



## طراحی کنترل بهینه برای سیستم‌های منفرد خطی نامتغیر با زمان با استفاده از توابع متعامد

حمید طباطبایی، مهدی معماری\*

گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، واحد قوچان، دانشگاه آزاد اسلامی، قوچان، ایران.

### چکیده

حل مسائل کنترل بهینه سینگولار به روش کلاسیک دارای پیچیدگی بهینه‌سازی است که برای ساده‌تر شدن حل این گونه مسائل با تقریب توابع موجود در مسئله با پایه‌ی بهینه‌سازی متعامد به جای حل دستگاه معادله‌ی دینامیکی یک سری مسئله‌ی استاتیکی حل می‌شود. این مقاله با استفاده از خصوصیات عملگر بهینه‌سازی ماتریسی و یولت لژاندر و سری فوریه الگوریتمی ارائه شده است. در این الگوریتم متغیر بهینه‌سازی حالت، متغیر بهینه‌سازی مشتق حالت و بردار کنترل توسط پایه‌ی بهینه‌سازی متعامد یکه‌ی یولت لژاندر و سری فوریه با ضرایب مجهول بسط داده شده است. برای محاسبه‌ی بردار کنترل بهینه و مسیر بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی سینگولار خطی با تابع هزینه‌ی درجه دو معرفی شده است که با استفاده از خصوصیات توابع متعامد معرفی شده ارتباط بین ضرایب  $x(t)$  و  $\dot{x}(t)$  پیدا می‌شود. با استفاده از روش پیشنهادی، دینامیک بهینه‌سازی سیستم به معادلات جبری تبدیل شده و مسئله‌ی بهینه‌سازی دینامیکی از فضای دینامیکی به فضای استاتیکی نگاشت داده شده است که باعث بهینه‌سازی مسئله‌ی استاتیکی با تابع هزینه‌ی درجه دوم و قید بهینه‌سازی خطی می‌شود. ابتدا برای حل مسئله با استفاده از این الگوریتم با پایه‌ی متعامد یکه‌ی یولت لژاندر استفاده شده است و سپس با پایه‌ی متعامد سری فوریه، حل مسئله تکرار می‌شود.

واژه کلیدی: کنترل بهینه، توابع متعامد، یولت، ماتریس سینگولار.

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۲۵

اصلاح: ۱۳۹۸/۰۵/۰۱

دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۱۸

### ۱- مقدمه

در این قسمت ابتدا کنترل بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی منفرد توسط موجک لژاندر را شرح داده می‌شود. سپس ویژگی بهینه‌سازی آن بررسی می‌شود. در ادامه، بسط تابع و در نهایت بهینه‌سازی کنترل بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی منفرد خطی معرفی خواهد شد.

### ۱-۱- کنترل بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی منفرد توسط موجک لژاندر

مسئله‌ی بهینه‌سازی برای اولین بار از مسئله‌ی پیشنهاد شده توسط ریاضی دان سوئیسی جان برنولی (۱۷۴۸ - ۱۶۶۷) نتیجه شده است. او به یک منحنی بین دو نقطه‌ی ثابت A و B در صفحه‌ی قائم نیاز داشت که جسمی در آن (تحت نیروی ثقل و بدون اصطکاک) بلغزد و در مینیمم زمان ممکن به پایین بیاید. جواب این مسأله بدیهی نیست. این مطلب را به طور تجربی با سراندن مهره‌ی بهینه‌سازی سیمی به شکل بهینه‌سازی مناسب می‌توان دریافت.



در حل مسئله‌ی کنترل بهینه، تجزیه و تحلیل و شناسایی سیستم‌ها با استفاده از چند جمله‌ای بهینه‌سازی متعامد، اساس کار پیدا کردن الگوریتمی برای حل مسئله‌ی کنترل بهینه می‌باشد و این الگوریتم‌ها روش مناسبی برای محاسبات کامپیوتری هستند.

در این مقاله با استفاده از خصوصیات عملگر بهینه‌سازی ماتریسی موجک لژاندر و سری فوریه، الگوریتمی که در آن متغیر بهینه‌سازی حالت، متغیر بهینه‌سازی مشتق حالت و بردار کنترل توسط پایه‌ی بهینه‌سازی متعامد یک‌ه‌ی موجک لژاندر و سری فوریه با ضرایب مجهول بسط داده شده، برای محاسبه‌ی بردار کنترل بهینه و مسیر بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی منفرد خطی با تابع هزینه‌ی درجه‌ی دو معرفی خواهد شد، که با استفاده از خصوصیات توابع متعامد معرفی شده ارتباط بین ضرایب  $\dot{x}(t)$  و  $x(t)$  پیدا می‌شود. با به کارگیری الگوریتم حاضر، دینامیک بهینه‌سازی سیستم به معادلات جبری تبدیل شده و مسئله‌ی بهینه‌سازی دینامیکی، از فضای دینامیکی به فضای استاتیکی نگاشت داده شده که در این صورت یک مسئله‌ی استاتیکی با تابع هزینه‌ی درجه دوم و قید بهینه‌سازی خطی بهینه‌سازی می‌شود. هم‌چنین این الگوریتم از نظر محاسباتی با کامپیوتر، بسیار ساده می‌باشد.

## ۱-۲- ویژگی بهینه‌سازی موجک لژاندر

موجک لژاندر  $\psi_{m,n}(t) = \psi(k, \hat{n}, m, t)$  دارای چهار آرگومان است.  $k = 1, 2, 3, \dots$ ،  $\hat{n} = 2n - 1$ ،  $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$  و  $m$  مرتبه‌ی چند جمله‌ای بهینه‌سازی لژاندر می‌باشد و  $t$  برای نرمالیزه کردن زمان است و  $\Psi_{m,n}(t)$  در فاصله‌ی  $[0, 1]$  به شکل زیر تعریف شده است:

$$\psi_{m,n}(t) = \begin{cases} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} L_m(2^k t - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

در این جا  $L_m(t)$  چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه‌ی  $m$  می‌باشد که توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = t, \quad L_{m+1}(t) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right)tL_m(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right)L_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

## ۱-۳- بسط تابع

اگر سیگنال  $f(t)$  در فاصله‌ی  $[0, 1]$  دارای انرژی محدود باشد می‌توان  $f(t)$  را توسط موجک لژاندر بسط داد.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \psi_{n,m}(t), \quad \mathbf{a}, \quad (2)$$

که  $c_{n,m} = (f(t), \psi_{n,m}(t))$  به ضرب داخلی اشاره دارد.

