Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۴، شماره (۳)، پاییز ۱۳۹۸

www.journal-dmor.ir

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤، شماره (۳)، پاییز ۱۳۹۸، صفحه: ۲۰۸-۱۹۷

روشی برای تعیین مجموعه‌جواب‌های مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب ازطریق مسئله‌ی دوگان متناظرشان

نرگس عرب الجدیدی*

گروه ریاضی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران.

چکیده

دراین مقاله، روشی برای تعیین مجموعه‌جواب‌های کلاسی از مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب را از طریق مسئله‌ی دوگان متناظرشان ارائه می‌دهیم. درواقع مسئله‌ی بهینه‌سازی مقیدی که درنظر می‌گیریم دارای توابع محدب‌نما و موضعاً لیپ‌شیتز هستند که لزوما محدب و هموار نیستند و دسته‌ی وسیعی از توابع غیرمحدب غیرهموار را شامل می‌شوند. در روش پیشنهادی برای مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های مسئله‌ی اولیه، یک مسئله‌ی دوگان فرمول‌بندی می‌شود که ترکیبی‌از نوع ولف و نوع موند-ویر می‌باشد. در ابتدا برخی‌از ویژگی‌های تابع لاگرانژی متناظربا این مسائل را بررسی و سپس اثبات مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: دوگانگی، تابع لاگرانژی، مجموعه‌جواب، بهینه‌سازی غیرمحدب.

دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۳ اصلاح: ۱۳۹۸/۰٦/۰۲ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۰۲

۱- مقدمه

مطالعه روی مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های مسائل برنامه‌ریزی ریاضی موضوعی است که طی چندین سال، مورد توجه بسیاری‌از نویسندگان قرار گرفته است. برای اولین‌بار، مانگاساریان مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های مسائل محدب را با استفاده از زیردیفرانسیل‌های توابع محدب ارائه کرد (مانگاساریان، ۱۹۸۸). تاکنون نتایج بسیاری در زمینه‌ی مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های مسائل بهینه‌سازی محدب و غیرمحدب مطرح شده است. به‌عنوان مثال می‌توانید مراجع (بارک و فریز، ۱۹۹۱؛ ژیاکومار و یانگ، ۱۹۹۵؛ دنگ، ۱۹۹۸؛ یانو، ۲۰۰۱؛ پینت، ۲۰۰۳؛ ژیاکومار و همکاران، ۲۰۰٤؛ دینه و همکاران، ۲۰۰٦؛ سان و دینه، ۲۰۰۸؛ یانگ، ۲۰۰۹؛ لیو و همکاران، ۲۰۱۱) را ملاحظه کنید. هدف ما این است که روشی را برای اثبات مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های کلاسی از مسائل غیرمحدب از طریق مسائل دوگان بیان کنیم. هم‌چنین نشان دهیم که مجموعه‌جواب‌های برخی از مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب یا محدب توسط این روش تعیین می‌شود.

---

*عهده‌دار مکاتبات: narges.araboljadidi@gmail.com

شناسه دیجیتال: 10.22105/dmor.2019.189959.1123

مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll}(P) & \text{Maximize} & f(x) \\ & s.t. & f_t(x) \le 0, \quad t \in T, \\ & & x \in C,\end{array}$$

که در آن، برای $t \in T$ ، توابع $f, f_t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ‌شیتز و T مجموعه اندیس‌های دلخواه است که ممکن است نامتناهی باشد. C نیز یک زیرمجموعه‌ی محدب و بسته از $\mathbb{R}^n$ است.

دراین مقاله از مفهوم محدب‌نمایی به‌عنوان تعمیم مفهوم محدب‌بودن استفاده شده است که در (هیری‌آرت- اوروته، ۱۹۹۷) برای حالتی‌که توابع درگیر دیفرانسیل‌ناپذیر هستند، پیشنهاد شده است. توجه داشته باشید که مفهوم توابع محدب‌نما اولین‌بار توسط مانگاساریان برای توابع دیفراسیل‌پذیر معرفی شد (مانگاساریان، ۱۹۶۵). برای آشنایی بیش‌تر با تعمیم توابع محدب می‌توانید (پینی و سینگ، ۱۹۹۰) را ملاحظه کنید. تئوری بهینه‌سازی غیرهمواری که دراین مقاله استفاده شده است براساس کتاب معروف کلارک می‌باشد (کلارک، ۱۹۹۰؛ هانسون، ۱۹۹۸). برای تعیین مجموعه‌جواب‌های مسائل برنامه‌ریزی غیرمحدب یا محدب مقید، معمولا حداقل یکی‌از جواب‌های داده‌شده باید در شرط بهینگی صدق کند. در این‌صورت، در مراجع (ژیاکومار و همکاران، ۲۰۰٤؛ دینه و همکاران، ۲۰۰٦؛ سان و دینه، ۲۰۰۸؛ لالیتها و میتها، ۲۰۰۹؛ کیم و سان، ۲۰۱۱) نشان داده شده است که تابع لاگرانژی متناظر، با برخی‌از ضرایب لاگرانژی داده‌شده توسط شرایط بهینگی، روی مجموعه‌جواب‌های این مسائل ثابت است. براساس این شرایط، مشخصه‌سازی‌های مجموعه‌جواب‌هایشان مطرح می‌شود. در روش ارائه‌شده‌ی این مقاله، برای مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های (P) ، یک مسئله‌ی دوگان (P) فرمول‌بندی می‌شود که ترکیبی‌از نوع ولف[۱] و نوع موند–ویر[۲] می‌باشد. سپس مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌ها، تحت فرضیاتی که جوابی برای مسئله‌ی دوگان (P) وجود دارد و مقدار بهینه‌ی هردو مسئله با یکدیگر برابرند، اثبات می‌شود.

در ابتدا، برخی ویژگی‌های تابع لاگرانژی را بیان می‌کنیم. توجه داشته باشید که تابع لاگرانژی متناظربا (P) همان تابع هدف مسئله‌ی دوگانش از نوع ولف است. درواقع نشان داده می‌شود که تابع لاگرانژ (متناظربا برخی ضرایب لاگرانژی) روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ می‌تواند ثابت باشد که این مجموعه، مجموعه‌جواب‌های (P) را شامل می‌شود. علاوه‌براین، متناظربا یک جواب (P)، تابع لاگرانژی روی مجموعه‌ی همه‌ی ضرایب لاگرانژی متناظر ثابت است. پس‌ازآن، اثبات چندین مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌ها را از طریق مسائل دوگان (P)، ارائه می‌دهیم. هم‌چنین با استفاده از روش‌های مشابه، چندین مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های مسائل بهینه‌سازی که پیش‌از این مطرح شده است را بررسی خواهیم کرد.

