نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات
Journal of Decisions and Operational Research
دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶
www.journal-dmor.ir
نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۲۰۴-۱۹۵

برآورد پارامتری بیز تجربی شدت ترافیک در سیستم صف M / M / 1

احمد پوردرویش، سیدبهادرحسینی بالاجاده*
دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

چکیده
در این مقاله، برآورد بیزی و بیز تجربی پارامتر شدت ترافیک در مدل صف M/M/1 تحت توابع زیان متقارن و نامتقارن و بر اساس دو پیشین مختلف ناآگاهی بخش و بتا موردبررسی قرار می‌گیرد. برآورد پارامترهای این مدل بهروش‌های بیزی، درستنمایی ماکسیمم، گشتاوری ارائه می‌شود .خواص و کاربردهای این دو برآوردگر در نتایج عددی موردبحث قرارگرفته است.

واژه‌های کلیدی: برآورد درستنمایی، برآورد گشتاوری، برآورد بیزی، بیز تجربی.

دریافت: ۱۳۹۶/٤/۳۱   پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۱

۱- مقدمه

تئوری صف ، کاربردهای زیادی در نظریه ارتباطات، طرح کامپیوتر و ...دارد که استنباط آماری در فرآیند تصادفی و روند صف‌بندی و برآورد پارامترهای صف، مانند نرخ ورود، نرخ خدمات و شدت ترافیک موردتوجه پژوهشگران در چند سال قرارگرفته است . فرض کنید سیستم صف M / M / 1 با متوسط نرخ ورود λ و همچنین متوسط نرخ خدمات $\frac{1}{\mu}$ را داریم. متغیر تصادفی X شماری از مشتریان در سیستم در حالت صف پایدار می‌باشد که دارای تابع جرم احتمال زیر است:

$$f(x|\rho) = (1-\rho)\,\rho^{x} \qquad (۱)$$

که ρ، متغیر شدت ترافیک در سیستم $M / M / 1$ می‌باشد. همچنین تابع درستنمایی را داریم:

$$L(\rho) = \left(1-\rho\right)^{n} \rho^{t}$$

که در آن $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$ مجموع مشتریان در سیستم است. درروش بیزی ما از دو توزیع پیشین بتا و ناآگاهی بخش استفاده می‌کنیم:

I : پیشین ناآگاهی بخش که هیچ اطلاعات قبلی از پارامتر ρ نداریم.

$$\pi_1(\rho; c) = \frac{1}{\rho^{c}} \qquad (۲)$$

II : توزیع پیشین بتا با پارامترهای معلوم β و α ، داریم:

$$\pi_2(\rho; \alpha, \beta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1} \qquad (۳)$$

* Corresponding author (E-mail: bahahoseini@yahoo.com)

رمرو و بایاری (۱۹۹٤) برآورد بیزی از شدت ترافیک در مدل $M/M/1$ را به دست آوردند. بات (۲۰۱۵) در مورد تئوری صف، کتابی تحت عنوان مقدمه‌ای بر نظریه صف ارائه نمود. شارما وکومار(۱۹۹۹) برآوردهای بیزی و کلاسیک پارامترهای مختلف مدل $M/M/1$ را تحت تابع زیان مربع خطا به دست آوردند. همچنین، استفاده از روش‌های کلاسیک برای تخمین پارامترهای نامعلوم توزیع پیشین برای اولین بار توسط میسز در سال ۱۹٤۳ مطرح گردید (میسز، ۱۹٤۳). علاوه بر این، استفاده از تابع زیان متقارن توسط واریان و برآورد بیز شدت ترافیک تحت زیان نامتقارن توسط رن و ران ارائه گردید(واریان، ۱۹۷۵، رن و وان، ۲۰۱۲). به‌منظور به دست آوردن برآورد بیزی تجربی با استفاده از پکیج hypergeo در نرم‌افزار R، از کتاب نظریه تئوری R هانکین در سال ۲۰۱۵ استفاده گردیده است (هانکین، ۲۰۱۵). ادامه مقاله به این شرح می‌باشد. در بخش ۲، برآورد بیز شدت ترافیک را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳، برآورد بیز شدت ترافیک تحت زیان لاینکس ارائه می‌شود. در بخش ٤، برآورد بیز تجربی پارامتر شدت ترافیک موردبحث قرار می‌گیرد و در بخش ۵، نتایج عددی ارائه می‌شود.