اگر از جملات بالاتر معادله‌ی (۲) صرف نظر شود، آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m} \psi_{n,m}(t) = \mathbf{C}^T \Psi(t), \quad (3)$$

که  $\mathbf{C}$  و  $\Psi(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= [c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1M-1}, c_{20}, \dots, a \\ & \quad c_{2M-1}, \dots, c_{2^{k-1}0}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T, \\ \Psi(t) &= [\psi_{10}(t), \psi_{11}(t), \dots, \psi_{1M-1}(t), \psi_{20}(t), \\ & \quad \dots, \psi_{2M-1}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}0}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}M-1}(t)]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

که بعد آن‌ها،  $2^{k-1}M \times 1$  می‌باشد.

اگر از بردار  $\Psi(t)$  تعریف شده در معادله‌ی (۴) انتگرال گرفته شود، داریم:

$$\int_0^t \Psi(t') dt' = P\Psi(t), \quad (5)$$

که عملگر ماتریس  $P$  با بعد  $(2^{k-1}M) \times (2^{k-1}M)$  به صورت زیر است:

$$P = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & H & H & \dots & H \\ 0 & L & H & \dots & H \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & & H \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} \quad (6)$$

در معادله‌ی (۶)  $H$  و  $L$  با بعد  $M \times M$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

و انتگرال ضرب دو تابع برداری موجک لژاندر عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\sqrt{2M-3}}{(2M-3)\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-\sqrt{2M-1}}{(2M-1)\sqrt{2M-3}} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

که  $D = I = \int_0^1 \Psi(t)\Psi^T(t) dt$  که  $I$  ماتریس واحد می‌باشد.

#### ۴-۱- کنترل بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی منفرد خطی

اگر سیستم به صورت زیر باشد:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (8)$$

$$x(0) = x_0. \quad (9)$$

که  $x \in R^N$  و  $u \in R^Z$  به ترتیب بردار حالت و کنترل هستند؛  $A, B, E$  ماتریس بهینه‌سازی ثابت با بعد مناسب هستند، اگر  $\det E = 0$  برقرار باشد، به سیستم، سیستم منفرد گویند.

هدف مسئله، پیدا کردن بردار کنترل بهینه‌ی  $u(t)$  و بردار مسیر  $x(t)$  است  $0 \leq t \leq 1$ ، به طوری که تابع هزینه‌ی زیر را حداقل نمایند و بردار  $x(t)$  و  $u(t)$  در معادله‌های (۸) و (۹) برقرار باشند:

$$J = \frac{1}{2} x^T(1) S x(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt. \quad (10)$$



که در معادله‌ی  $(10) R, Q, S$  ماتریس بهینه‌سازی با بعد مناسب هستند،  $Q, S$  ماتریس بهینه‌سازی متقارن نیمه‌معین-مثبت<sup>۱</sup> هستند و  $R$  ماتریس متقارن معین مثبت<sup>۲</sup> (SPD) می‌باشد.

در ادامه، پیشینه‌ی تحقیق بررسی و گزارش می‌شود. سپس روش پیشنهادی نمایش داده شده و اثبات آن با شبیه‌سازی صورت می‌گیرد. سپس جمع‌بندی، ارائه‌ی پیشنهادات، کاربره‌سازی آتی و منابع بیان می‌شود.

## ۲- پیشینه‌ی تحقیق

در چند سال اخیر، محققین زیادی با توجه به اهمیت موضوع به مطالعه و بررسی و طراحی کنترل بهینه‌سازی گوناگون برای این‌گونه سیستم بهینه‌سازی منفرد پرداخته‌اند و روش بهینه‌سازی فراوانی را ارائه نموده‌اند که از جمله می‌توان به طراحی کنترل بهینه و کنترل مقاوم (فریدمن و شاکد، ۲۰۰۲)، روش بهینه‌سازی کنترلی متفاوتی از جمله روش بهینه‌سازی مختلف فیدبک حالت (لوواس-نگی و همکاران، ۱۹۹۴؛ آذرفر و همکاران، ۲۰۱۴؛ سایدن و هاسین، ۲۰۱۳)، کنترل هوشمند (دنگ، ۲۰۱۰) و روش بهینه‌سازی مبتنی بر توابع لیاپانوف مخصوص این سیستم‌ها (باجیک، ۱۹۹۲) اشاره داشت.

هم‌چنین روش کنترل تطبیقی نیز برای سیستم بهینه‌سازی منفرد چند ورودی چند خروجی نیز در بهینه‌سازی اخیر جزو مطالعات انجام‌شده در این ارتباط می‌باشد. از جمله مسعود شفیعی استاد دانشکده برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران که یکی از مقالات ایشان ارجاع علمی شده است (شفیعی، ۲۰۰۱) و هم‌چنین در این زمینه می‌توان به (مرزبان و رزاقی، ۲۰۰۴؛ رزاقی و یوسفی، ۲۰۰۲؛ رزاقی و یوسفی، ۲۰۰۱) و (آذرفر و همکاران، ۲۰۱۳) نیز اشاره نمود. لیو و همکاران (۲۰۱۵) با طراحی کنترل‌کننده‌ی متغیر نرم‌افزاری برای سیستم بهینه‌سازی منفرد درصد حل این‌گونه مسائل بوده‌اند. لین و لان (۲۰۱۵) نیز در مقاله‌ای به بررسی بازخورد خروجی غیرخطی کامل برای سیستم بهینه‌سازی منفرد با اشباع ورودی پرداخته‌اند. ونگ و همکاران (۲۰۱۵) در مقاله‌ای با بررسی روش میانگین زمان بندی برای تثبیت محدودیت زمانی سیستم بهینه‌سازی خطی منفرد از جمله ارجاعات این مقاله پرداختند.

