E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. 7, No. 3 (2022) 516–532.

Paper Type: Original Article

A New Model in Determining Capacity Utilization Based on Efficiency, Cost, Price and Distinction the Loss of Profit Due to Capacity Utilization and Inefficiency

Elham Zaker Harofteh[1], Faranak Hosseinzadeh Saljooghi[1,*]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.; elham.zakerh@gmail.com; saljooghi@math.usb.ac.ir.*

Citation:

Zaker Harofteh, E., & Hosseinzadeh Saljooghi., F. (2022). A new model in determining capacity utilization based on efficiency, cost, price and distinction the loss of profit due to capacity utilization and inefficiency. *Journal of decisions and operations research, 7*(3), 516-532.

Received: 13/12/2020 Reviewed: 12/01/2020 Revised: 14/02/2021 Accepted: 09/03/2021

Abstract

Purpose: In this paper, the combined model for determining capacity utilization by considering inputs and outputs based on efficiency is discussed and the loss due to the lack of suitable use of capacity utilization is also calculated.

Methodology: The current research is practical in terms of the type of purpose and fundamental in terms of the type of study. The capacity utilization evaluation method is based on data envelopment analysis model which is suitable for evaluating efficiency and function and it also has the ability to designate the capacity utilization. In the present models, the capacity utilization evaluation method is stated by assuming the possibility of changing all inputs/outputs with a multiplicative constant (Radial model) or assuming a distinct change in all factors affecting production. But in reality, some inputs/outputs might change radially and some of them non-radially in organizations and companies. In this article, a new model is submitted to designate the capacity utilization. It measures the capacity utilization simultaneously in the presence of radial and non-radial factors; furthermore, it has the ability to detect losses caused by any of the items such as the price of outputs/inputs or amount of output deficit and input surplus and it is a suitable model for evaluating the capacity utilization in practical and real issues.

Findings: The proposed approach in this article combines the points of the CCR radial model and the SBM non-radial model with the aim of determining capacity utilization and not just measuring efficiency, and with its help, we can evaluate the capacity utilization with the presence of non-radial data in addition to the radial data. In a case study of twelve hospitals with a fixed input of a doctor, and a variable input of a nurse and two outputs of outpatients and inpatients, it was observed that by eliminating the variable inputs in the presence of radial and non-radial outputs, there is no improvement in efficiency. On the other hand, the results show that some hospitals should improve the use of their capacity, and in some hospitals, by increasing the number of nurses, the number of outpatients or inpatients can be increased and the performance of hospitals can be improved. Then, using efficiency analysis, the inefficiency factor and its amount were determined. The combined model shows a lower number of inefficient units than the output-oriented BCC model.

Originality/Value: In this article, the combined model of capacity utilization in the presence of radial and non-radial indicators is presented, which can be an introduction to the presentation of DEA models of capacity utilization under different input and output conditions.

Keywords: Data envelopment analysis, Capacity utilization, Hybrid model, Fixed and variable resources.

Corresponding Author: saljooghi@math.usb.ac.ir

http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.3.9.8

Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۷، شماره (۳)، (۱۴۰۱)، ۵۳۲-۵۱۶
www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

مدلی جدید برای تعیین ظرفیت تولید بر پایه کارایی، قیمت و هزینه و تفکیک زیان ناشی از ظرفیت تولید و ناکارایی

الهام ذاکر هرفته[۱]، فرانک حسین‌زاده سلجوقی[۱،*]

[۱]گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله مدل ترکیبی برای تعیین ظرفیت تولید با درنظرگرفتن ورودی و خروجی‌ها براساس کارایی پرداخته و زیان ناشی از عدم استفاده مناسب از ظرفیت تولید نیز محاسبه می شود.

روش‌شناسی پژوهش: تحقیق حاضر از نظر نوع هدف، کاربردی و از لحاظ نوع مطالعه بنیادی است. روش ارزیابی ظرفیت تولید، براساس مدل تحلیل پوششی داده‌ها است که برای ارزیابی کارایی و عملکرد مناسب بوده و قابلیت تعیین ظرفیت تولید را نیز دارد. در مدل‌های موجود ارزیابی ظرفیت تولید، با فرض امکان تغییر تمامی ورودی‌ها/ خروجی‌ها با یک ضریب ثابت (مدل شعاعی) و یا با فرض تغییر مجزا در تمامی عوامل موثر بر تولید (مدل غیرشعاعی) بیان شده‌اند. اما در واقعیت ممکن است در سازمان‌ها/ شرکت‌ها برخی ورودی و خروجی‌ها به صورت شعاعی و برخی از آن‌ها به صورت غیرشعاعی تغییر کنند. در این مقاله، مدل جدیدی برای تعیین ظرفیت تولید ارائه شده که ظرفیت تولید را در حضور عوامل شعاعی و غیرشعاعی بصورت توام می‌سنجد همچنین قابلیت تشخیص زیان ناشی از هر یک از مواردی مانند قیمت خروجی‌ها، قیمت ورودی‌ها و یا مقدار کمبود خروجی و مازاد ورودی را دارد و مدلی مناسب برای ارزیابی ظرفیت تولید در مسائل کاربردی و واقعی است.

یافته‌ها: رویکرد پیشنهادی در این مقاله به ترکیب نکات مدل شعاعی *CCR* و مدل غیرشعاعی *SBM* با هدف تعیین ظرفیت تولید و نه فقط سنجش کارایی می‌پردازد و به کمک آن می‌توانیم ظرفیت تولید را علاوه بر داده‌های شعاعی، با حضور داده‌های غیرشعاعی ارزیابی نماییم. در مطالعه موردی دوازده بیمارستان با ورودی ثابت پزشک، و ورودی متغیر پرستار و دو خروجی بیماران سرپایی و بستری، ملاحظه گردید که با حذف ورودی‌های متغیر در حضور خروجی‌های شعاعی و غیرشعاعی بهبودی در کارایی حاصل نمی‌گردد. از طرفی نتایج نشان می‌دهد برخی بیمارستان‌ها باید استفاده از ظرفیت خود را بهبود بخشند و در برخی بیمارستان‌ها با افزایش تعداد پرستاران، می‌توان تعداد بیماران سرپایی و یا بستری را بیشتر کنند و عملکرد بیمارستان‌ها را بهبود بخشید. سپس با استفاده از تجزیه کارایی‌ها عامل ناکارایی و مقدار آن مشخص گردید. مدل ترکیبی تعداد واحدهای ناکارای کمتری را نسبت به مدل *BCC* خروجی محور نشان می‌دهد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: در این مقاله مدل ترکیبی ظرفیت تولید در حضور شاخص‌های شعاعی و غیرشعاعی ارائه شده است که می‌تواند مقدمه‌ای برای ارائه مدل‌های *DEA* ظرفیت تولید تحت شرایط ورودی و خروجی‌های متفاوت باشد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، ظرفیت تولید، مدل ترکیبی، هزینه ثابت و متغیر تولید.

۱- مقدمه

شناخت و استفاده از ظرفیت‌های موجود در یک صنعت و یا کارخانه، موجب افزایش بازده و ظرفیت تولید با هزینه کمتر می‌شود. ظرفیت تولید توسط (گولد[1]، ۱۹۵۵؛ جوهانسن[2]، ۱۹۶۸) به‌عنوان "ماکزیمم مقداری که می‌توان در هر واحد زمانی تولید کرد" معرفی گردید و توسط

[1] Gold

[2] Johansen

نویسنده مسئول

saljooghi@math.usb.ac.ir

http://dorl.net/dor/20.1001.1.25385097.1401.7.3.9.8

محققینی چون (فار و همکاران[1]، ۱۹۸۹؛ کوئلی و همکاران[2]، ۲۰۰۲؛ تن[3]، ۲۰۰۵) در *DEA* توسعه یافت. ساهو و تن[4] (۲۰۰۹) روش‌های موجود ظرفیت تولید را در قالب ناپارامتریک از منظر اقتصادی موردمطالعه قرار دادند و روش‌های دیگری را برای روشن کردن این محدودیت‌ها پیشنهاد نمودند. کوئلی و همکاران دو روش شعاعی و غیرشعاعی را پیشنهاد دادند آن‌ها بیان نمودند که ظرفیت تولید بر پایه ورودی‌ها به چند جز مهم: ناکارایی فنی، ظرفیت تولید اقتصادی شعاعی و بهینه‌سازی ظرفیت‌های تلف‌شده قابل‌تقسیم هستند. همچنین کریمی و خرم مدل *DEA* ظرفیت تولید با داده‌های صحیح را ارایه دادند (کریمی و خرم[5]، ۲۰۱۵). به‌کارگیری و تعیین ظرفیت تولید در سیستم‌های دو و چند مرحله‌ای مورد توجه محققین متعددی قرار گرفته است، زینال زاده آهرنجانی و همکاران[6] (۲۰۱۹) ظرفیت تولید را در سیستم‌های دومرحله‌ای موردمطالعه قرار دادند. یانگ و همکاران[7] (۲۰۱۸) نیز صنعت تولیدی چین را از جنبه ظرفیت تولید بررسی کردند. مامی زاده-چتقایه و همکاران[8] (۲۰۱۷) مدل *DEA* ظرفیت تولید را روی زنجیره تامین دینامیکی بکار بردند. از دیگر تحقیقات در زمینه ظرفیت تولید می‌توان به مقالات (ساهو[9]، ۲۰۱۷؛ لیو و همکاران[10]، ۲۰۱۹؛ آهرنجانی و متین[11]، ۲۰۱۸؛ کالایی[12]، ۲۰۱۹) اشاره نمود.

در تمامی مدل‌های مرسوم ظرفیت تولید بیان شده ورودی و خروجی‌ها به‌صورت غیرشعاعی تغییر می‌کنند درحالی‌که این امکان وجود دارد که هزینه‌هایی مانند هزینه ثابت تولید، متناسب با تولیدات کاهش یا افزایش نیابند یا اینکه خروجی‌ها به‌صورت یکسان و شعاعی تغییر نکنند. برای ارزیابی بهتر عملکرد لازم است از روشی با تلفیق روش‌های شعاعی و غیرشعاعی استفاده نمود (فضلی و آغشلویی[13]، ۲۰۰۹). ازاین‌رو بحث مدل‌های ترکیبی (مدل‌هایی که با دو نوع داده شعاعی و غیرشعاعی سروکار دارد) مطرح شد. این مدل اولین بار توسط تن (۲۰۰۴) ارایه شد. مدل‌های ترکیبی متعددی توسط محققین ارایه گردید که عموما بر ترکیب مدل‌ها و روش‌ها تمرکز دارند. (زارع و همکاران[14] ۲۰۱۹؛ محمودی و همکاران[15]، ۲۰۱۹) مدل‌های ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با تئوری بازی‌ها را مطرح کردند. همچنین علی نژاد[16] (۲۰۱۸) مدل ترکیب چند هدفه در محیط خاکستری مطرح نمود و آن را پیشنهاد داد. لازم به ذکر است در تحقیقات مذکور مدلی برای ارزیابی عملکرد در حضور داده شعاعی و غیرشعاعی ارایه نگردیده است.