۲- برآورد بیز

تجزیه‌وتحلیل بیزی، تابع زیانی که معمولاً استفاده می‌شود تابع زیان مربع خطاست که یک تابع زیان متقارن است. اما در بسیاری از کاربردها، به دلیل اینکه زیان ناشی از بیش برآوردی و کم برآوردی به یک اندازه نیست، از توابع زیان نامتقارن استفاده می‌کنیم. در این بخش، برآورد بیز شدت ترافیک با توابع زیان نامتقارن بررسی می‌شود. دو تابع زیان نامتقارن که در این بخش استفاده می‌شوند عبارت‌اند از :

(۱). تابع زیان درجه دو وزنی:

$$L(\hat{\rho},\rho)=\frac{(\hat{\rho}-\rho)^2}{\hat{\rho}} \qquad (٤)$$

و (۲). تابع زیان خطی، نمایی $linex$:

$$L(\hat{\rho},\rho) = b\left[e^{a(\hat{\rho}-\rho)}-a(\hat{\rho}-\rho)-1\right] \qquad (٤)$$

اگر تابع زیان، درجه دو وزنی باشد، در این صورت میانگین زیان پسین می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{L}(\hat{\rho},\rho)|\mathrm{X}] &= \mathrm{E}[\frac{(\hat{\rho}-\rho)^{2}}{\hat{\rho}}|\underline{X}] \\ &= E[\frac{\hat{\rho}^2+\rho^2-2\rho\hat{\rho}}{\hat{\rho}}|\underline{X}] \\ &= E[\hat{\rho}+\frac{\rho^2}{\hat{\rho}}-2\rho|\underline{X}] \\ &= E(\hat{\rho}|\underline{X})+E\left[\frac{\rho^2}{\hat{\rho}}|\underline{X}\right]-E[2\rho|\underline{X}] \\ &= \hat{\rho}+\frac{1}{\hat{\rho}}E[\rho^2|\underline{X}]-2E[\rho|\underline{X}]. \end{aligned} \qquad (۵)$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\hat{\rho}$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\rho}}\mathrm{E}[\mathrm{L}(\hat{\rho},\rho)|\mathrm{X}]=1-\frac{E[\rho|\underline{X}]^2}{\hat{\rho}^2}.$$

اکنون از حل تساوی $\frac{\partial}{\partial\hat{\rho}}\mathrm{E}[\mathrm{L}(\hat{\rho},\rho)|\mathrm{X}]$ برآوردگر بیز ρ می‌شود:

$$\widehat{\rho_1}=E[\rho^2|\underline{X}]^{\frac{1}{2}} \qquad (٦)$$

که در ادامه، برآوردگر بیز ρ را تحت توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش و توزیع پیشین بتا محاسبه می‌کنیم.

۲-۱ برآورد بیزی شدت ترافیک تحت چگالی پیشین ناآگاهی بخش

تحت توزیع پیشین ناآگاهی در معادله (٤) چگالی پسین ρ می‌شود:

$$H_1(\rho|x)=\frac{(1-\rho)^n\rho^{y-c}}{\int_0^1(1-\rho)^n\rho^{y-c}d\rho},0<\rho<1$$

