



Paper Type: Original Article



Detection of Mean Reversion Point Based on Quantiles of Extreme Value Distribution: Evidences from Iran and International Markets

Hossein Mohajer¹, Afshin Fayyaz Movaghar^{1,*} 

¹ Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Bablsar, Iran;
h.mohajer@stu.umz.ac.ir; a_fayyaz@umz.ac.ir.

Citation:



Mohajer, H., & Fayyaz Movaghar, A. (2021). Detection of mean reversion point based on quantiles of extreme value distribution: evidences from Iran and international markets. *Journal of decisions and operations research*, 6 (2), 288-303.

Received: 31/12/2020

Reviewed: 20/01/2021

Revised: 22/02/2021

Accept: 02/04/2021

Abstract

Purpose: Deciding on the existence of the mean reversion property in financial data has attracted the attention of many researchers, and different tests have been proposed to evaluate the presence of this feature in the data. However, due to the highly variable nature of financial markets in different time periods, each of these tests generally presents different results and on the other hand, detailed theoretical analyzes have not been performed on how to identify the points of mean reversion at each moment of the process. In this study, a method was proposed to identify the mean reversion points in financial data. This method can be used as a decision criterion for entering or leaving the market in swing trading strategies.


Method: The historical data on the price of gold (Oz), Bitcoin, EURUSD ratio, Tehran Stock Exchange index, exchange rate (Dollar) and the price of gold coins during the period 2013-2020 and Ethereum during 2016-2020 were collected and analyzed. First, the hypothesis of mean reversion was tested through augmented Dickey-Fuller and Hurst exponent tests and in order to identify the points of mean reversion at each moment of the process path, the maximum values of the difference of data with its moving average value were modeled through the Gumbel distribution.

Findings: The results showed that Dickey Fuller and Hurst exponent tests provide different results in detecting this feature. Also, the results by estimating 95% quantile of the distribution showed that detection of these points using the quantile of the extreme value distribution (Gumbel) was correct in at least 47.78% (57.5% excluding Bitcoin) and at most 92.85% of the detected points. The results of the prop test for evaluating the accuracy of detected points showed that the detection of these points in the process is not random and the proposed theory for the identification of these points works well. Optimization of results based on further analysis is also expected.

Conclusion: Recognition of successive mean reversion points can be considered a sign of the formation of price bubbles in capital markets. Therefore, the extreme values distribution in consecutive maximums of the price difference from the trend can also be a suitable distribution to detect bubble formation.

Keywords: Extreme values, Gumbel distribution, Quantile, Mean reversion.

 Corresponding Author: a_fayyaz@umz.ac.ir

 10.22105/dmor.2021.265211.1292



Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی

6

تشخیص نقطه بازگشت به میانگین بر پایه چندک‌های توزیع مقادیر غایی: شواهدی از بازارهای ایران و جهان

حسین مهاجر^۱، افشین فیاض موقر^{۱*}

اگره آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

چکیده

هدف: تصمیم‌گیری در مورد وجود ویژگی بازگشت به میانگین در داده‌های مالی توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده و آزمون‌های متفاوتی برای بررسی وجود این ویژگی در داده‌ها مطرح شده‌اند، اما با توجه به ماهیت بسیار متغیر بازارهای مالی در دوره‌های زمانی مختلف، هریک از این آزمون‌ها عموماً نتایج متفاوتی را ارائه می‌دهند و از طرفی، تحلیل‌های نظری دقیقی در راستای چگونگی تشخیص نقاط بازگشت به میانگین در هر لحظه از فرایند نیز انجام نشده است. در این تحقیق به ارائه روشی برای تشخیص نقاط بازگشت به میانگین در داده‌های مالی پرداخته شد. این روش می‌تواند به عنوان یک معیار تصمیم‌گیری برای ورود به بازار و یا خروج از آن در استراتژی‌های معاملاتی مبتنی بر نوسانات باشد.

روش: داده‌های تاریخی قیمت جهانی طلا، بیت کوین، نسبت یورو به دلار، شاخص بورس تهران، نرخ ارز (دلار) و قیمت سکه طلا طی دوره ۲۰۱۳-۲۰۲۰ و اتریوم طی دوره ۲۰۱۶-۲۰۲۰ جمع‌آوری و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. ابتدا فرضیه وجود ویژگی بازگشت به میانگین از طریق دو آزمون دیکی فولر افزوده و توان هرست مورد آزمون قرار گرفته و به منظور تشخیص نقاط بازگشت به میانگین در هر لحظه از مسیر فرایند، ماکسیمم فاصله داده‌ها با مقدار میانگین-متحرک آن در هر لحظه از طریق توزیع گامبل مدل‌سازی شد.

یافته‌ها: نتایج نشان داد که آزمون‌های دیکی فولر افزوده و توان هرست نتایج متفاوتی در تشخیص این ویژگی ارائه می‌دهند. همچنین نتایج از طریق برآورد چندک‌های ۹۵٪ توزیع نشان داد که تشخیص این نقاط با استفاده از چندک توزیع مقادیر غایی (گامبل) حداقل در ۴۷/۷۸ درصد (۵۷/۵ درصد بدون در نظر گرفتن بیت کوین) و حداکثر در ۹۲/۸۵ درصد مشاهدات، صحیح بوده است. نتایج آزمون نسبت برای ارزیابی میزان صحت نقاط شناسایی شده نشان داد که تشخیص این نقاط در فرایند، تصادفی نبوده و تئوری مطرح شده در خصوص شناسایی این نقاط به طور مطلوبی عمل می‌کند. بهینه‌سازی نتایج بر پایه تحلیل‌های بیشتر نیز مورد انتظار است.

نتیجه‌گیری: تشخیص نقاط متوالی بازگشت به میانگین را می‌توان نشانه‌ای از تشکیل حباب قیمت در بازارهای سرمایه دانست. از این رو توزیع مقادیر غایی در ماکسیمم‌های متوالی اختلاف قیمت از روند همچنین می‌تواند یک توزیع مناسب برای تشخیص تشکیل حباب باشد.

کلیدواژه‌ها: مقادیر غایی، توزیع گامبل، چندک، بازگشت به میانگین.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰، صفحه: ۲۸۸-۳۰۳

* نویسنده مسئول

a_fayyaz@umz.ac.ir

10.22105/dmor.2021.265211.1292



فرضیه بازار کارا^۱ (فاما^۲، ۱۹۶۵) به طور گسترده‌ای در ادبیات مربوط به بازارهای مالی مورد بحث قرار گرفته است. این فرضیه ادعا می‌کند که تمام اطلاعات مربوط به یک دارایی ریسکی مانند سهام در قیمت آن موجود است. با توجه به مجموعه اطلاعاتی که قیمت‌ها دربر دارند، می‌توان سه سطح کارایی را در ادبیات مربوط به کارایی بازار شناسایی کرد: کارایی قوی، نیمه قوی و ضعیف. مسئله اصلی در فرضیه بازار کارا، صرف نظر از سطح کارایی، پیش بینی قیمت است. اگر قیمت قابل پیش بینی باشد، سرمایه‌گذاران می‌توانند برای دستیابی به بازده مازاد سرمایه‌گذاری، استراتژی‌های مناسب را اجرا کنند، در حالی که در یک بازار کارا، قیمت دارایی قابل پیش بینی نیست (نارایان و پراساد^۳، ۲۰۰۷). یک دیدگاه در مورد غیرقابل پیش بینی بودن قیمت این است که قیمت از یک فرایند گام تصادفی پیروی می‌کند، یعنی مانا نیست. بنابراین، اگر قیمت مانا باشد، این بدان معنی است که قابل پیش بینی است و بهترین پیش بینی برای آن میانگین بلند مدت است (وو و لوکس^۴، ۲۰۱۸). در چنین شرایطی بازار کارا نیست، زیرا سرمایه‌گذاران می‌توانند از استراتژی‌های معاملاتی مبتنی بر الگوهای پویای پیش بینی بازده منتفع شوند.

علی‌رغم علاقه به فرضیه بازار کارا، بسیاری از سرمایه‌گذاران معتقدند که می‌توان با تمرکز مناسب بر روی برخی الگوهای اوراق بهادار، از اطلاعات موجود در سری زمانی قیمت‌ها سود کسب کرد. یکی از توضیحات احتمالی پشت این وضعیت، تئوری بازگشت به میانگین^۵ است (پالواشا و همکاران^۶، ۲۰۱۸). بازگشت به میانگین، فرضیه‌ای است که قیمت دارایی با گذشت زمان به سمت متوسط قیمت حرکت می‌کند. این بدان معناست که قیمت دارایی به ارزش متوسط بلندمدت خود باز خواهد گشت. نظریه بازگشت به میانگین توسط سه پدیده اصلی پشتیبانی می‌شود: تورش در دسترس بودن^۷، زیان‌گریزی^۸ و ترجیحات قیمت پایین‌تر^۹ (اویکارینن و شایندر^{۱۰}، ۲۰۱۵؛ تای و ژانگ^{۱۱}، ۲۰۱۶). فرضیه بازار کارا با تئوری بازگشت به میانگین متناقض است، زیرا یکی از پیامدهای فرضیه بازار کارا این است که تغییرات قیمت کاملاً تصادفی است و پیش بینی الگوی قیمت غیرممکن است. این پیامد با این واقعیت مطابقت دارد که نحوه رفتار قیمت در گذشته بر نحوه رفتار آن در آینده تأثیر نمی‌گذارد. در عمل، اگر قیمت از یک فرایند گام تصادفی پیروی کند، بازار کارا است (شکل ضعیف کارایی). با این حال شواهدی مبنی بر بازگشت به میانگین برای چند بازار سهام پیشرفته و نوظهور وجود دارد (احمد و همکاران^{۱۲}، ۲۰۱۸).