به‌طورکلی تاکنون مدلی جهت تعیین ظرفیت تولید در حضور داده‌های شعاعی و غیرشعاعی ارایه نشده، در این مقاله با استفاده از دیدگاه‌های بکار رفته در مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی، مدل جدیدی برای تعیین ظرفیت تولید ارایه داده‌ایم. مدل پیشنهادی به ترکیب نکات موجود در مدل شعاعی *CCR* و مدل غیرشعاعی *SBM* با هدف تعیین ظرفیت تولید و نه‌فقط سنجش کارایی می‌پردازد. به کمک مدل پیشنهادی می‌توانیم ظرفیت تولید را علاوه بر داده‌های شعاعی، با حضور داده‌های غیرشعاعی ارزیابی نماییم.

ادامه مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم تعیین ظرفیت تولید با استفاده از *DEA* را مطرح سپس در بخش سوم مدل ترکیبی مطرح می‌شود. در بخش چهارم مدل جدیدی برای تعیین ظرفیت تولید در حضور داده‌های شعاعی و غیرشعاعی ارایه و در بخش پنجم به بررسی نتایج حاصل از اعمال مدل بر یک مثال کاربردی پرداخته، سپس نتیجه‌گیری در بخش آخر آمده است.

۲- ارزیابی ظرفیت تولید با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

میزان تولید عموما به‌صورت تابعی از منابع و هزینه‌های تولید بیان می‌شوند. تابع تولید در دو دوره زمانی کوتاه‌مدت و بلندمدت در نظر گرفته می‌شود که موجب برخورد متفاوت با هزینه‌های تولید می‌گردد. در دوره کوتاه‌مدت هزینه‌های تولید به دو دسته هزینه‌های ثابت (مربوط به عوامل تولید مانند نیروی کار) و هزینه‌های متغیر (هزینه مواد اولیه) تقسیم می‌شوند. در بلندمدت همه عوامل تولید قابل‌تغییر فرض شده لذا همه هزینه‌ها متغیر فرض می‌شوند. هزینه‌های ثابت هزینه‌هایی می‌باشند که با تغییر حجم تولید، تغییر نخواهند کرد و هزینه‌های متغیر، هزینه‌هایی هستند که با افزایش مقدار و حجم تولید این هزینه‌ها افزایش می‌یابند.

---

[1] Fare et al.
[2] Coelli et al.
[3] Tone
[4] Sahoo and Tone
[5] Karimi and Khorram
[6] Zeinalzadeh Ahranjani et al.
[7] Yang et al.
[8] Mamizadeh-Chatghayeh et al.
[9] Sahoo
[10] Liu et al.
[11] Ahranjani and Matin
[12] Kalai
[13] Fazli and Agheshlouei
[14] Zare et al.
[15] Mahmoudi et al.
[16] Alinezhad

۱-۲- ظرفیت تولید تکنیکی

فرض کنید s خروجی y_j در DMU_j ($j=1,\ldots,n$) با مصرف m ورودی‌های x_j تولید گردند که $y_j \epsilon R^s_+$ و $x_j \epsilon R^m_+$. از طرفی در میان منابع ورودی برای تولید، برخی از آن‌ها مستقل از میزان تولید هستند که آن‌ها را ورودی‌های ثابت نامیده (به معنای ثابت بودن مقدار این ورودی‌ها برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیری نمی‌باشد) و برخی از منابع تولید که کاملا به میزان تولید وابسته هستند که آن‌ها را ورودی‌های متغیر می‌نامیم؛ بنابراین m مولفه موجود در بردار ورودی، به دو دسته بردار ورودی ثابت $x^F_j=(x^F_{1j},\ldots,x^F_{fj})\epsilon R^f$ و بردار ورودی متغیر $x^V_j=(x^V_{1j},\ldots,x^V_{vj})\epsilon R^v$ تقسیم می‌شوند به‌طوری‌که $F+V=m$ و $R^m=R^f\cup R^v$.

تعریف ۱- مجموعه امکان تولید P شامل تمام ترکیبات $\left\{\left(x^F_j,x^V_j,y_j\right)\right\}(j=1,\ldots,n)$ است به‌نحوی‌که بتوان با ورودی‌های $\left(x^F_j,x^V_j\right)$ خروجی‌های y_j را تولید نمود (تن، ۲۰۰۵).

کارایی $DMU_o=\left(x^F_o,x^V_o,y_o\right)$ $o\epsilon\{1,\ldots,n\}$ با استفاده از مدل خروجی محور $(SBM-O)$ ارزیابی می‌شود (تن، ۲۰۰۵).

$$
\begin{aligned}
(SBM-O)\qquad & \phi^*=\max_{\lambda,s^+}\left(1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{y_{ro}}\right)\\
s.t.\quad & x^F_{io}\ge\sum_{j=1}^{n}x^F_{ij}\lambda_j,\ i=1,\ldots,f,\\
& x^V_{io}\ge\sum_{j=1}^{n}x^V_{ij}\lambda_j,\ i=1,\ldots,v,\quad (1.a)\\
& y_{ro}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-s_r^+,\ r=1,\ldots,s,\\
& 1=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,\\
& \lambda_j\ge 0,\ j=1,\ldots,n,\ s_r^+\ge 0,\ r=1,\ldots,s.
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

اندیس‌های V و F به ترتیب برای ورودی‌های متغیر و ثابت بکار برده شده است. همچنین متغیر کمکی s_r^+ به‌منظور افزایش خروجی‌ها و به حداکثر رساندن تابع هدف استفاده شده است. ϕ^* اندازه کارایی DMU_o می‌باشد.

ϕ^* نشان‌دهنده‌ی میانگین افزایش تمام خروجی‌ها می‌باشد. بدیهی است که اگر $\phi^*>1$ آنگاه DMU_o می‌تواند برخی از خروجی‌ها را بدون بدتر شدن خروجی‌های دیگر با استفاده از سطح فعلی از منابع ورودی افزایش دهد.

با حذف **محدودیت (1.a)** در **مدل (۱)**، **مدل (۲)** حاصل می‌شود

$$
\begin{aligned}
& \phi^*_F=\max_{\lambda,s^+}\left(1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{y_{ro}}\right)\\
s.t.\quad & x^F_{io}\ge\sum_{j=1}^{n}x^F_{ij}\lambda_j,\ i=1,\ldots,f,\\
& y_{ro}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-s_r^+,\ r=1,\ldots,s,\\
& 1=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,\\
& \lambda_j\ge 0,\ j=1,\ldots,n,\ s_r^+\ge 0,\ r=1,\ldots,s.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

$(\lambda_j^{**},s_r^{+**})$ را به‌عنوان جواب بهینه **مدل (۲)** در نظر بگیرید. دراین‌صورت، مقدار بهبودیافته‌ی ورودی متغیر به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{x}^V_{io}=\sum_{j=1}^{n}x^V_{ij}\lambda_j^{**},\quad (i=1,\ldots,v).$$

ذاکر هرفته و حسین‌زاده سلجوقی/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۵۳۲-۵۱۶

مقدار به‌دست‌آمده $\hat{x}_{io}^{V}$ ممکن است بیشتر یا کمتر از مقدار مشاهده‌شده x_{io}^{V} باشد.

تعریف ۲- اگر ϕ^* و ϕ_F^* به ترتیب مقادیر بهینه تابع هدف **مدل‌های (۱)** و **(۲)** باشند، آنگاه ظرفیت تولید به‌صورت $k_o^* = \frac{\phi^*}{\phi_F^*}$ تعریف خواهد شد (کوپر و همکاران[1]، ۲۰۰۷).

با توجه به اینکه تعداد قیود **مدل (۲)** کمتر از **مدل (۱)** است جواب بهینه آن بدتر از **مدل (۱)** نخواهد بود به‌عبارت‌دیگر $\phi_F^* \geq \phi^*$ و درنتیجه $k_o^* \leq 1$. مقدار کارایی با حذف ورودی‌های متغیر، بزرگ‌تر مساوی از مقدار کارایی برای زمانی است که ورودی‌های متغیر در مدل حضور دارند. از طرفی اگر $k_o^* < 1$ نشان می‌دهد $\phi_F^* > \phi^*$، درنتیجه قیود مربوط به ورودی‌های متغیر در **مدل (۱)** فعال هستند و می‌توان با حذف این قیود مقدار کارایی را افزایش داد.

تعریف ۳- ظرفیت تولید برای ورودی متغیر ith به‌صورت عبارت $\delta_{io}^* = \frac{\hat{x}_{io}^{V}}{x_{io}^{V}}$ تعریف می‌شود (کوپر و همکاران، ۲۰۰۷).

