



Malliavin Calculus in Statistical Inference: Cramer-Rao Lower Bound for Fuzzy Random Variables

Hossein Jafari*, Mohamad Javad Ebadi

Department of Mathematics, Chabahar Maritime University, Chabahar, Iran.

Abstract

The Cramer-Rao lower bound is obtained by using integration by parts and the Cauchy-Schwarz inequality. The integration by parts formulas of Malliavin calculus plays a role in this study. The point estimation problem is very crucial and has a wide range of applications. When we deal with some concepts such as random variables, the parameters of interest and estimates may be observed as imprecise. Therefore, the theory of fuzzy sets is important in formulating such situations. Using the fuzzy set theory, we define a fuzzy-valued random variable and fuzzy stochastic process. We use the Malliavin derivative and Skorohod integral to study the asymptotic properties of the statistical model for fuzzy random variables. We show how to use the conditional expectations of certain expressions to derive Cramer-Rao lower bounds for Fuzzy valued Random Variables that they do not require the explicit expression of the likelihood function. As an example, we consider a fuzzy random sample of size n induced by independent standard normally distributed random variables with fuzzy parameter.

Keywords: Malliavin derivative, Skorohod integral, Fuzzy random variable, Cramer-Rao lower bound.

Paper Type: Original

Receive: 13/03/2020

Revise: 28/06/2020

Accept: 31/07/2020

حسابان مالی‌اوین در استنباط آماری فازی: کران پایین کرامر-رائو برای متغیرهای تصادفی فازی

حسین جعفری^۱، محمد جواد عبادی

گروه ریاضی، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، چابهار، ایران.

چکیده

کران پایین کرامر-رائو با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و نامساوی کوشی شوارتز به دست می‌آید. انتگرال‌گیری جزء به جزء در حسابان مالی‌اوین در این مطالعه نقش خواهد داشت. تخمین نقطه‌ای در آمار و احتمالات بسیار حیاتی است و طیف گسترده‌ای از کاربردها را دارد. مشکل تخمین نقطه‌ای بسیار حیاتی است و طیف گسترده‌ای از کاربردها دارد. هنگامی که با برخی مفاهیم مانند متغیرهای تصادفی مقابله می‌کنیم، پارامترهای موردنظر و برآوردها ممکن است غیردقیق مشاهده شوند. بنابراین، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در شکل‌دادن چنین شرایطی اهمیت دارد. با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی، متغیر تصادفی با مقدار فازی و فرایند تصادفی فازی را تعریف می‌کنیم. به منظور مطالعه خاصیت‌های مجانبی مدل آماری برای متغیرهای تصادفی فازی، از مشتق مالی‌اوین و انتگرال اسکورهود استفاده می‌کنیم. چگونگی استفاده از امیدهای شرطی عبارات معین، برای به دست آوردن کران‌های پایین کرامر-رائو برای متغیرهای تصادفی با مقادیر فازی، که نیازی به بیان صریح تابع احتمالی نداشته باشند، را نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، نمونه‌ای تصادفی فازی به اندازه n را که به وسیله متغیرهای تصادفی توزیع نرمال مستقل با پارامتر فازی ایجاد شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مشتق مالی‌اوین، انتگرال اسکورهود، متغیر تصادفی فازی، کران پایین کرامر-رائو.