مقایسه فرضیه بازار کارا و تئوری بازگشت به میانگین نشان می‌دهد که یکی از ابزارهای تشخیص بازگشت به میانگین، آزمون مانایی سری زمانی است. بنابراین یکی از گزینه‌های پیشنهادی برای آزمون این ویژگی، استفاده از آزمون دیکی فولر افزوده^{۱۳} برای تعیین مانا بودن سری زمانی قیمت یک دارایی است (کوربت و همکاران^{۱۴}، ۲۰۱۸). سایر آزمونهای رقیب برای تعیین اینکه آیا یک سری زمانی می‌تواند به میانگین خود بازگردد یا خیر، توان هرست^{۱۵} و نسبت واریانس^{۱۶} هستند (شایک و ماهسواران^{۱۷}، ۲۰۱۸). هدف توان هرست ارائه مقیاسی برای تشخیص بازگشت به میانگین است. به عبارت دیگر، این پارامتر به بررسی این ادعا می‌پردازد که یک فرایند، گام تصادفی است یا یک روند. خروجی این آزمون ضریبی بین صفر و ۱ است که مقادیر کمتر از ۰/۵ بیانگر این است که سری می‌تواند برای دوره خاصی دارای بازگشت به میانگین باشد. مقادیر برابر با ۰/۵ نشانگر یک گام تصادفی در سری زمانی است و مقادیر بالاتر از ۰/۵ با یک

^۱ Efficient Market Theory

^۲ Fama

^۳ Narayan and Prasad

^۴ Wu and Lux

^۵ Mean Reversion Theory

^۶ Palwasha et al.

^۷ Availability bias

^۸ Aversion to losses

^۹ Lower price preferences

^{۱۰} Oikarinen and Schindler

^{۱۱} Tie and Zhang

^{۱۲} Ahmed et al.

^{۱۳} Augmented Dickey Fuller (ADF)

^{۱۴} Corbet et al.

^{۱۵} Hurst Exponent

^{۱۶} Variance Ratio

^{۱۷} Shaik and Maheswaran



رفتار رونددار در داده‌ها در ارتباط است (کوتو^۱، ۲۰۱۸). از طرف دیگر، آزمون نسبت واریانس این فرضیه را ارزیابی می‌کند که یک سری زمانی تک متغیره یک گام تصادفی است. آزمون نسبت واریانس، گام تصادفی بودن واریانس سری زمانی (برابر با ۰/۵ بودن پارامتر هرست) را به روشی دیگر آزمون می‌کند و فرض اساسی در این روش، خطی بودن رابطه بین تغییرات قیمت طی یک دوره زمانی مشخص با طول دوره زمانی مذکور است.

در این راستا، تحقیقات دیگری نیز انجام شده است. گنرو و کوامه موسا^۲ (۲۰۱۹)، عدم تقارن در بازگشت به میانگین را از طریق مدل‌های EGARCH مدل بندی کرده و به منظور آزمون وجود بازگشت به میانگین از آزمون دیکی فولر افزوده استفاده کرده‌اند. نتایج این تحقیق نشان از وجود پدیده بازگشت به میانگین در مدل‌های نامتقارن EGARCH برای قیمت سهام شرکت‌ها بوده است. شایک و ماهسواران (۲۰۱۸)، بازگشت به میانگین را از طریق نسبت دامنه مورد انتظار طول عمر مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها این نسبت را بر پایه مقادیر غایی قیمت سهام تشکیل داده و به این نتیجه دست یافته‌اند که این نسبت کوچکتر از مقادیر برآورد شده آن به روش بوت استرپ بوده و نشان از وجود پدیده بازگشت به میانگین در داده‌ها داشته است. پالوآشا و همکاران (۲۰۱۸)، در تحقیقی به ارزیابی بازگشت به میانگین شاخص سهام در بازار سهام پاکستان پرداخته‌اند و دریافته‌اند که بازگشت به میانگین در شاخص این بازار وجود دارد. بعلاوه، نتایج نشان می‌دهد که شاخص‌ها سرعت بازگشت به میانگین یکسانی ندارند و این در حالی است که در صورت سرعت بالای بازگشت به میانگین، سرمایه‌گذاران ممکن است در مدت زمان کوتاه‌تری سود کسب کنند. مطالعه مشابهی توسط احمد و همکاران (۲۰۱۸) انجام شده است. آن‌ها پدیده بازگشت به میانگین را در بازارهای سهام توسعه یافته و نوظهور بررسی و مقایسه کرده و دریافته‌اند که ویژگی بازگشت به میانگین هم برای بازارهای توسعه یافته و هم برای بازارهای نوظهور وجود دارد. آن‌ها نتیجه گرفتند که سرعت بازگشت به میانگین در بازارهای در حال ظهور بیشتر از بازارهای پیشرفته است. کوه و آدو^۳ (۲۰۱۶)، بازگشت به میانگین نوسانات را در بازار سهام نیجریه مدل‌بندی کرده‌اند و برای این منظور از آزمون دیکی فولر افزوده استفاده شده است. نوسانات قیمت در این تحقیق ابتدا از طریق برازش مدل‌های ARCH و GARCH مدل بندی شده و سپس فرض مانایی آن‌ها مورد آزمون قرار گرفته و یافته‌ها نشان از مانایی نوسانات و در نتیجه وجود پدیده بازگشت به میانگین در آن‌ها داشته است. اویکارینن و شایندلر (۲۰۱۵)، در تحقیقی بازگشت به میانگین داده‌های قیمت مسکن را از طریق تغییرات مومنتوم و آزمون نسبت واریانس آزمون کرده‌اند. نتایج آزمون نسبت واریانس در این تحقیق نشان داده که قیمت مسکن، از گام تصادفی پیروی نمی‌کند. در عوض، مومنتوم^۴ رشد قیمت مسکن طولانی مدت است و از نظر اندازه معنادار بوده است. نتایج همچنین نشان می‌دهد که الگوهای بازگشت به میانگین ممکن است به طور قابل توجهی بین بازارهای مسکن منطقه‌ای متفاوت باشد. نتایج مطالعه اسپیردیک و همکاران^۵ (۲۰۱۰)، در مطالعه‌ای که بر روی ویژگی بازگشت به میانگین در بازارهای بین‌المللی انجام داده‌اند، نشان می‌دهند که ویژگی بازگشت به میانگین در بازارهای سرمایه وجود دارد و همچنین سرعت بازگشت به میانگین در دوره‌های مختلف، متفاوت است. در بین تحقیقات انجام شده در داخل کشور نیز مطالعه ترکی^۶ (۱۳۹۷)، نشان از ناکارایی کوتاه‌مدت بازار آتی سکه طلا در بورس کالایی تهران داشته است. رنجبر شمسی^۷ (۱۳۹۳)، نشان داده که خاصیت بازگشت به میانگین برای بازده شرکت‌ها، شاخص قیمت و بازده نقدی وجود دارد، در حالی که تغییرات متوالی در قیمت سهام، شاخص صنعت، شاخص سهام شناور آزاد یک فرایند گام تصادفی است. کرباسی یزدی و همکاران^۸ (۱۳۹۱)، با استفاده از آزمون ریشه واحد نشان داده که شاخص قیمت و بازده نقدی دارای خاصیت بازگشت به میانگین هستند در حالی که شاخص کل قیمت سهام و شاخص پنجاه شرکت برتر از فرایند گام تصادفی پیروی می‌کنند. تهرانی و همکاران^۹ (۱۳۸۷)، استفاده از آزمون نسبت واریانس نشان داده که بازگشت به میانگین در دو شاخص قیمت و شاخص بازده نقدی وجود دارد، اما شاخص پنجاه شرکت فعال‌تر در دوره‌ای از تحقیق از گام تصادفی پیروی می‌کند. شیرکوند و همکاران^{۱۰} (۱۳۸۷)، با استفاده از آزمون دیکی فولر افزوده نشان داده که از بین شرکت‌های مورد مطالعه، تنها برخی از آن‌ها دارای ویژگی بازگشت به میانگین در قیمت سهم بوده‌اند.

^۱ Kuttu

^۲ Gbenro and Kouamé Moussa

^۳ Kuhe and Audu

^۴ Momentum

^۵ Spierdijk et al.

^۶ Torke

^۷ Ranjbar Shamsi

^۸ Karbasi Yazdi et al.

^۹ Tehrani et al.

^{۱۰} Shirkevand et al.



مرور مطالعات تجربی پیشین نشان از این دارد که مطالعات متمرکز بر پدیده بازگشت به میانگین، به طور عمده با هدف آزمون وجود این پدیده در داده‌ها انجام شده‌اند و در هیچ یک از آن‌ها به شناسایی نقاط بازگشت به میانگین پرداخته نشده است. از این رو به نظر می‌رسد که بکارگیری الگوها و روش‌هایی که بتوانند منجر به شناسایی نقاط بازگشت به میانگین شوند، هم در حوزه کاربرد و هم در حوزه ادبیات نظری تحقیق ضروری است. بنابراین، این تحقیق به دنبال یافتن نقطه بازگشت به میانگین در داده‌های قیمت دارایی با رویکردی متفاوت از رویکردهای گذشته است. ارزیابی شهودی تغییرات قیمت در کنار روندهای میانگین-متحرک بلندمدت و میان مدت آن نشان می‌دهد که مقادیر قیمت پس از تجربه جهش‌های شدید و یا رشدهای شارپی، تمایل بالایی به بازگشت به میانگین خود دارند و قیمت‌ها پس از فاصله‌گیری زیاد از خط روند، مجدد به خط روند بازگشته و یا به آن نزدیک می‌شوند. اگرچه این بازگشت‌ها در نقاط مشخصی منجر به شکست‌های ساختاری در قیمت می‌شوند و تغییرات کلی روند را در پی دارند، اما تشخیص نقاط شکست ساختاری با توجه به گستردگی حوزه موضوعی آن، خارج از بحث این تحقیق است و نقاط بازگشت به میانگین در این تحقیق، شامل مجموعه نقاط شکست ساختاری و نقاط بازگشت به میانگین ضمن حفظ روند هستند. لذا از آنجا که میزان اختلاف بین قیمت پایانی دارایی با خط روند قیمت، ابزار اصلی شناسایی نقاط بازگشت به میانگین در این تحقیق است، به منظور مدل‌بندی و تشخیص نقاط بازگشت به میانگین از توزیع مقادیر غایی برای فاصله بین قیمت و خط روند استفاده شده است. وجه تمایز اصلی این تحقیق با سایر تحقیقات قبلی و روش‌های موجود در این است که ما در این تحقیق به آزمون فرضیه بازگشت به میانگین نمی‌پردازیم، بلکه شناسایی نقاط بازگشت به میانگین مورد توجه بوده است.