۲- مفاهیم و قضایای اولیه

پیش‌از بیان نتایج اصلی، مفاهیم موردنیاز را یادآوری می‌کنیم. پس‌از آن، برخی‌از ویژگی‌های جدید تابع لاگرانژی را ارائه می‌دهیم. قسمت آخر هم به مشخصه‌سازی مجموعه‌جواب‌های (P) و چند مثال در این رابطه، اختصاص می‌دهیم.

[۱] Wolfe

[۲] Mond-Weir

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤ ، شماره (۳)، پاییز ۱۳۹۸، صفحه: ۲۰۸–۱۹۷

فرض کنید، فضای خطی دنباله‌های متناهی تعمیم‌یافته $\lambda=(\lambda)_{t\in T}$ که برای هر $t\in T$، $\lambda_t\in\mathbb{R}$ و تنها در تعداد متناهی $\lambda_t\neq 0$ است را با $\mathbb{R}^T$ نمایش دهیم (گوبرنا و لوپز، ۱۹۹۸). برای هر $t\in T$، $\lambda_t\in\mathbb{R}$ و تنها در تعداد متناهی $\lambda_t\neq 0$ است $\mathbb{R}^{(T)}:=\{\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}|\}$.

برای هر $\lambda\in\mathbb{R}^{(T)}$، مجموعه‌ی محمل[1] متناظربا λ به‌صورت $T(\lambda):=\{t\in T|\lambda_t\neq 0\}$ تعریف می‌شود که زیرمجموعه‌ی متناهی از T است. مخروط نامنفی $\mathbb{R}^{(T)}$ نیز با $\mathbb{R}_+^{(T)}:=\{\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}^{(T)}|\lambda_t\geq 0, t\in T\}$ مشخص می‌شود. برای $\lambda\in\mathbb{R}^{(T)}$ و $\{z_t\}_{t\in T}\subseteq Z$ که Z یک فضای خطی حقیقی است، داریم:

$$\sum_{t\in T}\lambda_t z_t=\begin{cases}\sum_{t\in T(\lambda)}\lambda_t z_t & ,T(\lambda)\neq\varnothing\\ 0 & ,T(\lambda)=\varnothing\end{cases}.$$

در طول این مقاله فرض می‌شود که T یک مجموعه‌ی فشرده، $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ یک تابع موضعاً لیپ‌شیتز و $f_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ برای $t\in T$ نسبت‌به x به‌طور یکنواخت در t، موضعاً لیپ‌شیتز است یعنی

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\exists U(x),\exists K>0,|f_t(u)-f_t(v)|\leq K\parallel u-v\parallel,\forall u,v\in U(x),\forall t\in T$$

در ادامه، مفاهیمی را از (کلارک، ۱۹۹۰؛ هانسون، ۱۹۹۸). یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید (D) یک زیرمجموعه‌ی محدب بسته و ناتهی از $\mathbb{R}^n$ باشد. مخروط نرمال (D) در نقطه‌ی $z\in D$ همان مخروط نرمال در آنالیز محدب است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(D,z):=\{v\in\mathbb{R}^n\ |v(x-z)\leq 0,\forall x\in D\}.$$

فرض کنید $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ یک تابع موضعاً لیپ‌شیتز است. مشتق جهتی g در $z\in\mathbb{R}^n$ درجهت $d\in\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$g'(z;d)=\lim_{t\to 0^+}\frac{g(z+td)-g(z)}{t}.$$

زیردیفرانسیل جهتی تعمیم یافته‌ی کلارک g در $z\in\mathbb{R}^n$ درجهت $d\in\mathbb{R}^n$ نیز به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$g^c(z;d):=\limsup_{\substack{y\to z\\ t\to 0^+}}\frac{g(y+td)-g(y)}{t}.$$

هم‌چنین زیردیفرانسیل کلارک g در $z\in\mathbb{R}^n$ با $\partial^c g(z)$ مشخص می‌شود و با $\partial^c g(z):=\{v\in\mathbb{R}^n|v(d)\leq g^c(z;d),\forall d\in\mathbb{R}^n\}$ تعریف می‌شود.

تابع موضعاً لیپ‌شیتز g در $z\in\mathbb{R}^n$ (در مفهوم کلارک) منظم است هرگاه $g'(z;d)$ موجود باشد و داشته باشیم:

$$g^c(z;d)=g'(z;d),\qquad \forall d\in\mathbb{R}$$

تابع موضعاً لیپ‌شیتز $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ محدب‌نماست هرگاه برای هر $x,y\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

[1] Supporting set

$$f^c(x;y-x)\geq 0 \ \ \Rightarrow f(y)\geq f(x).$$

تابع موضعاً لیپ‌شیتز $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ شبه‌محدب است هرگاه برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(y)\leq f(x) \ \ \Rightarrow \ \ f^c(x;y-x)\leq 0.$$

فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ یک تابع موضعاً لیپ‌شیتز محدب‌نماست. اگر $u\in\partial^c f(x)$ وجود داشته باشد که برای $y,x\in\mathbb{R}^n$، $u(y-x)\geq 0$ آن‌گاه $f(y)\geq f(x)$.

فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ یک تابع موضعاً لیپ‌شیتز است. اگر f محدب‌نما باشد آن‌گاه f شبه محدب است.