نوع مقاله: پژوهشی

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۰

اصلاح: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸

دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲۳

استنباط آماری فرآیندی است که در آن، نتیجه‌گیری‌ها براساس داده‌های جمع‌آوری‌شده از نمونه‌ای از یک جامعه انجام می‌پذیرد. روش‌های کلاسیک آماری معمولاً به داده‌های قطعی و پارامترهای دقیق متکی است. اما فرض نمودن این‌که پارامترها دارای مقادیر دقیق می‌باشند یا متغیرهای تصادفی به‌صورت مقادیر دقیق در نظر گرفته شوند، مشکل است. از طرف دیگر، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی یک ابزار شناخته‌شده و مفید در تجزیه و تحلیل مفاهیم نادقیق است. مسئله‌ی برآورد نقطه‌ای برای یک پارامتر نامشخص با استفاده از داده‌های فازی، در رویکردهای مختلف توسعه یافته است. در نظریه‌ی آماری کلاسیک، کران پایین کرامر-رائو با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و نامساوی کوچی-شوارتز به دست آمده است. بنابراین فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء حسابان مالیاوین می‌تواند در این مقاله مورد استفاده قرار گیرد. می‌توان از تکنیک‌های مشابهی برای استنباط عبارت‌هایی در یک مدل آماری پارامتری برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر و کران‌های کرامر-رائو استفاده نمود. مزیت این عبارت‌ها این است که مستقیماً به بیان صریح تابع احتمالی نیاز ندارند و فرم آن برای مطالعه خواص مجانبی مدل و بعضی برآوردها مناسب است. گوبت^۱ (۲۰۰۱) از خاصیت دوگانی یک فضای گاوسی به منظور مطالعه نرمال بودن ترکیبی مجانبی موضعی مدل‌های توزیع پارامتری، زمانی که مشاهدات به صورت گسسته مشاهده می‌شود، استفاده می‌نماید. کورکورا و کهاتسو-هیگا^۲ (۲۰۱۱) از تکنیک‌های حسابان مالیاوین برای مطالعه خواص مجانبی مدل آماری و به دست آوردن کران‌های پایین کرامر-رائو برای متغیرهای قطعی استفاده نموده‌اند. بعضی از روش‌های استنباط آماری با داده‌های فازی در (ویرتل^۳، ۲۰۰۶) و (عبادی و همکاران^۴، ۲۰۱۳) در نظر گرفته شده‌اند. باکلی^۵ (۲۰۰۵) و باکلی^۶ (۲۰۰۶) مسائل استنباط آماری در محیط فازی را مطالعه می‌نماید. اکبری و رضایی^۷ (۲۰۰۷) روش جدیدی برای تخمین گر نقطه‌ای فازی نارایب به طور یکپارچه با کمترین واریانس پیشنهاد نمودند. ترابی^۸ (۲۰۰۶) با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی و تعریف متغیر تصادفی فازی با تابع احتمالی معلوم، یک کران پایین کرامر-رائو برای برآوردهای فازی بیان و اثبات می‌نماید. در این مقاله، متغیرهای تصادفی فازی کانونی را در نظر می‌گیریم. سپس حسابان مالیاوین را برای یک نمونه‌ی تصادفی فازی با پارامتر فازی اعمال می‌کنیم تا یک کران پایین کرامر-رائو برای تابع واریانس فازی یک تخمین گر نارایب منظم از یک تابع پارامتری را بیابیم. نمونه‌های تصادفی فازی به وسیله یک نمونه‌ی تصادفی قطعی با توزیع معلوم، استنتاج شده‌اند. بخش ۲ به برخی از مباحث مقدماتی در محاسبات فازی، متغیرهای تصادفی فازی و فرآیندهای تصادفی فازی اختصاص داده شده است. در بخش ۳، مروری بر حسابان مالیاوین برای متغیر تصادفی قطعی در فضای گاوسی خواهیم نمود. در بخش ۴، تعاریف و نتایج به دست آمده را برای یافتن یک کران پایین کرامر-رائو برای واریانس فازی به کار می‌بریم.

۲- سابقه فازی

یک مجموعه‌ی فازی $A \in R$ با تابع عضویت $\mu_A: R \rightarrow [0,1]$ شناخته شده است و $\mu_A(x)$ (برای هر $x \in R$) درجه عضویت x در مجموعه‌ی فازی A است. برای مرور تعریف و خواص مجموعه‌های فازی و اعداد فازی می‌توان به (تقی نژاد و تالشیان^۹، ۲۰۱۸)، (کومار داس و مندل^{۱۰}، ۲۰۱۷) و (فراهانی و همکاران^{۱۱}، ۲۰۱۹) اشاره کرد.

تعریف ۱- مجموعه‌های فازی A به گونه‌ای که برای هر $\alpha \in [0,1]$ $[A]^\alpha = \{x \in R; \mu_A(x) \geq \alpha\}$ باشد، با $F(R)$ نشان داده می‌شوند. مجموعه تراز-صفر $[A]^0$ از A با بستر مجموعه $\{x \in R; \mu_A(x) \geq 0\}$ تعریف شده است. از نماد $[A]^\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$ برای نمایش صریح α -برش‌های A استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲- مجموعه‌ی فازی A یک مجموعه‌ی فازی نرمال نامیده می‌شود هرگاه x به گونه‌ای وجود داشته باشد که $\mu_A(x) = 1$.

^۱Gobet

^۲Corcuera & Kohatsu-Higa

^۳Viertl

^۴Ebadi et al.

^۵Buckley

^۶Buckley

^۷Akbari & Rezaei

^۸Torabi

^۹Taghi-Nezhad & Taleshian

^{۱۰}Kumar Das & Mandal

^{۱۱}Farahani et al.