۲- روش پژوهش

۲-۱- مفهوم بازگشت به میانگین

یکی از مفاهیم کلیدی معاملات در بازارهای سرمایه، بازگشت به میانگین است. این مفهوم به تمایل یک سری زمانی به بازگشت به مقدار متوسط تاریخی آن اشاره دارد. در مدل‌های ریاضی، از این سری‌های زمانی (پیوسته) با عنوان فرایند اورنشتاین-اولنبرگ^۱ یاد می‌شود. این ویژگی در تضاد با گام تصادفی (حرکت براونی) است که هیچ حافظه‌ای از موقعیت‌های قبلی داده‌ها ندارد. یک سری زمانی پیوسته با ویژگی بازگشت به میانگین می‌تواند توسط معادله دیفرانسیل تصادفی اورنشتاین-اولنبرگ به شکل رابطه (۱) نشان داده شود (تانگ و چن، ۲۰۰۹):

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t. \quad (1)$$

به طوری که θ نرخ بازگشت به میانگین، μ مقدار میانگین فرایند، σ واریانس فرایند و W_t فرایند وینر^۲ یا حرکت براونی^۳ است. در یک ساختار گسسته، رابطه (۱) بیان می‌کند که تغییر سری زمانی قیمت‌ها در دوره زمانی بعدی (dX_t)، متناسب با اختلاف بین قیمت متوسط و قیمت فعلی ($\mu - X_t$)، با اضافه شدن نویز گوسی (σdW_t) است. این ویژگی، انگیزه استفاده از آزمون دیکی-فولر^۴ افزوده^۵ برای سنجش بازگشت به میانگین است.

۲-۲- آزمون دیکی فولر افزوده

از نظر ریاضی، آزمون دیکی فولر افزوده مبتنی بر ایده وجود یک ریشه واحد در یک سری زمانی خودبازگشت است. در این آزمون، از این واقعیت استفاده می‌شود که اگر یک سری زمانی دارای بازگشت به میانگین باشد، سطح بعدی قیمت متناسب با سطح قیمت فعلی خواهد بود (فولر^۶، ۱۹۷۶):

^۱Ornstein-Uhlenbeck

^۲Tang & Chen

^۳Wiener Process

^۴Brownian Motion

^۵Augmented Dickey-Fuller

^۶Fuller



$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

بنابراین در این آزمون از یک مدل خودبازگشت رگرسیونی از مرتبه p به شکل رابطه (۲) استفاده می‌شود. به طوری که α پارامتر ثابت مدل، β ضریب روند زمانی (پارامتر رانش^۱) و $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ است. آزمون دیکی فولر افزوده در سنجش بازگشت به میانگین، مدلی از مرتبه $p=1$ را با فرض $\gamma=0$ را مورد آزمون قرار می‌دهد و در صورتی که $\alpha=\beta=0$ باشد، آنگاه فرایند یک گام تصادفی است و از تنوری بازگشت به میانگین تبعیت نمی‌کند. در صورتی که فرض $\gamma=0$ رد شود، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات بعدی فرایند متناسب با مقدار فعلی آن است و بنابراین انتظار نمی‌رود که فرایند، یک گام تصادفی باشد.

۳-۲- توان هرست

یک سری زمانی (یا فرایند تصادفی) مانای قوی است، اگر توزیع احتمال توأم آن تحت تغییر در زمان یا مکان، پایا^۲ باشد. به طور خاص در این تعریف، میانگین و واریانس با گذشت زمان یا مکان تغییر نمی‌کند و هیچ یک از آن‌ها روندی را دنبال نمی‌کنند. یک ویژگی مهم در سری‌های زمانی مانا این است که داده‌های این سری با سرعتی کمتر از حرکت براونی هندسی انتشار می‌یابند و با اندازه‌گیری سرعت انتشار می‌توان ماهیت سری زمانی را تشخیص داد. یکی از ابزارهای مورد استفاده در این خصوص، برآورد توان هرست است. هدف توان هرست ارائه مقیاسی است که تشخیص ویژگی بازگشت به میانگین و روند را از گام تصادفی ممکن می‌سازد. ایده محاسبه توان هرست این است که می‌توان از واریانس لگاریتم داده‌ها به منظور ارزیابی نرخ انتشار استفاده کرد. برای تاخیر زمانی دلخواه τ ، واریانس از طریق رابطه (۳) برآورد می‌شود (ویللمونت^۳، ۲۰۰۴):

$$\text{Var}_\tau = \left\langle \left| \log(x_{t+\tau}) - \log(x_t) \right|^2 \right\rangle. \quad (3)$$

به طوری که $\langle |y_t|^2 \rangle$ معرف میانگین مربعات y_t برای تمام مقادیر t است که می‌توان آن را با واریانس مقادیر $\log\left(\frac{X_{t+\tau}}{X_t}\right)$ تقریب زد. از آنجایی که هدف این روش، مقایسه سرعت انتشار فرایند با سرعت انتشار یک حرکت براونی هندسی است، می‌توان از این واقعیت استفاده کرد که برای τ به اندازه کافی بزرگ، واریانس برآورد شده در رابطه (۳)، متناسب با τ در یک فرایند براونی هندسی است. یعنی (ویللمونت، ۲۰۰۴):

$$\left\langle \left| \log(x_{t+\tau}) - \log(x_t) \right|^2 \right\rangle \sim \tau. \quad (4)$$

اگر هر نوع خودهمبستگی در داده‌ها وجود داشته باشد، رابطه (۴) معتبر نیست، اما در عوض، می‌توان آن را با مقدار توانی $2H$ تعدیل نمود که مقدار توان هرست را نتیجه می‌دهد (چان^۴، ۲۰۱۳):

$$\left\langle \left| \log(x_{t+\tau}) - \log(x_t) \right|^2 \right\rangle \sim \tau^{2H}. \quad (5)$$

تحت این رابطه، اگر $H < 0.5$ باشد، آنگاه فرایند دارای ویژگی بازگشت به میانگین است. اگر $H = 0.5$ باشد، آنگاه فرایند از فرایند براونی هندسی پیروی می‌کند و اگر $H > 0.5$ باشد، آنگاه فرایند، رونددار است. بنابراین مقادیر بسیار کوچک H (نزدیک به صفر) نشان دهنده تمایل بالای فرایند به ویژگی بازگشت به میانگین است و مقادیر بسیار بزرگ H (نزدیک به ۱) نشان دهنده تمایل بالای فرایند به رونددار بودن است.

^۱Drift Parameter

^۲Invariant

^۳Wilmontt

^۴Chan

از توزیع مقادیر غایی در حوزه‌های متنوعی نظیر امور مالی، بیمه و تئوری ریسک استفاده شده است. به طوری که اندازه ضرر و زیان ناشی از احتمالات کوچک p در تعیین ارزش در معرض خطر^۱، اندازه‌گیری ابتدایی ریسک در مجموعه‌ای از ریسک‌های بیمه و بسیاری از پارامترهای مهم در وقایع طبیعی مانند طول عمر یک فرایند یا انسان از نمونه‌های مقادیر غایی هستند. مشکلات آماری ارزیابی مقادیر غایی در همه این زمینه‌ها تأثیر مستقیم دارد و این یکی از دلایلی است که استفاده از توزیع مقادیر غایی در دهه‌های گذشته با پیشرفت عظیمی روبرو شده است. توسعه روش‌های پیچیده برای برآورد و پیش بینی وقایع نادر به صرفه جویی در منابع طبیعی در معرض خطر، مدل سازی آب و هوا، زمین لرزه‌ها و سایر پدیده‌های زیست محیطی مانند بارش و دما کمک کرده است. از دیدگاه نظری، فیشر و تپیت^۲ (۱۹۲۸) ابتدا در مورد توزیع حدی ماکسیمم‌های یک نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع بحث کردند و یافته‌های آنان توسط ندنکو^۳ (۱۹۴۳) رسمی شد و توسط گامبل^۴ (۱۹۵۸) برای استفاده از تئوری مقادیر غایی در موضوعات مهندسی بکار گرفته شد. با این حال، در گذر زمان، شرایط استقلال مشاهدات نیز به منظور امکان ارزیابی نقطه به نقطه فرایند مورد بررسی‌های دقیق تری انجام گرفته و توزیع مقادیر غایی برای مشاهدات غیرمستقل نیز در قالب توزیع مقادیر غایی تعمیم یافته تصریح گردید. توزیع مقادیر غایی تعمیم یافته G_γ در شرایط زیر صدق می‌کند (دیپلوت^۵ و همکاران، ۲۰۰۸):

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} e^{-\frac{-l}{1+\gamma x}^\gamma} & \gamma \neq 0. \\ e^{-e^{-x}} & \gamma = 0 \end{cases} \quad (6)$$

به طوری که $1 + \gamma x > 0$ و خانواده ۳ پارامتری این توزیع به شکل $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = G_\gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ تعریف می‌شود و μ پارامتر مکان، σ پارامتر مقیاس و γ پارامتر شکل توزیع هستند. همچنین، $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$ برای $\gamma > 0$ دارای توزیع فرشه، برای $\gamma = 0$ دارای توزیع گامبل و برای $\gamma < 0$ دارای توزیع وایبل^۶ است. فرشه^۷ (۱۹۲۷)، فیشر و تپیت (۱۹۲۸) و ندنکو (۱۹۴۳) نشان دادند که تحت برقراری فرض‌های عمومی روی توزیع نمونه‌های تصادفی، دو دنباله a_n و b_n و ثابت γ وجود دارند، به طوری که برای n به قدر کافی بزرگ (فیاض موقر و همکاران^۸، ۲۰۱۲):

$$P\left[\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right] \xrightarrow{d} G_\gamma(x). \quad (7)$$

به طوری که در این رابطه، M_n ماکسیمم نمونه تصادفی n تایی (X_1, X_2, \dots, X_n) از توزیع دلخواه $F(x)$ است.