۳- نتایج اصلی

اساس نتایج ارائه‌شده دراین قسمت مطابق با مقاله (کیم و سان، ۲۰۱٤) می‌باشد. فرض کنید مجموعه‌ی موجه (P) را با A و مجموعه‌ی جواب‌های (P) را با $Sol(P)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Sol(P)=\{z\in A|\, f(z)\leq f(x),\forall x\in A\}.$$

مجموعه $Sol(P)$ را ناتهی درنظر می‌گیریم. علاوه‌براین تحت یک شرط توصیف قیدی، اگر $z\in Sol(P)$ باشد آن‌گاه $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}_+^{(T)}$ وجود دارد که شرط زیر برقرار است (کیم و سان، ۲۰۱۱؛ دینه و همکاران، ۲۰۰٦؛ کیم و سان، ۲۰۱٤؛ سان و همکاران، ۲۰۰۹).

$$0\in\partial^c f(z)+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial^c f_t(z)+N(C,z),\, \lambda_t f_t(z)=0, \qquad \forall t\in T. \tag{۱}$$

تابع لاگرانژی متناظربا (P) به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$L(x,\lambda)=\begin{cases} f(x)+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t(x), & (x,\lambda)\in C\times \mathrm{R}_+^{(T)} \\ +\infty, & otherwise \end{cases}.$$

برای هر $\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}$ تابع $L(.,\lambda)$ روی $\mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ‌شیتز است.

مسئله‌ی دوگان (P) که ترکیبی‌از نوع ولف و نوع موند–ویر است، عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} (D)\quad & Maximize \quad L(y,\lambda):=f(y)+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t(y) \\ & s.t. \qquad 0\in\partial^c f(y)+\sum_{t\in T}(\lambda_t+\mu_t)\partial^c f_t(y)+N(C,y), \\ & \qquad\qquad \mu_t f_t(y)\geq 0, t\in T, \\ & \qquad\qquad (y,\lambda,\mu)\in C\times\mathbb{R}_+^{(T)}\times\mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned}$$

فرض کنید که مجموعه‌ی موجه (D) را با G و مقادیر بهینه‌ی مسائل (P) و (D) به‌ترتیب با $V(P)$ و $V(D)$ نمایش داده می‌شود.

واضح است که برای $\mu=0$ مسئله‌ی (D) با مسئله‌ی دوگان (P) در نوع ولف، برابر است که با (D_W) نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} (D_W)\quad & Maximize \quad L(y,\lambda):=f(y)+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t(y) \\ & s.t. \qquad 0\in\partial^c f(y)+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial^c f_t(y)+N(C,y), \\ & \qquad\qquad (y,\lambda)\in C\times\mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned}$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤ ، شماره (۳)، پاییز ۱۳۹۸، صفحه: ۲۰۸-۱۹۷

هم‌چنین برای $\lambda = 0$ مسئله‌ی (D) با مسئله‌ی دوگان (P) در نوع موند–ویر، برابر است که با (D_M) نمایش داده می‌شود:

$$\begin{array}{lll} (D_M) & Maximize & f(y) \\ & s.t. & 0 \in \partial^c f(y) + \sum_{t \in T} \mu_t \partial^c f_t(y) + N(C, y), \\ & & \mu_t f_t(y) \geq 0, \qquad t \in T, \\ & & (y, \mu) \in C \times \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{array}$$

حال فرض می‌کنیم که تابع $L(\cdot, \lambda)$ روی $\mathbb{R}^n$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موضعاً لیپ‌شیتز است و f، f_t برای $t \in T$ روی $\mathbb{R}^n$ منظم هستند.

لم ۱. (کیم و سان، ۲۰۱٤). اگر z یک جواب (P) باشد و $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موجود باشد که برای $(z, \bar{\lambda})$ شرط (۱) برقرار باشد، آن‌گاه $(z, \bar{\lambda}, 0)$ و $(z, 0, \bar{\lambda})$ جواب‌های D هستند و $V(P) = V(D)$ است.

لم ۲. (کیم و سان، ۲۰۱٤) اگر z یک جواب (P) باشد و $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موجود باشد که برای $(z, \bar{\lambda})$ شرط (۱) برقرار باشد، آن‌گاه $(z, \bar{\lambda})$ یک جواب (D_W) و (D_M) است و $V(P) = V(D_W) = V(D_M)$ است.

۳-۱- برخی ویژگی‌های تابع لاگرانژی

تابع لاگرانژی یکی‌از توابع شناخته‌شده در برنامه‌ریزی ریاضی است که نقش مهمی را در پیداکردن ماکزیمم یا مینیمم مسائل مقید ایفا می‌کند. دراین قسمت برخی‌از ویژگی‌های جدید تابع لاگرانژی متناظربا (P) که مربوطبه مسائل دوگان آن می‌شود را معرفی می‌کنیم.

گزاره ۱. فرض کنید که (y^*, λ^*, μ^*) یک جواب (D) باشد؛

الف) برای هر $y \in G_1 := \{y \in C | (y, \lambda^*, \mu^*) \in G \ , L(y, \lambda^*, \mu^*) = V(D)$ و برای هر $t \in T$، $\mu_t^* f_t(y^*) = 0$ برقرار است.

ب) به‌علاوه، اگر $V(P) = V(D)$ باشد آن‌گاه برای هر $y \in Sol(P)$، $L(y, \lambda^*, \mu^*) = V(D)$ و برای هر $t \in T$، $(\lambda^* + \mu^*) f_t(y) = 0$ برقرار است.

اثبات. الف) فرض کنید (y^*, λ^*, μ^*) یک جواب (D) است؛ از این‌رو $(y^*, \lambda^*, \mu^*) \in C \times \mathbb{R}_+^{(T)} \times \mathbb{R}_+^{(T)}$ داریم که

$$0 \in \partial^c f(y^*) + \sum_{t \in T} (\lambda_t^* + \mu_t^*) \ \partial^c f_t(y^*) + N(C, y^*), \mu_t^t f_t(y^*) \geq 0, \quad t \in T.$$

به‌همین خاطر، $u \in \partial^c f(y)$، برای هر $w \in N(C, y^*)$، $u_t \in \partial^c f_t(y^*)$، $t \in T$ وجود دارند که

$$u + \sum_{t \in T} (\lambda_t^* + \mu_t^*) \ u_t + w = 0. \tag{۲}$$

از آن‌جایی که برای هر $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$، $L(\cdot, \lambda)$ تابعی محدب‌نما روی $\mathbb{R}^n$ است و f و برای $t \in T$، f_t توابعی منظم روی $\mathbb{R}^n$ هستند، با استدلالی مشابه **لم ۱** و رابطه‌ی (۲) داریم:

$$L(y^*, \lambda^* + \mu^*) \leq L(y, \lambda^* + \mu^*), \quad \forall y \in C. \tag{۳}$$