تعریف ۳- فرض کنید A یک زیر مجموعه از R باشد، در این صورت A یک عدد فازی نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

- یک مجموعه‌ی فازی نرمال و محدب باشد.
- تابع عضویتش μ_A نیم پیوسته بالایی باشد.
- مجموعه تراز-صفر، $[A]^0$ کران‌دار باشد.

تعریف ۴- اگر A عدد فازی کران‌دار و بسته به گونه‌ای باشد که $[A]^\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$ و تابع عضویتش بر $[a_l^\alpha, a_l^l]$ صعودی اکید و بر $[a_u^\alpha, a_u^l]$ نزولی اکید باشد، آن‌گاه A عدد فازی کانونی نامیده می‌شود.

تعریف ۵- (عملگرهای حسابان فازی استاندارد). اگر $[A]^\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$ و $[B]^\alpha = [b_l^\alpha, b_u^\alpha]$ دو بازه فازی داده شده به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، عملگرهای حسابان فازی استاندارد به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned}
 & [A \oplus B]^\alpha = [a_l^\alpha + b_l^\alpha, a_u^\alpha + b_u^\alpha] \\
 & [A \ominus B]^\alpha = [a_l^\alpha - b_u^\alpha, -a_l^\alpha + b_u^\alpha] \quad \text{به ازای } k \in R \text{ به ویژه اگر } k = -1 \text{ باشد، آن‌گاه } [-A]^\alpha = [-a_l^\alpha, -a_u^\alpha] \\
 & [kA]^\alpha = [\min\{ka_l^\alpha, ka_u^\alpha\}, \max\{ka_l^\alpha, ka_u^\alpha\}] \\
 & (ab)_l^\alpha = \min\{a_l^\alpha b_l^\alpha, a_l^\alpha b_u^\alpha, a_u^\alpha b_l^\alpha, a_u^\alpha b_u^\alpha\} \quad \text{با } [A \otimes B]^\alpha = [(ab)_l^\alpha, (ab)_u^\alpha] \\
 & (ab)_u^\alpha = \max\{a_l^\alpha b_l^\alpha, a_l^\alpha b_u^\alpha, a_u^\alpha b_l^\alpha, a_u^\alpha b_u^\alpha\} \\
 & \text{اگر } [b_l^0, b_u^0] \notin [b_l^\alpha, b_u^\alpha] \text{، آن‌گاه } [A \odot B]^\alpha = \left[\left(\frac{a}{b}\right)_l^\alpha, \left(\frac{a}{b}\right)_u^\alpha \right] \text{ است با } \left(\frac{a}{b}\right)_l^\alpha = \min\left\{\frac{a_l^\alpha}{b_l^\alpha}, \frac{a_l^\alpha}{b_u^\alpha}, \frac{a_u^\alpha}{b_l^\alpha}, \frac{a_u^\alpha}{b_u^\alpha}\right\}
 \end{aligned}$$

و

$$\left(\frac{a}{b}\right)_u^\alpha = \max\left\{\frac{a_l^\alpha}{b_l^\alpha}, \frac{a_l^\alpha}{b_u^\alpha}, \frac{a_u^\alpha}{b_l^\alpha}, \frac{a_u^\alpha}{b_u^\alpha}\right\}. \quad (1)$$

فرض کنید $(\Omega, A, \{A_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ کامل بوده، فضای احتمالی فیلتر شده با یک فیلتر $\{A_t\}_{t \in [0, T]}$ باشد که فرضیه‌های رایج را برآورده نموده، یک خانواده‌ی صعودی و از راست پیوسته از زیر سیگما جبرهای σ از A و شامل تمام مجموعه‌های P -صفر باشد (منتظری^۱، ۲۰۱۹).

فرض کنید S_X تکیه‌گاه یک متغیر تصادفی X باشد، در این صورت یک زیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{x}$ از S_X با تابع عضویتش $\mu_{\tilde{x}}: S_X \rightarrow [0, 1]$ تعریف شده است. عدد حقیقی $x \in S_X$ داده شده است در این صورت می‌توان عدد فازی $\tilde{x}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{x}}(r)$ را به گونه‌ای استنباط نمود که $\mu_{\tilde{x}}(x) = 1$ و به ازای $r \neq x$ ، $\mu_{\tilde{x}}(r) < 1$ باشد. $\tilde{x}$ را یک عدد حقیقی فازی استنتاج شده به وسیله عدد حقیقی x می‌نامیم. X را یک متغیر تصادفی با تکیه‌گاه S_X و $F(S_X)$ را مجموعه‌ی همه اعداد حقیقی فازی استنتاج شده توسط اعداد حقیقی S_X در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که $F(S_X)$ تکیه‌گاه متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ بوده و هر مجموعه‌ی α برش $\tilde{X}$ وابسته به متغیر تصادفی X باشد. از این‌رو متغیر تصادفی $\tilde{X}$ به وسیله X استنتاج شده است.