۵-۲- روش تشخیص

در راستای تشخیص نقاط بازگشت به میانگین نیز به این ویژگی بازگشت به میانگین استناد شد که قیمت دارایی‌ها در نقطه بازگشت به میانگین، پس از رسیدن به حداکثر (حداقل)، کاهش (افزایش) می‌یابد. بنابراین فرض بر این است که اگر قیمت پایانی دارایی، به طور قابل ملاحظه‌ای از مقدار مورد انتظار آن فاصله گیرد، در صورت وجود ویژگی بازگشت به میانگین، به مقدار میانگین آن باز می‌گردد. بیان احتمالی این ویژگی را می‌توان به شکل رابطه (۸) تصریح کرد (فردی و همکاران^۹، ۲۰۱۳):

$$\int_{\mu_t - i}^{\mu_t + i} f_{X_t}(x) dx > \int_{\mu_t - j}^{\mu_t + j} f_{X_t}(x) dx \quad i > j > 0. \quad (8)$$

^۱ Value at Risk

^۲ Fisher and Tippett

^۳ Gnedenko

^۴ Gumbel

^۵ Diebolt

^۶ Weibull

^۷ Fréchet

^۸ Fayyaz Movaghar et al.

^۹ Freddy et al.





به طوری که در این رابطه، μ_t برابر با مقدار میانگین فرایند X_t در لحظه t و $f_{X_t}(\cdot)$ معرف تابع چگالی فرایند است. حال اینکه، فاصله بین قیمت پایانی از مقدار میانگین یا مورد انتظار قیمت، می‌تواند در هر جهتی (روندهای صعودی یا نزولی) صورت گیرد، لذا اندازه این فاصله تبیین‌کننده بهتری برای دوری قیمت از میانگین آن خواهد بود. بنابراین اگر X_t برابر با قیمت دارایی در لحظه t و μ_t برابر با مقدار میانگین یا مورد انتظار قیمت در این لحظه باشد، آنگاه $|X_t - \mu_t|$ نشان‌دهنده اندازه فاصله قیمت از مقدار میانگین آن است. در ادامه، گام‌های زیر به منظور تشخیص نقاط بازگشت به میانگین انجام شده است:

گام اول. ابتدا مقادیر مورد انتظار یا میانگین سری $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ بر پایه مقادیر میانگین متحرک قیمت با تأخیر k به شکل رابطه (۹) محاسبه شده است.

$$\mu_t = \sum_{i=t-k+1}^t X_i \quad t \geq k. \quad (9)$$

گام دوم. تعداد $t-k-n+2$ پنجره غلتان $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ با n عضو ($n \leq k$) و بر روی بازه زمانی $\{k, k+1, \dots, T\}$ مشخص شده و مقادیر M_n در هر پنجره مطابق با رابطه (۱۰) شناسایی شده است.

$$M_n = \text{Max}_{(i=1,2,\dots,n)} |X_{t_i} - \mu_{t_i}|. \quad (10)$$

گام سوم. اگر M_n ها از توزیع با مقادیر غایی $G_\gamma(x)$ تبعیت کنند، آنگاه چندک p -درصد توزیع $G_\gamma(x)$ یعنی Q_p نشان‌دهنده مقداری از M_n است که تحت توزیع $G_\gamma(x)$ ، p درصد از فواصل محاسباتی $|X_{t_i} - \mu_{t_i}|$ از آن کوچکترند. لذا اگر مقدار M_n بزرگتر از چندک p -درصد توزیع $G_\gamma(x)$ باشد (برای مقادیر p بزرگ)، می‌توان انتظار داشت که فرایند از ویژگی بازگشت به میانگین خود دور شده و لذا تحت فرض ویژگی بازگشت به میانگین در داده‌ها، قیمت باید به میانگین خود بازگردد. در این گام، هرچه مقدار p بزرگتر انتخاب شود، نقاط بازگشت به میانگین با اطمینان بیشتری شناسایی می‌شوند. بنابراین

$$MR_{t,n} = \begin{cases} 1 & M_n > Q_p \\ 0 & M_n \leq Q_p \end{cases}. \quad (11)$$

به طوری که $MR_{t,n}$ متغیر نشانگر بازگشت فرایند در لحظه t به میانگین است. باید توجه داشت که مقادیر M_n در این روش، از یکدیگر مستقل نبوده و لذا ویژگی نمونه تصادفی ندارند. کولس^۱ (۲۰۰۳) نشان داده که تئوری مقادیر غایی را می‌توان برای متغیرهای وابسته و به خصوص فرایندهای ایستا نیز تعمیم داد. فیاض موقر و همکاران (۲۰۱۲)، نشان دادند که می‌توان دنباله مقادیر a_n و b_n را به نحوی یافت که برای مقادیر M_n وابسته، توزیع مقادیر غایی $G_\gamma(x)$ را برای $\gamma < 0$ می‌توان به شکل $G_n(x)$ رابطه (۱۲) بازنویسی کرد.

$$G_n(x) \approx P[M_n \leq x] = e^{-\vartheta_n(\xi_n - x)^\kappa} \quad \kappa, \vartheta_n > 0, \quad x \leq \xi_n. \quad (12)$$

به طوری که در این رابطه، $\xi_n = \left(\frac{-b_n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ ، $\kappa = \frac{-1}{\gamma}$ و $\vartheta_n = a_n - \frac{b_n}{\gamma}$ برای برآورد پارامترهای توزیع نیز می‌توان از گشتاورهای احتمال-موزون m_r طبق رابطه (۱۳) استفاده کرد (فیاض موقر و همکاران، ۲۰۱۲).

$$m_r = E[M_n G_n^r(M_n)] = \frac{1}{r+1} \left[\xi_n - \beta(r+1)^{\frac{-1}{\kappa}} \Gamma\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) \right]. \quad (13)$$

به طوری که $\beta = \sigma n^{-\kappa}$ و معرف تابع گاما است. محاسبه گشتاورهای مرتبه صفر، ۱ و ۲ برای این توزیع و همچنین بکارگیری توزیع تجربی M_n برای محاسبه $E[M_n G_n^r(M_n)]$ منجر به تشکیل دستگاه معادلاتی می‌شود که برآورد پارامترهای توزیع را به روش بازگشتی و مطابق با رابطه (۱۴) ارائه می‌دهد (فیاض موقر و همکاران، ۲۰۱۲).

^۱ Coles

^۲ Probability-weighted moment

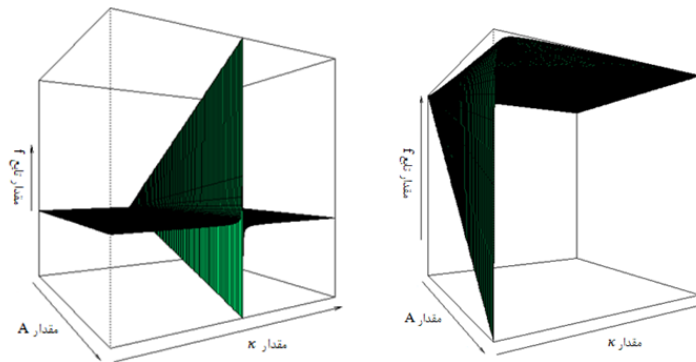


$$\left\{ \begin{aligned} \hat{m}_0 &= \xi_n - \beta \Gamma\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right) \\ 2\hat{m}_1 - \hat{m}_0 &= \beta(1 - 2^{-\frac{1}{\kappa}}) \Gamma\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right). \\ \frac{3\hat{m}_2 - \hat{m}_0}{2\hat{m}_1 - \hat{m}_0} &= \frac{1 - 3^{-\frac{1}{\kappa}}}{1 - 2^{-\frac{1}{\kappa}}} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

در این رابطه \hat{m}_r از طریق توزیع تجربی M_n ها و از رابطه $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_n^{[i]} \left(\frac{i-1}{n}\right)^r$ بدست می‌آید ($M_n^{[i]}$ آماره مرتب i -ام از نمونه‌های M_n است). اما رابطه (۱۴)، همیشه حافظ دامنه پارامتر κ نیست و شکل ۱ نشان می‌دهد که معادله $f(\kappa) = 0$ ، با تعریف

$$A = \frac{3\hat{m}_2 - \hat{m}_0}{2\hat{m}_1 - \hat{m}_0} \text{ و } f(\kappa) = A - \frac{1 - 3^{-\frac{1}{\kappa}}}{1 - 2^{-\frac{1}{\kappa}}}$$

دارای یک ریشه منفی و یک ریشه در مثبت بی نهایت برای پارامتر κ است.



شکل ۱- مقادیر تابع f به ازای هر مقدار A و κ ($\kappa > 0$ نمودار راست و $\kappa \in$ نمودار چپ).

Figure 1 - Values of function f for each values of A and κ ($\kappa > 0$ right plot and $\kappa \in$ left plot).