بنابراین داریم

$$L(y^*, \lambda^*) \leq L(y^*, \lambda^* + \mu^*) \leq L(y, \lambda^* + \mu^*), \quad \forall y \in G_1.$$

و درنتیجه

$$L(y^*, \lambda^*) \leq \inf_{G_1} L(y, \lambda^* + \mu^*). \tag{٤}$$

ازطرفی، برای λ^* و μ^* بالا داریم:

$$\inf_{G_1} L(y,\lambda^*+\mu^*) \le \sup_{G_1} L(y,\lambda^*+\mu^*) \le \sup_{(y,\lambda,\mu)\in G} L(y,\lambda) = L(y^*,\lambda^*).$$

با ترکیب رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (٤) به‌دست می‌آوریم:

$$L(y,\lambda^*+\mu^*) = L(y^*,\lambda^*) = V(D), \quad \forall y \in G_1.$$

هم‌چنین با درنظرگرفتن $y = y^*$ در سمت چپ تساوی $L(y,\lambda^*+\mu^*) = L(y^*,\lambda^*)$، برای هر $t \in T$ ، $\mu_t^* f_t(y^*) = 0$ می‌شود.

ب) اگر $V(D) = V(P)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی (۳) به‌دست می‌آوریم:

$$V(P) = L(y^*,\lambda^*+\mu^*) \le L(y,\lambda^*+\mu^*) \le f(y) = V(P), \quad \forall y \in Sol(P).$$

یعنی برای هر $y \in Sol(P)$، $L(y,\lambda^*+\mu^*) = V(D)$ است که این برای هر $y \in Sol(P)$ نتیجه می‌دهد:

$$f(y) + \sum_{t\in T}(\lambda_t^t + \mu_t^t) f_t(y).$$

از این‌رو برای هر $t \in T$، $(\lambda_t^* + \mu_t^*) f_t(y) = 0$ می‌شود.

نتیجه ۱. فرض کنید z یک جواب (P) باشد و $\bar{\lambda}$ موجود باشد که برای $(z,\bar{\lambda})$ شرط (۱) برقرار باشد. در این‌صورت داریم:

$$L(y,\bar{\lambda}) = f(z), \quad \forall y \in G_1 := \{y \in C | (y,\bar{\lambda},0) \in G\}. \qquad (٥)$$

و برای هر $y \in Sol(P)$، $\bar{\lambda}_t f_t(y) = 0$ است.

اثبات. فرض کنید $z \in Sol(P)$ و $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ باشد به‌طوری‌که برای $(z,\bar{\lambda})$ شرط (۱) برقرار است. طبق **لم ۱**، $(z,\bar{\lambda},0)$ یک جواب (D) است و دوگانگی قوی رخ می‌دهد. بنابراین طبق قسمت (الف) **گزاره ۱** شرط (٥) برقرار است و بنابر قسمت (ب) **گزاره ۱**، برای هر $y \in Sol(P)$ ، $\lambda_t f_t(y) = 0$ را داریم.

تذکر ۱.

۱) از نتیجه‌ی بالا می‌توانیم دریابیم که تابع لاگرانژی (P) می‌تواند روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که مجموعه‌ی جواب‌های (P) را شامل می‌شود، ثابت باشد و از **نتیجه ۱**، **لم ۱** نتیجه شود (دینه و همکاران، ۲۰۰٦).

۲) اگر توابع درگیر در مسئله‌ی (P) محدب باشند، از **نتیجه ۱**، **لم ۱** نتیجه می‌شود (یانگ، ۲۰۰۹).

فرض کنید $\bar{G}$ و $\bar{\bar{G}}$ به‌ترتیب مجموعه‌های موجه (D_W) و (D_M) باشند. نتیجه‌های دیگری را می‌توان به‌دست آورد که در زیر، آن‌ها را شرح می‌دهیم:

نتیجه ۲. فرض کنید که (y^*,λ^*) یک جواب (D_W) است؛

الف) برای هر $y \in \bar{G}_1$، $L(y,\lambda^*) = V(D_W)$ است که در آن $\bar{G}_1 = \{y \in C | (y,\lambda^*) \in \bar{G}\}$ می‌باشد.

ب) علاوه‌بر این، اگر $V(D_W) = V(P)$ باشد، آن‌گاه برای هر $y \in Sol(P)$، $L(y,\lambda^*) = V(D_W)$ و برای هر $t \in T$ ، $\lambda_t^* f_t^*(y) = 0$ است.

اثبات. اگر حالت خاص $\mu = 0$ برای مسئله‌ی (D) درنظر گرفته شود، این نتیجه به‌دست می‌آید. درواقع، دراین‌حالت، (y^*, λ^*) یک جواب (D_W) است که این معادل است با این‌که $(y^*, \lambda^*, 0)$ یک جواب (D) باشد.

نتیجه ۳. فرض کنید که (y^*, λ^*) یک جواب (D_M) است:

الف) برای هر $y \in \bar{\bar{G}}_1$، $L(y, \mu^*) = V(D_M)$ است که در آن $\bar{\bar{G}}_1 = \{y \in C | (y, \mu^*) \in G\}$ می‌باشد.

ب) علاوه‌بر این، اگر $V(D_M) = V(P)$ باشد، آن‌گاه برای هر $y \in Sol(P)$ ، $L(y, \mu^*) = V(D_M)$ و برای هر $t \in T$، $\mu_t^* f_t(y) = 0$ است.

اثبات. اگر حالت خاص $\lambda = 0$ برای مسئله‌ی (D) در نظر گرفته شود، این نتیجه به‌دست می‌آید.

در ادامه، ویژگی دیگری از تابع لاگرانژی را ارائه می‌دهیم.