گزاره ۱- (اکبری و خنجری صادق^۲، ۲۰۱۲). اگر $F(R)$ یک دستگاه اعداد حقیقی فازی کانونی باشد، آن‌گاه $\tilde{X}$ یک متغیر حقیقی فازی است اگر و تنها اگر X_l^α و X_u^α به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ متغیرهای تصادفی باشند.

پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ یک زیر مجموعه‌ی فازی از θ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{\theta}}$ است. فرض می‌کنیم که پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ یک عدد حقیقی فازی کانونی در نظر گرفته شده باشد.



تعریف ۶- گوئیم $\tilde{X}$ دارای یک توزیع با پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ استنتاج یافته توسط X است اگر X_I^α و X_{II}^α دارای توزیع یکسانی مانند X به ترتیب با پارامترهای θ_I^α و θ_{II}^α باشند.

تعریف ۷- فرض کنید $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ دو متغیر حقیقی فازی استنتاج یافته توسط X و Y باشند. در این صورت گوئیم $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ مستقل اند اگر و تنها اگر هر متغیر تصادفی در مجموعه $\{X_I^\alpha, X_{II}^\alpha: \alpha \in [0, 1]\}$ مستقل از هر متغیر تصادفی در مجموعه $\{Y_I^\alpha, Y_{II}^\alpha: \alpha \in [0, 1]\}$ باشد.

تعریف ۸- متغیرهای تصادفی فازی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ هم توزیعند، اگر و تنها اگر به ازای هر $X_I^\alpha, X_{II}^\alpha, Y_I^\alpha, Y_{II}^\alpha, \alpha \in [0, 1]$ هم توزیع و X_{II}^α و Y_{II}^α نیز هم توزیع باشند.

فرض کنید $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ (یک نمونه تصادفی فازی به اندازه n استنتاج یافته توسط $X_1, X_2, \dots, X_n$) با پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ باشد. گوئیم نمونه تصادفی $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی است اگر و تنها اگر $\tilde{X}_i$ ها هم توزیع و مستقل باشند. برای پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ مجموعه α برش $\tilde{\theta}^\alpha = [\theta_I^\alpha, \theta_{II}^\alpha]$ را داریم. در این صورت از پیوستگی θ_I^α و θ_{II}^α نسبت به α به ازای هر $\theta \in [\theta_I^\alpha, \theta_{II}^\alpha]$ یا θ_I^β یا θ_{II}^β به گونه ای وجود دارد که برای برخی $\beta \geq \alpha$ یا $\theta = \theta_I^\beta$ یا $\theta = \theta_{II}^\beta$ باشند. برای هر پارامتر $\theta \in \tilde{\theta}$ تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_I^\alpha &= \min \left[\inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{ \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_{II}^\beta \}, \right. \\ &\quad \left. \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{ \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_{II}^\beta \} \right], \\ \hat{\theta}_{II}^\alpha &= \max \left[\sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{ \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_{II}^\beta \}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \{ \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_{II}^\beta \} \right].\end{aligned}\quad (2)$$

بازه $[\hat{\theta}_I^\alpha, \hat{\theta}_{II}^\alpha]$ شامل تمام برآورد کننده های قطعی $\theta \in \tilde{\theta}^\alpha$ از هر متغیر تصادفی X_{II}^β و X_{II}^β به ازای $\beta \geq \alpha$ است.

تعریف ۹- فرض کنید نگاشت $\tilde{X}(t): \Omega \rightarrow F(R)$ به آرامی هر $t \in [0, T]$ یک متغیر تصادفی فازی باشد، در این صورت $\tilde{X}: I \times \Omega \rightarrow F(R)$ یک فرآیند تصادفی فازی است.

