+ < \hat{\psi}_q^\pm; \quad 1 \leq q \leq p.$$

بنابراین

$$\left( \frac{N_i^\pm(x)}{D_i^\pm(x)} \right)^- \leq \hat{\psi}_i^\pm; \text{ for } i=1, \dots, p.$$

و

$$\left( \frac{N_q^\pm(x)}{D_q^\pm(x)} \right)^- \leq \hat{\psi}_q^\pm; \quad 1 \leq q \leq p.$$

لذا با توجه به علامت صورت کسر و طبق قوانین حساب بازای به ازای هر  $x \in X_S(\psi_i^-)$ ,

$$\frac{N_i^-(x)}{D_i^\nabla(x)} \leq \hat{\psi}_i^-; \text{ for } i=1, \dots, p.$$

و

$$\frac{N_q^-(x)}{D_q^\nabla(x)} \leq \hat{\psi}_q^-; \quad 1 \leq q \leq p.$$

به طوری که  $D_i^\nabla$  برای  $i=1, \dots, p$  در رابطه (۱۸) تعریف شده است. بنابراین

$$N_i^-(x) - \hat{\psi}_i^- D_i^\nabla(x) \leq 0; \text{ for } i=1, \dots, p.$$

و



$$N_q^-(x) - \hat{\psi}_q^- D_q^\nabla(x) < 0; \quad 1 \leq q \leq p.$$

فرض کنید  $\lambda_i$  برای  $i=1, \dots, p$  وزن  $i$ -امین هدف است و  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  در این صورت داریم:

$$\lambda_i (N_i^-(x) - \hat{\psi}_i^- D_i^\nabla(x)) \leq 0; \quad \text{for } i=1, \dots, p. \quad (20)$$

و

$$\lambda_q (N_q^-(x) - \hat{\psi}_q^- D_q^\nabla(x)) < 0; \quad 1 \leq q \leq p. \quad (21)$$

با توجه به نامعادله‌های (20) و (21) داریم:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^-(x) - \hat{\psi}_i^- D_i^\nabla(x)) < 0.$$

در این صورت داریم

$$\max_{x \in X_S(\psi_i^-)} \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^-(x) - \hat{\psi}_i^- D_i^\nabla(x)) = 0. \quad (22)$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

$$\hat{\psi}_i^- = z_i^-(\hat{x}) = \frac{N_i^-(\hat{x})}{D_i^\nabla(\hat{x})}; \quad \text{for } i=1, \dots, p.$$

و

$$\hat{\psi}_q^- = z_q^-(\hat{x}) = \frac{N_q^-(\hat{x})}{D_q^\nabla(\hat{x})}; \quad 1 \leq q \leq p.$$

بنابراین

$$N_i^-(\hat{x}) - \hat{\psi}_i^- D_i^\nabla(\hat{x}) = 0; \quad \text{for } i=1, \dots, p.$$

و

$$N_q^-(\hat{x}) - \hat{\psi}_q^- D_q^\nabla(\hat{x}) = 0; \quad 1 \leq q \leq p.$$

فرض کنید  $\lambda_i$  برای  $i=1, \dots, p$  وزن  $i$ -امین هدف است و  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  در این صورت داریم:

$$\lambda_i (N_i^-(\hat{x}) - \hat{\psi}_i^- D_i^\nabla(\hat{x})) = 0; \quad \text{for } i=1, \dots, p. \quad (23)$$

و

$$\lambda_q (N_q^-(\hat{x}) - \hat{\psi}_q^- D_q^\nabla(\hat{x})) = 0; \quad 1 \leq q \leq p. \quad (24)$$

لذا با توجه به رابطه‌های (23) و (24) داریم:



$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^-(\hat{x}) - \hat{\psi}_i^- D_i^{\nabla}(\hat{x})) = 0. \quad (25)$$

لذا از رابطه‌های (۲۲) و (۲۵) نتیجه می‌گیریم:

$$\max_{x \in X_S(\psi_i^-)} \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^-(x) - \hat{\psi}_i^- D_i^{\nabla}(x)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^-(\hat{x}) - \hat{\psi}_i^- D_i^{\nabla}(\hat{x})) = 0.$$

بنابراین  $\hat{x}$  جواب بهینه مدل (۱۷) با مقدار بهینه صفر خواهد بود.

۳۰



برعکس، با برهان خلف، فرض کنید  $\hat{x}$  جواب موثر قوی مدل (۱) نباشد در این صورت  $\hat{x}$  جواب موثر قوی هیچ مدل مشخص نمی‌باشد و به طور معادل برای هر  $\beta_i^{\circ} \in \beta_i^{\pm}, \alpha_i^{\circ} \in \alpha_i^{\pm}, d_i^{\circ} \in d_i^{\pm}, c_i^{\circ} \in c_i^{\pm}, b^{\circ} \in b^{\pm}, A^{\circ} \in A^{\pm}$  برای  $i=1, \dots, p$  جواب موثر قوی مدل (۲) نمی‌باشد لذا وجود دارد  $\tilde{x} \in X_S(\psi_i^-)$  به طوری که

$$\frac{N_i^{\circ}(\tilde{x})}{D_i^{\circ}(\tilde{x})} \geq \frac{N_i^{\circ}(\hat{x})}{D_i^{\circ}(\hat{x})} = \hat{\psi}_i^{\circ}; \quad \text{for } i=1, \dots, p.$$

و

$$\frac{N_q^{\circ}(\tilde{x})}{D_q^{\circ}(\tilde{x})} > \frac{N_q^{\circ}(\hat{x})}{D_q^{\circ}(\hat{x})} = \hat{\psi}_q^{\circ}; \quad 1 \leq q \leq p.$$

از آنجایی که

$$\frac{N_i^{\circ}(\tilde{x})}{D_i^{\circ}(\tilde{x})} \geq \hat{\psi}_i^{\circ} \geq \hat{\psi}_i^-; \quad \text{for } i=1, \dots, p.$$

و

$$\frac{N_q^{\circ}(\tilde{x})}{D_q^{\circ}(\tilde{x})} > \hat{\psi}_q^{\circ} \geq \hat{\psi}_q^-; \quad 1 \leq q \leq p.$$

در این صورت

$$N_i^{\circ}(\tilde{x}) - \hat{\psi}_i^- D_i^{\circ}(\tilde{x}) \geq 0; \quad \text{for } i=1, \dots, p.$$

و

$$N_q^{\circ}(\tilde{x}) - \hat{\psi}_q^- D_q^{\circ}(\tilde{x}) > 0; \quad 1 \leq q \leq p.$$