۲-۲- تعیین ظرفیت تولید بر پایه هزینه و قیمت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

روش تعیین ظرفیت تولید برای حالتی که عامل قیمت‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها در دسترس باشند تعمیم داده شده است. قیمت‌های خروجی y_{ro} و هزینه ورودی متغیر x_{io}^{V} را به ترتیب p_{ro} و c_{io}^{v} در نظر بگیرید (این قیمت‌ها در بین $DMUs$ یکسان نیستند) سود فعلی DMU_o با توجه به درآمد مشاهده‌شده از خروجی‌ها و هزینه ورودی‌های متغیر، به‌صورت زیر بیان گردیده است (کوپر و همکاران، ۲۰۰۷):

$$G_O = \sum_{r=1}^{s} p_{ro} y_{ro} - \sum_{i=1}^{v} c_{io}^{V} x_{io}^{V},\ (o = 1,\ldots,n).$$

با توجه به مجموعه امکان تولید زیر

$$\bar{P} = \left\{ \left(x^F, \bar{x}^V, \bar{y}\right) / \ x_i^F \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^F \lambda_j, \bar{x}_i^V \geq \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}^V \lambda_j, \bar{y}_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{rj} \lambda_j, \forall i, r, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\ , \forall j \right\}.$$

که $\bar{x}_{ij}^V$ و $\bar{y}_{rj}$ به ترتیب عبارت‌اند $\bar{x}_{ij}^V = c_{ij}^V x_{ij}^V,\ i = 1,\ldots,v,\ \ j = 1,\ldots n$ و $\bar{y}_{rj} = p_{rj} y_{rj}, r = 1,\ldots,s\ ,\ j = 1,\ldots,n$

حداکثر سود به‌دست‌آمده از **مدل (۳)** قابل‌محاسبه می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \max \quad e\bar{y} - e\bar{x}^V \\ & s.t. \qquad \left(x^F, \bar{x}^V, \bar{y}\right) \in \bar{P}. \end{aligned} \qquad (۳)$$

جایی‌که $e \in R^m$ یک بردار سطری است که تمام عناصر آن برابر ۱ می‌باشد. G_O^* را مقدار بهینه تابع هدف **مدل (۳)** قرار دهید. سود G_o^* کارایی واحد تحت ارزیابی ازلحاظ تکنیکی می‌باشد.

گزاره ۱- اگر $G_o^* G_o$ به ترتیب سود واقعی و سود ناشی از ناکارایی تکنیکی باشد، سود ازدست‌رفته ناشی از ناکارایی تکنیکی L_o از رابطه $L_O = G_O^* - G_O (\geq 0)$ به دست می‌آید (کوپر و همکاران ۲۰۰۷).

برهان: مدل (۴) را در نظر بگیرید.

[1] Cooper et al.

$$f^{*} = \max_{\lambda,\bar{s}^{+}} \left(1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{\bar{s}_r^{+}}{\bar{y}_{ro}}\right)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_{io}^{F} \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{F}\lambda_j, \quad i=1,\ldots,f, \\ & \bar{x}_{io}^{V} \geq \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}^{V}\lambda_j, \quad i=1,\ldots,v, \\ & \bar{y}_{ro} = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{rj}\lambda_j - \bar{s}_r^{+}, \quad r=1,\ldots,s, \\ & 1=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \\ & \lambda_j \geq 0, \ j=1,\ldots,n, \quad \bar{s}_r^{+} \geq 0, r=1,\ldots,s. \end{aligned} \qquad (۴)$$

فرض کنید $\left(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_n\right)$ جواب بهینه **مدل (۴)** باشد در این صورت واحد کارای تحت ارزیابی بهینه $\left(\bar{\bar{x}}_o^{F},\bar{\bar{x}}_o^{V},\bar{\bar{y}}_o\right)$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\bar{X}}_{io}^{F} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{F}\bar{\lambda}_j, \quad i=1,\ldots,f, \ \bar{\bar{X}}_{io}^{V} = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}^{V}\bar{\lambda}_j, \ i=1,\ldots,v, \ \bar{\bar{Y}}_{ro} = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{rj}\bar{\lambda}_j, r=1,\ldots,s.$$

ازآن‌جاکه $\bar{\bar{y}}_{ro} \geq \bar{y}_{ro} = p_{ro}y_{ro}$ و $\bar{\bar{x}}_{io}^{V} \leq \bar{x}_{io}^{V} = c_{io}^{V}x_{io}^{V}$ لذا سود ناشی از ناکارایی تکنیکی (G_o^{*}) بیش‌تر از سود واقعی خواهد شد:

$$G_o^{*} = \sum_{r=1}^{s}\bar{\bar{y}}_{ro} - \sum_{i=1}^{v}\bar{\bar{x}}_{io}^{V} \geq \sum_{r=1}^{s} p_{ro}y_{ro} - \sum_{i=1}^{v} c_{io}^{V}x_{io}^{V} = G_o.$$

درنتیجه می‌توان سود ازدست‌رفته L_o را به علت ناکارایی تکنیکی در مجموعه تولید امکان $\bar{P}$ به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$L_o = G_o^{*} - G_o (\geq 0).$$

گزاره ۲- اگر G_o^{*} و G_o^{**} به ترتیب سود ناشی از ناکارایی تکنیکی و تخصیصی باشند آنگاه L_o^{*} سود ازدست‌رفته به علت ناکارایی تخصیصی (ترکیب ورودی – خروجی بر پایه قیمت و هزینه) به‌صورت $L_o^{*} = G_o^{**} - G_o^{*} (\geq 0)$ می‌باشد (کوپر و همکاران، ۲۰۰۷).

$$G_o^{**} = \max_{\lambda,\bar{x}^{V},\bar{y}} \sum_{r=1}^{s}\bar{y}_r - \sum_{i=1}^{v}\bar{x}_i^{V}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_{io}^{F} \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{F}\lambda_j, \quad i=1,\ldots,f, \\ & \bar{x}_i^{V} = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}^{V}\lambda_j \leq \bar{x}_{io}^{V}, \quad i=1,\ldots,v, \quad (5.a) \\ & \bar{y}_r = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{rj}\lambda_j \geq \bar{y}_{ro}, \quad r=1,\ldots,s, \\ & 1=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n. \end{aligned} \qquad (۵)$$

برهان: ابتدا برای تعیین ماکزیمم سود واحد تصمیم‌گیری o، مدل سود زیر را روی مجموعه امکان تولید $\bar{P}$ حل می‌کنیم. مشابه گزاره قبل و با توجه به **مدل (۵)** می‌توان نتیجه گرفت $L_o^{*} = G_o^{**} - G_o^{*} (\geq 0)$.

گزاره ۳- اگر G_o^{**} و G_o^{***} به ترتیب سود ناشی از ناکارایی تخصیصی و ناکارایی ظرفیت تولید بر پایه قیمت باشند آنگاه L_o^{**} سود ازدست‌رفته به علت ناکارایی ظرفیت تولید بر پایه قیمت به‌صورت $L_o^{**} = G_o^{***} - G_o^{**} (\geq 0)$ می‌باشد (کوپر و همکاران ۲۰۰۷).

ذاکر هرفته و حسین‌زاده سلجوقی/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۵۳۲-۵۱۶

برهان: جواب بهینه **مدل (۵)** با حذف محدودیت **(5-a)** را G_o^{***} بنامید. مشابه دو گزاره قبل خواهیم داشت:

$$L_o^{**} = G_o^{***} - G_o^{**} \left(\geq 0\right).$$

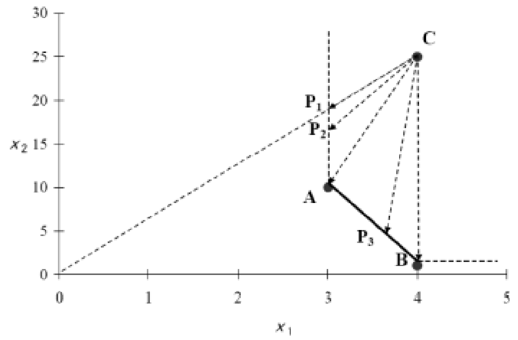
نتیجه ۱- با توجه به سه گزاره بیان‌شده در بالا می‌توان حداکثر سود کلی G_o^{***} را برای DMU_o محاسبه کرد و به‌صورت روابط زیر تجزیه نمود:

$$G_o^{***} = G_o^{**} + L_o^{**} \qquad (\text{زیان ناشی از ظرفیت تولید}: L_o^{**})$$
$$= G_o^{*} + L_o^{**} + L_o^{*} \qquad (\text{زیان ناشی از ناکارایی تخصیصی}: L_o^{*})$$
$$= G_o + L_o^{**} + L_o^{*} + L_o \qquad (\text{زیان ناشی از ناکارایی تکنیکی}: L_o).$$

توجه داشته باشید که ماکزیمم سود کوتاه‌مدت به‌صورت $G_o^{***} + \sum_{i=1}^{f} \bar{x}_i F$ می‌باشد (کوپر و همکاران، ۲۰۰۷).

۳- ارزیابی کارایی با داده شعاعی و غیرشعاعی

در مدل‌های شعاعی *DEA*، تغییرات برای تمامی ورودی‌ها و یا تمامی خروجی‌ها به‌صورت ثابت در نظر گرفته می‌شود. در مدل ماهیت ورودی، چون تغییرات فقط با ضریب ثابت برای ورودی‌ها محاسبه‌شده عموما از تغییرات خروجی غفلت می‌گردد. این حالت در **شکل ۱** نشان داده شده است. درصورتی‌که ورودی‌ها و خروجی‌های مازاد در محاسبات تعیین میزان تولید بسیار مهم بوده لذا باعث عدم کارایی روش‌های شعاعی می‌شود؛ مدل‌های غیرشعاعی مانند *SBM* باهدف برطرف کردن نقص مدل‌های شعاعی مطرح گردید. تفاوت این دو روش در نسبت بهینه‌سازی ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها می‌باشد.



شکل ۱- مقایسه تصویر کردن دو مدل شعاعی و غیرشعاعی.

Figure 1 -Comparison of imaging two radial and non-radial models.

این مدل‌ها از دیدگاه متفاوتی در بهبود متغیرهای ورودی و خروجی مازاد استفاده نموده و بهبود ورودی‌ها و خروجی‌ها با نسبت‌های متفاوت و غیریکسان انجام می‌دهند. بدیهی است که این روش نیز از نقص در ارزیابی متغیرهای شعاعی برخوردار است. مدل غیر شعاعی *SBM* به‌طور مستقیم با کمکی به ارزیابی می‌پردازد و خصوصیات شعاعی ورودی و خروجی را حذف می‌کند.

اگر داده شعاعی و غیرشعاعی در سیستم وجود دارد برای ارزیابی بهتر، لازم است از تلفیق روش‌های شعاعی و غیرشعاعی استفاده نمود (فضلی و آغشلویی، ۲۰۰۹). ازاین‌رو بحث مدل‌هایی با دو نوع داده شعاعی و غیرشعاعی مطرح گردید.