۳- حسابان مالیابون گاوسی برای متغیر تصادفی قطعی

برخی از تعاریف و حقایق حسابان مایوان برای فضای وینر را یادآوری می کنیم. برای مطالعه ی بیش تر درباره فرایندهای وینر خواننده را به (نولارت^۱، ۲۰۰۶) و (سانز-سولی^۲، ۲۰۰۵) ارجاع می دهیم. فضای احتمالی (Ω, A, P) را در نظر بگیرید. به ازای $n \geq 0$ چند جمله ای های مشهور هرمیت را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right). \quad (3)$$

که نسبت به قانون گاوس متعامد یکه اند. برای هر فرآیند گاوسی ایزو نرمال X و برای هر $n \geq 0$ آشوب وینر از مرتبه n که H_n با نشان داده می شود را به صورت زیر فضای خطی بسته $L^2(\Omega, A, P)$ تولید شده به وسیله $\{H_n(X(h)), h \in H, \|h\|_H = 1\}$ تعریف می کنیم.

مشاهده می شود که $H_0 = R$ و $H_1 = \{X(h), h \in H\}$ است و این فضاها بر یکدیگر متعامدند. علاوه بر این بنابر (ایتو^۳، ۱۹۵۱) مشهور است که $L^2(\Omega, F, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ می باشد. این بدین معنی است که هر متغیر تصادفی $F \in L^2(\Omega, A, P)$ می تواند به یک سری به طور یکتا

^۱Nualart
^۲Sanz-Solé
^۳Itô

مشخص شده از اجزای متعامد متعلق به هر H_n توسعه یابد. اگر تصویر i به آشوب وینر m H_n را با J_n نشان داده و نرم در $L^2(\Omega)$ را با $\|\cdot\|_2$ نشان دهیم، در این صورت داریم:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} J_n F. \quad (4)$$

و

$$\|F\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|J_n F\|_2^2. \quad (5)$$

حال یک حسابان متناظر با یک فرآیند گاوسی ایزونرمال X به شیوه زیر می‌سازیم:

S را مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی هموار به شکل

$$F = f(X(h_1), \dots, X(h_n)). \quad (6)$$

در نظر بگیرید که در آن f تابعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر R^n برای هر $n \geq 1$ به گونه‌ای باشد که تمام مشتقات جزئی اش دارای رشد چندجمله‌ای باشند. به یاد آورید که مجموعه S به ازای هر $p \geq 1$ در $L^p(\Omega)$ چگال است. مشتق مالیاوین F عضوی از $L^2(\Omega, H)$ است که به صورت زیر تعریف شده است، به ویژه که $DX(h) = h$ است.

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_i f(X(h_1), \dots, X(h_n)) h_i. \quad (7)$$

آن می‌تواند به عنوان یک عملگر بسته و بی کران چگال تعریف شده از $L^2(\Omega)$ به $L^2(\Omega, H)$ با دامنه‌ی چگال که به صورت $D^{1,2}$ نمایش داده شده می‌شود. هم چنین می‌توانیم تکرار این عملگر D را به گونه‌ای تعریف نماییم که مشتق تکرار شده $D^k F$ یک متغیر تصادفی باشد که به ازای هر $k \geq 1$ متعلق به $L^2(\Omega, H^{\otimes k})$ است. برای هر $k \geq 0$ و $p \geq 1$ $D^{k,p}$ نشان‌دهنده بستار S نسبت به نرم $\|F\|_{k,p} = [E(|F|^p) + \sum_{j=1}^k E(\|D^j F\|_H^p)]^{1/p}$ است. هم چنین

$$D^{k,\infty} := \bigcap_{p \geq 1} D^{k,p}. \quad (8)$$

و

$$D^{\infty,\infty} = \bigcap_{k \geq 0} \bigcap_{p \geq 1} D^{k,p}. \quad (9)$$

را می‌نویسیم. به یاد آورید که به ازای $k=0$ ، $D^0 = Id$ و به ازای هر $p \geq 1$ ، داریم $D^{0,p} = L^p(\Omega)$. به علاوه براساس تجزیه آشوب وینر داریم:

$$DF = \sum_{n=0}^{\infty} D(J_n F) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{n-1}(DF). \quad (10)$$

عملگر δ به صورت الحاقی عملگر D تعریف شده است. هم چنین این عملگر $L^2(\Omega, H)$ از $L^2(\Omega)$ چگال و بسته تعریف شده است. دامنه اش با $Dom \delta$ نشان داده شده و شامل $D^{1,2}(H)$ یعنی فضای H مقداری متغیرهای تصادفی با مشتق اول مالیاوین است. اگر $F \in D^{1,2}$ و $u \in Dom \delta$ باشند، در این صورت رابطه‌ی دوگانی

$$E(F\delta(h)) = E(\langle DF, h \rangle_H). \quad (11)$$

را داریم. اگر فرض کنیم h عضوی از H باشد، آن گاه $\delta(h) = W(h)$ است. اگر $u = \sum_{i=1}^n F_i h_i$ را در نظر بگیریم که $F_i \in S$ است و h_i اعضای H باشند، در این صورت