لذا $\rho|x$ دارای توزیع بتا با پارامترهای $y-c+1$ و $n+1$ می‌باشد که برآورد بیزρ تحت زیان نامتقارن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1&=[E(\rho^2|X)]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\int_0^1\rho^2h_1(\rho|X)d\rho\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\int_0^1\rho^2(1-\rho)^n\rho^{y-c}d\rho}{\int_0^1(1-\rho)^n\rho^{y-c}d\rho}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\int_0^1(1-\rho)^n\rho^{y-c+2}d\rho}{\int_0^1(1-\rho)^n\rho^{y-c}d\rho}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\frac{\Gamma(y-c+3)\Gamma(n+1)}{\Gamma(y-c+n+4)}}{\frac{\Gamma(y-c+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(y-c+n+2)}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\Gamma(y-c+3)\Gamma(y-c+n+2)}{\Gamma(y-c+1)\Gamma(y-c+n+4)}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{(y-c+2)(y-c+1)\Gamma(y-c+1)\Gamma(y-c+n+2)}{(y-c+n+3)(y-c+n+2)\Gamma(y-c+1)\Gamma(y-c+n+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(\frac{(y-c+2)(y-c+1)}{(y-c+n+3)(y-c+n+2)}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{٧}$$

۲-۲ برآورد بیزی شدت ترافیک تحت چگالی پیشین بتا

برآورد بیزی شدت ترافیک ρ با توجه به معادله (۱) و چگالی پسین بتا را تحت زیان نامتقارن به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
h_2(\rho|x)&=\frac{(1-\rho)^{n+\beta-1}\rho^{y+\alpha-1}d\rho}{\int_0^1(1-\rho)^{n+\beta-1}\rho^{y+\alpha-1}d\rho}\sim\mathrm{B}(y+\alpha,n+\beta)\\
&=\hat{\rho}_2=[E(\rho^2|X)]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^1\rho^2h_2(\rho|X)d\rho\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\int_0^1(1-\rho)^{n+\beta-1}\rho^{y+\alpha+1}d\rho}{\int_0^1(1-\rho)^{n+\beta-1}\rho^{y+\alpha-1}d\rho}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{\frac{\Gamma(y+\alpha+2)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(y+\alpha+n+\beta+2)}}{\frac{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(y+\alpha+n+\beta)}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{(y+\alpha+1)\Gamma(y+\alpha+1)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)}{(y+\alpha+n+\beta+1)(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{(y+\alpha+1)(y+\alpha)\Gamma(y+\alpha)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)}{(y+\alpha+n+\beta+1)(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\Gamma(y+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\frac{(y+\alpha+1)(y+\alpha)}{(y+\alpha+\beta+n+1)(y+n+\alpha+\beta)}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{٨}$$

۳- تابع زیان linex

تابع زیان دیگری به نام تابع زیان لاینکس است که توسط واریان معرفی گردیده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\theta,T)=b\left(e^{\upsilon(T-\theta)}-\upsilon(T-\theta)-1\right) \qquad (۹)$$

در تابع (۹) ، $b>0$ را مقیاس اندازه‌گیری و $\upsilon\neq 0$ را شکل اندازه‌گیری می‌نامند. این تابع زیان اکیداً محدب بوده و برای مقادیر مثبت و کوچک υ یعنی $\upsilon^j\simeq 0$ برای $j\geq 3$ ، این تابع زیان تقریباً متقارن می‌شود.

نکته: با در نظر گرفتن $b=1$ و همچنین با توجه به بسط $e^{\upsilon(T-\theta)}\simeq 1+\upsilon(T-\theta)+\frac{\upsilon^2(T-\theta)^2}{2}$ و جایگذاری آن در تابع زیان لاینکس خواهیم داشت:

$$L(\theta,T)\simeq\frac{\upsilon^2(T-\theta)^2}{2}$$

که به یک تابع زیان مربع خطا شباهت دارد . درنتیجه برای مقادیر کوچک $|\upsilon|$ برآوردهای بهینه به‌دست‌آمده تحت تابع زیان لینکس تفاوت چندانی با برآوردهای به‌دست‌آمده تحت تابع زیان مربع خطا ندارد.

ماکرجی و چودوری (۲۰۰۵) برآورد بیز شدت ترافیک ρ تحت زیان لینکس را موردبررسی قراردادند که در این بخش برآورد بیزی شدت ترافیک ρ را تحت تابع زیان لینکس محاسبه می‌کنیم.