شو و زو (۲۰۱۷الف) نیز به بررسی کنترل بهینه براساس ارزش خوش‌بینانه برای سیستم بهینه‌سازی منفرد خطی نامشخص و کاربرد آن به یک مدل ورودی-خروجی پویا پرداخته‌اند. شو و زو (۲۰۱۷ب) در مقاله‌ای دیگر تحت عنوان پایداری و کنترل بهینه برای سیستم بهینه‌سازی منفرد با تداوم زمانی به مباحث مرتبط در این زمینه پرداخته‌اند. زنگ و همکاران (۲۰۱۷) مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی پارامتر خطی از سیستم بهینه‌سازی منحصر به فرد تصادفی را بررسی نمودند. زنگ و بیجانارو (۲۰۱۷) طراحی ناظر برای سیستم بهینه‌سازی تاخیر زمانی منفرد خطی را بررسی نمودند.

چاوز-فتیز و همکاران (۲۰۱۷) ثبات اتفاقی و نمایشی سیستم بهینه‌سازی خطی منفرد زمان گسسته مارکو جامپ<sup>۳</sup> را بررسی نموده‌اند. زنگ و چن (۲۰۱۸) در مقاله‌ای با عنوان پذیرش و تثبیت قوی سیستم بهینه‌سازی خطی منفرد به این موضوع پرداخته‌اند. مریر و همکاران (۲۰۱۷) شرایط پذیرش جدید برای سیستم بهینه‌سازی منفرد را بررسی نموده‌اند. کدا و گاجیک (۲۰۱۷) به بررسی کنترل بهینه برای یک کلاس جدید از سیستم بهینه‌سازی منفرد پرداخته‌اند. گو و همکاران (۲۰۱۷) در مقاله‌ی خود به یک راه‌حل صحیح عمومی از یک سیستم منفرد غیرخطی دو بعدی معادلات دیفرانسیلی دست یافته‌اند.

نیامسپ و فت (۲۰۱۶) به یک نتیجه‌ی جدید در کنترل زمان محدود از سیستم بهینه‌سازی تاخیر خطی منفرد در مقاله‌ی خود رسیده‌اند. فو و ما (۲۰۱۶) به بررسی کنترل غیرفعال سیستم تاخیر زمانی منفرد با اشباع محرک پرداخته‌اند. هوو و زنگ (۲۰۱۶) به طراحی نو با استفاده از سیستم بهینه‌سازی غیرخطی منفرد پرداخته‌اند. زنگ و همکاران (۲۰۱۶) به بررسی یک کلاس از سیستم بهینه‌سازی منفرد غیرخطی نامشخص پرداخته‌اند. فنگ (۲۰۱۶) در مقاله‌ای تحت عنوان هماهنگ‌سازی و بازخورد حالت کنترل در سیستم بهینه‌سازی یکپارچه خطی منفرد به این موضوع پرداخته‌است. لیو و همکاران (۲۰۱۶الف) به پایداری ورودی در حالت خاصی از سیستم بهینه‌سازی منفرد غیرهمزمان با زمان گسسته پرداخته‌اند. لیو و همکاران (۲۰۱۶ب) در مقاله‌ای تحت عنوان تجزیه و تحلیل

<sup>1</sup>Symmetric positive semi-definite

<sup>2</sup>Symmetric positive definite

<sup>3</sup>Markov jump



پذیری برای سیستم بهینه‌سازی منفرد خطی با تاخیر زمانی متغیر با استفاده از رویکرد سیستم خنثی به این موضوع پرداخته‌اند. هم‌چنین الزور (۲۰۱۶) در مقاله‌ای به بررسی جواب بهینه‌سازی عمومی ماتریس منفرد و غیر منفرد پرداخته است. رن و لین (۲۰۱۹) در مقاله‌ای کنترل بهینه برای یک سیستم منحصر به فرد تصادفی خطی با پارامتر پریدن مارکوفیچ را بررسی نموده‌اند. زوو (۲۰۱۸) نویسنده‌ی کتاب کنترل بهینه، به طور انحصاری توسط جریان بهینه‌سازی کمینه‌ساز که توسط مجله اروپایی کنترل منتشر شده، از ارجاعات این مقاله است.

### ۳- روش پیشنهادی

باتوجه به این که تاکنون به مسئله‌ی کنترل بهینه این‌گونه سیستم‌ها از این دیدگاه کم‌تر پرداخته شده است و این که با استفاده از توابع متعامد سری فوریه، موجک لژاندر و بلاک پالس حل مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی دینامیکی، به حل مسئله‌ی استاتیکی تبدیل می‌شود و دیگر درگیر معادلات دینامیکی نمی‌باشد و فقط کفایت یک سری ضرایب در یک مرحله محاسبه شود و به‌گونه‌ای حل مسئله به یک الگوریتم بازگشتی تبدیل می‌شود.

باکمک این الگوریتم، مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم بهینه‌سازی منفرد به یک بهینه‌سازی درجه دو تبدیل می‌شود، حال، ضرایب  $x(t)$  و  $u(t)$  به‌طور بهینه پیدا می‌شود و با این ضرایب بهینه،  $x(t)$  و  $u(t)$  به‌روزرسانی می‌گردد. در این قسمت از موجک لژاندر، در این الگوریتم برای حل مسئله‌ی کنترل بهینه استفاده می‌شود.

#### ۳-۱- تقریب‌زدن سیستم منفرد

$x_N(t)$ ،  $u_Z(t)$  و  $\dot{x}_N(t)$  را با موجک لژاندر بسط می‌دهیم که  $N = 1, 2, 3, \dots, n$  و  $Z = 1, 2, 3, \dots, z$  می‌باشد.

$$x_N(t) = A_N^T \Psi(t). \quad (11)$$

$$\dot{x}_N(t) = C_N^T \Psi(t). \quad (12)$$

$$u_Z(t) = U_Z^T \Psi(t). \quad (13)$$

$$U_Z = [U_{Z10}, U_{Z11}, \dots, U_{Z1M-1}, U_{Z20}, \dots, U_{Z2M-1}, \dots, U_{Z2K-10}, \dots, U_{Z2K-1M-1}]^T. \quad (14)$$

که

$$C_Z = [C_{N10}, C_{N11}, \dots, C_{N1M-1}, C_{N20}, \dots, C_{N2M-1}, \dots, C_{N2K-10}, \dots, C_{N2K-1M-1}]^T. \quad (15)$$

$$A_N = [a_{N10}, a_{N11}, \dots, a_{N1M-1}, a_{N20}, \dots, a_{N2M-1}, \dots, a_{N2k-10}, \dots, a_{N2k-1M-1}]^T. \quad (16)$$

که  $\{a_{Nij}\}$  و  $\{c_{Nij}\}$  مجهول هستند،  $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$  و  $j = 1, 2, 3, \dots, M-1$  می‌باشد.