فرض کنید  $\lambda_i$  برای  $i=1, \dots, p$  وزن  $i$ -امین هدف است و  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  در این صورت داریم:

$$\lambda_i (N_i^{\circ}(\tilde{x}) - \hat{\psi}_i^- D_i^{\circ}(\tilde{x})) \geq 0; \quad \text{for } i=1, \dots, p. \quad (26)$$

و

$$\lambda_q (N_q^{\circ}(\tilde{x}) - \hat{\psi}_q^- D_q^{\circ}(\tilde{x})) > 0; \quad 1 \leq q \leq p. \quad (27)$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^{\circ}(\bar{x}) - \psi_i^{-} D_i^{\circ}(\bar{x})) \geq 0,$$

که در تناقض است زیرا

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^{\circ}(\bar{x}) - \psi_i^{-} D_i^{\circ}(\bar{x})) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^{\circ}(\hat{x}) - \psi_i^{-} D_i^{\circ}(\hat{x})) = 0.$$

لذا برای بدست آوردن جواب موثر قوی، الگوریتم تکراری معرفی می‌کنیم که این الگوریتم،  $\psi_i^{\pm r}$  را به گونه‌ای پیدا می‌کند که با توجه به قضیه ۵- مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱۷) صفر شود. در هر تکرار، الگوریتم یک مدل برنامه‌ریزی خطی را حل می‌کند به طوری که ناحیه شدنی آن، زیر مجموعه‌ای از ناحیه شدنی مرحله قبل است که الگوریتم آن در ادامه شرح داده می‌شود:

الگوریتم جواب موثر قوی.

گام ۱. فرض کنید  $x^0$  یک نقطه دلخواه در  $LFR$  باشد و وزن دلخواه  $\lambda_i$  برای هر  $i=1, \dots, p$  را انتخاب کنید به طوری که  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ . تلورانانس مجاز  $\varepsilon > 0$  را در نظر بگیرید و قرار دهید  $r=0$ .

گام ۲.  $\psi_i^{\pm r}$  را بدست آورید و  $X_S(\psi_i^{\pm r})$  را مطابق با رابطه (۱۹) تشکیل دهید.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^{\circ}(x) - \psi_i^{-r} D_i^{\circ}(x)) \\ \text{subject to: } \quad & x \in X_S(\psi_i^{\pm r}). \end{aligned} \quad (28)$$

گام ۳. مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید و جواب بهینه آن را  $x^{(r+1)}$  و مقدار بهینه تابع هدف را  $G_S^{(r+1)}(x)$  بنامید.

گام ۴. اگر  $G_S^{(r+1)}(x) < \varepsilon$ ، به گام ۵ بروید در غیر این صورت قرار دهید  $r=r+1$  و به گام ۲ بروید.

گام ۵. اگر  $G_S^{(r+1)}(x) = 0$  آنگاه  $x^{(r+1)}$  را به عنوان جواب موثر قوی مدل (۱) معرفی کنید در غیر این صورت  $x^{(r+1)}$  را به عنوان تقریبی از جواب موثر قوی مدل (۱) معرفی کنید.

مراحل حل برای الگوریتم جواب موثر قوی در شکل ۱ نمایش داده شده است.

## ۲-۴- جواب موثر ضعیف

در این زیر بخش، الگوریتم تکراری دیگری پیشنهاد خواهیم کرد که مشابه با الگوریتم جواب موثر قوی، یک نقطه به عنوان جواب موثر ضعیف معرفی می‌کند.

ابتدا مشابه با الگوریتم جواب موثر قوی،  $\psi_i^{\pm}$  را بدست می‌آوریم. با استفاده از قضیه ۳ ما داریم:

$$\left( \frac{N_i^{\pm}}{D_i^{\pm}} \right)^+ \geq w \psi_i^{-}.$$

بنابراین





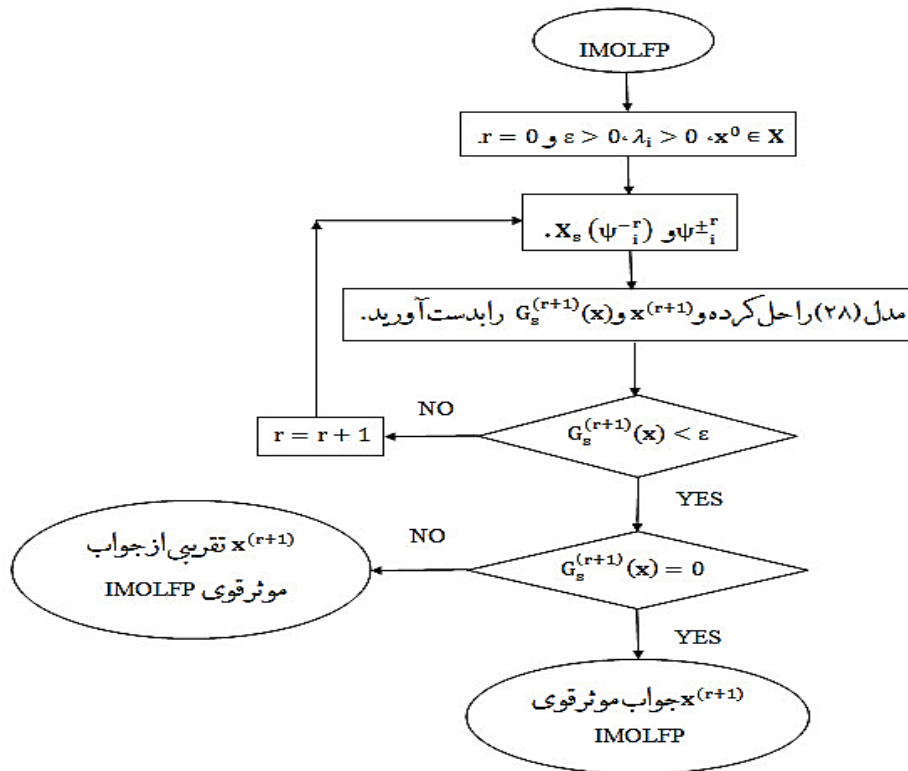
$$\frac{N_i^+}{D_i^\square} \geq \psi_i^- \quad (29)$$

به طوری که

$$D_i^\square = \begin{cases} D_i^- & \min N_i^- \geq 0, \\ D_i^+ & \max N_i^+ \leq 0. \end{cases} \quad (30)$$

در این صورت نامعادله (29) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$N_i^+ - \psi_i^- D_i^\square \geq 0; \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (31)$$



شکل ۱- فرآیند حل الگوریتم جواب موثر قوی.