بنابراین به نظر می‌رسد که مقدار مطلوب برای پارامتر κ مقداری در بی نهایت مثبت است که معادل $\gamma = 0$ است. اگرچه می‌توان روش‌های متفاوتی در برآورد پارامترهای رابطه (۱۴) با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی پیشنهاد داد (سلیمانپور باکفایت^۱، ۱۳۹۷؛ کاویانی و فخرحسینی^۲، ۱۳۹۷)، اما رسم مقادیر تابع در شکل ۱ نشان می‌دهد که الگوریتم‌های بهینه‌سازی نیز نمی‌توانند برآوردهای حافظ دامنه در این مورد ارائه دهند. بنابراین در این تحقیق، برای برازش توزیع آماری مناسب به مقادیر متغیر M_n از توزیع گامبل استفاده شد. با مقداری محاسبات می‌توان نشان داد که دنباله‌های a_n و b_n وجود دارند، به طوری که ماکسیمم مقادیرهای وابسته M_n دارای توزیع مقادیر غایی گامبل باشند. به طوری که:

$$G_n(x) \approx P[M_n \leq x] = e^{-e^{-\left(\frac{\frac{x-a_n}{b_n} - \frac{\mu-a_n}{b_n}}{\frac{\sigma}{b_n}}\right)}} = e^{-e^{-\left(\frac{x^* - \mu^*}{\sigma^*}\right)}} = G_{0, \mu^*, \sigma^*}(x). \quad (15)$$

ما در این تحقیق به منظور برآورد پارامترهای توزیع گامبل، از روش چندک‌های توزیع استفاده کردیم. در این روش طبق، فرم تابعی توزیع تجمعی گامبل داریم:

^۱Soleymannpour Bakefayat
^۲Kaviani and Fakhrehosseini



$$Q_p = \sigma \text{Ln} \left(\frac{1}{\text{Ln} \left(\frac{1}{p} \right)} \right) + \mu. \quad (16)$$

به طوری که Q_p نشان دهنده چندک p درصد توزیع، μ پارامتر مکان و σ پارامتر مقیاس است. بنابراین برای هر دو مقدار دلخواه p_i و p_j برآورد پارامترهای توزیع برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}_{i,j} = Q_{p_i} - \hat{\sigma} \text{Ln} \left(\frac{1}{\text{Ln} \left(\frac{1}{p_i} \right)} \right) \\ \hat{\sigma}_{i,j} = \frac{Q_{p_i} - Q_{p_j}}{\text{Ln} \left(\frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{p_j} \right)}{\text{Ln} \left(\frac{1}{p_i} \right)} \right)}. \end{array} \right. \quad (17)$$

به منظور دستیابی به برآوردهایی که از تمامی اطلاعات موجود در چندک‌های نمونه‌ای بهره می‌گیرد، تمامی ترکیبات زوجی p_i و p_j در $\{0/99, \dots, 0/02, 0/01\}$ و چندک‌های Q_{p_i} و Q_{p_j} مربوط به آن‌ها محاسبه شده و برآوردهای نهایی $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ بر اساس میانگین ۹۸۰۱ مقدار بدست آمده از $\hat{\mu}_{i,j}$ و $\hat{\sigma}_{i,j}$ محاسبه شدند.

۲-۶- داده‌ها

در این تحقیق که از جمله تحقیقات کاربردی و توسعه‌ای به شمار می‌آید، از داده‌های قیمت جهانی اونس طلا، ارزهای رمزنگاری شده بیت کوین^۱ و اتریوم^۲، نسبت جفت ارز یورو به دلار^۳، شاخص بورس اوراق بهادار تهران، نرخ ارز (دلار) و قیمت سکه طلا با تواتر روزانه استفاده شده است. به طوری که داده‌های ارز رمزنگاری شده اتریوم طی دوره ۲۰۲۰-۲۰۱۶ (به دلیل تأخیر در معرفی ارز و معاملات برخط آن در بازارهای جهانی نسبت به سایر دارایی‌های مورد مطالعه) و سایر داده‌ها طی دوره ۲۰۲۰-۲۰۱۳ مورد مطالعه قرار گرفته اند. به منظور آزمون وجود ویژگی بازگشت به میانگین، از آزمون دیکی فولر افزوده و برآورد توان هرست استفاده شده و فرض تبعیت توزیع مقادیر ماکسیمم‌های متوالی M_n از توزیع گامبل، با استفاده از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف مورد آزمون قرار گرفته و نقاط بازگشت به میانگین از طریق برآورد مقادیر چندک توزیع ماکسیمم‌های متوالی و متغیر نشانگر $MR_{r,n}$ در نمودارهای سری زمانی داده‌ها نشان داده شده است. تجزیه و تحلیل داده‌ها در نرم افزار آماری R نسخه ۴،۰،۲ انجام پذیرفته است.

۳- یافته‌ها

در این بخش به ارائه یافته‌های تحقیق در راستای تشخیص نقاط بازگشت به میانگین پرداخته شده است. جدول ۱ شاخص‌های توصیفی هریک از متغیرهای تحقیق را نشان می‌دهد.

^۱ Bitcoin (BTC)
^۲ Ethereum (ETH)
^۳ EURUSD

جدول ۱- شاخص‌های توصیفی متغیرها.

Table 1- Descriptive statistic of variables.

متغیر	میانگین	میانه	بیشینه	کمینه	انحراف معیار
اونس طلا	1329.3596	1284.625	2063.25	1051.55	176.6363
بیت کوین (دلار)	3020.1011	637.51	18665	13.28	3859.8663
اتریوم (دلار)	235.8400	187.09	1393.47	6.69	238.1218
یورو به دلار	1.18025	1.13760	1.39304	1.03867	0.09722
نرخ دلار (ریال)	49008.3885	33550	287460	9650	49206.7335
شاخص بورس	136066.8268	71043	2078511.8	7955.4	286651.0217
سکه طلا (ریال)	17027062.3205	9850000	126500000	2140000	20088456.407

باتوجه به شاخص‌های جدول ۱ قیمت جهانی هر اونس طلا طی دوره مورد مطالعه به طور متوسط برابر با ۱۳۲۹/۳۵۹۶ دلار بوده است. میانگین ارزش دلاری بیت کوین برابر با ۳۰۲۰/۱۰۱۱ دلار و متوسط ارزش دلاری اتریوم برابر با ۲۳۵/۸۴ دلار برآورد شده است. نسبت یورو به دلار به طور میانگین برابر با ۱/۱۸۰۲۵ برآورد شده و میانگین نرخ ارز (دلار) در ایران به طور متوسط برابر با ۴۹۰۰۸/۳۸۸۵ ریال بدست آمده است. همچنین شاخص بورس دارای مقدار متوسط ۱۳۶۰۶۶/۸۲۶۸ و سکه طلا نیز دارای قیمت متوسط ۱۷۰۲۷۰۶۲/۳۲۰۵ ریال در این دوره بوده اند. به منظور آزمون وجود ویژگی بازگشت به میانگین در هر یک از این متغیرها از دو روش آزمون دیکی فولر افزوده و توان هرست استفاده شد. جدول ۲ نتایج آزمون دیکی فولر افزوده را برای هر یک از این متغیرها نشان می‌دهد. قابل ذکر است که تعداد تاخیرهای آزمون برای هر متغیر با توجه به تعداد مشاهدات آن تعیین شده است.

جدول ۲- آزمون وجود ویژگی بازگشت به میانگین (دیکی فولر افزوده).

Table 2- Test of existance of mean reversion (ADF).

متغیر	برآورد پارامتر μ	برآورد پارامتر σ	آماره KS	معناداری KS
اونس طلا	23.52207	23.06495	0.06223	0.99
بیت کوین	234.8648	405.7982	0.3253	0.99
اتریوم	32.27604	47.14392	0.1543	0.99
یورو به دلار	0.0100631	0.01042833	0.07199	0.99
نرخ دلار	1247.642	1956.119	0.3165	0.99
شاخص بورس	6980.495	8652.177	0.5133	0.99
سکه طلا	515949.8	776232.5	0.3077	0.99

باتوجه به نتایج آزمون دیکی فولر افزوده و سطوح معناداری به دست آمده از آن مشاهده می‌شود که فرض بازگشت به میانگین در این آزمون مورد پذیرش قرار نگرفته و تمامی متغیرها رونددار بوده اند. به منظور تأیید نتایج حاصل از این آزمون از نتایج برآورد توان هرست نیز استفاده شد. در برآورد توان هرست از برازش مدل رگرسیون خطی واریانس بازده‌های لگاریتمی داده‌ها بر روی لگاریتم تأخیرها، طبق رابطه (۵) استفاده شد. نصف ضریب تأثیر رگرسیونی بدست آمده برای پارامتر τ در این روش، مقدار برآورد شده توان هرست را نشان می‌دهد. این مدل برای ۱۰۰۰ مقدار متفاوت τ برازش داده شده است تا برآورد پارامترهای مدل از دقت کافی برخوردار باشد. لحاظ کردن تعداد مشاهدات اندک در این مدل، می‌تواند منجر به ازدست رفتن اطلاعات موجود در داده‌های دور از مبدأ نیز گردد. جدول (۳) نتایج این آزمون را نشان می‌دهد.

طبق نتایج جدول ۳ مشاهده می‌شود که برآورد توان هرست نشان از ویژگی میانگین-بازگشت در داده‌های اونس طلا، بیت کوین، اتریوم و یورو به دلار دارد در حالی که نتایج آزمون برای شاخص بورس تهران، نرخ ارز و قیمت سکه طلا همچنان تأکید بر رونددار بودن داده‌ها دارند. مقایسه این یافته‌ها با نتایج حاصل از جدول ۲ نشان می‌دهد که آزمون‌های تعیین ویژگی میانگین-بازگشت لزوماً نتایج پایداری را ارائه نمی‌دهند و شاید بتوان حصول نتایج مختلف در خصوص وجود ویژگی بازگشت به میانگین در یک بازار توسط چند محقق را به همین عامل نسبت داد. اگرچه باید توجه داشت که برآورد توان هرست به تعداد مشاهدات مورد استفاده در برآورد مدل نیز حساسیت دارد



و این نتایج برای مدل‌هایی با تعداد ۱۰۰ مشاهده، نتایجی مشابه با آزمون دیکی فولر افزوده به همراه داشت. لذا این ویژگی نیز از نقایص روش‌های تعیین میانگین-بازگشت بودن داده‌ها است.

جدول ۳- آزمون وجود ویژگی بازگشت به میانگین (توان هرست).