با توجه به فرمول (۹) و با فرض اینکه $\Delta=\left(\widehat{\rho_B}-\rho\right)$، تحت تابع زیان لینکس داریم:

$$L(\Delta)=b(e^{a\Delta}-a\Delta-1) \qquad a\neq 0\,,b\neq 0$$

ازاین‌رو برآورد بیز شدت ترافیک را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&E[L(\hat\rho,\rho)|X]=R(\hat\rho_B,\rho)\\
&=E_{\rho|x}L(\Delta)=bE\left(e^{a(\hat\rho-\rho)}-a(\hat\rho-\rho)-1\right)\\
&=b\left(Ee^{a(\hat\rho-\rho)}-aE(\hat\rho-\rho)-1\right)\\
&=E(e^{-a\rho})e^{a\hat\rho_B}-a\hat\rho_B+aE(\rho)-1\\
&\frac{\partial L(\Delta)}{\partial\rho}=0\\
&=ae^{a\hat\rho}E\left(e^{-a\hat\rho}\middle|X\right)-a=0\\
&E\left(e^{-a\hat\rho}\middle|X\right)=e^{-a\hat\rho_B}\\
&lnE\left(e^{-a\hat\rho}\middle|X\right)=-a\hat\rho_B\\
&\hat\rho_B=-\frac{1}{a}lnE(e^{-a\rho}).
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
&E_{\rho|x}(e^{-a\rho})=\\
&=\frac{1}{B(y+\alpha,n+\beta)}\int_0^1 e^{-a\rho}\rho^{y+\alpha-1}(1-\rho)^{n+\beta-1}d\rho\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-a\rho)^i}{i!}\frac{\int_0^1 e^{-a\rho}\rho^{y+\alpha-1}(1-\rho)^{n+\beta-1}d\rho}{B(y+\alpha,n+\beta)}\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-a\rho)^i}{\Gamma(i+1)}\frac{beta(y+\alpha+i,n+\beta)}{beta(y+\alpha,n+\beta)}\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-a\rho)^i}{\Gamma(i+1)}\frac{\Gamma(y+\alpha+i)\Gamma(y+\alpha+\beta+n)}{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(y+\alpha+\beta+n+i)}
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در آن $F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n; -a)$ تابع فوق هندسی با پارامترهای $(y+\alpha)$ و $(y+\alpha+\beta+n)$ و $(-a)$ می‌باشد. درنتیجه برآورد بیز شدت ترافیک تحت زیان لینکس را داریم:

$$\hat{\rho}_B = -\frac{1}{a}\ln E_{\rho|x}((e^{-a\rho})|X)$$
$$\hat{\rho}_B = -\frac{1}{a}\ln[F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n; -a)]$$

تابع ریسک برآوردگر بیز می‌شود:

$$\begin{aligned} R(\hat{\rho}_{B,}\rho) &= b\Big[e^{-lnF(y+\alpha,y+\alpha+\beta+n;-a)}.F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a) \\ &\quad - a\frac{-1}{a}lnF(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a) + a\frac{y+\alpha}{y+\alpha+\beta+n} - 1\Big] \\ &= \mathrm{b}\Big[\frac{1}{F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a)}.F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a) \\ &\quad + \ln\big(F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a)\big) + a\frac{y+\alpha}{y+\alpha+\beta+n}\Big] \\ &= b\Big[ln\big(F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a)\big) + a\frac{y+\alpha}{y+\alpha+\beta+n}\Big] \end{aligned} \tag{۱۲}$$

همچنین ریسک بیز تحت زیان لینکس را می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} r_{\zeta,\widehat{\rho_B}} &= E\big(v_B(\hat{\rho}_B|x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} v_B(\hat{\rho}_B|x_1, x_2, \dots, x_n)\pi(\rho|x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} R(\hat{\rho}_B, \rho)\pi(\rho|x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} bE\big[\big(e^{a(\hat{\rho}-\rho)} - a(\hat{\rho}-\rho) - 1\big)\big]\pi(\rho|x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} b\Big[ln\big(F(y+\alpha, y+\alpha+\beta+n;-a)\big) \\ &\quad + a\frac{y+\alpha}{y+\alpha+\beta+n}\Big].\frac{beta(y+\alpha, n+\beta)}{beta(\alpha,\beta)} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