Figure 1- The solving process of the strongly efficient solution algorithm.

اکنون با پارامتری کردن توابع هدف به صورت نامعادله (31) و استفاده از روش مجموع وزن دار، مسئله *IMOLFP* را به مسئله تک هدفه پارامتری زیر تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & G_W(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^+ - \psi_i^- D_i^\square) \\ \text{subject to:} \quad & A^- x \leq b^+, \\ & N_i^+ - \psi_i^- D_i^\square \geq 0, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

به طوری که  $D_i^\square$  در رابطه (30) تعریف شده است.

فضای تقلیل یافته بر اساس جواب موثر ضعیف را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:





$$X_W(\psi_i^-) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid A^- x \leq b^+, N_i^+ - \psi_i^- D_i^{\square} \geq 0, x \geq 0, i = 1, \dots, p \right\}, \quad (33)$$

$$X_W(\psi_i^-) \in X.$$

لذا برای بدست آوردن جواب موثر ضعیف، الگوریتمی را معرفی می‌کنیم که در این الگوریتم شرط توقف به این‌گونه است که جواب موثر مدل (۳۲) در دو تکرار متوالی دارای مقادیر یکسان باشند. الگوریتم در هر تکرار، یک مدل برنامه‌ریزی خطی را حل می‌کند به طوری که ناحیه شدنی آن زیر مجموعه‌ای از ناحیه شدنی تکرار قبل است.

لم ۴- اگر فضای شدنی  $X_W(\psi_i^-)$  غیرتهی باشد آنگاه مقدار بهینه مدل (۳۲) نامنفی است.

اثبات. از قید دوم مدل (۳۲) نتیجه حاصل می‌شود.

توجه ۲- در شرط توقف الگوریتم جواب موثر ضعیف موارد زیر برقرارند:

$$\text{اگر } x^r = x^{(r-1)} \text{ آنگاه } \psi_i^{\pm r} = \psi_i^{\pm(r-1)}.$$

$$\text{اگر } \psi_i^{\pm r} = \psi_i^{\pm(r-1)} \text{ آنگاه } \max_{x \in X_W(\psi_i^{\pm r})} G_W^{(r+1)}(x) = \max_{x \in X_W(\psi_i^{\pm r})} G_W^r(x)$$

قضیه ۶- فرض کنید  $x^r = x^{(r-1)}$  و  $z_i^-(x^r) = \psi_i^-$  و  $z_i^+(x^r) = \psi_i^+$  برای  $i = 1, \dots, p$ . جواب موثر ضعیف مدل (۱) است اگر و تنها اگر  $x^r$  جواب بهینه مدل (۳۲) با مقدار بهینه نامنفی باشد.

اثبات. فرض کنید  $x^r$  جواب موثر ضعیف مدل (۱) باشد یعنی  $x^r$  جواب موثر ضعیف یک مدل (۲) می‌باشد در این صورت

$$\frac{N_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(x^r)} = \psi_i^{\circ r} \geq \frac{N_i^\circ(x)}{D_i^\circ(x)}; \forall i.$$

در این صورت دو نتیجه زیر را خواهیم داشت:

(الف)

$$\frac{N_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(x^r)} = \psi_i^{\circ r}; \forall i.$$

لذا

$$N_i^\circ(x^r) - \psi_i^{\circ r} D_i^\circ(x^r) = 0; \forall i.$$

فرض کنید  $\lambda_i$  برای  $i = 1, \dots, p$  وزن  $i$ -امین هدف است و  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  در این صورت داریم:

$$\lambda_i \left( N_i^\circ(x^r) - \psi_i^{\circ r} D_i^\circ(x^r) \right) = 0; \forall i.$$

لذا

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \left( N_i^\circ(x^r) - \psi_i^{\circ r} D_i^\circ(x^r) \right) = 0.$$

(ب)

$$\psi_i^{\circ r} \geq \frac{N_i^\circ(x)}{D_i^\circ(x)}; \forall i.$$

$$N_i^\circ(x) - \psi_i^r D_i^\circ(x) \leq 0; \forall i.$$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \left( N_i^\circ(x) - \psi_i^r D_i^\circ(x) \right) \leq 0.$$

بنابراین ما داریم:

$$\max_{x \in X_W(\psi_i)} \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \left( N_i^\circ(x) - \psi_i^r D_i^\circ(x) \right) \right\} = 0.$$

لذا با توجه به قسمت الف و ب،  $x^r$  جواب بهینه مدل (۳۲) می باشد.

برعکس، با برهان خلف، فرض کنید  $x^r$  جواب موثر ضعیف هیچ مدل مشخص نمی باشد به طور معادل وجود ندارد حداقل یک  $A^\pm \in A^\pm, b^\circ \in b^\pm, c_i^\circ \in c_i^\pm, d_i^\circ \in d_i^\pm, \alpha_i^\circ \in \alpha_i^\pm, \beta_i^\circ \in \beta_i^\pm$  برای  $i=1, \dots, p$  جواب موثر ضعیف مدل (۲) نمی باشد لذا وجود دارد  $\bar{x} \in X_W(\psi_i)$  به طوری که

$$\frac{N_i^\circ(\bar{x})}{D_i^\circ(\bar{x})} \geq \frac{N_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(x^r)}; \forall i.$$

در این صورت

$$\frac{N_i^\circ(\bar{x})}{D_i^\circ(\bar{x})} - \psi_i^r \geq \frac{N_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(x^r)} - \psi_i^r; \forall i.$$

بنابراین

$$\frac{N_i^\circ(\bar{x}) - \psi_i^r D_i^\circ(\bar{x})}{D_i^\circ(\bar{x})} \geq \frac{N_i^\circ(x^r) - \psi_i^r D_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(x^r)}; \forall i.$$

طبق لم ۲،  $D_i^\circ(\bar{x}), D_i^\circ(x^r) \geq 1$  بنابراین

$$\frac{D_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(\bar{x})} \left( N_i^\circ(\bar{x}) - \psi_i^r D_i^\circ(\bar{x}) \right) \geq N_i^\circ(x^r) - \psi_i^r D_i^\circ(x^r); \forall i.$$

فرض کنید  $\lambda_i$  برای  $i=1, \dots, p$  وزن  $i$  - امین هدف است و  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  در این صورت

$$\lambda_i \frac{D_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(\bar{x})} \left( N_i^\circ(\bar{x}) - \psi_i^r D_i^\circ(\bar{x}) \right) \geq \lambda_i \left( N_i^\circ(x^r) - \psi_i^r D_i^\circ(x^r) \right); \forall i.$$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{D_i^\circ(x^r)}{D_i^\circ(\bar{x})} \left( N_i^\circ(\bar{x}) - \psi_i^r D_i^\circ(\bar{x}) \right) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i \left( N_i^\circ(x^r) - \psi_i^r D_i^\circ(x^r) \right).$$

با فرض مسئله در تناقض است.