فرض کنید:

$$(Ax(t))_N = Y_N^T \Psi(t). \quad (17)$$

$$(Ex(t))_N = W_N^T \Psi(t). \quad (18)$$

$$(Bu(t))_N = L_N^T \Psi(t). \quad (19)$$

حال با استفاده از معادله‌های (۱۷-۱۹) برای هر  $N$ ، که  $N = 1, 2, 3, \dots, n$ ، می‌توان معادله‌ی (۸) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$W_N^T \Psi(t) = (Y_N^T + L_N^T) \Psi(t).$$

با مساوی قرار دادن ضرایب موجک بهینه‌سازی لژاندر هم مرتبه برای  $N = 1, 2, 3, \dots, n$ :



$$W_N^T = (Y_N^T + L_N^T). \quad (20)$$

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t') dt' + x(0).$$

$$A_N^T \Psi(t) = C_N^T P \Psi(t) + K_N^T \Psi(t).$$

که معادل است با :

$$A_N^T - C_N^T P - K_N^T = 0. \quad (21)$$

$K_N = [x(0), 0, \dots, 0 | x(0), 0, \dots, 0 | \dots | x(0), 0, \dots, 0]^T$  تعریف می‌شود:

$$F_{NS} = a_{NS} - \sum_{r=1}^{2^{k-1}M} c_{Nr} P_{rS} - K_{NS} \quad N=1,2,\dots,n, S=1,2,\dots,2^{k-1}M. \quad (22)$$

### ۲-۳- تقریب زدن تابع هزینه

اکنون توسط موجک لژاندر تابع هزینه  $J$  تقریب زده می‌شود.

فرض کنید:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{110} & a_{111} & \dots & a_{11M-1} & a_{120} & \dots & a_{12M-1} & \dots & a_{12k-10} & \dots & a_{12k-1M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N10} & a_{N11} & \dots & a_{N1M-1} & a_{N20} & \dots & a_{N2M-1} & \dots & a_{N2k-10} & \dots & a_{N2k-1M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^T \quad (23)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} u_{110} & u_{111} & \dots & u_{11M-1} & u_{120} & \dots & u_{12M-1} & \dots & u_{12k-10} & \dots & u_{12k-1M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{Z10} & u_{Z11} & \dots & u_{Z1M-1} & u_{Z20} & \dots & u_{Z2M-1} & \dots & u_{Z2k-10} & \dots & u_{Z2k-1M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^T \quad (24)$$

$$\hat{\Psi}_1(t) = \begin{pmatrix} \Psi^T(t) \\ \vdots \\ \Psi^T(t) \end{pmatrix} \quad \hat{\Psi}_2(t) = \begin{pmatrix} \Psi^T(t) \\ \vdots \\ \Psi^T(t) \end{pmatrix} \quad (25)$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\hat{\Psi}_1(t)$  و  $\hat{\Psi}_2(t)$  ماتریس بهینه‌سازی هستند که به ترتیب دارای بعد  $N \times N2^{k-1}M \times 1$ ,  $N2^{k-1}M \times 1$ ,  $Z2^{k-1}M \times 1$  و  $Z2^{k-1}M \times 1$  می‌باشند. با استفاده از معادله‌های (۱۱)، (۱۲)، (۲۳) و (۲۵) بردار کنترل و حالت را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x(t) = \hat{\Psi}_1(t) \alpha. \quad (26)$$

$$u(t) = \hat{\Psi}_2(t) \beta. \quad (27)$$

با جایگذاری معادله‌های (۲۶) و (۲۷) در معادله‌ی (۱۰):

$$J = \frac{1}{2} \alpha^T \hat{\Psi}_1^T(1) S \hat{\Psi}_1(1) \alpha + \frac{1}{2} \alpha^T \left[ \int_0^1 \hat{\Psi}_1^T(t) Q \hat{\Psi}_1(t) dt \right] \alpha + \frac{1}{2} \beta^T \left[ \int_0^1 \hat{\Psi}_2^T(t) R \hat{\Psi}_2(t) dt \right] \beta. \quad (28)$$

با استفاده از معادله‌ی (۷) می‌توان معادله‌ی (۲۸) را به طور ساده‌تر بازنویسی کرد:

$$J = \frac{1}{2} \alpha^T \left[ \Psi(1) \Psi^T(1) \otimes S \right] \alpha + \frac{1}{2} \alpha^T (D \otimes Q) \alpha + \frac{1}{2} \beta^T (D \otimes R) \beta. \quad (29)$$

که  $\otimes$  به ضرب کرانکر اشاره دارد (ونگ و همکاران، ۲۰۱۵). اگر  $G_{r \times s}$  و  $H_{m \times n}$  باشد، ضرب کرانکر  $G \otimes H$  به صورت زیر تعریف می‌شود و بعد آن  $rm \times sn$  است.

$$G \otimes H = \begin{pmatrix} g_{11}H & g_{12}H & \dots & g_{1s}H \\ g_{21}H & g_{22}H & \dots & g_{2s}H \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{r1}H & g_{r2}H & \dots & g_{rs}H \end{pmatrix}$$

#### ۴- حل مسئله بهینه‌سازی

با انجام الگوریتم فوق، مسئله کنترل بهینه به یک مسئله استاتیکی کاهش می‌یابد که به صورت زیر بیان می‌شود:  $\alpha$  و  $\beta$  را طوری پیدا کنید که  $J(\alpha, \beta)$  حداقل شود و قید بهینه‌سازی معادله‌های (۲۰) و (۲۲) برقرار باشند. فرض کنید:

$$L = J + \sum_{N=1}^n \sum_{S=1}^{2^{k-1}M} \lambda_{NS} F_{NS} . \quad (30)$$

که  $\lambda_{NS}$  ضرایب لاگرانژ می‌باشند، بنابراین شرایط لازم برای اکسترمم معادله‌ی (۳۰) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_{NS}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial U_{ZS}} = 0 \end{cases} \quad N = 1, 2, \dots, n \quad Z = 1, 2, \dots, z \quad S = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M . \quad (31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{NS}} = 0 . \quad (32)$$

مثال ۱. سیستم منفرد خطی:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u . \quad (33)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} . \quad (34)$$

در این سیستم، هدف این است که بردار کنترل بهینه‌ی  $u(t)$  را طوری پیدا کنیم تا تابع هزینه‌ی زیر حداقل شود و معادله‌های (۳۳) و (۳۴) نیز برقرار باشند.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} [X^T(\tau)X(\tau) + U^2(\tau)] d\tau . \quad (35)$$

برای استفاده از بسط موجک لژاندر، ابتدا بازه‌ی زمانی  $[0, 2]$  را توسط تغییر متغیرگیری  $t = \frac{\tau}{2}$  به بازه‌ی زمانی  $[0, 1]$  تبدیل می‌شود.