ماتریس داده‌های ورودی و خروجی را به ترتیب به‌صورت $X \in R_+^{m\times n}$ و $y \in R_+^{s\times n}$ در نظر بگیرید، به‌طوری‌که m، n و s به ترتیب نشان‌دهنده تعداد *DMUs*، تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های هر واحد تصمیم‌گیری می‌باشند. ورودی‌های شعاعی با بردار $X^R \in R_+^{m_1\times n}$ و ورودی‌های غیرشعاعی $X^{NR} \in R_+^{m_2\times n}$ ماتریس ورودی را تشکیل می‌دهند که $m = m_1 + m_2$ بنابراین: $X = \begin{pmatrix} X^R \\ X^{NR} \end{pmatrix}$. به‌طور مشابه ماتریس خروجی Y به بخش شعاعی $Y^R \in R_+^{s_1\times n}$ و غیرشعاعی $Y^{NR} \in R_+^{s_2\times n}$ با $s = s_1 + s_2$ به‌صورت $Y = \begin{pmatrix} Y^R \\ Y^{NR} \end{pmatrix}$ تجزیه می‌شود. تمامی ورودی و خروجی‌ها مثبت فرض شده‌اند ($X > 0$ و $Y > 0$).

به‌منظور تعیین کارایی تلفیقی $DMU_o=(x_o^R,x_o^{NR},y_o^R,y_o^{NR})\in P$ **مدل (۶)** حل می‌شود.

$$\begin{aligned}
Min\quad & \frac{1-\frac{m_1}{m}(1-\theta)-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m_2}\frac{s_i^{NR-}}{x_{io}^{NR-}}}{1+\frac{s_1}{s}(\phi-1)+\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s_2}\frac{s_r^{NR+}}{y_{ro}^{NR+}}} \\
s.t.\quad & X^R\lambda \le \theta X_o^R, \\
& X^{NR}\lambda + s^{NR-} = X_o^{NR}, \\
& Y^R\lambda \ge \phi\, Y_o^R, \\
& Y^{NR}\lambda - s^{NR+} = Y_o^{NR}, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \\
& \theta \le 1,\ \ \phi \ge 1, \\
& \lambda_j \ge 0,\ s^{NR-} \ge 0,\ s^{NR+} \ge 0.
\end{aligned} \qquad (۶)$$

متغیرهای کمکی s^{NR-} و s^{NR+} به ترتیب مشخص‌کننده مقدار مازاد ورودی‌ها و کمبود خروجی‌های غیرشعاعی می‌باشند.

شاخص

$$\rho=\frac{1-\frac{m_1}{m}(1-\theta)-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m_2}\frac{s_i^{NR-}}{x_{io}^{NR-}}}{1+\frac{s_1}{s}(\phi-1)+\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s_2}\frac{s_r^{NR+}}{y_{ro}^{NR+}}}.$$

برای کاهش در θ و افزایش در ϕ و به صفر رساندن $s_i^{NR-}(\forall i)$ و $s_r^{NR+}(\forall r)$ طراحی شده است و به‌طور غیرمستقیم روی متغیرهای شعاعی تاثیر می‌گذارد (فضلی و آغشلویی، ۲۰۰۹).

تعریف ۴- اگر $\left(\theta^*,\phi^*,\lambda^*,s^{NR-},s^{NR+}\right)$ جواب بهینه **مدل (۶)** باشد، $DMU(x_o,y_o)$ در این مدل کارا است اگر و تنها اگر $\rho^*=1$ یعنی $\theta^*=1$، $\phi^*=1$، $s^{NR-^*}=0$ و $s^{NR+^*}=0$. در غیر این صورت اگر $\rho^*<1$ ناکارایی را ایجاد خواهد نمود (تن، ۲۰۰۴).

تعریف ۵- با توجه به جواب‌های بهینه **مدل (۶)** شاخص کارایی تلفیقی ρ^* به چهار حالت زیر تجزیه می‌شود (تن، ۲۰۰۴).

$$\alpha_1=\frac{m_1}{m}\left(1-\theta^*\right) \text{ ناکارایی ورودی شعاعی ؛ } \alpha_2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m_2}\left(\frac{s_i^{NR-^*}}{x_{io}^{NR}}\right) \text{ ناکارایی ورودی غیرشعاعی}.$$

$$\beta_1=\frac{s_1}{s}\left(\phi^*-1\right) \text{ ناکارایی خروجی شعاعی ؛ } \beta_2=\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s_2}\left(\frac{s_r^{NR+^*}}{y_{ro}^{NR}}\right) \text{ ناکارایی خروجی غیرشعاعی}.$$

همچنین ناکارایی ورودی‌ها و خروجی‌ها به ترتیب عبارت‌اند از

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \text{ ناکارایی ورودی ؛ } \beta=\beta_1+\beta_2 \text{ ناکارایی خروجی}.$$

بنابراین

$$\rho^*=\frac{1-\alpha}{1+\beta}=\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1+\beta_1+\beta_2}.$$

به‌سادگی اثبات می‌شود که مقدار بهینه تابع هدف مدل شعاعی همواره ناکمتر از مقدار بهینه **مدل (۶)** است و مقدار بهینه **مدل (۶)** ناکمتر از مقدار بهینه مدل غیرشعاعی می‌باشد (کوپر و همکاران، ۲۰۰۷).

$$\rho^*_{CCR} \geq \rho^* \geq \rho^*_{SBM}.$$

همچنین داریم $\rho^*_{CCR-I} \geq \rho^*_I \geq \rho^*_{SBM-I}$ و $\rho^*_{CCR-O} \geq \rho^*_O \geq \rho^*_{SBM-O}$.

روش تلفیقی، با حضور داده‌های شعاعی و غیرشعاعی، علاوه بر تفکیک واحدهای کارا و ناکارا، امکان رتبه‌بندی واحدها بر اساس مقدار کارایی را دارد؛ بنابراین نحوه بهبود عملکرد با توجه به ورودی‌های شعاعی و غیرشعاعی را می‌توان تعیین کرد.

۴- مدل ترکیبی تعیین ظرفیت تولید (مدل پیشنهادی)

در تعیین ظرفیت تولید تاکنون فقط نحوه استفاده از مدل‌هایی شعاعی مطرح گردیده ولی با توجه به انواع هزینه‌ها نمی‌توان فقط با استفاده از مدل‌های شعاعی که تغییرات یکسانی برای همه عوامل تولید در نظر می‌گیرند ظرفیت تولید را تعیین نمود. بدین منظور در این بخش مدل ترکیبی ظرفیت تولید را با ترکیب توام مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی پیشنهاد داده و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. ازآن‌جاکه در کوتاه‌مدت، میزان استفاده از ظرفیت به توانایی *DMU* در استفاده از عوامل ثابت خود بستگی دارد؛ بنابراین عوامل تولید به ورودی‌های ثابت و متغیر طبقه‌بندی می‌شوند.

۴-۱- اندازه‌گیری ظرفیت تولید تکنیکی

n واحد تصمیم‌گیری DMU_j ($j=1,\ldots,n$) با s خروجی y_j و m ورودی x_j در نظر بگیرید؛ و فرض کنید مجموعه تمام ورودی و خروجی‌های هر واحد به دو بخش شعاعی و غیر شعاعی تجزیه شوند؛ بنابراین m ورود، واحد تحت ارزیابی شامل f ورودی ثابت x_j^F و v ورودی متغیر x_j^V هستند به‌طوری‌که $f+v=m$. همچنین s خروجی هر واحد شامل s_1 خروجی ثابت (شعاعی) Y^R و s_2 خروجی متغیر (غیرشعاعی) y^{NR} می‌باشد به‌طوری‌که $s=s_1+s_2$.

تعریف ۶- با توجه به انواع ورودی و خروجی‌ها، مجموعه امکان تولید را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P=\left\{\left(x^F,x^V,y^R,y^{NR}\right) / \ x^F \geq \lambda X^F, x^V \geq \lambda X^V, y^R \leq \lambda Y^R, y^{NR} \leq \lambda Y^{NR}, 1\lambda = 1, \lambda \geq 0\right\}.$$

کارایی $(o=1,\ldots,n)$ $DMU_o=\left(x_o^F,x_o^V,Y^{NR},Y^{NR}{}_o\right)$ را می‌توانیم با استفاده از **مدل خروجی محور ترکیبی (۷)** مورد ارزیابی قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
f^* = & \max_{\lambda,\bar{s}^+} 1+\frac{S_1}{S}\left(\varphi_1-1\right)+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{S_2}\frac{s_r^{+NR}}{y_{ro}^{NR}} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^F\lambda_j \leq x_{io}^F, \ \ i=1,\ldots,f, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^V\lambda_j \leq \ x_{io}^V \ , i=1,\ldots,v, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_{rj}^R\lambda_j \geq \varphi_1 y_{ro}^R \ , \ \ r=1,\ldots,s_1, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_{rj}{}^{NR}\lambda_j - s_r^{NR+} = y_{ro}^{NR}, \ r=1,\ldots,s_2, \\
& \varphi_1 \geq 1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \geq 0 \ \left(j=1,\ldots,n\right), \ s_r^{NR+} \geq 0 \ \left(r=1,\ldots,s_2\right).
\end{aligned} \qquad (۷)$$

قابل‌ذکر است از آن‌جا که **مدل (۷)** خروجی محور می‌باشد لذا با در نظر گرفتن ورودی‌ها به‌صورت شعاعی و غیرشعاعی هیچ تغییری در محدودیت‌های متناظر با آن اعمال نخواهد شد. φ_1^* مقدار کارایی خروجی‌ها را نشان می‌دهد.

تعریف ۷- اگر $\left(\varphi_1^*,\lambda^*,s^{+NR^*}\right)$ جواب بهینه **مدل (۷)** باشد در این صورت واحد تحت ارزیابی کارای ترکیبی خروجی محور است اگر و تنها اگر $\phi^*=1$ یعنی $\varphi_1^*=1$ و $s^{NR+^*}=0$.

پس از تعیین واحدهای کارا و ناکارا، مشابه بخش ۳ ورودی‌های متغیر را از **مدل (۷)** حذف می‌کنیم و مدل را به‌صورت **مدل (۸)** بازنویسی می‌نماییم.

$$
\begin{aligned}
& f_f^* = \max_{\lambda,\bar{s}^+} \quad 1+\frac{S_1}{S}\left(\varphi_2-1\right)+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s_2}\frac{s_r^{+NR}}{\bar{y}_{ro}^{NR}} \\
& s.t. \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^F \le x_{io}^F,\ i=1,\ldots,f, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^V = x_{io}^V,\ i=1,\ldots,v, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^R \ge \varphi_2 y_{ro}^R,\ r=1,\ldots,s_1, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^{NR} - s_r^{+NR} = y_{ro}^{NR},\ r=1,\ldots,s_2, \\
& \qquad \varphi \ge 1, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \\
& \qquad \lambda_j \ge 0\ \ (j=1,\ldots,n),\quad s_r^{+NR}\ge 0\ \ (r=1,\ldots,s_2).
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

$(\lambda_j^{**},s_r^{+NR^{**}})$ را به‌عنوان جواب بهینه **مدل (۸)** در نظر بگیرید. بر اساس این جواب بهینه و با توجه به تعریف کارایی ترکیبی می‌توانیم تعریف زیر را برای کارایی تکنیکی بیان نماییم.