با توجه به قضیهی فوق، الگوریتم جواب موثر ضعیف به صورت زیر خواهد بود:



گام ۱. فرض کنید  $x^0$  یک نقطه دلخواه در  $LFR$  باشد و وزن دلخواه  $\lambda_i$  برای هر  $i = 1, \dots, p$  را انتخاب کنید به طوری که  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  و قرار دهید  $r = 0$ .

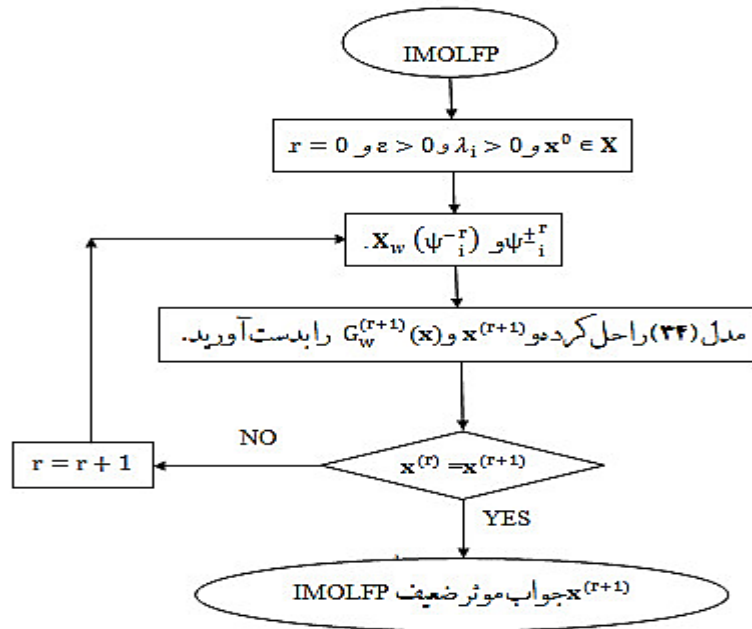
گام ۲.  $\psi_i^{\pm r}$  را بدست آورید و  $X_W(\psi_i^{\pm r})$  را مطابق با رابطه (۳۳) تشکیل دهید.

گام ۳. مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید و جواب بهینه آن را  $x^{(r+1)}$  و مقدار بهینه تابع هدف را  $G_S^{(r+1)}(x)$  بنامید.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^p \lambda_i (N_i^+(x) - \psi_i^r D_i^-(x)) \\ \text{subject to: } \quad & x \in X_W(\psi_i^{\pm r}). \end{aligned} \quad (34)$$

گام ۴. اگر جواب بهینه مدل (۳۴) در دو تکرار متوالی یکسان باشند در این صورت  $x^{(r+1)}$  را به عنوان جواب موثر ضعیف معرفی کنید در غیر این صورت قرار دهید  $r = r + 1$  و به گام ۲ بروید.

فرآیند حل برای الگوریتم جواب موثر ضعیف در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲- فرآیند حل الگوریتم جواب موثر ضعیف.

Figure 2- The solving process of the weakly efficient solution algorithm.

## ۵- مثال‌های عددی و آنالیز نتایج

برای نشان دادن کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی، ما دو مثال عددی حل کرده‌ایم و جواب‌های موثر قوی و ضعیف حاصل از الگوریتم‌ها را با یکدیگر مقایسه کرده‌ایم.

مثال ۲- مدل (۱۰) را در نظر بگیرید:





مطابق با روش نایاک و اوجا، جواب بهینه مدل (۱۰) به صورت  $x_1 = 4.5715, x_2 = 1.1430$  است. اکنون برای به‌کارگیری الگوریتم-های پیشنهادی، ابتدا با استفاده از قضیه ۱، LFR مدل (۱۰) را بدست می‌آوریم. بنابراین داریم:  $\min_{x \in X} d_i \bar{x} + \beta_i > 1$  برای  $i = 1, 2$  و  $\min_{x \in X} c_i \bar{x} + a_i > 0$  برای  $i = 1, 2$ . بردار وزن‌دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  و تلورانس مجاز را به صورت  $\varepsilon = 0.1$  در نظر بگیرید و جواب بهینه حاصل از روش نایاک و اوجا را به‌عنوان نقطه شروع برای الگوریتم‌ها در نظر بگیرید.

فرآیند پیدا کردن جواب توسط الگوریتم جواب موثر قوی به صورت زیر است:

گام ۱.  $x^0 = (4.5715, 1.1430) \in X$  را انتخاب کرده و بردار وزن‌دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  در نظر بگیرید و تلورانس مجاز  $\varepsilon = 0.1$  را انتخاب کرده و قرار دهید  $r = 0$ .

گام ۲.  $\psi^0 = (1.7528, 0.0638)$  و  $X_S(\psi^0)$  را بدست آورید.

گام ۳. با تشکیل مدل (۲۸)، جواب بهینه عبارت است از  $x^1 = (4.5714, 1.1429)$  و مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از  $G_S^1 = 0.0015$ .

گام ۴.  $G_S^1 = 0.0015 < 0.1$  به گام ۵ بروید.

گام ۵.  $G_S^1 = 0.0015$  در این صورت  $x^1 = (4.5714, 1.1429)$  به‌عنوان تقریبی از جواب موثر قوی مدل (۱۰) است.

فرآیند پیدا کردن جواب توسط الگوریتم جواب موثر ضعیف به صورت زیر است:

تکرار اول.

گام ۱.  $x^0 = (4.5715, 1.1430)$  را از LFR انتخاب کرده و بردار وزن‌دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  در نظر بگیرید و قرار دهید  $r = 0$ .

گام ۲.  $\psi^0 = (1.7528, 0.0638)$  و  $X_W(\psi^0)$  را تشکیل دهید.

گام ۳. با تشکیل مدل (۳۴)، جواب بهینه عبارت است از  $x^1 = (4.5714, 1.1429)$  و مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از  $G_W^1 = 5.4183$ .

گام ۴.  $x^0 \neq x^1$ . قرار دهید  $r = 1$  و به گام ۲ بروید.