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^n F_i W(h_i) - \sum_{i=1}^n \langle DF_i, W(h_i) \rangle_H \quad (12)$$

۴- کران پایین کرامر-رائو

یک مدل آماری پارامتری به صورت سه گانه $(X, A_x, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ تعریف شده است که در آن فضای نمونه ای است که متناظر با مقادیر احتمالی بردار تصادفی n بعدی $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ است، A_x یک σ -میدان مشاهدات رؤیت شده است و $\theta \in \Theta$ خانواده ای از توابع احتمالی ممکن از X است. آماره ای که یک نگاشت اندازه پذیر $T: X \rightarrow R$ است و θ یک بازه باز در R است را در نظر بگیرید. هم چنین $E(T(X)) = g(\theta)$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۱۰- آماره انتگرال پذیر مربعی T منظم نامیده می شود هرگاه $\partial_\theta E(T(X)) = E(\partial_\theta T(X))$ و $Var(T(X)) < \infty$ باشند.

فرض ۱- مفروضات زیر را در نظر بگیرید:

- (۱-۱) X دارای یک چگالی $p(\cdot; \theta) \in C^1$ به ازای هر $\theta \in \Theta$ با $supp(X)$ مستقل از θ است.
- (۱-۲) متغیر تصادفی $X(\omega, \cdot) \in C^1$ تابعی از θ به ازای هر $\omega \in \Omega$ است. به علاوه $\partial_\theta X_i \in L^2(\Omega)$ است و $E(\partial_\theta X_i | X=x) \in C^1$ به صورت تابعی از x به ازای هر $i=1, 2, \dots, n$ و $\theta \in \Theta$ است.
- (۱-۳) به ازای $i=1, \dots, n$ $\frac{\partial_{x_i}(E(\partial_\theta X_i | X)p(X; \theta))}{p(X; \theta)} \in L^2(\Omega)$ را به گونه ای داریم که برای هر تابع هموار h $\partial_{x_i} h(X) := \partial_{x_i} h(x)|_{x=X}$ را نمایش می دهیم.
- (۱-۴) هر آماره $T \in C^1$ با تکیه گاه فشرده در درون $supp(X)$ منظم است.
- (۱-۵) $p(x; \theta)$ به عنوان تابعی از θ برای هر x ثابت هموار است.
- (۱-۶) برای هر آماره هموار T با تکیه گاه فشرده در درون $supp(X)$.

$$\partial_\theta \int_{R^n} T(x) p(x; \theta) dx = \int_{R^n} T(x) \partial_\theta p(x; \theta) dx, \forall \theta \in \Theta. \quad (13)$$

گزاره ۲- (کورکورا و کهاتسو-هیگا، ۲۰۱۱). (نامساوی کرامر-رائو) فرض کنید T یک آماره منظم به گونه ای باشد که فرضیات (۱) و (۱-۳) و (۱-۴) برقرار است.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E(\partial_\theta X_i | X=x) p(x; \theta) = 0. \quad (14)$$

به ازای $i=1, \dots, n$ و $\forall \theta \in \Theta$ و $\forall x_0 \in \partial supp(X)$ که $\partial supp(X)$ مرز تکیه گاه X شامل x_0 در $\partial supp(X)$ است اگر $supp(X)$ فشرده نباشد، آن گاه

$$Var(T(X)) \geq \frac{(\partial_\theta E(T(X)))^2}{E \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial_{x_i}(E(\partial_\theta X_i | X)p(X; \theta))}{p(X; \theta)} \right)^2}. \quad (15)$$

ارایه شده که مخرج صفر نیست.

در مدل های کلاسیک، هنگامی که فرم صریح تابع چگالی p در دسترس باشد، محاسبه می تواند انجام شود. اما کران فوق هم چنین می تواند بدون استفاده مستقیم چگالی صریح p اعمال شود.

ملاحظه ۱- فرضیات (۱-۱) را در نظر بگیرید، یعنی

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial_{x_i}(E(\partial_\theta X_i | X=x)p(x; \theta))}{p(x; \theta)} = \partial_\theta \log p(x; \theta), \forall \theta \in \Theta. \quad (16)$$

که نشان می دهد معادله (۱۵) نامساوی کرامر-رائو مرسوم است.