حال با استفاده از الگوریتم، مسئله کنترل بهینه به مسئله بهینه‌سازی استاتیکی برای  $k = 2, M = 5$  به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min & \quad \frac{1}{2} [A_1^T A_1 + A_2^T A_2 + U^T U] \\ \text{s. t.} & \quad \begin{cases} A_1^T - C_1^T P - K_1^T = 0 \\ A_2^T - C_2^T P - K_2^T = 0 \end{cases} \\ & \text{and} \\ & \quad C_2^T = 2A_1^T \\ & \quad A_2^T = -U^T . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} a_{110} & a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} & a_{120} & a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \end{bmatrix}^T \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a_{210} & a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} & a_{220} & a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \end{bmatrix}^T \\ U &= \begin{bmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{bmatrix}^T \\ C_1 &= \begin{bmatrix} c_{110} & c_{111} & c_{112} & c_{113} & c_{114} & c_{120} & c_{121} & c_{122} & c_{123} & c_{124} \end{bmatrix}^T \\ C_2 &= \begin{bmatrix} c_{210} & c_{211} & c_{212} & c_{213} & c_{214} & c_{220} & c_{221} & c_{222} & c_{223} & c_{224} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

با استفاده از روابط بالا، روابط زیر به دست می‌آید:





$$\min J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^4 a_{1nm}^2 + a_{2nm}^2 + u_{nm}^2$$

$$s. t \left\{ \begin{array}{l} a_{p10} - x_p(0) = c_{p10} - \frac{\sqrt{3}}{3} c_{p11} \\ a_{p11} = \frac{1}{\sqrt{3}} c_{p10} - \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} c_{p12} \\ a_{p12} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} c_{p11} - \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{5}} c_{p13} \\ a_{p13} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} c_{p12} - \frac{\sqrt{9}}{9\sqrt{7}} c_{p14} \\ a_{p14} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{9}} c_{p13} \\ a_{p20} - x_p(0) = 2c_{p10} + c_{p20} - \frac{\sqrt{3}}{3} c_{p21} \\ a_{p21} = \frac{1}{\sqrt{3}} c_{p20} - \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} c_{p22} \\ a_{p22} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} c_{p21} - \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{5}} c_{p23} \\ a_{p23} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} c_{p22} - \frac{\sqrt{9}}{9\sqrt{7}} c_{p24} \\ a_{p24} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{9}} c_{p23} \end{array} \right.$$

با حل مسئله بهینه‌سازی بالا، مقادیر بهینه ضرایب را به دست آورده و از معادله‌های (۲۶) و (۲۷)،  $x(t)$  و  $u(t)$  را بازسازی کرده که نتایج شبیه‌سازی مسئله در جدول‌های ۱ و ۲ و همچنین شکل‌های بهینه‌سازی ۱ و ۲ نشان داده شده است.

#### ۴-۱- کنترل بهینه سیستم بهینه‌سازی منفرد توسط سری فوریه

در این جا نیز از خواص متعامد بودن سری فوریه استفاده کرده و مسئله کنترل بهینه به مسئله بهینه‌سازی استاتیکی تبدیل می‌شود. به علت یکسان بودن روند کار در سری فوریه و موجک لژاندر از تکرار الگوریتم اجتناب نموده و فقط به بیان ویژگی بهینه‌سازی سری فوریه پرداخته می‌شود.

#### ۴-۲- ویژگی بهینه‌سازی سری فوریه

اگر سیگنال  $g(t)$  در فاصله  $[0,1]$  دارای انرژی محدود باشد می‌توان  $g(t)$  را توسط سری فوریه بسط داد.

$$g(t) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) + g_n^* \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right). \quad (36)$$

ضرایب فوریه  $g_n$  و  $g_n^*$  از روابط زیر به دست می‌آید:

$$g_0 = \frac{1}{L} \int_0^L g(t) dt. \quad (37)$$

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$g_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

فرض می‌کنیم مشتق  $g(t)$  در معادله (۳۶) به صورت زیر است:

$$f(t) = \dot{g}(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) + f_n^* \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) \right\}. \quad (38)$$



اگر از جملات مرتبه بالای سری فوریه  $f(t)$  و  $g(t)$  صرف نظر شود:

$$g(t) = g_0 \varphi_0(t) + \sum_{n=1}^r \{g_n \varphi_n(t) + g_n^* \varphi_n^*(t)\} = G^T \Phi(t). \quad (39)$$

$$f(t) = f_0 \varphi_0(t) + \sum_{n=1}^r \{f_n \varphi_n(t) + f_n^* \varphi_n^*(t)\} = F^T \Phi(t). \quad (40)$$

که

$$G = [g_0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_r \quad g_1^* \quad g_2^* \quad \dots \quad g_r^*]^T. \quad (41)$$

$$F = [f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_r \quad f_1^* \quad f_2^* \quad \dots \quad f_r^*]^T.$$