تکرار دوم.

گام ۲.  $\psi^1 = (1.7528, 0.0638)$  و  $X_W(\psi^1)$  را بروز کنید.

گام ۳. با تشکیل مدل (۳۴)، جواب بهینه عبارت است از  $x^2 = (4.5714, 1.1429)$  و مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از  $G_W^2 = 5.4183$ .

گام ۴.  $x^1 = x^2$  در این صورت  $x^2 = (4.5714, 1.1429)$  جواب موثر ضعیف مدل (۱۰) است.

توجه داشته باشید جواب بهینه حاصل از روش نایاک و اوچا، جواب موثر قوی و ضعیف نیز می باشد.

مثال ۳- IMOLFP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max z_1^\pm &= \frac{[2.6, 2.8]x_1^\pm + [3.2, 4.1]x_2^\pm + [3, 3.2]}{[0.24, 4.9]x_1^\pm - [0.04, 0.08]x_2^\pm + [4, 5]} \\ \max z_2^\pm &= \frac{[7, 7.3]x_1^\pm + [0.4, 1.4]x_2^\pm - [4, 6.9]}{-[1, 1.5]x_1^\pm + [6, 7.7]x_2^\pm + [28, 28.6]} \\ \max z_3^\pm &= \frac{-[0.075, 0.08]x_1^\pm - [0.063, 0.068]x_2^\pm + [0.206, 0.211]}{-[0.017, 0.02]x_1^\pm - [0.015, 0.019]x_2^\pm + [1.74, 1.95]} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to: } & [0, 3]x_1^\pm + [0.1, 0.5]x_2^\pm \geq [20, 24], \\ & [0.55, 1.63]x_1^\pm + [0.32, 0.68]x_2^\pm \leq [11.2, 12], \\ & [0.2, 0.33]x_1^\pm + [0.8, 1]x_2^\pm \geq [8, 10], \\ & x_1^-, x_2^- \geq 0. \end{aligned}$$

ابتدا، با استفاده از قضیه ۱، LFR مدل (۳۵) را بدست می آوریم. بنابراین داریم:  $\min_{x \in X} d_i^- x + \beta_i^- > 1$  برای  $i = 1, 2, 3$  و  $\min_{x \in X} c_i^- x + \alpha_i^- > 0$  برای  $i = 1, 2$  و  $\max_{x \in X} c_i^+ x + \alpha_i^+ < 0$  بردار وزن دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  و تلورانس مجاز را به صورت  $\varepsilon = 0.1$  در نظر بگیرید.

فرآیند پیدا کردن جواب توسط الگوریتم جواب موثر قوی به صورت زیر است:

گام ۱.  $x^0 = (3.0961, 30.4892) \in X$  را انتخاب کرده و بردار وزن دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  در نظر بگیرید و تلورانس مجاز  $\varepsilon = 0.1$  را انتخاب کرده و قرار دهید  $r = 0$ .

گام ۲.  $\psi^0 = (5.7312, 0.1036, -1.9249)$  و  $X_S(\psi^0)$  را تشکیل دهید.

گام ۳. با تشکیل مدل (۲۸)، جواب بهینه عبارت است از  $x^1 = (3.0951, 30.4831)$  و مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از  $G_S^1 = 0.0029$ .

گام ۴.  $G_S^1 = 0.0029 < 0.1$  به گام ۵ بروید.

گام ۵.  $G_S^1 = 0.0029$  در این صورت  $x^1 = (3.0951, 30.4831)$  به عنوان تقریبی از جواب موثر قوی مدل (۳۵) است.

فرآیند پیدا کردن جواب توسط الگوریتم جواب موثر ضعیف به صورت زیر است:

تکرار اول.

گام ۱.  $x^0 = (3.0961, 30.4892)$  را از LFR انتخاب کرده و بردار وزن دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  در نظر بگیرید و قرار دهید  $r = 0$ .

گام ۲.  $\psi^0 = (5.7312, 0.1036, -1.9249)$  و  $X_W(\psi^0)$  را تشکیل دهید.





گام ۳. با تشکیل مدل (۳۴)، جواب بهینه عبارت است از  $x^1 = (0.5839, 36.4964)$  و مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از  $G_w^1 = 57.9616$ .

گام ۴.  $x^0 \neq x^1$ . قرار دهید  $r = 1$  و به گام ۲ بروید.

تکرار دوم.

گام ۲.  $\psi^{-1} = (18.9504, 0.0381, -2.2442)$  و  $X_w(\psi^{-1})$  را بروز کنید.

گام ۳. با تشکیل مدل (۳۴)، جواب بهینه عبارت است از  $x^2 = (0.5839, 36.4964)$  و مقدار بهینه تابع هدف عبارت است از  $G_w^2 = 58.1047$ .

گام ۴.  $x^1 = x^2$  در این صورت  $x^2 = (0.5839, 36.4964)$  جواب موثر ضعیف مدل (۳۵) است.

در ادامه، چندین نقطه به صورت رندومی انتخاب کرده ایم و با استفاده از الگوریتم های پیشنهادی، مدل (۳۵) را حل می کنیم و جواب های موثر قوی و ضعیف را بدست می آوریم. نتایج در جدول ۱ آورده شده اند.

جدول ۱- نتایج بدست آمده از حل مدل (۳۵) با استفاده از الگوریتم های پیشنهادی.

Table 1- The results obtained from the solving of model (35) using the proposed algorithms.

نقطه شروع $X^0$	الگوریتم جواب موثر ضعیف		الگوریتم جواب موثر قوی	
	تعداد تکرارها	جواب موثر ضعیف	جواب موثر قوی	$G_S^1$
(3.0961, 30.4892)	2	(0.5839, 36.4964)	(3.0951, 30.4831)	0.0029
(7.0000, 8.0000)	4	(21.2421, 0.9901)	(6.9995, 7.9993)	0.0016
(2.0000, 33.0000)	2	(0.5839, 36.4964)	(1.9994, 33.0073)	0.0173
(6.7789, 8.1235)	4	(21.2421, 0.9901)	(6.7789, 8.1237)	0.0029
(10.2491, 12.3716)	4	(21.2421, 0.9901)	(10.2476, 12.3690)	0.0001
(8.0231, 23.1292)	2	(21.2421, 0.9901)	(8.0303, 23.1272)	0.0036
(5.6437, 6.1376)	5	(21.2421, 0.9901)	(5.6455, 6.1387)	0.0040
(14.9621, 5.0019)	2	(21.2421, 0.9901)	(14.9609, 5.0011)	0.0018
(12.1921, 16.1292)	2	(21.2421, 0.9901)	(12.1914, 16.1276)	0.0003
(11.2071, 18.0807)	2	(21.2421, 0.9901)	(11.2070, 18.0802)	0.0024
(17.0239, 8.1357)	2	(21.2421, 0.9901)	(17.0192, 8.1322)	0.0012
(20.0392, 1.4384)	2	(21.2421, 0.9901)	(20.3810, 1.4382)	0.0000
(0.5839, 36.4964)	1	(0.5839, 36.4964)	(0.5839, 36.4965)	0.0039
(21.2421, 0.9901)	2	(21.2421, 0.9901)	(21.2418, 0.9903)	0.0000