Table 3- Test of existence of mean reversion (Hurst exponent).

متغیر	ضریب تأثیر پارامتر T	توان هرست برآورد شده	معناداری مدل	نتیجه
اونس طلا	0.718449***	0.3592245	0.0001	میانگین-بازگشت
بیت کوین	0.77267***	0.386335	0.0001	میانگین-بازگشت
اتریوم	0.4543***	0.22715	0.0001	میانگین-بازگشت
یورو به دلار	0.803707***	0.401853	0.0001	میانگین-بازگشت
نرخ دلار	1.049591***	0.524795	0.0001	رونددار
شاخص بورس	1.148312***	0.574156	0.0001	رونددار
سکه طلا	1.127136***	0.563568	0.0001	رونددار

عقیده ما بر این است که ویژگی‌های قیمت در بازارهای مالی لزوماً رفتار یکسانی را در تمامی دوره‌ها نشان نمی‌دهد. به بیان دیگر، می‌توان انتظار داشت که مقادیر قیمت یا شاخص در دوره‌هایی از بازار دارای ویژگی میانگین-بازگشت و در دوره‌هایی دیگر نیز دارای ویژگی روند باشد. از این رو شناسایی نقاط بازگشت به میانگین در داده‌های مالی را نمی‌توان به وجود این ویژگی تحت نتایج آزمون‌های متداول منوط کرد. بر این اساس، طبق آنچه که در شرح روش تحقیق به آن اشاره شد، ما نیز به شناسایی نقاط بازگشت به میانگین در هر یک از این داده‌ها با استناد به چندک توزیع مقادیر غایی فاصله قیمت تا میانگین پرداخته‌ایم. مقادیر پارامترهای این توزیع برای هر یک از داده‌ها با استفاده از رابطه (۱۴) و (۱۵)، برای تأخیر ۵۰ در محاسبه میانگین متحرک داده‌ها و تعداد ۳۰ مشاهده برای شناسایی ماکسیمم اختلافات مورد برآورد قرار گرفته و آزمون کلموگروف-اسمیرنوف در راستای آزمون برازندگی توزیع مقادیر غایی به داده‌ها نیز انجام شده که نتایج این آزمون‌ها به شرح جدول ۴ بوده است.

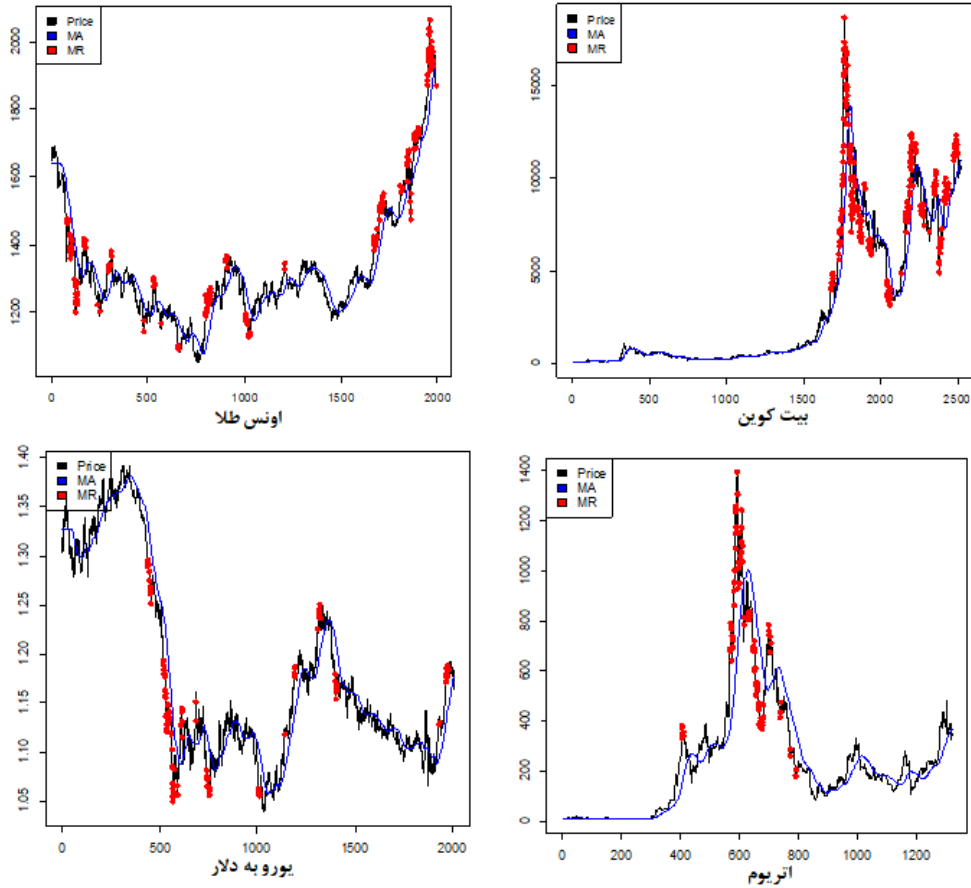
جدول ۴- برآورد پارامترهای توزیع مقادیر غایی فواصل از میانگین.

Table 4- Estimation of extreme value distribution for differences from mean.

متغیر	برآورد پارامتر μ	برآورد پارامتر σ	آماره KS	معناداری KS
اونس طلا	23.52207	23.06495	0.06223	0.99
بیت کوین	234.8648	405.7982	0.3253	0.99
اتریوم	32.27604	47.14392	0.1543	0.99
یورو به دلار	0.0100631	0.01042833	0.07199	0.99
نرخ دلار	1247.642	1956.119	0.3165	0.99
شاخص بورس	6980.495	8652.177	0.5133	0.99
سکه طلا	515949.8	776232.5	0.3077	0.99

مطابق با نتایج جدول ۴ مشاهده می‌شود که سطح معناداری آزمون کلموگروف-اسمیرنوف برای تمامی داده‌ها بزرگتر از ۰/۰۵ بدست آمده و موید برازندگی توزیع مقادیر غایی با پارامترهای برآورد شده به ماکسیمم اختلافات داده‌ها از میانگین آن‌ها است. از این رو استفاده از چندک‌های توزیع مقادیر غایی برای شناسایی نقاط بازگشت به میانگین منطقی است. شکل‌های ۲ و ۳، نقاط شناسایی شده بازگشت به میانگین در هر یک از داده‌های اونس طلا، بیت کوین، اتریوم، یورو به دلار، نرخ ارز، شاخص بورس و سکه طلا را نشان می‌دهند. این نتایج برای یک نمونه میانگین متحرک با تأخیر ۵۰ و در سطح اطمینان ۹۵٪ حاصل شده است.



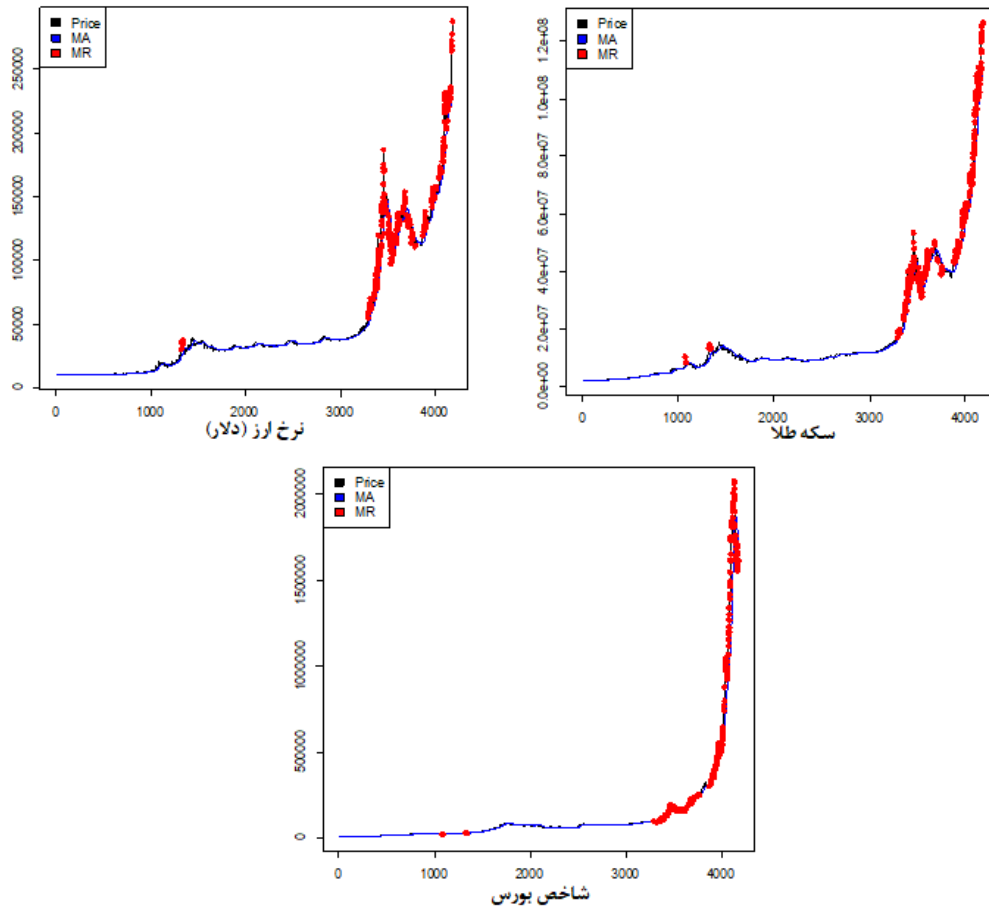


شکل ۲- تشخیص نقاط بازگشت به میانگین در قیمت اونس طلا، بیت کوین، اتریوم و نسبت یورو به دلار.
Figure 2- Detecting mean reversion points in Gold, Bitcoin, Ethereum and EURUSD.