گزاره ۲. فرض کنید که (y^*, λ^*, μ^*) یک جواب (D) باشد. اگر $f(y^*) \geq V(P)$ باشد آن‌گاه

$$L(y^*, \lambda) = V(P), \qquad \forall \lambda \in G_2 := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} | (y^*, \lambda, \mu) \in G, \lambda_t f_t(y^*) \geq 0, t \in T\}.$$

اثبات. از آن‌جایی که (y^*, λ^*, μ^*) یک جواب (D) است، $f(y^*) \geq V(P)$ می‌باشد. در این‌صورت داریم:

$$L(y^*, \lambda^*) \geq L(y^*, \lambda) \geq f(y^*) \geq V(P), \forall \lambda \in G_2. \tag{٦}$$

از طرفی چون $(y^*, \lambda^*, \mu^*) \in G$ است، با استدلالی مشابه اثبات **گزاره ۲**، برای هر $y \in C$ به‌دست می‌آوریم:

$$L(y^*, \lambda^*) \leq L(y^*, \lambda^* + \mu^*) \leq L(y, \lambda^* + \mu^*).$$

بنابراین برای هر $y \in A$ ، $L(y^*, \lambda^*) \leq L(y, \lambda^* + \mu^*) \leq f(y)$ است. از این‌رو $L(y^*, \lambda^*) \leq V(P)$ می‌شود و با ترکیب آن با رابطه‌ی (٦)، اثبات تکمیل می‌شود.

نتیجه ٤. فرض کنید y^* یک جواب (P) است. در این‌صورت λ^* وجود دارد که رابطه‌ی (۱) برقرار است. بنابر **لم ۱**، $(y^*, \lambda^*, 0)$ یک جواب (D) است و طبق **گزاره ۲**، $L(y^*, \cdot)$ روی G_2 ثابت است.

نتیجه ۵. فرض کنید (y^*, λ^*) یک جواب (D_W) است. اگر $f(y^*) \geq V(P)$ باشد آن‌گاه داریم

$$L(y^*, \lambda) = V(P), \forall \lambda \in \bar{G}_2 = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} | (y^*, \lambda) \in \bar{G}, \lambda_t f_t(y) \geq 0, t \in T\}.$$

اثبات. فرض کنید که (y^*, λ^*) یک جواب (D_W) است که این معادل است با این‌که $(y^*, \lambda^*, 0)$ یک جواب مسئله‌ی (D) به‌ازای $\mu = 0$ اشد. طبق **گزاره ۲**، نتیجه می‌گیریم که $L(y^*, \cdot)$ روی $\bar{G}_2$ ثابت است.

مثال ۱.

$$\begin{array}{lll} (Q_1) & Minimize & x - y + (x-y)^3 \\ & s.t. & y - x \leq 0, \\ & & x^2 - y \leq 0. \end{array}$$

با محاسباتی ساده $Sol(Q_1) = \{(x, y) | \ 0 \leq x \leq 1, \ x = y\}$ به‌دست می‌آید. دوگان (Q_1) در نوع ولف به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$
\begin{array}{lll}
(Q_1^*) & Maximize & L(z,\lambda)=x-y+(x-y)^3+\lambda_1(y-x)+\lambda_2(x^2-y) \\
 & s.t. & (0,0)=(1+3(x-y)^2-\lambda_1+2\lambda_2 x,-1-3(x-y)^2+\lambda_1-\lambda_2). \\
 & & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \lambda_1,\lambda_2\geq 0
\end{array}
$$

می‌توانیم بررسی کنیم که $\bar{z}=(0,0)$ یک جواب (Q_1) و $(\bar{z},\bar{\lambda})$ برای $\bar{\lambda}=(1,0)$ یک جواب (Q_1) است. توجه داشته باشید که $L(\cdot,\bar{\lambda})$ یک تابع محدب‌نماست. نشان می‌دهیم که $L(\cdot,\bar{\lambda})$ روی زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^n$ که مجموعه‌ی جواب (Q_1) را شامل می‌شود، ثابت است. درواقع می‌توان بررسی کرد که متناظربا $\bar{\lambda}=(1,0)$ ، مجموعه‌ی $\bar{G}_1$ برابراست با $\{(x,y)|\, x-y=0\}$. در این‌صورت، به‌وضوح $L(\cdot,\bar{\lambda})$ روی $\bar{G}_1$ ثابت است و محدوده‌ی x خارج از بازه‌ی $[0,1]$ است. فرض کنید که z یک جواب (Q_1) است. با درنظرگرفتن مجموعه‌ی موجه (Q_1^*)، $\bar{G}_2=\{(\lambda_1,\lambda_2)|\ \lambda_1>0,\ \lambda_2=0\}$ می‌شود.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤ ، شماره (۳)، پاییز ۱۳۹۸، صفحه: ۲۰۸-۱۹۷

۳-۲- مشخصه‌سازی‌های مجموعه‌جواب‌های (P)

دراین‌قسمت، مشخصه‌سازی‌های مجموعه‌جواب‌های (P) را از طریق مسئله‌ی دوگانش و براساس نتایج ویژگی‌های مطرح شده‌ی تابع لاگرانژی، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنید که $(z,\bar{\lambda},\bar{\mu})$ یک جواب (D) است. اگر $V(P)=V(D)$ باشد آن‌گاه $Sol(P)=S=S_1$ است که در آن S و S_1 به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
S=\{&y\in C|\exists u\in\partial^c L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu}), u(z-y)=0, f_t(y)=0, t\in T(\bar{\lambda}+\bar{\mu}); f_t(y)\leq 0, t\in T\setminus T(\bar{\lambda}+\bar{\mu})\},\\
S_1=\{&y\in C|\exists u\in\partial^c L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})\cap\partial^c L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu}), u(z-y)=0, f_t(y)=0,\\
&t\in T(\bar{\lambda}+\bar{\mu}); f_t(y)\leq 0, t\in T\setminus T(\bar{\lambda}+\bar{\mu})\}.
\end{aligned}
$$

اثبات. از آن‌جایی که $S\subseteq S_1$ است، کافیست ثابت کنیم $S\subseteq Sol(P)$ و $S_1\subseteq L(P)$.

الف). برای اثبات $S\subseteq Sol(P)$ فرض کنید $y\in C$ و $u\in\partial^c L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ وجود دارند که $u(z-y)=0$ و برای $t\in T(\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ ، $f_t(y)=0$ به‌طوری‌که برای $t\in T\setminus T(\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ ، $f_t(y)\leq 0$ است یعنی $y\in A$ می‌باشد. چون تابع $L(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ روی $\mathbb{R}^n$ محدب‌نماست، بنابر **لم ۲** نتیجه می‌گیریم که

$$f(z)+\sum_{t\in T}(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t)f_t(z)\geq f(y)\sum_{t\in T}(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t)f_t(y).$$

با استفاده از **گزاره ۲**، برای $t\in T$ ، $\bar{\mu}_t f_t(z)=0$ را داریم. ازاین‌رو باتوجه به این‌که برای $t\in T(\bar{\lambda}+\bar{\mu})$، $f_t(y)=0$ است از نامساوی بالا به‌دست می‌آوریم:

$$V(D)=f(z)+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t f_t(z)\geq f(y).$$

از آن‌جایی که $y\in A$، $V(P)=V(D)$ و $V(P)\geq f(y)$ است، درنتیجه $y\in Sol(P)$.