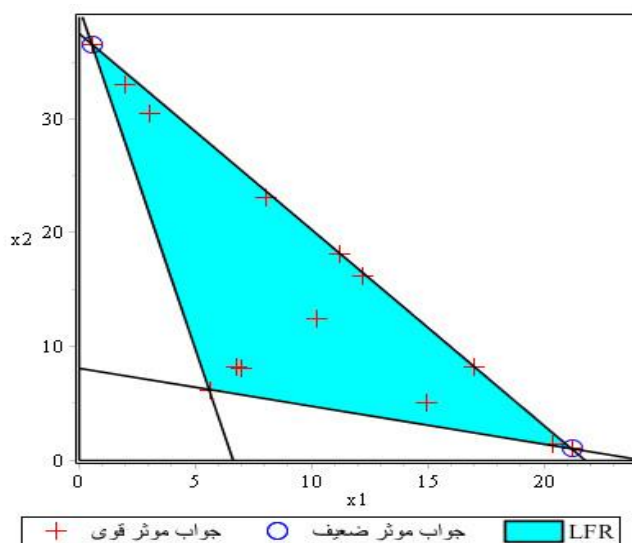
در الگوریتم جواب موثر قوی، تمام نقاطی که به صورت رندومی انتخاب کرده ایم، بعد از یک مرحله تکرار،  $G_S^1 < 0.1$  می شود بنابراین دو نقطه‌ی  $(20.3810, 1.4382)$  و  $(21.2418, 0.9903)$  را به عنوان جواب موثر قوی و بقیه نقاط را به عنوان تقریبی از جواب موثر قوی در نظر می گیریم. با استفاده از الگوریتم جواب موثر ضعیف، دو نقطه‌ی  $(21.2421, 0.9901)$  و  $(0.5839, 36.4964)$  را به عنوان جواب موثر ضعیف معرفی می کند. توجه کنید که در جدول ۱، نقطه‌ی  $(0.5839, 36.4964)$  به عنوان جواب موثر ضعیف و تقریبی از جواب موثر قوی است و نقطه‌ی  $(21.2421, 0.9901)$  به عنوان جواب موثر ضعیف و قوی مدل (۳۵) نیز می باشند.

مجموعه جواب های موثر توسط الگوریتم های جواب موثر قوی و ضعیف در شکل ۳ نمایش داده شده است.

اکنون نقاط موثر قوی در جدول ۱ را به عنوان نقطه‌ی شروع در نظر بگیرید و از الگوریتم جواب موثر ضعیف استفاده کنید. نتایج در جدول ۲ آورده شده است.

در جدول ۲ با نقطه‌ی شروع  $(5.6455, 6.1387)$ ، الگوریتم جواب موثر ضعیف در تکرار چهارم و پنجم، جواب بهینه یکسان دارد لذا نقطه‌ی  $(21.2421, 0.9901)$  جواب موثر ضعیف است. لازم به ذکر است تنها دو نقطه‌ی  $(0.5839, 36.4964)$  و  $(21.2421, 0.9901)$ ، نقاطی هستند که جواب موثر قوی و ضعیف هستند.

اکنون با استفاده از روش نایاک و اوجا مسئله نشدنی است و جواب بهینه‌ای نمی‌توانیم بدست آوریم. در حالی که با استفاده از الگوریتم جواب موثر قوی و ضعیف توانستیم تعداد متعددی جواب موثر بدست آوریم.



شکل ۳- مجموعه جواب‌های موثر حاصل از الگوریتم‌های پیشنهادی.

Figure 3- The efficient solutions set obtained by proposed algorithms.

جدول ۲- نتایج بدست آمده از حل مدل (۳۵) با استفاده از الگوریتم جواب موثر ضعیف.

Table 2- The results obtained from solving of model (35) using the weakly efficient solution algorithm.

تعداد تکرارها	جواب موثر ضعیف	نقطه شروع $X^0$
2	(0.5839, 36.4964)	(3.0951, 30.4831)
4	(21.2421, 0.9901)	(6.9995, 7.9993)
2	(0.5839, 36.4964)	((1.9994, 33.0073)
4	(21.2421, 0.9901)	(6.7789, 8.1237)
4	(21.2421, 0.9901)	(10.2476, 12.3690)
2	(21.2421, 0.9901)	(8.0303, 23.1272)
5	(21.2421, 0.9901)	(5.6455, 6.1387)
2	(21.2421, 0.9901)	(14.9609, 5.0011)
2	(21.2421, 0.9901)	(12.1914, 16.1276)
2	(21.2421, 0.9901)	(11.2070, 18.0802)
2	(21.2421, 0.9901)	(17.0192, 8.1322)
2	(21.2421, 0.9901)	(20.3810, 1.4382)
1	(0.5839, 36.4964)	(0.5839, 36.4965)
2	(21.2421, 0.9901)	(21.2418, 0.9903)

مثال ۴-  $IMOLFP$  زیر را در نظر بگیرید:







$$\begin{aligned}
 \max z_1^\pm &= \frac{[0.1,0.5]x_1^\pm + [3.2,6]x_2^\pm + [0.3,0.45]x_3^\pm + [3,4]}{-[0.02,0.1]x_1^\pm + [8,9.1]x_2^\pm + [2,2.5]x_3^\pm + [5,5.3]} \\
 \max z_2^\pm &= \frac{-[0.3,0.4]x_1^\pm + [4,5.2]x_2^\pm + [1,1.6]x_3^\pm + [2,4]}{[0.17,0.7]x_1^\pm + [1.3,2.9]x_2^\pm - [0.35,0.4]x_3^\pm + [1.65,2.33]} \\
 \max z_3^\pm &= [5.2,6]x_1^\pm + [4.5,6.4]x_2^\pm - [1,1.1]x_3^\pm + [1.8,1.9] \\
 \text{subject to: } & [3,5.1]x_1^\pm - [7,9.6]x_2^\pm + [3,3.4]x_3^\pm \leq [4.1,4.6], \\
 & [1.1,1.2]x_1^\pm + [0.5,1]x_2^\pm - [1.4,2]x_3^\pm \leq [8.4,8.7], \\
 & [2.7,3]x_1^\pm + [0.1,0.6]x_2^\pm + [1,1.9]x_3^\pm \leq [10.8,12.1], \\
 & x_1^-, x_2^-, x_3^- \geq 0.
 \end{aligned} \tag{36}$$