بررسی نتایج این نمودارها نشان می‌دهد که نقاط بازگشت به میانگین (نقاط قرمز رنگ)، نه تنها برخی شکست‌های ساختاری در روند داده‌ها را نیز تعیین می‌کنند، بلکه در طول روند نیز نقاطی که فاصله زیادی با میانگین متحرک داده‌ها دارند را نیز تشخیص داده‌اند. اگرچه این نتایج در سطح خطای ۰/۰۵ حاصل شده و به دلیل وجود عوامل متعدد محیطی که بر سطح قیمت‌ها اثرگذارند، لزوماً نقاط شناسایی شده منجر به بازگشت به میانگین نخواهند شد و مقداری خطا در تشخیص وجود دارد. اما باید توجه داشت که این روش تشخیص نقاط بازگشت به میانگین بیش از هر سرمایه‌گذاری، مورد علاقه معامله‌گران نوسانی^۱ است.

بررسی نقاط بازگشت به میانگین در داده‌های مربوط به شاخص بورس، نرخ ارز و قیمت سکه نشان می‌دهد که نقاط متوالی قابل توجهی در این نمودار به عنوان نقاط بازگشت به میانگین شناسایی شده‌اند و علی‌رغم وجود این نقاط، مقادیر شاخص، نرخ ارز و قیمت سکه تمایل به حفظ روند دارند. لذا می‌توان از این نتیجه ایده گرفت که شناسایی نقاط متوالی بازگشت به میانگین در یک توالی از داده‌های مالی و عدم تمکین فرایند از ویژگی بازگشت به میانگین می‌تواند نشان‌های از شکل‌گیری حباب‌های قیمتی منفی یا مثبت در دارایی و یا اعمال سیاست‌های کنترلی از سوی بازار بر روی دارایی باشد، همانطور که مقادیر تاریخی داده‌های شاخص بورس، نرخ ارز و قیمت سکه طی دوره‌های اخیر نیز گواهی بر این ادعا بوده است.

^۱ Swing Traders



شکل ۳- تشخیص نقاط بازگشت به میانگین در شاخص بورس، نرخ ارز و سکه طلا.

Figure 3- Detecting mean reversion points in stock exchange index, exchange rate and gold coin.

به منظور راستی آزمایی روش ارائه شده در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین، به تعریف و مفهوم اولیه ویژگی بازگشت به میانگین استناد شد. بر این اساس، یک نقطه شناسایی شده در بازگشت به میانگین، مکانی از مشاهده فرایند است که داده‌ها از مقدار میانگین خود فاصله زیادی گرفته و در مشاهده بعدی، با احتمال بالایی به سمت میانگین خود بازمی‌گردند. با استناد به این مفهوم، اقدام به راستی آزمایی روش در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین شد و در این راستا، نقاط بازگشت به میانگین برای توابع میانگین متحرک با تأخیرهای ۱۴ تا ۱۰۰ روزه و به طور جداگانه برای هر میانگین متحرکی شناسایی شده و فاصله فرایند با میانگین متحرک مربوطه در مشاهده بعدی اندازه‌گیری شد. قابل ذکر است که فرایند در هر لحظه‌ای می‌تواند دچار کاهش یا افزایش شود، اما کاهش (افزایش) مقادیر فرایند در روندهای صعودی (نزولی) لزوماً به معنای بازگشت به میانگین نیست، بلکه با کاهش (افزایش) مقدار فرایند، مقدار میانگین متحرک نیز دچار کاهش (افزایش) می‌شود. از این رو یک نقطه از فرایند تنها زمانی به عنوان نقطه بازگشت به میانگین شناخته می‌شود که سرعت کاهش (افزایش) فرایند در آن نقطه از سرعت کاهش (افزایش) مقدار میانگین آن در آن لحظه بیشتر باشد. از این رو، کاهش فاصله مقادیر داده‌ها از مقدار میانگین متحرک در مشاهدات بعدی نقاط شناسایی شده، گواهی بر صحت شناسایی این نقاط بوده است. همچنین، ما برای حصول نتایج دقیق‌تر در شناسایی نقاط مذکور، از تبدیلات باکس-کاکس^۱ بر روی داده‌ها استفاده کردیم. این تبدیلات تنها به منظور بازمقیاس‌سازی^۲ فرایندها انجام شده‌اند و مفاهیم مالی مانند بازده لگاریتمی و... را دنبال نمی‌کنند. تبدیل منتخب بر روی مقادیر داده‌ها، تبدیل لگاریتمی دو مرحله‌ای $Ln(Ln(x))$ در نظر گرفته شده است. جدول ۵ تایید این ارزیابی را برای هر یک از دارایی‌های ریسکی مورد مطالعه نشان می‌دهد.

^۱ Box-Cox
^۲ Rescaling

جدول ۵- راستی آزمایشی روش در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین (درصد تشخیص های صحیح).

Table 5- Accuracy check of method in detecting mean reversion points (percentage of true detections).

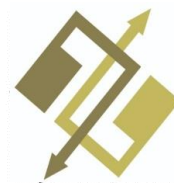
متغیر	تأخیرهای میانگین متحرک (روز)	تابع بازمقیاس سازی	میانگین	میانه	کمینه (تأخیر میانگین متحرک)	بیشینه (تأخیر میانگین متحرک)	آماره آزمون نسبت
اونس طلا	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	64.82545	65.85366	57.5 K=60	71.42857 K=33	7.6488**
بیت کوین	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	53.25821	52.99145	47.78761 K=61	62.02532 K=14	0.36943
اتریوم	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	67.56761	65.67164	62.06897 K=56	80.95238 K=16	10.74**
یورو به دلار	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	87.24216	88.23529	80.70175 K=100	92.85714 K=30	48.267**
نرخ دلار	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	70.83682	70.46632	68.10345 K=77	76.72414 K=19	15.109**
شاخص بورس	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	66.10907	70.46632	62.22222 K=22	71.32353 K=42	9.0307**
سکه طلا	14-100	$\text{Ln}(\text{Ln}(x))$	68.42065	66.66667	64.23841 K=41	80.85106 K=16	11.808**

*: معناداری در سطح ۰/۰۵، **: معناداری در سطح ۰/۰۱

مطابق با یافته‌های جدول ۵ مشاهده می‌شود که به طور متوسط، بهترین و بدترین درصد پیش‌بینی صحیح به ترتیب مربوط به نسبت یورو به دلار (۸۷/۲۴۲۱۶ درصد) و بیت کوین (۵۳/۲۵۸۲۱ درصد) بوده است. این ترتیب برای مقادیر بیشینه و کمینه درصد تشخیص‌های صحیح نیز برای نسبت یورو به دلار و بیت کوین برقرار بوده است. طبق این نتایج مشاهده می‌شود که میانگین متحرک‌های کوتاه‌مدت و میان‌مدت برای دستیابی به بالاترین میزان صحت در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین مطلوب بوده‌اند، اگرچه شاخص بورس برخلاف سایر دارایی‌های ریسکی مورد مطالعه، کمترین صحت تشخیص را در دوره کوتاه مدت ۲۲ روزه نشان داده است، اما در مورد سایر دارایی‌ها می‌توان نتیجه گرفت که استناد به حافظه کوتاه‌مدت داده‌ها و تأخیرهای کوچکتر در محاسبه فرایند میانگین متحرک، نتایج مطلوب‌تری به همراه دارد.

همچنین این نتایج موید این است که علی‌رغم یافته‌های آزمون دیکی فولر افزوده مبنی بر عدم وجود خاصیت بازگشت به میانگین، نقاطی در فرایند وجود دارد که ویژگی بازگشت به میانگین در داده‌ها را تأیید می‌کند. با توجه به یافته‌های کلی جدول (۵) می‌توان نتیجه گرفت که تشخیص نقاط بازگشت به میانگین بر اساس چندک‌های توزیع مقادیر غایی، در این تحقیق به طور خاص توزیع گامبل، علی‌رغم عوامل متعدد مالی و رفتاری اثرگذار بر تغییرات قیمت در بازارهای سرمایه، عملکرد مطلوبی داشته است. اگرچه بهبود برآورد پارامترهای توزیع و استفاده از توابع میانگین پویای دیگری (مانند توابع مبتنی بر مقدار مورد انتظار فرایندهای اورنشتاین-اولنبرگ) در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین نیز می‌تواند نتایج را به طور قابل توجهی بهبود بخشد. چرا که استفاده از فرایندهای میانگین متحرک، به عنوان میانگین پویای فرایند در طول زمان، به طور منطقی فرایند تشخیص را دشوار می‌سازد. اما با این حال، مطابق با یافته‌های جدول ۵، این روش توانسته حداقل ۴۷/۷۸ درصد و حداکثر ۹۲/۸۵ درصد از نقاط بازگشت به میانگین را به درستی تشخیص دهد که نسبت قابل توجهی بوده است. نتایج آزمون نسبت نیز که با فرض صفر آماری ($H_0: p = 0/5$) در مقابل فرض یکطرفه ($H_1: p > 0/5$) انجام شده‌اند، نشان از این دارند که نسبت‌های پیش‌بینی صحیح نقاط بازگشت به میانگین، بجز برای بیت کوین، برای سایر دارایی‌های ریسکی مورد مطالعه به طور معناداری از تشخیص‌های تصادفی و مبتنی بر شانس فاصله دارند و از این رو روش مبتنی بر چندک توزیع مقادیر غایی به طور معناداری می‌تواند نقاط بازگشت به میانگین را به درستی تشخیص دهد. اگرچه شواهدی نیز یافت شد که تبدیل ریشه سوم بر روی مقادیر بیت کوین منجر به افزایش معنادار درصد پیش‌بینی‌های صحیح (حداقل ۵۴/۳۱ و حداکثر ۶۸/۷۵ درصد) در مدل می‌شود. بنابراین، تبدیلات بکارگرفته شده در این تحقیق در راستای بازمقیاس سازی داده‌ها، لزوماً تبدیلات بهینه نبوده و قابلیت بهبود بیشتر در این نتایج، تحت تبدیلات دیگر نیز وجود دارد.