قضیه ۱- (کورکورا و کهاتسو-هیگا، ۲۰۱۱). فرض کنید $X_j \in D^{1,2}$ ، $j=1, \dots, n$ یک متغیر تصادفی با مقادیر در H در دامنه‌ی δ به‌گونه‌ای باشند که $\langle Z, DX_j \rangle_H = \partial_\theta X_j$ اگر T یک برآورد کننده نااریب منظم از $g(\theta)$ باشد آن‌گاه

$$Var(T(X))Var(E(\delta(Z)|X)) \geq (g'(\theta))^2. \quad (17)$$

علاوه بر این فرض کنید که

– X دارای چگالی $p(x; \theta) \in C^1$ به‌عنوان تابعی از θ با تکیه‌گاه $supp(X)$ مستقل از θ باشد،

– هر آماره هموار با تکیه‌گاه فشرده در درون $supp(X)$ منظم باشد و

$$\partial_\theta \int_{R^n} T(x) p(x; \theta) dx = \int_{R^n} T(x) \partial_\theta p(x; \theta) dx, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (18)$$

آن‌گاه به‌ازای هر $\theta \in \Theta$

$$E(\delta(Z)|X) = \partial_\theta \log p(X; \theta), a.s. \quad (19)$$

است.

ملاحظه ۲- به‌منظور یافتن Z در نظر بگیرید که یک بردار تصادفی n بعدی U با مقادیر در H به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که $\langle U_k, DX_j \rangle_H = \delta_{kj}$ ، که δ_{kj} دلتای کرونکر است، در این صورت $Z = \sum_{k=1}^n U_k \partial_\theta X_k$ است. می‌توان $U_k = \sum_{j=1}^n A_{kj} DX_j$ را قرار داد که در آن $A_{kj} = \left(\langle DX_k, DX_j \rangle_H \right)^{-1}$ است.

گزاره ۳- فرضیات (۱-۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی به‌اندازه n استنتاج شده به‌وسیله نمونه‌ی تصادفی $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ با پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ باشد. آن‌گاه برای تابع واریانس فازی $\tilde{T}(\tilde{X})$ از یک برآوردگر فازی نااریب منظم از $g(\tilde{\theta})$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{v}}(y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{[v_l^\alpha, v_u^\alpha]}(y), \quad (20)$$

داریم:

$$v_u^\alpha \geq \max \left[\sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_l^\beta))^2}{Var(E(\delta(Z_l^\beta)|X_l^\beta))}, \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_u^\beta))^2}{Var(E(\delta(Z_u^\beta)|X_u^\beta))} \right]. \quad (21)$$

برهان. فرض کنید $\tilde{T}(\tilde{X})$ یک برآوردگر فازی از $g(\tilde{\theta})$ باشد. در این صورت با استفاده از قضیه ۱ به‌ازای $X \in \tilde{X}^\alpha$ و $\theta \in \tilde{\theta}^\alpha$ داریم:

$$var(\tilde{T}^\alpha(X)) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{Var(E(\delta(Z)|X))}. \quad (22)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_l^\alpha(\tilde{T}(\tilde{X})) \geq \min \left[\inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_l^\beta))^2}{Var(E(\delta(Z_l^\beta)|X_l^\beta))}, \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_u^\beta))^2}{Var(E(\delta(Z_u^\beta)|X_u^\beta))} \right], \quad (23)$$

$$v_u^\alpha(\tilde{T}(\tilde{X})) \geq \max \left[\sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_l^\beta))^2}{\text{Var}(E(\delta(Z_l^\beta)|X_l^\beta))}, \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_u^\beta))^2}{\text{Var}(E(\delta(Z_u^\beta)|X_u^\beta))} \right]. \quad (24)$$



مثال ۱- فرض کنید $X_i = \varepsilon_i + \vartheta$ ، که در آن ε_i ها متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد به ازای $i=1,2,\dots,n$ باشند. $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$ را به عنوان یک نمونه‌ی تصادفی فازی از اندازه n استنتاج شده به وسیله‌ی $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ با پارامتر فازی $\tilde{\vartheta}$ در نظر بگیرید. اگر H فضای خطی تولید شده توسط دنباله $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ باشد، آن گاه $DX_i = h_i$ که $W(h_i) = \varepsilon_i$ و $E(\varepsilon_j \varepsilon_k) = A_{kj} = \delta_{jk}$ است. از این رو

$$Z = \sum_{j,k=1}^n \partial_{\theta} X_k A_{kj} DX_j = \sum_{j=1}^n h_j. \quad (25)$$