ابتدا، با استفاده از قضیه ۱، LFR مدل (۳۶) را بدست می آوریم. بنابراین داریم:  $\min_{x \in X} c_i^+ x + \alpha_i^- > 0$  و  $\min_{x \in X} d_i^+ x + \beta_i^- > 1$  برای  $i = 1, 2, 3$ . بردار وزن دار را به صورت  $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  و تلورانس مجاز را به صورت  $\varepsilon = 0.1$  در نظر بگیرید.

در ادامه با استفاده از الگوریتم جواب موثر قوی، چندین نقطه به صورت رندومی انتخاب کرده ایم و مدل (۳۶) را حل می کنیم و جواب های موثر قوی را بدست می آوریم. نتایج در جدول ۳ آورده شده اند.

با توجه به جدول ۳، تمام نقاط بدست آمده توسط الگوریتم جواب موثر قوی به عنوان تقریبی از جواب های موثر قوی هستند. سپس تمام نقاط رندومی جدول ۳ را با استفاده از الگوریتم جواب موثر ضعیف حل می کنیم لذا برای تمام نقاط، در تکرار اول و دوم جواب بهینه یکسان به صورت (0.0000, 10.0909, 11.0909) بدست می آید و از این رو، این نقطه را به عنوان جواب موثر ضعیف مدل (۳۶) معرفی می کنیم در حالی که این نقطه به عنوان تقریبی از جواب موثر قوی مدل (۳۶) نیز می باشند.

اکنون نقاط موثر قوی در جدول ۳ را به عنوان نقطه شروع در نظر می گیریم و از الگوریتم جواب موثر ضعیف استفاده می کنیم. با توجه به جدول ۴ تنها نقطه ی (0.0000, 10.0909, 11.0909)، به عنوان جواب موثر ضعیف بدست می آید. لازم به ذکر است که تنها نقطه ی موثر ضعیف، تقریبی از نقطه ی موثر قوی نیز می باشد.

اکنون با استفاده از روش نایاک و اوچا مسئله نشدنی است و جواب بهینه ای نمی توانیم بدست آوریم. در حالی که با استفاده از الگوریتم جواب موثر قوی و ضعیف توانستیم تعداد متعددی جواب موثر بدست آوریم.

جدول ۳- نتایج بدست آمده از حل مدل (۳۶) با استفاده از الگوریتم جواب موثر قوی.

Table 3- The results obtained from solving of model (36) using the strongly efficient solution algorithm.

$G_s^2$	$X^2$	$G_s^1$	$X^1$	نقطه شروع $X^0$
0.0003	(3.8089,4.2045,1.3956)	4.0464	(3.8087,4.2048,1.3961)	(3.4791,2.1879,1.8031)
0.0688	(1.1346,4.9071,4.7724)	1.8446	(1.1243,4.8657,4.7414)	(1.2752,3.3056,4.1029)
0.0000	(0.0000,6.5363,7.7181)	0.9644	(0.0000,6.5363,7.7181)	(0.2739,5.3769,6.9001)
0.0114	(4.3859,2.5810,0.0000)	3.2071	(4.3861,2.5755,0.0000)	(4.0982,1.2372,0.9036)
0.0661	(2.5914,3.8239,2.2325)	2.9700	(2.5744,3.7971,2.2227)	(2.2222,2.2222,2.2222)
0.0003	(2.9582,3.7384,1.7802)	5.8060	(2.9582,3.7384,1.7802)	(2.0748,0.9491,2.0271)
0.0022	(3.0706,5.3454,3.2747)	1.7182	(3.0708,5.3451,3.2743)	(3.0112,4.2917,3.1359)
0.0010	(0.000,10.0909,11.0909)	12.4304	(0.0000,10.0909,11.0909)	(2.0234,2.2875,6.2871)
0.0018	(1.3334,0.9096,0.5762)	0.2540	(1.3328,0.9092,0.5765)	(1.2976,0.3745,0.9875)
0.0052	(4.1999,3.6001,0.4002)	3.7838	(4.2001,3.5998,0.3997)	(3.9107,1.4198,1.3871)
		0.0010	(0.0000,10.0909,11.0909)	(0.0000,10.0909,11.0909)

Table 4- The results obtained from solving of model (36) using the weakly efficient solution algorithm.

تعداد تکرارها	$X^0=X^1$	نقطه شروع $X^0$
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(3.8089,4.2045,1.3956)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(1.1346,4.9071,4.7724)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(0.0000,6.5363,7.7181)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(4.3859,2.5810,0.0000)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(2.5914,3.8239,2.2325)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(2.9582,3.7384,1.7802)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(3.0706,5.3454,3.2747)
1	(0.0000,10.0909,11.0909)	(0.000,10.0909,11.0909)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(1.3334,0.9096,0.5762)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(4.1999,3.6001,0.4002)
2	(0.0000,10.0909,11.0909)	(4.3859,2.5810,0.0000)

در ادامه مقایسه‌ای بین روش‌های ارائه شده انجام خواهیم داد.

### ۶- مقایسه الگوریتم‌های پیشنهادی

در الگوریتم جواب موثر قوی، شرط توقف این است که مقدار بهینه تابع هدف کمتر از تلورانس مجاز  $\epsilon$  شود در حالی که در الگوریتم جواب موثر ضعیف، شرط توقف این است که جواب بهینه بدست آمده در دو تکرار متوالی یکسان شود. در هر دو الگوریتم، تعداد تکرارها وابسته به نقطه‌ی شروع است و در هر تکرار تنها یک مدل خطی حل می‌شود و ناحیه شدنی در هر تکرار زیرمجموعه‌ای از ناحیه شدنی در تکرار قبل است. در هر تکرار به تعداد توابع هدف، محدودیت جدید به  $LFR$  اضافه می‌شود. در الگوریتم جواب موثر قوی و ضعیف، با تغییر نقطه‌ی شروع، یک نقطه‌ی جدید به‌عنوان جواب موثر بدست می‌آوریم.