با

$$\Phi(t) = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_r \quad \varphi_1^* \quad \varphi_2^* \quad \dots \quad \varphi_r^*]^T$$

$$\varphi_n = \cos \frac{2n\pi t}{L}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

$$\varphi_n^* = \sin \frac{2n\pi t}{L}, \quad n=1,2,3,\dots$$

عناصر  $\varphi(t)$  در فاصله  $t \in (0, L)$  متعامد هستند. اگر از بردار  $\Phi(t)$  تعریف شده در معادله (41) انتگرال گرفته شود: عملگر ماتریس  $P$  با بعد  $(2r+1) \times (2r+1)$  به صورت زیر است:

$$\int_0^L \Phi(t) \Phi^T(t) dt = P. \quad (42)$$

ضرب دو تابع برداری سری فوریه عبارت است از:

$$\int_0^L \varphi_n \varphi_m(t) dt = \int_0^L \varphi_n^* \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}. \quad (43)$$

$$\int_0^L \varphi_0^2(t) dt = L.$$

که در آن:

$$\varphi(t) \varphi^T(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0^2 & \varphi_0 \varphi_1 & \dots & \varphi_0 \varphi_r & \varphi_0 \varphi_1^* & \dots & \varphi_0 \varphi_r^* \\ \varphi_1 \varphi_0 & \varphi_1^2 & \dots & \varphi_1 \varphi_r & \varphi_1 \varphi_1^* & \dots & \varphi_1 \varphi_r^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r \varphi_0 & \varphi_r \varphi_1 & \dots & \varphi_r^2 & \varphi_r \varphi_1^* & \dots & \varphi_r \varphi_r^* \\ \varphi_1^* \varphi_0 & \varphi_1^* \varphi_1 & \dots & \varphi_1^* \varphi_r & \varphi_1^{*2} & \dots & \varphi_1^* \varphi_r^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r^* \varphi_0 & \varphi_r^* \varphi_1 & \dots & \varphi_r^* \varphi_r & \varphi_r^* \varphi_1^* & \dots & \varphi_r^{*2} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

به این ترتیب:

$$D = \int_0^L \varphi \varphi^T(t) dt = L \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

بعد ماتریس  $D$  که قطری و دارای ساختاری ساده می باشد،  $(2r+1) \times (2r+1)$  است که این ماتریس نقش مهمی در مسئله کنترل

بهینه دارد، بنابراین از معادله (38) نتیجه می شود:

$$g(t) - g(0) = \int_0^t f(t') dt'.$$

از معادله های (39)، (40) و (44) و با استفاده از  $g(0) = K^T \Phi(t)$ :



$$(G^T - K^T)\Phi(t) = F^T P \Phi(t),$$

$$K^T = [g(0) \quad 0_1 \quad \dots \quad 0_r \quad 0_1^* \quad \dots \quad 0_r^*]$$

بنابراین:

$$(G^T - K^T) = F^T P. \quad (46)$$

با حل مسئله‌ی بهینه‌سازی بالا، مقادیر بهینه‌ی ضرایب را به دست آورده و با بازسازی  $x(t)$  و  $u(t)$  و استفاده از این ضرایب، مقادیر بهینه به دست می‌آید. نتایج شبیه‌سازی مسئله در جدول‌های ۳ و ۴ و هم‌چنین شکل‌های ۳ و ۴ بخش بعد نشان داده شده است.

$$P = L \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{\pi} & \frac{-1}{2\pi} & \dots & \frac{-1}{(r-1)\pi} & \frac{-1}{r\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2(r-1)\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2r\pi} \\ \frac{1}{2\pi} & \frac{-1}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{4\pi} & 0 & \frac{-1}{4\pi} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2r\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2r\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## ۵- شبیه‌سازی

اکنون با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و با استفاده از پایه‌ی بهینه‌سازی متعامد موجک لژاندر و سری فوری، مثال ذکر شده در بخش قبلی حل شده و نتایج شبیه‌ساز شده با استفاده از الگوریتم ذکر شده در جداول و نمودار بهینه‌سازی زیر جمع‌آوری می‌شود. در ادامه به مشاهده و بررسی نتایج به دست آمده از روش تحلیلی و دقیق و هم‌چنین مقایسه‌ی آن با روش تقریبی پیشنهادی پرداخته خواهد شد. برای سهولت در مقایسه‌ی این دو روش و برای سهولت در کار تحلیل نتایج، هر بار نتایج دو روش در یک جدول و یا یک نمودار در کنار هم نمایش داده شده است.

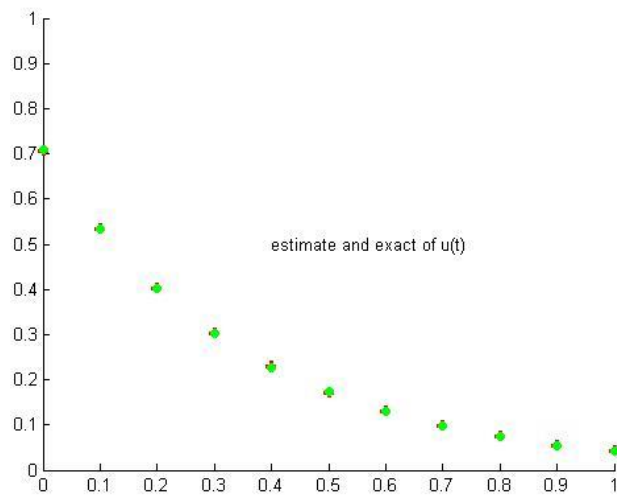
### ۵-۱- نتایج شبیه‌سازی با استفاده از پایه‌ی متعامد موجک لژاندر

نتایج شبیه‌سازی در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول ۱- نتایج شبیه‌سازی  $x_1(t)$  موجک لژاندر.

Solution Number	Time	$u(t)$	
		Exact solution	Legendre wavelets
1	0.0	0.7071	0.7079
2	0.1	0.5329	0.5328
3	0.2	0.4016	0.4010
4	0.3	0.3027	0.3021
5	0.4	0.2281	0.2280
6	0.5	0.1719	0.1729
7	0.6	0.1296	0.1296
8	0.7	0.0976	0.0975
9	0.8	0.0736	0.0735
10	0.9	0.0555	0.0554
11	1.0	0.0418	0.0420

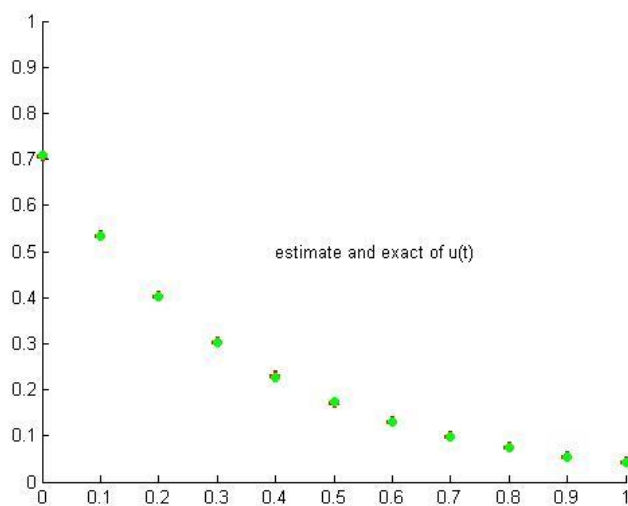




شکل ۱- نتایج شبیه‌سازی.