۴- بیز تجربی

روش بیزی برای انجام آزمون فرض به لحاظ آنکه پارامترهای مورد آزمون در توزیع را متغیرهای تصادفی در نظر می‌گیرد، دارای مزیت‌هایی نسبت به روش کلاسیک (غیربیزی) ست، زیرا عدم قطعیت پارامترها را ازلحاظ احتمالی توجیه می‌کند و اطلاعاتی را که تحلیل‌گر در مورد مسأله دارد از طریق توزیع پیشین در انجام آزمون اعمال می‌کند. اما یکی از مشکلاتی که در استفاده از روش بیزی رخ می‌دهد این است که اطلاعات تحلیل‌گر درباره توزیع پیشین ممکن است کم باشد. مثلاً شکل کلی توزیع پیشین معلوم بوده اما پارامترهای آن مجهول باشند و یا اساساً توزیع پیشین نامعلوم باشد. برای حل این مشکل دو راه وجود دارد: اول آنکه بخواهیم مسأله را با استفاده از رویکرد بیز حل کنیم که در این حالت برای پارامترهای توزیع پیشین نیز توزیع‌های دیگری در نظر می‌گیریم که این کار ممکن است تا چند مرحله نیز ادامه یابد. با استفاده از روش عدم قطعیتی که ناشی از مشخص نبودن توزیع پیشین است از طریق توزیع‌هایی که به پارامترهای توزیع پیشین نسبت می‌دهیم، توجیه می‌کنیم.

روش دوم، استفاده از روش‌های کلاسیک(غیربیزی) برای تخمین توزیع پیشین یا پارامترهای نامعلوم آن می‌باشد. این روش که اساساً یک روش غیربیزی به‌حساب می‌آید، روش بیز تجربی نامیده می‌شود. این روش اولین بار توسط میسز (۱۹۴۳) مطرح شد سپس رابینز در سال‌های ۱۹۵٤، ۱۹٦٤ و ۱۹۸٤ در چند مقاله اصلی خود کلیات و ساختار آن را مطرح

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۱۹۵-۲۰۴

نمود. روش بیز تجربی بر اساس اطلاعات از توزیع پیشین به دو روش عمده تقسیم می‌شود. درصورتی‌که شکل توزیع پیشین معلوم باشد و فقط پارامترهای آن مجهول باشد، پارامترها از طریق روش‌های معمولی برآورد یابی مانند روش ماکزیمم درستنمایی یا روش گشتاور برآورد می‌شوند. این روش را روش بیز تجربی پارامتری می‌نامند. اما درصورتی‌که شکل توزیع پیشین نامعلوم باشد ولی بتوان فرض‌های خاصی را بر روی آن در نظر گرفت (مثلاً متناهی بودن گشتاور اول) با استفاده از روش‌های ناپارامتری، به برآورد توزیع پیشین و توزیع حاشیه‌ای پرداخته می‌شود. این روش را روش بیز تجربی ناپارامتری می‌نامند.

۴-۱رویکرد بیز تجربی

در بخش‌های قبل، برآورد بیز شدت ترافیک ρ را تحت توزیع پیشین $beta(\alpha,\beta)$ به دست آوردیم که پارامترهای توزیع پیشین یعنیα و β معلوم بودند. در حالتی که این پارامترها مجهول باشند، می‌توان این پارامترها را از روش‌های مختلف برآورد کرد که با جایگذاری آن‌ها در برآوردگرهای بیز، برآوردگر بیز تجربی به دست می‌آید.