تعریف ۸- اگر $(\varphi_1^*,s_r^{+NR^*})$ و $(\varphi_2^*,s_r^{+NR^*})$ به ترتیب جواب‌های بهینه **مدل (۷)** و **(۸)** باشد در این صورت می‌توانیم هر دو شاخص کارایی ترکیبی ϕ^* و ϕ_f^* را به‌صورت زیر تجزیه نماییم:

ناکارایی خروجی شعاعی $\beta_1=\frac{s_1}{s}(\varphi_1^*-1),\quad \beta_1^F=\frac{s_1}{s}(\varphi_2^*-1)$

ناکارایی خروجی غیرشعاعی $\beta_2=\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s_2}\frac{s_r^{+NR^*}}{y_{ro}^{NR}},\ \beta_2^F=\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s_2}\frac{s_r^{+NR^{**}}}{y_{ro}^{NR}}$

۲-۴- اندازه‌گیری ظرفیت تولید بر پایه قیمت

اکنون فرض کنید که عامل قیمت‌های ورودی و خروجی‌ها در دسترس باشند به‌طوری‌که قیمت خروجی‌های شعاعی y_{ro}^R و خروجی‌های غیرشعاعی y_{ro}^{NR} و ورودی‌های متغیر x_{io}^V به ترتیب p_{ro}^R ، p_{ro}^{NR} و c_{io}^v در نظر گرفته شده‌اند. این قیمت‌ها در بین *DMUs* یکسان نیستند. با توجه به درآمد حاصل از خروجی‌های مشاهده شده و هزینه ورودی‌های متغیر، سود فعلی واحد تحت ارزیابی را می‌توانیم از تفاضل کل خروجی‌ها (شعاعی و غیرشعاعی) و ورودی‌های متغیر مطابق رابطه زیر به دست آوریم.

$$G_O^{'}=\sum_{r=1}^{s_1}p_{ro}^R y_{ro}^R+\sum_{r=1}^{s_2}p_{ro}^{NR}y_{ro}^{NR}-\sum_{i=1}^{v}c_{io}^V x_{io}^V\ ,(o=1,\ldots,n).$$

مجموعه امکان تولید در این حالت برابر است با:

$$\bar{P}=\left\{\left(x^F,\bar{x}^V,\bar{y}^R,\bar{y}^{NR}\right)/\ x^F\ge\lambda X^F,\bar{x}^V\ge\lambda\bar{X}^V,\bar{y}^R\le\lambda\bar{Y}^R,\bar{y}^{NR}\le\lambda\bar{Y}^{NR},1\lambda=1,\lambda\ge 0\right\}.$$

به‌طوری‌که $\bar{y}_{rj}^R=p_{rj}^R y_{rj}^R\ ,r=1,\ldots,s_1(\forall j)$ $\bar{y}_{rj}^{NR}=p_{rj}^{NR}y_{rj}^{NR}\ ,r=1,\ldots,s_2\ ,(\forall j)$ $\bar{x}_{ij}^V=c_{ij}^V x_{ij}^V\ ,i=1,\ldots,v\ ,(\forall j)$. با توجه به مجموعه امکان تولید *LP* زیر را حل می‌نماییم.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{f}^{*'} = \max_{\lambda,\bar{s}^{+}} \ & 1+\frac{S_1}{S}(\varphi-1)+\frac{1}{S}\sum_{r=1}^{s}\frac{\bar{s}_r^{+NR}}{\bar{y}_{ro}^{NR}} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^{F} \le x_{io}^{F},\ i=1,\dots,f, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \bar{x}_{ij}^{V} = \bar{x}_{io}^{V},\ i=1,\dots,v, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \bar{y}_{rj}^{R} \ge \varphi\bar{y}_{ro}^{R},\ r=1,\dots,s_1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \bar{y}_{rj}^{NR} - \bar{s}_r^{+NR} = \bar{y}_{ro}^{NR},\ r=1,\dots,s_2, \\
& \varphi \ge 1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \text{ و} \\
& \lambda_j \ge 0\ (j=1,\dots,n),\quad \bar{s}_r^{+NR} \ge 0\ (r=1,\dots,s_2).
\end{aligned} \tag{۹}
$$

تعریف ۹- فرض کنید $\left(\bar{\lambda}', \bar{s}_2^{+NR'}, \varphi^{*'}\right)$ جواب بهینه **مدل (۹)** باشد در این صورت $DMU(x_o, y_o)$ کارای درآمد ترکیبی است اگر و فقط اگر $\phi^{*'}=1$ یعنی $\varphi^{*'}=1$ ، $s^{NR+*'}=0$.

با در نظر گرفتن جواب‌های بهینه **مدل (۹)** داریم:

$$
\bar{\bar{X}}_{io}^{V}=\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j\bar{x}_{ij}^{V},\ i=1,\dots,v,\ \bar{\bar{X}}_{io}^{F}=\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j x_{ij}^{F}, i=1,\dots,f.
$$

$$
\bar{\bar{y}}_{ro}^{R}=\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j\bar{y}_{rj}^{R},\ r=1,\dots,s_1,\quad \bar{\bar{y}}_{ro}^{NR}=\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j\bar{y}_{rj}^{NR},\ r=1,\dots,s_2.
$$

به دلیل اینکه $\bar{\bar{X}}_{io}^{V} \le \bar{x}_{io}^{V} = c_{io}^{V}x_{io}^{V}$ ، $\bar{\bar{y}}_{ro}^{R} \ge \bar{y}_{ro}^{R} = p_{ro}^{R}y_{ro}^{R}$ ، $\bar{\bar{y}}_{ro}^{NR} \ge \bar{y}_{ro}^{NR} = p_{ro}^{NR}y_{ro}^{NR}$ بنابراین سود G_o' و نابرابری زیر را خواهیم داشت:

$$
G_o^{*'}=\sum_{r=1}^{s_1}\bar{\bar{y}}_{ro}^{R}+\sum_{r=1}^{s_2}\bar{\bar{y}}_{ro}^{NR}-\sum_{i=1}^{v}\bar{\bar{x}}_{io}^{V} \ge \sum_{r=1}^{s_1}p_{ro}^{R}y_{ro}^{R}+\sum_{r=1}^{s_2}p_{ro}^{NR}y_{ro}^{NR}-\sum_{i=1}^{v}c_{io}^{V}x_{io}^{V}=G_o'
$$

درنتیجه اگر G_o' $G_o^{'*}$ به ترتیب سود واقعی و سود ناشی از ناکارایی تکنیکی در نظر بگیریم، در این صورت سود ازدست‌رفته L_o' که به علت ناکارایی تکنیکی است را می‌توانیم از رابطه $L_o' = G_o^{'*} - G_o' \ (\ge 0)$ به دست آوریم.

اکنون، مدل سود جدید را بر پایه خروجی‌های شعاعی و غیرشعاعی روی $\bar{P}$ حل می‌نماییم.

$$
\begin{aligned}
G_o^{**'} = \max_{\lambda,\bar{x}^{V},\bar{y}^{R},\bar{y}^{NR}} \ & \sum_{r=1}^{s_1}\bar{y}_r^{R}+\sum_{r=1}^{s_2}\bar{y}_r^{NR}-\sum_{i=1}^{v}\bar{x}_i^{V} \\
s.t. \quad & x_{io}^{F} \ge \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^{F},\ i=1,\dots,f, \\
& \bar{x}_i^{V} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \bar{x}_{ij}^{V} \le \bar{x}_{io}^{V},\ i=1,\dots,v,\ (10.a) \\
& \bar{y}_r^{R} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \bar{y}_{rj}^{R} \ge \bar{y}_{ro}^{R}, r=1,\dots,s_1, \\
& \bar{y}_r^{NR} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \bar{y}_{rj}^{NR} \ge \bar{y}_{ro}^{NR},\ r=1,\dots,s_2, \\
& 1 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j,\ \lambda_j \ge 0,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

با در نظر گرفتن $G_o^{*'}$ و $G_o^{**'}$ به ترتیب به‌عنوان سود ناشی از ناکارایی تکنیکی و تخصیصی ترکیبی، می‌توانیم $L_o^{*'}$ سود ازدست‌رفته به علت ناکارایی تخصیصی ترکیبی (ترکیب ورودی – خروجی بر پایه قیمت) را به‌صورت زیر به دست آوریم:

$$
L_o^{*'} = G_o^{**'} - G_o^{*'} \ (\ge 0).
$$

در آخرین مرحله، **محدودیت (10 .a)** را از **مدل (۱۰)** حذف می‌نماییم و مدل سود اصلاح‌شده زیر را حل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
G_o^{***'} &= \max_{\lambda,\overline{x}^V,\overline{y}^R,\overline{y}^{NR}} \sum_{r=1}^{s_1}\overline{y}_r^R + \sum_{r=1}^{s_2}\overline{y}_r^{NR} - \sum_{i=1}^{v}\overline{x}_i^V \\
s.t. \quad & x_{io}^F \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^F \lambda_j ,\ i=1,\ldots,f , \\
& \overline{x}_i^V = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{ij}^V \lambda_j ,\ i=1,\ldots,v, \\
& \overline{y}_r^R = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{y}_{rj}^R \geq \overline{y}_{ro}^R ,\ r=1,\ldots,s_1, \\
& \overline{y}_r^{NR} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{y}_{rj}^{NR} \geq \overline{y}_{ro}^{NR} ,\ r=1,\ldots,s_2 , \\
& 1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j ,\ \ \lambda_j \geq 0 ,\ j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۱)
$$

تعریف می‌کنیم $L_o^{**'} = G_o^{***'} - G_o^{**'}\ (\geq 0)$.