ب). برای اثبات $Sol(P)\subseteq S_1$ فرض کنید $y\in Sol(P)$ است. بنابر **گزاره ۲** داریم: $L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu})=L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ و برای $t\in T(\bar{\lambda}+\bar{\mu})$، $f_t(y)=0$. چون $L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu})=L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ طبق **لم ۳** می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای هر $u\in\partial^c L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ ، $u(y-z)\leq 0$ است. به دلیل این‌که $(z,\bar{\lambda},\bar{\mu})\in G$ است، $v\in\partial^c f(z)$، برای $t\in T$ $u_t\in\partial^c f_t(z)$ و $w\in N(C,z)$ وجود دارند به‌طوری که

$$v+\sum_{t\in T}(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t)u_t+w=0. \qquad (۷)$$

و برای $t\in T$، $\bar{\mu}_t f_t(z)\geq 0$ می‌باشد. قرار می‌دهیم $u=v+\sum_{t\in T}(\bar{\lambda}_t+\bar{\mu}_t)u_t$. به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $u\in\partial^c L(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(z)$ ، $x\in C$ و $u(x-z)\geq 0$ است. بنابراین $u\in\partial^c L(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(y)$ وجود دارد به‌طوری که $u(y-z)=0$ است. برای تکمیل اثبات، کافیست نشان دهیم که $u\in\partial^c L(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(y)$. ادعا می‌کنیم که اگر $u(d)\leq L^{\circ}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(z;d)$ باشد آن‌گاه

$u(d) \le L^{\circ}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(y;d)$ است. درواقع با برهان خلف فرض می‌کنیم که $u(d) > L^{\circ}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(y;d)$ است. در این‌صورت $L^{\circ}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(z;d) - L^{\circ}(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})(y;d) > 0$ می‌شود. هم‌چنین چون برای $t \in T$ ، f_t و f روی $\mathbb{R}^n$ توابعی منظم‌اند، $L(\cdot,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ نیز روی $\mathbb{R}^n$ منظم می‌شود. ثابت $\alpha > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای $t > 0$ به‌اندازه‌ی کافی کوچک داریم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{L(z+td,\bar{\lambda}+\bar{\mu})-L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu})}{t}-\frac{L(y+td,\bar{\lambda}+\bar{\mu})-L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})}{t} > \alpha > 0.$$

از این‌رو $L(z+td,\bar{\lambda}+\bar{\mu}) - L(y+td,\bar{\lambda}+\bar{\mu}) > 0$. بنابراین $L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu}) > L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ می‌شود که تناقض است. به‌همین‌خاطر از $u \in \partial^c L(z,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ می‌توان $u \in \partial^c L(y,\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ را نتیجه گرفت.

نتیجه ٦. فرض کنید که z یک جواب (P) باشد و $\bar{\lambda}$ وجود داشته باشد که شرط (۱) برقرار باشد. در این‌صورت $Sol(P) = S' = S_1'$ است که در آن S' و S_1' به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} S' &= \{y \in C | \exists u \in \partial^c L(y,\bar{\lambda}), u(z-y)=0,\ f_t(y)=0, t\in T(\bar{\lambda});\ f_t(y) \le 0, t \in T \setminus T(\bar{\lambda})\},\\ S_1' &= \{y \in C | \exists u \in \partial^c L(y,\bar{\lambda}) \cap \partial^c L(z,\bar{\lambda}), u(z-y)=0,\ f_t(y)=0, t\in T(\bar{\lambda});\ f_t(y) \le 0, t \in T \setminus T(\bar{\lambda})\}. \end{aligned}$$

اثبات. اگر z یک جواب (P) باشد و $\bar{\lambda}$ وجود داشته باشد که شرط (۱) برقرار باشد. در این‌صورت طبق **لم ۱**، $(z,\lambda,0)$ یک جواب (D) است. بنابراین با استفاده از **قضیه ۱** می‌توان این نتیجه را به‌دست آورد.

توجه داشته باشید که اگر $\mu = 0$ باشد، مسئله‌ی (D) به مسئله‌ی (D_W) و اگر $\lambda = 0$ باشد به مسئله‌ی (D_M) تبدیل می‌شود. در نتیجه‌ی زیر مشخصه‌سازی‌های مجموعه‌جواب‌های (P) که می‌توان از طریق (D_W) اثبات کرد را بیان می‌کنیم. این نتیجه مستقیماً از **قضیه ۱** به‌دست می‌آید.

نتیجه ۷ . فرض کنید $(z,\bar{\lambda})$ یک جواب (D_W) است. اگر $V(P) = V(D_W)$ باشد در این‌صورت $Sol(P) = S' = S_1'$ است.

اثبات. این معادل است با این‌که $(z,\bar{\lambda},0)$ یک جواب (D) به‌ازای $\mu = 0$ باشد. در این‌صورت با استفاده از **قضیه ۱**، این نتیجه حاصل می‌شود.

تذکر۲. توجه کنید که اگر z یک جواب (P) باشد و شرط (۱) برقرار باشد، در این‌صورت بنابر **لم ۱**، $\bar{\lambda}$ وجود دارد که $(z,\bar{\lambda})$ یک جواب (D_W) است و $V(P) = V(D_W)$ می‌باشد.

نتیجه ۸. فرض کنید $(z,\bar{\lambda})$ یک جواب (D_M) است. اگر $V(P) = V(D)$ باشد آن‌گاه $Sol(P) = S' = S_1'$ است.

اثبات. فرض کنید $(z,\bar{\lambda})$ یک جواب (D_M) است. این معادل است با این‌که $(z,0,\bar{\lambda})$ یک جواب (D) باشد. بنابراین طبق **قضیه ۱** نتیجه به‌دست می‌آید.