بنابراین

$$\delta(Z) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot m\vartheta. \quad (26)$$

از این رو می‌توان به ازای $\vartheta \in \tilde{\vartheta}^\alpha$

$$\text{var}(\tilde{T}^\alpha(X)) \geq \frac{(g'(\vartheta))^\alpha}{n}. \quad (27)$$

را به دست آورد. از گزاره ۳ می‌توانیم بنویسیم:

$$v_l^\alpha(\tilde{T}(\tilde{X})) \geq \min \left[\inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_l^\beta))^\alpha}{n}, \inf_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_u^\beta))^\alpha}{n} \right], \quad (28)$$

و به طور مشابه

$$v_u^\alpha(\tilde{T}(\tilde{X})) \geq \max \left[\sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_l^\beta))^\alpha}{n}, \sup_{\alpha \leq \beta \leq 1} \frac{(g'(\theta_u^\beta))^\alpha}{n} \right]. \quad (29)$$

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله رویکرد جدیدی برای یافتن یک کران پایین کرامر-رائو برای تابع واریانس متغیر تصادفی فازی پیشنهاد نمودیم. برای به دست آوردن نتایج مشتق مالیوین گاوسی، انتگرال اسکوهود و فرمول انتگرال گیری جزء به جزء برای متغیرهای تصادفی قطعی را بکار بردیم. قابل توجه است که از فرمول صریح تابع احتمال در عبارات استفاده نمی‌کنیم. در پژوهش‌های بعدی با استفاده از تعریف مشتق مالیوین فازی در (جعفری و همکاران^۱، ۲۰۱۸) به مطالعه تابع چگالی متغیر تصادفی هر متغیر تصادفی فازی و کران‌های پایین می‌پردازیم.

منابع

- Akbari, M. G., & Rezaei, A. (2007). An uniformly minimum variance unbiased point estimator using fuzzy observations. *Austrian journal of statistics*, 36(4), 307-317.
- Akbari, M.G., & Khanjari Sadegh, M. (2012). Estimators based on fuzzy random variables and their mathematical properties. *Iranian journal of fuzzy systems*, 9(1), 79-95.
- Buckley, J. J. (2005). *Fuzzy probabilities: new approach and applications* (Vol. 115). Springer Science & Business Media.
- Buckley, J. J. (2006). *Fuzzy probability and statistics* (pp. 223-234). Heidelberg: Springer.



- Corcuera, J. M., & Kohatsu-Higa, A. (2011). Statistical inference and Malliavin calculus. In *Seminar on stochastic analysis, random fields and applications*, (pp. 59-82). Springer.
- Ebadi, M. J., Suleiman, M., Ismail, F. B., Ahmadian, A., Shahryari, M. R., & Salahshour, S. (2013). A new distance measure for trapezoidal fuzzy numbers. *Mathematical problems in engineering*.
- Farahani, H., Ebadi, M.J., & Jafari, H. (2019). Finding inverse of a fuzzy matrix using eigenvalue method, *International Journal of innovative technology and exploring engineering*, 9(2), 3030-3037.
- Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: a Malliavin calculus approach. *Bernoulli*, 7(6), 899-912.
- Itô, K. (1951). Multiple wiener integral. *Journal of the mathematical society of Japan*, 3(1), 157-169.
- Jafari, H., Paripour, M., & Farahani, H. (2018). Fuzzy Malliavin derivative and linear Skorohod fuzzy stochastic differential equation, *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 35(2), 2447-2458.
- Kumar Das, S., & Mandal, T. (2017). A new model for solving fuzzy linear fractional programming problem with ranking function. *Journal of applied research on industrial engineering*, 4(2), 89-96.
- Montazeri, F. Z. (2019). The survey of data envelopment analysis models in fuzzy stochastic environments. *International journal of research in industrial engineering*, 8(4), 366-383.
- Nualart, D. (2006). *The Malliavin calculus and related topics* (Vol. 1995). Berlin: Springer.
- Sanz-Solé, M. (2005). *Malliavin calculus with applications to stochastic partial differential equations*. EPFL press.
- Taghi-Nezhad, N., & Taleshian, F. (2018). A solution approach for solving fully fuzzy quadratic programming problems. *Journal of applied research on industrial engineering*, 5(1), 50-61.
- Torabi, H. (2006). Cramér-Rao lower bound for fuzzy-valued random variables. *Austrian journal of statistics*, 35(4), 471-482.
- Viertl, R. (2006). Univariate statistical analysis with fuzzy data. *Computational statistics & data analysis*, 51(1), 133-147.