درنتیجه با توجه به مباحث بالا می‌توانیم ماکزیمم سود کلی $G_o^{***'}$ را برای واحد تحت ارزیابی به‌صورت زیر تجزیه نماییم:

$$G_o'^{***} = G_o'^{**} + L_o'^{**} = G_o'^{*'} + L_o'^{**} + L_o'^{*} = G'_o + L_o'^{**} + L_o'^{*} + L'_o .$$

لازم به ذکر است که تابع هدف **مدل (۱۱)** سود کوتاه‌مدت را نشان می‌دهد به‌طوری‌که در آن عامل ورودی مانند سرمایه ثابت نگه داشته می‌شود. بااین‌حال، می‌توانیم فرض ثابت بودن این ورودی‌ها را در بلندمدت حذف نماییم لذا تمامی ورودی‌ها به ورودی‌های متغیر تبدیل می‌شوند و درنتیجه میزان سود را در بلندمدت می‌توانیم از مدل زیر به دست آوریم.

$$
\begin{aligned}
G_o'^{****} &= \max_{\lambda,\overline{x}^V,\overline{y}^R,\overline{y}^{NR}} \sum_{r=1}^{s_1}\overline{y}_r^R + \sum_{r=1}^{s_2}\overline{y}_r^{NR} - \sum_{i=1}^{v}\overline{x}_i^V - \sum_{i=1}^{f}\overline{x}_i^F \\
s.t. \quad & \overline{x}_{io}^F = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{x}_{ij}^F ,i=1,\ldots,f , \\
& \overline{x}_i^V = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{x}_{ij}^V ,i=1,\ldots,v, \\
& \overline{y}_r^R = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{y}_{rj}^R \geq \overline{y}_{ro}^R ,r=1,\ldots,s_1, \\
& \overline{y}_r^{NR} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{y}_{rj}^{NR} \geq \overline{y}_{ro}^{NR} ,\ r=1,\ldots,s_2, \\
& 1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j ,\ \lambda_j \geq 0 ,j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۲)
$$

تعریف می‌کنیم $L_o'^{***} = G_o'^{****} - G_o'^{***}\ (\geq 0)$.

$L_o^{***'}$ سود ازدست‌رفته ناشی از فاصله کوتاه‌مدت و بلندمدت می‌باشد. $G_o^{****'}$ ماکزیمم سود کلی است. فاصله سود واقعی G'_o از ماکزیمم سود کلی $G_o^{****'}$ را می‌توانیم به‌صورت زیر تجزیه نماییم:

$$
\begin{aligned}
G_o^{****'} &= G_o^{***'} + L_o^{***'} = G_o^{**'} + L_o^{***'} + L_o^{**'} = G_o^{*'} + L_o^{***'} + L_o^{**'} + L_o^{*'} \\
&= G'_O + L_o^{***'} + L_o^{**'} + L_o^{*'} + L'_o .
\end{aligned}
$$

جایی‌که $L_o^{***'}$، $L_o^{**'}$، $L_o^{*'}$ و L'_o به ترتیب نشان‌دهنده زیان ناشی از فاصله کوتاه‌مدت- بلندمدت، زیان ناشی از ظرفیت تولید، زیان ناشی از ناکارایی تخصیصی و زیان ناشی از ناکارایی تکنیکی هستند.

۳-۴- مثال کاربردی

داده‌های دوازده بیمارستان با یک ورودی ثابت پزشک، یک ورودی متغیر پرستار و دو خروجی بیماران سرپایی و بستری در **جدول ۱** نشان داده شده است. چون تعداد پزشک ثابت فرض شده است، هزینه مربوط به آن‌ها در نظر گرفته نشده است (کوپر و همکاران، ۲۰۰۷). در

ذاکر هرفته و حسین‌زاده سلجوقی/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۵۳۲-۵۱۶

ابتدا می‌خواهیم ظرفیت به‌کارگیری پرستاران را مورد ارزیابی قرار دهیم. فرض کنید بیماران سرپایی دارای تغییراتی به‌صورت شعاعی و بیماران بستری به‌صورت غیرشعاعی باشند. بدین منظور **مدل ترکیبی خروجی محور (۶)** را تحت فرض *VRS* برای اندازه‌گیری کارایی تکنیکی هر بیمارستان بکار می‌بریم.

جدول ۱- داده‌ها برای ۱۲ بیمارستان.

Table 1- Data for 12 hospitals.

DMU	ورودی‌ها: پزشک (ثابت) تعداد	پرستاران (متغیر) تعداد	پرستاران (متغیر) قیمت	خروجی‌ها: بیماران سرپایی تعداد	بیماران سرپایی قیمت	بیماران بستری تعداد	بیماران بستری قیمت
A	20	151	100	100	550	90	2010
B	19	131	80	150	400	50	1800
C	25	160	90	160	480	55	2200
D	27	168	120	180	600	72	3500
E	22	158	70	94	400	66	3050
F	55	255	80	230	430	90	3900
G	33	235	100	220	540	88	3300
H	31	206	85	152	420	80	3500
I	30	244	76	190	350	100	2900
J	50	268	75	250	410	100	2600
K	53	306	80	260	540	147	2450

نتایج مقدار بهین ϕ^* ، ϕ_F^* و k_o^* ، δ_{io}^* حاصل از **مدل (۶)** و همچنین مدل *BCC* خروجی محور در **جدول ۲** بیان نموده‌ایم. در این حالت، تمایزی بین ورودی‌های ثابت و متغیر ایجاد نمی‌کنیم.

جدول ۲- ظرفیت تولید تکنیکی.

Table 2- Technical capacity utilization.

DMU	مدل معمول ظرفیت تولید: ϕ^*_{BCC-O}	$\phi^*_{F-BCC-O}$	ظرفیت تولید $\mathbb{R}_o^* = \left(\frac{\phi^*_{BCC-O}}{\phi^*_{F-BCC-O}}\right)$	نسبت به‌کارگیری پرستار	مدل ترکیبی پیشنهادی: ϕ^*_{Hybrid}	$\phi^*_{F-Hybrid}$	ظرفیت تولید $\mathbb{R}_o^* = \left(\frac{\phi^*_{Hybrid}}{\phi^*_{F-Hybrid}}\right)$	نسبت به‌کارگیری پرستار
A	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
B	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
C	1.082	1.135	0.953	1.121	1.163	1.284	0.906	1.150
D	1.000	1.067	0.937	1.163	1.000	1.107	0.903	1.179
E	1.304	1.331	0.980	1.038	1.342	1.342	1.000	0.992
F	1.047	1.130	0.927	1.2	1.164	1.382	0.842	1.200
G	1.000	1.017	0.983	1.037	1.000	1.091	0.917	1.041
H	1.211	1.302	0.930	1.121	1.219	1.308	0.932	1.128
I	1.010	1.010	1.000	0.914	1.011	1.011	1.000	0.916
J	1.000	1.032	0.969	1.125	1.000	1.224	0.817	1.125
K	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
L	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

مقادیر ϕ^*_{Hybrid} و ϕ^*_{BCC-O} در **جدول ۲** نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود واحدهایی که مقدار ϕ^*_{Hybrid} و ϕ^*_{BCC-O} برابر یک دارند، کارای تکنیکی هستند درحالی‌که $\phi^*_{Hybrid} > 1$ و $\phi^*_{BCC-O} > 1$ ناکارایی واحدها را نشان می‌دهند بنابراین بیمارستان‌های *C*، *E*، *F*،*H* و *I* در هر دو مدلِ *BCC* خروجی محور و مدل پیشنهادی به دلیل اینکه $\phi^*_{BCC-O} > 1$ و $\phi^*_{Hybrid} > 1$ ، ناکارا هستند و مابقی واحدها کارا تشخیص داده شده است. قابل‌ذکر است مقدار کارایی با استفاده از مدل *BCC* خروجی محور نسبت به مدل پیشنهادی کمتر می‌باشد به‌عبارت‌دیگر

$$\phi^*_{BCC-O} \leq \phi^*_{Hybrid}.$$

این نشان می‌دهد که کمکی‌های غیرصفر در اندازه‌گیری کارایی شعاعی نادیده گرفته شده‌اند. با حذف محدودیت پرستاران و حل **مدل (۷)** میزان $\phi^*_{F-Hybrid}$ به دست خواهد آمد که نتایج حاصل از این مدل در ستون دوم از **جدول ۲** درج گردیده است. همچنین برای این حالت مدل *BCC* خروجی محور را برای هرکدام از واحدها بکار بردیم و نتایج آن را در ستون پنجم **جدول ۲** نشان داده‌ایم.

با مقایسه ستون‌های ۱ و ۲ در **جدول ۲** مشاهده می‌شود که در بیمارستان‌های C، D، F، H و J اگر بتوانند تعداد پرستاران خود را افزایش دهند در این صورت می‌توانند تعداد بیماران سرپایی و یا بستری را بیشتر کنند و عملکرد بهتر می‌شود. همچنین با مقایسه ستون‌های ۴ و ۵ که از مدل شعاعی خروجی محور (BCC) به دست می‌آید درمی‌یابیم که علاوه بر کارایی بیمارستان‌های C، D، F، H و J، کارایی بیمارستان E بدتر شده است. درنتیجه به‌طور کل می‌توان بیان نمود که با حذف ورودی‌های متغیر، هیچ بهبودی در کارایی حاصل نمی‌شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود با حذف ورودی‌های متغیر در هر دو مدل مجددا مقدار کارایی مدل BCC کمتر از مدل ترکیبی پیشنهادی می‌باشد یعنی $\phi^*_{F-BCC-O} \le \phi^*_{F-Hybrid}$. پس از محاسبه کارایی واحدها، اندازه ظرفیت تولید k^* را با نسبت $\frac{\phi^*}{\phi^*_F}$ از دو مدل ترکیبی پیشنهادی و مدل BCC خروجی محور به دست می‌آوریم. نتایج هر دو مدل در **جدول ۲** به ترتیب در ستون‌های سوم و ششم درج گردیده است. به‌عنوان‌مثال برای بیمارستان C در حالت ترکیبی داریم:

$$k^*_o = \left(\frac{\phi^*_{Hybrid}}{\phi^*_{F-Hybrid}} \right) = \frac{1.163}{1.284} = 0.906 < 1.$$

مقدار k^* برای بیمارستان C کمتر از یک بوده و این نشان‌دهنده کمبود پرستاران در این بیمارستان است. بر این اساس، مطابق با **جدول ۲**، ظرفیت تولید k^* به‌دست‌آمده از مدل ترکیبی نشان می‌دهد که شش بیمارستان C، D، F، G، H و J مقدار کارایی کمتر از یک دارند و لذا کمبود پرستاران را در این بیمارستان‌ها خواهیم داشت. مابقی بیمارستان‌ها کارا هستند. این در حالی است که ظرفیت تولید k^* با استفاده از مدل BCC خروجی محور علاوه بر این شش بیمارستان، بیمارستان E هم کارایی کمتر از یک را به خود اختصاص داده است. درنتیجه می‌توان بیان نمود که مدل ترکیبی تعداد واحدهای ناکارای کمتری را نسبت به مدل BCC خروجی محور نشان می‌دهد قابل‌ذکر است که مقدار k^*_{BCC} تنها برای دو واحد E و H کمتر از k^*_{Hybrid} شده است در مابقی واحدها این مقدار بزرگ‌تر یا مساوی است.