در جدول‌های ۱ و ۳، مشاهده می‌کنید که با انتخاب نقاط دلخواه و استفاده از الگوریتم جواب موثر قوی، جواب‌های موثر قوی متعددی بدست می‌آوریم در حالی که با استفاده از الگوریتم جواب موثر ضعیف تعداد محدودی جواب موثر بدست می‌آوریم و شکل ۳ گواه این مطلب است. در جدول‌های ۲ و ۴، با انتخاب نقاط موثر قوی به‌عنوان نقطه‌ی شروع و استفاده از الگوریتم جواب موثر ضعیف مشاهده می‌کنید که تعداد محدودی جواب موثر ضعیف بدست می‌آوریم. با توجه به شکل ۳ جواب‌های موثر ضعیف، جواب‌های موثر قوی هستند. لازم به ذکر است در این مثال‌ها به‌صورت اتفاقی جواب‌های موثر ضعیف، جواب موثر قوی می‌باشند.

در مثال‌های ۳ و ۴، با استفاده از الگوریتم‌های جواب موثر قوی و ضعیف توانستیم تعداد متعددی جواب موثر قوی و ضعیف بدست آوریم در حالی که با استفاده از روش نایاک و اوجا مسئله نشدنی شد و جواب بهینه‌ای نتوانستیم بدست آوریم.

### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل  $IMOLFP$  مورد مطالعه قرار گرفته است. دو الگوریتم تکراری برای تعیین جواب‌های موثر مدل  $IMOLFP$  ارائه شده است. در الگوریتم‌های جواب موثر قوی و ضعیف، با استفاده از تعریف قوی و ضعیف، مدل  $IMOLFP$  را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه روی  $LFR$  تبدیل می‌کنیم به‌طوری‌که توابع هدف وابسته به پارامتر  $\bar{\psi}_i$  برای  $i=1, \dots, p$  هستند و با استفاده از روش مجموع وزن‌دار، مدل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه را به مدل برنامه‌ریزی خطی تک هدفه تبدیل می‌کنیم به‌طوری‌که این مدل برنامه‌ریزی خطی تک هدفه وابسته به پارامترهای  $\bar{\psi}_i$  برای  $i=1, \dots, p$  است و هم‌چنین به تعداد اهداف، محدودیت جدید به  $LFR$  اضافه می‌شود. در هر تکرار مقدار پارامتر  $\bar{\psi}_i$  برای  $i=1, \dots, p$  به‌روز رسانی می‌شوند و لذا توابع هدف و محدودیت‌های جدید نیز تغییر می‌کنند. افزودن این محدودیت‌ها به  $LFR$  منجر به تقلیل ناحیه شدنی در هر تکرار می‌شود. با انتخاب نقطه دلخواه از  $LFR$  و استفاده از الگوریتم‌های پیشنهادی، یک نقطه به‌عنوان جواب موثر مدل  $IMOLFP$  بدست می‌آید و با تغییر نقطه‌ی شروع، می‌توان جواب‌های





- Alefeld, G., & Herzberger, J. (1983). *Introduction to interval computations*. Academic press.
- Bhurjee, A. K., & Panda, G. (2015). Multi-objective interval fractional programming problems: an approach for obtaining efficient solutions. *Opsearch*, 52(1), 156-167.
- Borza, M., Rambely, A. S., & Saraj, M. (2012). Solving linear fractional programming problems with interval coefficients in the objective function, a new approach. *Applied mathematical sciences*, 6(69), 3443-3452.
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval research logistics quarterly*, 9(3-4), 181-186.
- Chinnadurai, V., & Muthukumar, S. (2016). Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: numerical approach. *Applied mathematical modelling*, 40(11-12), 6148-6164.
- Das, S. K., & Mandal, T. (2017). A MOLFP method for solving linear fractional programming under fuzzy environment. *International journal of research in industrial engineering*, 6(3), 202-213.
- Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming. *Management science*, 13(7), 492-498.
- Ebrahimnejad, A., Ghomi, S. J., & Mirhosseini-Alizamini, S. M. (2018). A revisit of numerical approach for solving linear fractional programming problem in a fuzzy environment. *Applied mathematical modelling*, 57, 459-473.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization* (Vol. 491). Springer.
- Falk, J. E., & Palocsay, S. W. (1994). Image space analysis of generalized fractional programs. *Journal of global optimization*, 4(1), 63-88.
- Fiedler, M., Nedoma, J., Ramík, J., Rohn, J., & Zimmermann, K. (2006). *Linear optimization problems with inexact data*. Springer.
- Hladík, M. (2010). Generalized linear fractional programming under interval uncertainty. *European journal of operational research*, 205(1), 42-46.
- Jeyakumar, V., Li, G. Y., & Srisatkunarah, S. (2013). Strong duality for robust minimax fractional programming problems. *European journal of operational research*, 228(2), 331-336.
- Kumar-Das, S. (2019). A new method for solving fuzzy linear fractional programming problem with new ranking function. *International journal of research in industrial engineering*, 8(4), 384-393.
- Mostafae, A., & Hladík, M. (2020). Optimal value bounds in interval fractional linear programming and revenue efficiency measuring. *Central European journal of operations research*, 28(3), 963-981.
- Nayak, S., & Ojha, A. (2015). Generating Pareto optimal solutions of multi-objective LFPP with interval coefficients using  $\epsilon$ -constraint method. *Mathematical modelling and analysis*, 20(3), 329-345.
- Nayak, S., & Ojha, A. K. (2019). Multi-objective linear fractional programming problem with fuzzy parameters. In *soft computing for problem solving* (pp. 79-90). Springer, Singapore.
- Rivaz, S., & Yaghoobi, M. A. (2013). Minimax regret solution to multiobjective linear programming problems with interval objective functions coefficients. *Central European journal of operations research*, 21(3), 625-649.
- Shaocheng, T. (1994). Interval number and fuzzy number linear programmings. *Fuzzy sets and systems*, 66(3), 301-306.
- Sun, X. K., & Chai, Y. (2014). On robust duality for fractional programming with uncertainty data. *Positivity*, 18(1), 9-28.
- Taghi-Nezhad, N. A., & Babakordi, F. (2019). Fuzzy quadratic programming with non-negative parameters: a solving method based on decomposition. *Journal of decisions and operations research*, 3(4), 325-332. (In Persian). <https://doi.org/10.22105/DMOR.2019.84073>
- Valipour, E., Yaghoobi, M. A., & Mashinchi, M. (2014). An iterative approach to solve multiobjective linear fractional programming problems. *Applied mathematical modelling*, 38(1), 38-49.