تذکر۳. توجه داشته باشید که اگر z یک جواب (P) باشد و شرط (۱) صادق باشد در این‌صورت طبق **لم ۱**، $\bar{\lambda}$ وجود دارد که $(z,\bar{\lambda})$ یک جواب (D_W) است و $V(P) = V(D_M)$ می‌باشد. این نشان می‌دهد که از **نتیجه ٦** می‌توان **نتیجه ۸** را به‌دست آورد.

حال مشخصه‌سازی‌های مجموعه‌جواب‌های (P) را بیان می‌کنیم.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤، شماره (۳)، پاییز ۱۳۹۸، صفحه: ۲۰۸–۱۹۷

قضیه ۲. فرض کنید $(z,\bar{\lambda})$ یک جواب (D_M) است و تابع f روی $\mathbb{R}^n$ محدب‌نماست. هم‌چنین برای هر $t \in T$، f_tها روی $\mathbb{R}^n$ شبه‌محدب‌اند. اگر $V(P) = V(D_M)$ باشد آن‌گاه $Sol(P) = S_2 = S_3$ است که در آن S_2 و S_3 به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$S_2 = \{y \in C | \exists u \in \partial^c f(y), u(z-y) = 0,\ f_t(y) = 0, t \in T(\bar{\mu});\ f_t(y) \leq 0, t \in T \setminus T(\bar{\mu})\},$$
$$S_3 = \{y \in C | \exists u \in \partial^c f(y) \cap \partial^c f(z), u(z-y) = 0,\ f_t(y) = 0, t \in T(\bar{\mu});\ f_t(y) \leq 0, t \in T \setminus T(\bar{\mu})\}.$$

اثبات. چون $S_2 \subseteq S_3$ است، کافیست نشان دهیم $S_2 \subseteq Sol(P)$ و $Sol(P) \subseteq S_3$.

الف). برای اثبات $S_2 \subseteq Sol(P)$، $y \in S_2$ را درنظر بگیرید. در این‌صورت $y \in A$ نیز هست و $u \in \partial^c f(y)$ وجود دارد که $u(z-y) = 0$ و برای $t \in T(\bar{\mu})$ ، $f_t(y) = 0$ است به‌طوری که برای $t \in T \setminus T(\bar{\mu})$ ، $f_t(y) \leq 0$ باشد. از آن‌جایی که تابع f روی $\mathbb{R}^n$ شبه‌محدب است، از $u(z-y) = 0$، $f(z) \geq f(y)$ را به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین چون $V(P) = V(D_M)$ و $V(P) \geq f(y)$ ، $y \in Sol(P)$ می‌شود.

برای اثبات $Sol(P) \subseteq S_3$، $y \in S_3$ را درنظر بگیرید. چون $V(P) = V(D_M)$ است، $f(z) = f(y)$ نیز می‌باشد. با ترکیب این رابطه و ویژگی شبه‌محدب‌بودن f ، طبق **لم ۳**، برای هر $u \in \partial^c f(z)$ ، $u(y-z) \leq 0$ را به‌دست می‌آوریم. علاوه‌بر این، چون $(z,\bar{\mu}) \in \bar{\bar{G}}$ است، $u \in \partial^c f(z)$ و برای هر $t \in T$، $u_t \in \partial^c f_t(z)$، $w \in N(C,z)$ برای هر $t \in T$، $\bar{\mu}_t f_t(z) \geq 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$u + \sum_{t \in T} \bar{\mu}_t u_t + w = 0. \tag{۸}$$

هم‌چنین چون برای $t \in T(\bar{\mu})$، f_tها روی $\mathbb{R}^n$ شبه‌محدب‌اند و برای هر $t \in T(\bar{\mu})$، $f_t(z) \geq 0$ است و برای $y \in A$ ، $f_t^\circ(z; y-z) \leq 0$ است، درنتیجه داریم:

$$u_t(y-z) \leq 0, \qquad u_t \in \partial^c f_t(z), t \in T(\bar{\mu}).$$

این رابطه به‌همراه رابطه‌ی (۸)، $u(y-z) \geq 0$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین $u(y-z) = 0$ است. حال نشان می‌دهیم که برای هر $t \in T(\bar{\mu})$، $f_t(y) = 0$ است. توجه کنید که بنابر **نتیجه ۳**، برای هر $t \in T$ ، $\bar{\mu}_t f_t(y) = 0$ می‌شود، یعنی برای هر $t \in T(\bar{\mu})$ ، $f_t(y) = 0$ است. برای تکمیل اثبات، کافیست نشان دهیم $u \in \partial^c f(y)$ است که مشابه قسمت آخر اثبات **قضیه ۱** به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹. فرض کنید که z یک جواب (P) باشد و $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ وجود باشد که شرط (۱) برقرار باشد. هم‌چنین فرض کنید که f روی $\mathbb{R}$ محدب‌نماست و برای $t \in T(\bar{\mu})$ ، f_t روی $\mathbb{R}^n$ شبه‌محدب است. در این‌صورت $Sol(P) = S_2 = S_3$ است.

اثبات. با استفاده از **قضیه ۲** و **لم ۲** این نتیجه به‌دست می‌آید.

در قضیه‌ی فوق اگر مجموعه‌ی موجه (P) یک زیرمجموعه‌ی محدب از $\mathbb{R}^n$ باشد آن‌گاه با استدلالی مشابه در مرجع (کیم و سان، ۲۰۱۱) می‌توان نشان داد که برای $x \in A$، $t \in T$، $u_t \in \partial^c f_t(z)$، $u_t(y-z) \leq 0$ است. بدون فرض شبه‌محدب‌بودن توابع f_t برای $t \in T$ ، قضیه و نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود که از بیان اثبات آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه ۳. فرض کنید که $(z,\bar{\mu})$ یک جواب (D_M) است و تابع f روی $\mathbb{R}^n$ محدب‌نماست. اگر $V(P) = V(D_M)$ باشد و مجموعه‌ی موجه (P) زیرمجموعه‌ی محدبی از $\mathbb{R}^n$ باشد، در این‌صورت $Sol(P) = S_2 = S_3$ است.