در این تحقیق به ارائه روشی برای تشخیص نقاط بازگشت به میانگین در داده‌های مالی پرداخته شد. ابتدا فرضیه وجود ویژگی بازگشت به میانگین از طریق دو آزمون دیکی فولر افزوده و توان هرست مورد آزمون قرار گرفته و نتایج نشان داد که این آزمون‌ها به دلیل ماهیت پویا و بسیار متغیر داده‌های مالی، نتایج قابل اتکایی ارائه نمی‌دهند و ما این نتیجه را به رفتار متغیر بازارهای سرمایه در دوره‌های متفاوت زمانی نسبت می‌دهیم. این نتایج، یافته‌های متفاوت رنجبر شمسی (۱۳۹۳) و کرباسی یزدی و همکاران (۱۳۹۱) در خصوص وجود ویژگی بازگشت به میانگین در بورس تهران و همچنین یافته‌های تجربی سایر محققان در خصوص نتایج متفاوت آزمون‌های متداول برای تشخیص وجود ویژگی بازگشت به میانگین در داده‌های مالی را توجیه می‌کند. همچنین نتایج حاصل از فرایند تشخیص نقاط بازگشت به میانگین نیز نشان داد که تشخیص این نقاط با استفاده از چندک توزیع مقادیر غایی (توزیع گامبل) حداقل در ۴۷/۷۸ درصد نقاط شناسایی شده (۵/۵ درصد از نقاط بدون در نظر گرفتن بیت کوین) و حداکثر در ۹۲/۸۵ درصد مشاهدات، صحیح بوده است که نشان از توان مطلوب این روش در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین دارد. همچنین در خصوص نقاط شناسایی شده برای شاخص بورس، نرخ دلار و قیمت سکه مشاهده شد که این روش می‌تواند گواهی بر شکل‌گیری حباب قیمتی در دارایی‌های ریسکی باشد، به طوری که شناسایی نقاط متوالی بازگشت به میانگین و عدم تبعیت فرایند در راستای کاهش فاصله با مقدار میانگین آن، ابزار شناسایی تشکیل حباب بوده است. این روش می‌تواند به عنوان یک روش علامتدهی^۱ در تشخیص نقاط بازگشت به میانگین بکار گرفته شده و با اتکا به سایر ابزارهای تحلیل روند نتایج بسیار مطلوبی را برای سرمایه‌گذاران با استراتژی‌های معاملاتی متکی بر نوسانات بازار به همراه آورد. از جمله این ابزارها می‌توان به تقابل‌های میانگین-متحرک و مومنتوم سهام و یا توابع میانگین-متحرک کوتاه‌مدت و بلندمدت اشاره کرد. اگرچه امکان مدل‌سازی ارزش در معرض خطر بر پایه توزیع مقادیر غایی نیز وجود دارد و در این راستا، روزگار و همکاران^۲ (۱۳۹۷)، شواهدی را از کاربرد برخی توزیع‌های آماری در تخمین ارزش در معرض خطر مستند کرده‌اند.

توافقنامه نویسندگان

اینجانبان حسین مهاجر و افشین فیاض موقر نسخه نهایی ارسال شده برای مجله را مشاهده و تأیید کرده‌ایم و تضمین می‌کنیم که مقاله، اثر اصلی نویسندگان بوده، قبلاً چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع مالی

در انجام این تحقیق، هیچ‌گونه کمک هزینه مالی از هیچ نهادی دریافت نشده است.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد.

منابع

- Ahmed, R. R., Vveinhardt, J., Streimikiene, D., & Channar, Z. A. (2018). Mean reversion in international markets: evidence from GARCH and half-life volatility models. *Economic research-Ekonomska istraživanja*, 31(1), 1198-1217.
- Chan, E. (2013). *Algorithmic trading: winning strategies and their rationale* (Vol. 625). John Wiley & Sons.
- Coles, S. (2003). *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer, New York
- Corbet, S., & Katsiampa, P. (2020). Asymmetric mean reversion of Bitcoin price returns. *International review of financial analysis*, 71, 101267. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2018.10.004>
- Diebolt, J., Guillou, A., Naveau, P., & Ribereau, P. (2008). Improving probability-weighted moment methods for the generalized extreme value distribution. *REVSTAT-statistical journal*, 6(1), 33-50.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of business*, 38(1), 34-105. <https://www.jstor.org/stable/2350752>
- Fayyaz Movaghar, A., Launay, G., Schbath, S., Gibrat, J. & Rodolph, O. (2012). Statistical Significance of Threading Scores, *Journal of computational biology*, 19 (1), 13-29. <https://doi.org/10.1089/cmb.2011.0236>

^۱Signaling method

^۲Roozegar et al.



- Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928, April). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society* (Vol. 24, No. 2, pp. 180-190). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/S0305004100015681>
- Fréchet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Math. Polon.*, 6, 93-116. (in Japanese). <https://ci.nii.ac.jp/naid/10006416704/>
- Marín Sánchez, F. H., & Palacio, J. S. (2013). Gaussian estimation of one-factor mean reversion processes. *Journal of probability and statistics*. <https://doi.org/10.1155/2013/239384>
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*. New York: John Wiley and Sons.
- Gbenro, N., & Moussa, R. K. (2019). Asymmetric mean reversion in low liquid markets: Evidence from BRVM. *Journal of risk and financial management*, 12(1), 38. <https://doi.org/10.3390/jrfm12010038>
- Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, 44(3), 423-453. <https://doi.org/10.2307/1968974>
- Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of extremes*. New York: Columbia university press
- Karbasi, Y. H., Noorifard, Y., & Chenari, B. H. (2013). The study of mean reversion in Tehran stock exchange with unit root test. *Investment knowledge*, 1(4), 87-103. (In Persian). https://jik.srbiau.ac.ir/article_7416.html?lang=fa
- Kaviani, M., & Fakhrehosseini, S. F. (2018). Application of operations research techniques in financial research. *Decisions and operations research*, 3(2), 164-177. (In Persian) DOI: 10.22105/dmor.2018.67216
- Kuhe, D. A., & Audu, S. D. (2016). Modelling volatility mean reversion in stock market prices: Implications for long-term investment. *Nigerian journal of scientific research*, 15(1), 131-139.
- Kuttu, S. (2018). Asymmetric mean reversion and volatility in African real exchange rates. *Journal of economics and finance*, 42(3), 575-590. <https://doi.org/10.1007/s12197-017-9412-z>
- Narayan, P. K., & Narayan, S. (2007). Mean reversion in stock prices: new evidence from panel unit root tests. *Studies in economics and finance*, 24(3), 233-244. <https://doi.org/10.1108/10867370710817419>
- Oikarinen, E., & Schindler, F. (2015). Momentum and mean reversion in regional housing markets: evidence from variance ratio tests. *International journal of strategic property management*, 19(3), 220-234. <https://doi.org/10.3846/1648715X.2015.1031854>
- Palwasha, R. I., Ahmad, N., Ahmed, R. R., Vveinhardt, J., & Štreimikienė, D. (2018). Speed of mean reversion: An empirical analysis of KSE, LSE and ISE indices. *Technological and economic development of economy*, 24(4), 1435-1452. DOI: <https://doi.org/10.3846/20294913.2017.1342286>
- Ranjbar Shamsi, N. (2014). *Analysis of mean reversion feature in stock price and return* (Master thesis, Islamic Azad University of Central Tehran Branch). (In Persian). Available at <https://ganj.irandoc.ac.ir/#/articles/a03d8406908f738d71d157e4ae19bdc8>
- ROOZEGAR, R., Soufi, B., & Taherizadeh, H. R. (2018). Calacualting value at risk and expected shortfall of some statistical distributions. *Journal of decisions and operations research*, 3(1), 72-81. (In Persian) DOI: 10.22105/dmor.2018.64783
- Shaik, M., & Maheswaran, S. (2018). Expected lifetime range ratio to find mean reversion: Evidence from Indian stock market. *Cogent economics & finance*, 6(1), 1475926. <https://doi.org/10.1080/23322039.2018.1475926>
- Shirkond, S., Mohammadi, S., & Dolati, N. An investigation on the presence of mean reversion in stock prices in tehran stock exchange. *Financial research journal*, 10(25), 41-56. (In Persian). https://jfr.ut.ac.ir/article_27744.html
- Soleymanpour Bakefayat, A. (2018). Solving nonlinear optimization via Nelder-Mead optimization method. *Journal of decisions and operations research*, 3(1), 1-10. (In Persian) DOI: 10.22105/DMOR.2018.63496
- Spierdijk, L., Bikker, J. A., & van den Hoek, P. (2010). Mean reversion in international stock markets: an empirical analysis of the 20th century. *Journal of international money and finance*, 31(2), 228-249. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2011.11.008>
- Tang, C. Y., & Chen, S. X. (2009). Parameter estimation and bias correction for diffusion processes. *Journal of econometrics*, 149(1), 65-81. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2008.11.001>
- Tehrani, R., Allah Ansari, H., & Saranj, A. (2009). The Study of mean reversion in tehran security exchange using variance ratio test. *Accounting and auditing review*, 16(1), 17-32. (In Persian). https://acctgrev.ut.ac.ir/article_19958_1979.html?lang=fa
- Tie, J., & Zhang, Q. (2016). An optimal mean-reversion trading rule under a Markov chain model. *Mathematical control & related fields*, 6(3), 467-488. DOI: 10.3934/mcrf.2016012
- Torki, P. (2018). *Representing the trading algorithm in future market of gold coin based on the feature of mean reversion* (Master thesis, University of Isfahan). (In Persian). Retrieved from <http://www.iranlibs.ir/inventory/34/2311.htm>
- Wilmott, P. (Ed.). (2005). *The best of Wilmott 1: Incorporating the quantitative finance review*. John Wiley & Sons.
- Wu, Y., & Lux, N. (2018). UK house prices: bubbles or market efficiency? Evidence from regional analysis. *Journal of risk and financial management*, 11(3), 54. <https://doi.org/10.3390/jrfm11030054>