در نهایت، نرخ به‌کارگیری پرستاران δ^* را به دست می‌آوریم. برای مثال مجددا بیمارستان C را در نظر بگیرید. مقادیر بهینه λ^{**}_j به‌دست‌آمده از حل **مدل (۸)** برای این بیمارستان به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\lambda^{**}_1 = 0.390, \quad \lambda^{**}_2 = 0.314, \quad \lambda^{**}_3 = \lambda^{**}_4 = ... = \lambda^{**}_{11} = 0, \quad \lambda^{**}_{12} = 0.295 .$$

بنابراین مقدار بهینه ورودی‌های متغیر که پرستاران می‌باشد برابر است با:

$$\hat{x}^V_{io} = \sum_{j=1}^{n} x^V_{ij} \lambda^{**}_j = (151\times0.390)+(131\times0.314)+(284\times0.295) = 183.981 .$$

درنتیجه مقدار δ^* برای این بیمارستان برابر است با: $\delta^*_{io} = \frac{\hat{x}^V_{io}}{x^V_{io}} = \frac{183.981}{160} = 1.150 > 1$.

ملاحظه می‌گردد که در این حالت $\delta^* > 1$ است و این مقدار کمبود پرستاران را برای بیمارستان نشان می‌دهد.

به‌طور کل $\delta^* > 1$ و $\delta^* < 1$ به ترتیب کمبود و مازاد پرستاران را نشان می‌دهد. با مقایسه δ^* در مدل خروجی محور BCC و مدل ترکیبی مشاهده می‌شود که تنها برای بیمارستان E مقدار δ^*_{Hybrid} کمتر از مقدار δ^*_{BCC-O} شده است و برای مابقی بیمارستان این مقدار بزرگ‌تر یا مساوی δ^*_{BCC-O} می‌باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌گردد در این مثال با بکار بردن مدل ترکیبی برای داده‌های **جدول ۱** و از طرفی طبق **قضیه ۱**، مقدار بهینه مدل ترکیبی بین جواب‌های بهین BCC و SBM می‌باشد به‌بیان‌دیگر:

$$\phi^*_{BCC-O} \le \phi^*_{Hybrid} \le \phi^*_{SBM}, \ \phi^*_{F-BCC-O} \le \phi^*_{F-Hybrid} \le \phi^*_{F-SBM}.$$

این در حالی است که برای مقادیر k^* و δ^* رابطه‌هایی مشابه رابطه‌های بالا وجود ندارد یعنی به دلیل اینکه این عبارت‌ها به‌صورت نسبتی به دست می‌آیند لذا نمی‌توان گفت که به‌طور حتمی دو رابطه زیر برقرار هستند.

$$\delta^*_{BCC-O} \le \delta^*_{Hybrid}, \ k^*_{BCC-O} \le k^*_{Hybrid}.$$

ذاکر هرفته و حسین زاه سلجوقی/ تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۷، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، صفحه: ۵۳۲-۵۱۶

درنتیجه با موارد بالا در این مثال هیچ تغییری در مقادیر ϕ^*، ϕ_F^*، k_o^* حاصل از مدل پیشنهادی ایجاد نخواهد شد؛ که دلیل این یکسان بودن ناکارایی غیرشعاعی می‌باشد.

جدول ۳ تجزیه ناکارایی را نشان می‌دهد.

جدول ۳- تجزیه ناکارایی.
Table 3- Decomposition inefficiency.

β^F	β_2^F	β_1^F	φ_2^*	β	β_2	β_1	φ_1^*	DMU
0	0	0	1	0	0	0	1	A
0	0	0	1	0	0	0	1	B
0.284	0.284	0	1	0.163	0.163	0	1	C
0.107	0.107	0	1	0	0	0	1	D
0.342	0	0.342	1.684	0.342	0	0.342	1.684	E
0.382	0.317	0.065	1.130	0.164	0.163	0.001	1.002	F
0.091	0.091	0	1	0.091	0	0	1	G
0.308	0.177	0.130	1.216	0.219	0.052	0.167	1.334	H
0.011	0.011	0	1	0.011	0.011	0	1	I
0.224	0.208	0.016	1.032	0	0	0	1	J
0	0	0	1	0	0	0	1	K
0	0	0	1	0	0	0	1	L

برای نمونه ناکارایی خروجی شعاعی و غیر شعاعی بیمارستان C به‌صورت زیر به دست آمده است.

ناکارایی خروجی شعاعی
$$\begin{cases}\beta_1 = \dfrac{s_1}{s}(\varphi_1^* - 1) = \dfrac{1}{2}(1-1) = 0 \\ \beta_1^F = \dfrac{s_1}{s}(\varphi_2^* - 1) = \dfrac{1}{2}(1-1) = 0\end{cases}.$$

ناکارایی خروجی غیرشعاعی
$$\begin{cases}\beta_2 = \dfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s_2}\dfrac{s_r^{+NR^*}}{y_{ro}^{NR}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{17.98}{55} = 0.163 \\ \beta_2^F = \dfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s_2}\dfrac{s_r^{+NR^{**}}}{y_{ro}^{NR}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{31.29}{55} = 0.284\end{cases}.$$

ناکارایی خروجی
$$\begin{cases}\beta = \beta_1 + \beta_2 = 0 + 0.163 = 0.163 \\ \beta^F = \beta_1^F + \beta_2^F = 0 + 0.284 = 0.284\end{cases}.$$

بنابراین اصل ناکارایی بیمارستان C به دلیل ناکارایی خروجی غیرشعاعی $(\beta_2 = 0.163)$ می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان برای واحدها دیگر به‌طور مشابه دلیل ناکارایی آن‌ها را پیدا نماییم. برای مثال دیگر اصل ناکارایی $DMU\ E$ به دلیل ناکارایی خروجی شعاعی $(\beta_1 = 0.342)$ است درحالی‌که واحد دیگری مانند DMU_H که دارای ناکارایی کلی $\beta = 0.219$ می‌باشد به دلیل ناکارایی در هر دو خروجی شعاعی $(\beta_1 = 0.167)$ و غیرشعاعی $(\beta_2 = 0.052)$ است؛ که این با مقدار $\varphi_1^* = 1.334$ در **جدول ۳** نشان داده شده است.

به همین ترتیب می‌توان تفسیر مشابه‌ای برای مابقی واحدها و همچنین برای حالتی که ورودی‌های متغیر حذف شده‌اند، بیان نماییم. با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده از β و β^F ملاحظه می‌گردد که مقدار ناکارایی برای زمانی که ورودی‌های متغیر حذف شده‌اند بزرگ‌تر یا مساوی زمانی می‌باشد که این متغیرها در مدل وجود دارند به‌عبارت‌دیگر $\beta^F \geq \beta$.

قابل‌ذکر است که $\varphi_1^* = 1$ و $\varphi_2^* = 1$ حضور ناکارایی شعاعی را در خروجی‌ها در دو مدل نشان می‌دهند.

۴-۴- اندازه‌گیری ظرفیت بهره‌وری بر پایه قیمت

با به‌کارگیری اطلاعات قیمت در **جدول ۱** و **جدول ۴** $\left(x_j^F, \bar{x}_j = c_j^V x_j^V, \bar{y}_{1j}^R = p_{1j}^R y_{1j}^R, \bar{y}_{2j}^{NR} = p_{2j}^{NR} y_{2j}^{NR}\right)$ به دست می‌آید. مجددا توجه نمایید که چون پزشک در این مثال ثابت فرض شده است لذا هزینه‌ای برای آن در نظر گرفته نمی‌شود. سود فعلی به‌وسیله $G = \bar{y}_1^R + \bar{y}_2^{NR} - \bar{x}^V$ برای هر DMU محاسبه شده است. یک‌بار دیگر در این مثال ظرفیت تولید را برای هر بیمارستان موردتوجه قرار می‌دهیم. با حل مدل‌های

مطرح‌شده در بخش قبل برای هر DMU، سودهای متناظر G_o^{*} (سود کارایی تکنیکی)، G_o^{**} (سود کارایی تخصیصی)، G_o^{***} (ظرفیت حداکثر سود حذف‌شده) و همچنین زیان L (زیان ناشی از ناکارایی تکنیکی)، L_o^{*} (زیان ناشی ناکارایی تخصصی) و L_o^{**} (زیان ناشی از ظرفیت تولید) مطابق **جدول ۵** به دست می‌آیند.

جدول۴- مجموعه داده برپایه قیمت.
Table 4- Price-based data set.

خروجی $\bar{y}_2^{NR}$	خروجی $\bar{y}_1^{R}$	پرستار $\bar{x}^{V}$	پزشک x^{F}	DMU
180900	55000	15100	20	A
90000	60000	10480	19	B
121000	76800	14400	25	C
252000	108000	20160	27	D
201300	37600	11060	22	E
351000	98900	20400	55	F
290400	118800	23500	33	G
280000	63840	17510	31	H
290000	66500	18544	30	I
260000	102500	20100	50	J
360150	140400	24480	53	K
360000	73750	19880	38	L

جدول ۵- سود و زیان.
Table 5- Profits and losses.