قضیه ٤. فرض کنید که z یک جواب (P) باشد و $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ وجود باشد که شرط (۱) برقرار است. اگر تابع f روی $\mathbb{R}^n$ محدب‌نما باشد و باشد و مجموعه‌ی موجه (P) زیرمجموعه‌ی محدبی از $\mathbb{R}^n$ باشد آن‌گاه $Sol(P) = S_2 = S_3$ است.

مثال ۲.

$$
\begin{array}{lll}
(Q_2) & \text{Minimize} & f(x,y)=(x-y)+(x-y)^3 \\
 & s.t. & f_t(x,y)\le 0, t\in T, \\
 & & (x,y)\in C:=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}
\end{array}.
$$

در مسئله‌ی فوق $f_t(x,y)=\begin{cases} \sin(ty-x), & t\in(0,1] \\ x^3-y, & t=0 \end{cases}$ و $T=[0,1]$ است. برای $(x,y)\in C$ و $t\in[0,1]$ می‌توان بررسی کرد که $ty-x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\subseteq[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ است. از این‌رو داریم:

$$
\sin(ty-x)\le 0 \Leftrightarrow ty-x\le 0, \qquad t\in(0,1].
$$

مجموعه‌ی موجه (Q_2) ، مجموعه‌ی $\{(x,y)\ |0\le x\le 1,\ y\le x,\ y\ge x\}$ می‌باشد. می‌توانید بررسی کنید که تابع هدف این مسئله، محدب‌نماست و مجموعه‌ی موجه آن زیرمجموعه‌ی محدبی از $\mathbb{R}^2$ است. λ را به‌گونه‌ای که $\lambda_1=1$ و برای $t\in T\setminus\{1\}$ ، $\lambda_t=0$ است، درنظر می‌گیریم. می‌توان بررسی کرد که $(0,0)$ ، یک جواب (Q_2) است و در شرط بهینگی (۱) متناظر با λ ، صدق می‌کند. در این‌صورت $T(\lambda)=\{1\}$ است. با استفاده از فرمول S_2 مجموعه‌ی موجه (Q_2) به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

$$
Sol(Q_2)=\{(x,y)\in C|(1+3(x-y)^2)(y-x)=0,\ f_1(x,y)=0,\ f_t(x,y)\le 0, t\in T\setminus\{1\}\}.
$$

با محاسباتی ساده $Sol(Q_2)=\{(x,y)\ |0\le x\le 1,\ y=x\}$ به‌دست می‌آید.

منابع

Burke, J. V., & Ferris, M. C. (1991). Characterization of solution sets of convex programs. *Operations research letters*, *10*(1), 57-60.

Clarke, F. H. (1990). *Optimization and nonsmooth analysis* (Vol. 5). Siam.

Deng, S. (2009). Characterizations of the nonemptiness and boundedness of weakly efficient solution sets of convex vector optimization problems in real reflexive Banach spaces. *Journal of optimization theory and applications*, *140*(1), 1.

Dinh, N., Goberna, M. A., & López Cerdá, M. A. (2006). From linear to convex systems: Consistency, Farkas' lemma and applications. *J. Convex Anal. 13*, 113–133.

Dinh, N., Jeyakumar, V., & Lee, G. M. (2006). Lagrange multiplier characterizations of solution sets of constrained pseudolinear optimization problems. *Optimization*, *55*(3), 241-250.

Goberna, M. A., & López, M. A. (1998). A comprehensive survey of linear semi-infinite optimization theory. In *Semi-infinite programming* (pp. 3-27). Springer, Boston, MA.

Hanson, B. (1998). Nonsmooth analysis and control theory. *The American mathematical monthly*, *105*(7), 691.

Hiriart-Urruty, J. B. (1979). New concepts in nondifferentiable programming. *Bull. Soc. Math. France*, *60*, 57-85.

Ivanov, V. (2001). First order characterizations of pseudoconvex functions. *Serdica mathematical journal*, *27*(3), 203p-218p.

Jeyakumar, V., & Yang, X. Q. (1995). On characterizing the solution sets of pseudolinear programs. *Journal of optimization theory and applications*, *87*(3), 747-755.

Jeyakumar, V., Lee, G. M., & Dinh, N. (2004). Lagrange multiplier conditions characterizing the optimal solution sets of cone-constrained convex programs. *Journal of optimization theory and applications*, *123*(1), 83-103.

Jeyakumar, V., Lee, G. M., & Dinh, N. (2006). Characterizations of solution sets of convex vector minimization problems. *European journal of operational research*, *174*(3), 1380-1395.

Kim, D. S., & Son, T. Q. (2011). Characterizations of solution sets of a class of nonconvex semi-infinite programming problems. *J. Nonlinear Convex Anal*, *12*, 429-440.

Lalitha, C. S., & Mehta, M. (2009). Characterizations of solution sets of mathematical programs in terms of Lagrange multipliers. *Optimisation*, *58*(8), 995-1007.

Liu, C., Yang, X. M., & Lee, H. (2011). Characterizations the of solution sets of pseudoinvex programs and variational inequalities. *Journal of inequalities and applications*.

Mangasarian, O. L. (1975). Pseudo-convex functions. In *Stochastic optimization models in finance* (pp. 23-32). Academic Press.

Mangasarian, O. L. (1988). A simple characterization of solution sets of convex programs. *Operations research letters*, *7*(1), 21-26.

Penot, J. P. (2003). Characterization of solution sets of quasiconvex programs. *Journal of optimization theory and applications*, *117*(3), 627.

Pini, R., & Singh, C. (1997). A survey of recent [1985-1995] advances in generalized convexity with applications to duality theory and optimality conditions. *Optimization*, *39*(4), 311-360.

Son, T. Q., & Dinh, N. (2008). Characterizations of optimal solution sets of convex infinite programs. *Top*, *16*(1), 147-163.

Son, T. Q., & Kim, D. S. (2014). A new approach to characterize the solution set of a pseudoconvex programming problem. *Journal of computational and applied mathematics*, *261*, 333-340.

Son, T. Q., Strodiot, J. J., & Nguyen, V. H. (2009). ε-optimality and ε-Lagrangian duality for a nonconvex programming problem with an infinite number of constraints. *Journal of optimization theory and applications*, *141*(2), 389-409.

Yang, X. M. (2009). On characterizing the solution sets of pseudoinvex extremum problems. *Journal of optimization theory and applications*, *140*(3), 537-542.