جدول ۲- مقادیر واقعی و تقریبی  $u(t)$ .

Solution Number	Time	$u(t)$	
		Exact solution	Legendre wavelets
1	0.0	0.7071	0.7079
2	0.1	0.5329	0.5328
3	0.2	0.4016	0.4010
4	0.3	0.3027	0.3021
5	0.4	0.2281	0.2280
6	0.5	0.1719	0.1729
7	0.6	0.1296	0.1296
8	0.7	0.0976	0.0975
9	0.8	0.0736	0.0735
10	0.9	0.0555	0.0554
11	1.0	0.0418	0.0420



شکل ۲- نتایج شبیه‌سازی  $u(t)$ .

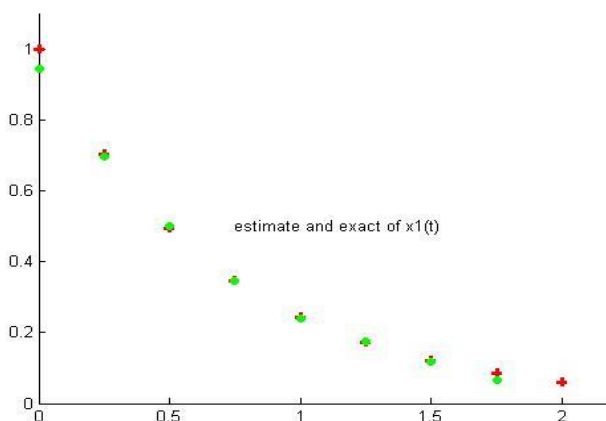
نتایج به دست آمده، گویای آن است که می توان مسائل کنترل بهینه سیستم بهینه سازی منفرد را به خوبی با استفاده از الگوریتم معرفی شده و توابع متعامد یکدیگر موجهک لژاندر به مسئله بهینه سازی استاتیکی تبدیل نمود و مقادیر حاصل از شبیه سازی، کارایی این الگوریتم را به وضوح نشان می دهد.

### ۲-۵- ارزیابی نتایج شبیه سازی با پایه بهینه سازی متعامد سری فوریه

مثال ۲. با استفاده از الگوریتم معرفی شده و پایه بهینه سازی متعامد سری فوریه شبیه سازی شده است که نتایج آن به شرح زیر می باشد. این نتایج بیانگر موفقیت سری فوریه در حل مسئله کنترل بهینه سیستم بهینه سازی منفرد خطی است. جداول ۳ و ۴ و همچنین شکل های ۳ و ۴ به ترتیب با نشان دادن مقادیر  $u(t)$  و  $x_1(t)$  به روش پیشنهادی و مقادیر محاسبه شده آن به روش تحلیلی، به خوبی بیانگر مزیت روش پیشنهادی می باشد.

جدول ۳- نتایج شبیه سازی  $x_1(t)$  مثال ۲ با سری فوریه  $x_1(t)$  مقادیر واقعی و تقریبی.

Solution Number	Time	$x_1(t)$	
		Exact solution	Fourier series $r = 10$
1	0.0	1.00000	0.94543
2	0.25	0.70219	0.69577
3	0.50	0.49307	0.49945
4	0.75	0.34623	0.34457
5	1.00	0.24312	0.24095
6	1.25	0.17071	0.17384
7	1.50	0.11987	0.11834
8	1.75	0.08417	0.08314
9	2.00	0.05911	0.06488

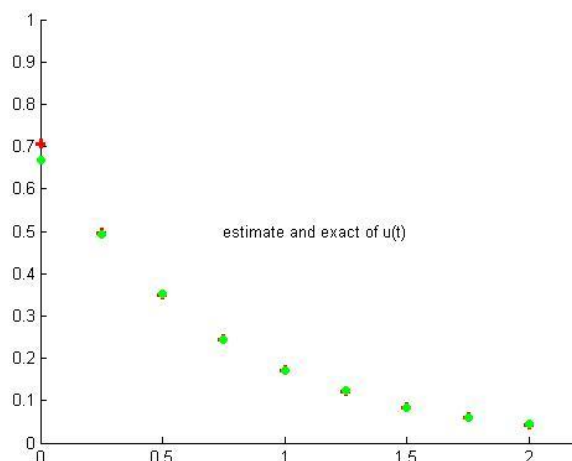


شکل ۳- نتایج شبیه سازی  $x_1(t)$ .

جدول ۴- نتایج شبیه سازی  $u(t)$  مثال ۲ با سری فوریه  $u(t)$  مقادیر واقعی و تقریبی.

Solution number	Time	$u(t)$	
		Exact solution	Fourier series $r = 10$
1	0.0	0.70711	0.66852
2	0.25	0.49652	0.49199
3	0.50	0.34865	0.35316
4	0.75	0.24482	0.24364
5	1.00	0.17191	0.17038
6	1.25	0.12071	0.12292
7	1.50	0.08476	0.08368
8	1.75	0.05952	0.05879
9	2.00	0.04179	0.04588




 شکل ۴- نتایج شبیه‌سازی  $u(t)$ .

## ۶- نتیجه‌گیری

با استفاده از روش پیشنهادی با تقریب بسیار مناسب و خطای نسبتاً ناچیز، ضمن تبدیل مسئله کنترل بهینه استاتیکی، ابتدا ضرایب توابع متعامد را پیدا نموده و با استفاده از آن‌ها سیگنال بهینه‌سازی اصلی بازسازی می‌شود. در این روش از محاسبات کم‌تر، استفاده‌ی نسبی حافظه‌ی کم‌تر و سادگی محاسبات نسبت به روش بهینه‌سازی حساب تغییرات، برخوردار بوده است که جزو مزایای این روش به حساب می‌آیند. اما نکته منفی در این روش همان تقریب پاسخ است که اندکی با پاسخ دقیق این‌گونه مسائل تفاوت داشته که البته میزان آن ناچیز بوده و می‌توان از آن در برخی کاربردها چشم‌پوشی نمود. در مجموع می‌توان از این روش به‌عنوان روشی مناسب برای مطالعه‌ی سیستم بهینه‌سازی مذکور نام برد. به محققین این عرصه پیشنهاد می‌شود تا با ترکیب این روش با روش بهینه‌سازی دیگر علاوه بر کاهش محاسبات به دنبال رسیدن به پاسخ دقیق‌تر باشند.