Total	L^{**}	L^{*}	L	سود G'^{***}_o	G'^{**}_o	$G^{'*}_o$	زیان G	
0	0	0	0	220800	220800	220800	220800	A
0	0	0	0	139520	139520	139520	139520	B
122430	68732	0	53968	305830	237098	237098	183400	C
0	0	0	0	339840	339840	339840	339840	D
26372	26372	0	0	254212	227840	227840	277840	E
46570	46570	0	0	476070	429500	429500	429500	F
0	0	0	0	385700	385700	385700	385700	G
43442	24649	5931	23863	369772	345123	339193	326330	H
0	0	0	0	337956	337956	337956	337956	I
121230	56312	0	64918	463630	407318	407318	342400	J
0	0	0	0	476070	476070	476070	476070	K
0	0	0	0	413870	413870	413870	413870	L
360044	222635	5931	131478					جمع

نتایج نشان می‌دهند که بیمارستان‌های C، E، F، H و J می‌توانند سود خود را به‌وسیله کاستن ظرفیت محدودیت (پرستار) بهبود دهند و زیان ناشی از ناکارایی ظرفیت تولید بزرگ‌تر از زیان‌های دیگر برای همه بیمارستان‌ها می‌باشد.

جدول ۶- مقایسه سودهای فعلی و حداکثر سود.
Table 6- Comparisons of current and maximum profits.

			حداکثر			فعلی	DMU
	درآمد		هزینه		درآمد	هزینه	
زیان	ورودی	خروجی	پرستار	ورودی	خروجی	پرستار	
0	180900	55000	15100	180900	55000	15100	A
0	90000	60000	10480	90000	60000	10480	B
122430	231686	92858	18714	121000	76800	14400	C
0	252000	108000	20160	525000	108000	20160	D
26372	201300	69415	16503	201300	37600	11060	E
46570	360150	140400	24840	351000	98900	20400	F
0	190400	118800	23500	290400	118800	23500	G
43442	280000	117750	21978	280000	63840	17510	H
0	290000	66500	18544	290000	66500	18554	I
121230	360120	127070	23560	260000	102500	20100	J
0	360150	140400	24480	360150	140400	24480	K
0	360000	73750	19880	360000	73750	19880	L

علاوه بر این، **جدول ۶** حداکثر هزینه و هزینه فعلی، درآمد و سود را برای هر بیمارستان نشان می‌دهد این ارقام نشان می‌دهد که چگونه افزایش هزینه پرستار می‌تواند به رشد درآمد از بیماران سرپایی و بستری اثر گذارد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

ظرفیت تولید، حداکثر تولید ممکن سازمان در هر واحد زمانی می‌باشد که متناسب با موقعیت تنظیم می‌شود که استفاده از این ظرفیت‌های بالقوه موجود در یک صنعت یا کارخانه یکی از مباحث مهم اقتصادی است و موجب افزایش بازده و ظرفیت تولید با هزینه کمتر می‌شود. ظرفیت تولید با موقعیت‌هایی روبرو می‌شود که در آن برخی از مقادیر ورودی ثابت و به‌آسانی قابل‌تغییر نیستند و برخی دیگر به‌طور انعطاف‌پذیر قابل‌تغییر می‌باشند بنابراین ما ورودی‌ها را به ورودی‌های ثابت و متغیر تقسیم می‌نماییم.

در مدل‌های ظرفیت تولید بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها فرض بر این است که تمام ورودی‌ها یا خروجی‌ها با یک نسبت تغییر می‌کنند درصورتی‌که تنوع صنایع تولیدی موجب می‌شود که برخی از شاخص‌ها، تغییراتی با نسبت یکسان نداشته باشند. در این صورت لازم است از مدل‌های ترکیبی استفاده شود. داده‌ها در مدل‌های ترکیبی به دو دسته شعاعی و غیرشعاعی تقسیم می‌شوند که هرکدام از آن‌ها باید با توجه به ویژگی‌های خاص آن‌ها مورد ارزیابی قرار گیرند. در این مقاله با ادغام مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی، مدل جامعی برای ارزیابی ظرفیت تولید ارایه نمودیم. در مدل پیشنهادی، با دسته‌بندی ورودی‌ها به ورودی ثابت و متغیر، همچنین اثر ورودی‌های متغیر بر کارایی را در حضور خروجی‌های شعاعی و غیرشعاعی موردبررسی قرار داده‌ایم و به این سوال پاسخ دادیم که آیا حذف ورودی‌های متغیر می‌تواند موجب بهبود در کارایی واحد تحت ارزیابی شود.

لازم به ذکر است که مدل پیشنهادی برای اندازه‌گیری میزان ظرفیت تولید سازمان‌ها و واحدها، هنگامی‌که خروجی‌ها به دو دسته (خروجی‌های شعاعی و غیرشعاعی) در مسئله تقسیم می‌شوند، مفید خواهد بود. همچنین در مدل پیشنهادی برای تعیین ظرفیت تولید از ماهیت خروجی محور استفاده شده است؛ بنابراین تغییر ورودی‌ها در دو حالت شعاعی و غیرشعاعی تغییری در مدل و روش ارزیابی ایجاد نمی‌کند.

به‌طور کل در این مقاله مدل پیشنهادی از دو جنبه ظرفیت تولید: ۱) تکنیکی و ۲) بر پایه قیمت در حضور خروجی‌های شعاعی و غیرشعاعی مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفته است. درنهایت مدل پیشنهادی را روی داده‌های بیمارستان‌ها اعمال نموده و با بررسی‌های انجام‌شده ملاحظه گردید که با حذف ورودی‌های متغیر در حضور خروجی‌های شعاعی و غیرشعاعی بهبودی در کارایی حاصل نمی‌گردد. با محاسبه اندازه ظرفیت تولید و نسبت به‌کارگیری پرستاران، در دو حالت، مقایسه نتایج نشان می‌دهد در برخی بیمارستان‌ها اگر بتوان تعداد پرستاران را افزایش داد می‌توان تعداد بیماران سرپایی و یا بستری را بیشتر کنند و عملکرد بیمارستان‌ها را بهبود بخشید. سپس با استفاده از تجزیه کارایی‌ها عامل ناکارایی و مقدار آن مشخص گردید. در ادامه، ظرفیت تولید را برای زمانی که قیمت‌ها برای ورودی‌ها و خروجی‌ها در دسترس هستند محاسبه و بررسی نمودیم.

منابع

Ahranjani, L. Z., & Matin, R. K. (2018). Technical measure of capacity utilization in two-stage production systems: a data envelopment analysis approach. *Economic computation & economic cybernetics studies & research*, *52*(2), 235–249. DOI: 10.24818/18423264/52.2.18.14

Alinezhad, A. (2017). A hybrid method of DEA and MODM in grey environment. *Journal of industrial strategic management*, *2*(1), 63-72. https://mgmt.firuzkuh.iau.ir/article_601562.html

Coelli, T., Grifell-Tatjé, E., & Perelman, S. (2002). Capacity utilisation and profitability: a decomposition of short-run profit efficiency. *International journal of production economics*, *79*(3), 261-278. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(02)00236-0

Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software* (Vol. 2, p. 489). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/b109347

Fare, R., Grosskopf, S., & Kokkelenberg, E. C. (1989). Measuring plant capacity, utilization and technical change: a nonparametric approach. *International economic review*, *30*(3), 655-666. https://doi.org/10.2307/2526781

Färe, R., Grosskopf, S., & Valdmanis, V. (1989). Capacity, competiton and efficiency in hospitals: A nonparametric approach. *Journal of Productivity Analysis*, *1*(2), 123-138. https://doi.org/10.1007/BF00157792

Fazli, S., & Agheshlouei, V. (2009). Echnology performance measurement uding hybrid model. *Roshd-e- fanavari, 5*(17), 2-7. (**In Persian**). https://www.sid.ir/paper/145051/fa

Gold, B. (1955). *Foundations* of productivity analysis: guides to economic theory and managerial control. Pittsburgh University Press.

Johansen, L. (1968). Production functions and the concept of capacity. *Recherches recentes sur la fonction de production, Collection, economie mathématique et econometrie*, *2*, 49-72.

Kalai, M. (2019). Nonparametric measures of capacity utilization of the Tunisian manufacturing industry: short-and long-run dual approach. *Journal of the knowledge economy*, *10*(1), 318-334. https://doi.org/10.1007/s13132-017-0463-3

Karimi, B., & Khorram, E. (2015). Capacity utilization in data envelopment analysis with integer data. *International journal of Data envelopment analysis*, *3*(1), 609-616. https://ijdea.srbiau.ac.ir/article_8102.html

Liu, Z. W., Balezentis, T., Song, Y. Y., & Yang, G. L. (2019). Estimating capacity utilization of Chinese state farms. *Sustainability*, *11*(18), 4894. https://doi.org/10.3390/su11184894

Mahmoudi, R., Shetab-Boushehri, S. N., Hejazi, S. R., Emrouznejad, A., & Rajabi, P. (2019). A hybrid egalitarian bargaining game-DEA and sustainable network design approach for evaluating, selecting and scheduling urban road construction projects. *Transportation research part e: logistics and transportation review*, *130*, 161-183. https://doi.org/10.1016/j.tre.2019.08.008

Mamizadeh-Chatghayeh, S., Tohidi, G., Noura, A. A., Sanei, M., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2017). A DEA method to measure the capacity utilization of dynamic supply chain. *Journal of informatics and mathematical sciences*, *9*(1), 57-71.

Sahoo, B. K., & Tone, K. (2009). Decomposing capacity utilization in data envelopment analysis: an application to banks in India. *European journal of operational research*, *195*(2), 575-594. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.02.017

Sahoo, B. (2007). Scale, scope and capacity utilization in DEA. *International journal of applied economics and econometrics*, *15*(4), 298-328. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2179362

Tone, K. (2004). A hybrid measure of efficiency in DEA. *The operations research society of Japan*, 82-83. https://www.researchgate.net/publication/288870547_A_hybrid_measure_of_efficiency_in_DEA

Tone, K. (2005). *On a price-based capacity utilization analysis using DEA* [Paper presentation]. National conference of operations research society, Japan.

Yang, G. L., Fukuyama, H., & Song, Y. Y. (2019). Estimating capacity utilization of Chinese manufacturing industries. *Socio-economic planning sciences*, *67*, 94-110. https://doi.org/10.1016/j.seps.2018.10.004

Zare, H., Tavana, M., Mardani, A., Masoudian, S., & Kamali Saraji, M. (2019). A hybrid data envelopment analysis and game theory model for performance measurement in healthcare. *Health care management science*, *22*(3), 475-488.

Zeinalzadeh Ahranjani, L., Kazemi Matin, R., & Amirteimoori, A. R. (2019). Estimating capacity utilization in two-stage production systems: a data envelopment analysis approach. *International journal of industrial mathematics*, *11*(4), 263-274. https://www.sid.ir/FileServer/JE/1016220190403