## منابع

- Fridman, E., & Shaked, U. (2002).  $H_\infty$ -control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach. *Linear algebra and its applications*, 351, 271-302.
- Lovass-Nagy, V., Powers, D. L., & Schilling, R. J. (1994). On regularizing descriptor systems by output feedback. *IEEE transactions on automatic control*, 39(7), 1507-1509.
- Azarfar, A., Shandiz, H. T., & Shafiee, M. (2014). Adaptive feedback control for linear singular systems. *Turkish journal of electrical engineering & computer sciences*, 22(1), 132-142.
- Swaidan, W., & Hussin, A. (2013). Feedback control method using Haar wavelet operational matrices for solving optimal control problems. *Abstract and applied analysis* (Vol. 2013). Hindawi. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/240352>
- Duan, G. R. (2010). *Analysis and design of descriptor linear systems* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.
- Bajic, V. B. (1992). *Lyapunov's direct method in the analysis of singular systems and networks*. Shades Technical Publ.
- Shafiei, M. (2001). Optimal control for descriptor systems: Tracking problem (research note). *International journal of engineering*, 14(2), 123-130.
- Marzban, H. R., & Razzaghi, M. (2004). Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials. *Journal of the franklin institute*, 341(3), 279-293.
- Razzaghi, M., & Yousefi, S. (2002). Legendre wavelets method for constrained optimal control problems. *Mathematical methods in the applied sciences*, 25(7), 529-539.
- Razzaghi, M., & Yousefi, S. (2001). The legendre wavelets operational matrix of integration. *International journal of systems science*, 32(4), 495-502.
- Azarfar, A., Toosan Shandiz, H., & Shafiee, M. (2013). Self-tuning state feedback control of MIMO singular systems with applications to constrained robot systems. *The mechanics of the structures and fluid*, 2(4), 37-46.
- Liu, Y., Kao, Y., Gu, S., & Karimi, H. R. (2015). Soft variable structure controller design for singular systems. *Journal of the franklin institute*, 352(4), 1613-1626.
- Lin, D., & Lan, W. (2015). Output feedback composite nonlinear feedback control for singular systems with input saturation. *Journal of the franklin institute*, 352(1), 384-398.
- Wang, Y., Zou, Y., Liu, Y., Shi, X., & Zuo, Z. (2015). Average dwell time approach to finite-time stabilization of switched singular linear systems. *Journal of the franklin institute*, 352(7), 2920-2933.
- Shu, Y., & Zhu, Y. (2017a). Optimistic value based optimal control for uncertain linear singular systems and application to a dynamic input-output model. *ISA transactions*, 71, 235-251.



- Shu, Y., & Zhu, Y. (2017b). Stability and optimal control for uncertain continuous-time singular systems. *European journal of control*, 34, 16-23.
- Zhang, W., Lin, Y., & Xue, L. (2017). Linear quadratic Pareto optimal control problem of stochastic singular systems. *Journal of the franklin institute*, 354(2), 1220-1238.
- Zheng, G., & Bejarano, F. J. (2017). Observer design for linear singular time-delay systems. *Automatica*, 80, 1-9.
- Chávez-Fuentes, J. R., Mayta, J. E., Costa, E. F., & Terra, M. H. (2017). Stochastic and exponential stability of discrete-time Markov jump linear singular systems. *Systems & control letters*, 107, 92-99.
- Zhang, X., & Chen, Y. (2018). Admissibility and robust stabilization of continuous linear singular fractional order systems with the fractional order  $\alpha$ : the  $0 < \alpha < 1$  case. *ISA transactions*, 82, 42-50.
- Marir, S., Chadli, M., & Bouagada, D. (2017). New admissibility conditions for singular linear continuous-time fractional-order systems. *Journal of the franklin institute*, 354(2), 752-766.
- Kodra, K., & Gajic, Z. (2017). Optimal control for a new class of singularly perturbed linear systems. *Automatica*, 81, 203-208.
- Guo, B., Han, Y., Huang, D., Bian, D., & Zhang, L. (2017). Global smooth solution of a two-dimensional nonlinear singular system of differential equations arising from geostrophics. *Journal of differential equations*, 262(7), 3980-4020.
- Niamsup, P., & Phat, V. N. (2016). A new result on finite-time control of singular linear time-delay systems. *Applied mathematics letters*, 60, 1-7.
- Fu, L., & Ma, Y. (2016). Passive control for singular time-delay system with actuator saturation. *Applied mathematics and computation*, 289, 181-193.
- Hou, H., & Zhang, Q. (2016). Novel sliding surface design for nonlinear singular systems. *Neurocomputing*, 177, 497-508.
- Zheng, G., Efimov, D., Bejarano, F. J., Perruquetti, W., & Wang, H. (2016). Interval observer for a class of uncertain nonlinear singular systems. *Automatica*, 71, 159-168.
- Fang, Q. (2016). Retraction notice to "Synchronization and state feedback control of linearly coupled singular systems" [AMC 232 (2014) 381-390]. *Applied mathematics and computation*, 273, 1276-1276.
- Liu, Y., Kao, Y., Karimi, H. R., & Gao, Z. (2016a). Input-to-state stability for discrete-time nonlinear switched singular systems. *Information sciences*, 358, 18-28.
- Liu, Z. Y., Lin, C., & Chen, B. (2016b). Admissibility analysis for linear singular systems with time-varying delays via neutral system approach. *ISA transactions*, 61, 141-146.
- Al-Zhour, Z. (2016). The general solutions of singular and non-singular matrix fractional time-varying descriptor systems with constant coefficient matrices in Caputo sense. *Alexandria engineering journal*, 55(2), 1675-1681.
- Ren, G., & Liu, B. (2019). Near-optimal control for a singularly perturbed linear stochastic singular system with Markovian jumping parameters. *European journal of control*, 50, 88-95.
- Zhu, J. (2018). Singular optimal control by minimizer flows. *European journal of control*, 42, 32-37.