با توجه به اینکه توزیع $X|\rho$ یک توزیع هندسی $1-\rho$ با تابع احتمال

$$f(x|\rho) = (1-\rho)^n \rho^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{۱٤}$$

می‌باشد و توزیع پیشین ρ توزیع $beta(\alpha,\beta)$ با تابع چگالی

$$\pi(\rho|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1} \qquad 0<\rho<1 \tag{۱۵}$$

می‌باشد، لذا تابع حاشیه‌ای $\underline{x}$ می‌شود:

$$\begin{aligned} h(x_1,x_2\dots,x_n) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \rho^y(1-\rho)^n\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1}\,d\rho \\ &\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(y+\alpha+n+\beta)} \end{aligned}$$

که $y=\sum_{i=1}^{n} x_i$.

از روی توزیع حاشیه‌ای X می‌توان پارامترهای α و β را برآورد کرد. در این بخش از دو روش درستنمایی ماکزیمم و گشتاوری برای برآورد پارامتر α و β استفاده می‌شود.

۴-۲ روش درستنمایی ماکزیمم بیز تجربی

درروش درستنمایی ماکزیمم، مقادیر α و β را طوری پیدا می‌کنیم تا تابع چگالی حاشیه‌ای $\underline{X}$ ماکزیمم شود.

لگاریتم تابع چگالی حاشیه‌ای $\underline{X}$ می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \ln f(x_1,x_2\dots,x_n|\alpha,\beta) \\ &= \ln\big(\Gamma(\alpha+\beta)\big)+\ln\big(\Gamma(y+\alpha)\big)+\ln\big(\Gamma(n+\beta)\big) \\ &\quad -\ln\big(\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\big)-\ln\big(\Gamma(\alpha)\big)-\ln(\Gamma(\beta)) \end{aligned} \tag{۱٦}$$

با مشتق‌گیری، تابع درستنمایی نسبت به α و β عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\big(\Gamma(\alpha+\beta)\big)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\big(\Gamma(y+\alpha)\big)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\big(\Gamma(n+\beta)\big)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\big(\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\big) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\big(\Gamma(\alpha)\big)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln(\Gamma(\beta)) \end{aligned}$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\big(\Gamma(\alpha+\beta)\big) + \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\big(\Gamma(y+\alpha)\big) + \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\big(\Gamma(n+\beta)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\big(\Gamma(y+\alpha+n+\beta)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\big(\Gamma(\alpha)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta}\ln\big(\Gamma(\beta)\big).$$

با توجه به تابع دای گامای $\varphi(Z) = \frac{d(\ln\Gamma(z))}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} ln\big(\Gamma(\alpha + y)\big) - \frac{\partial}{\partial \alpha} ln\big(\Gamma(\alpha)\big) \\ &+ \Big(\frac{\partial}{\partial \alpha} ln\big(\Gamma(\alpha + \beta)\big) - \frac{\partial}{\partial \alpha} ln\big(\Gamma(\alpha)\big)\Big) \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} ln\big(\Gamma(\alpha + \beta + n + y)\big) - \frac{\partial}{\partial \alpha} ln\big(\Gamma(\alpha)\big)\right) \\ &= [\varphi(\alpha + y) - \varphi(\alpha)] + [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\alpha)] - [\varphi(\alpha + \beta + n + y) - \varphi(\alpha)] \end{aligned} \tag{۱۷}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} ln\big(\Gamma(\alpha + y)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta} ln\big(\Gamma(\beta)\big) \\ &+ \Big(\frac{\partial}{\partial \beta} ln\big(\Gamma(\alpha + \beta)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta} ln\big(\Gamma(\beta)\big)\Big) \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial \beta} ln\big(\Gamma(\alpha + \beta + n + y)\big) - \frac{\partial}{\partial \beta} ln\big(\Gamma(\beta)\big)\right) \\ &= [\varphi(\beta + n) - \varphi(\beta)] + [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\beta)] - [\varphi(\alpha + \beta + n + y) - \varphi(\beta)] \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با توجه به فرمول $\varphi(x + n) - \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x+i}$ داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{y-1}\frac{1}{\alpha+i} + \sum_{i=0}^{\beta-1}\frac{1}{\alpha+i} - \sum_{i=0}^{y+n+\beta-1}\frac{1}{\alpha+i}.$$

همچنین می‌توان $\frac{\partial\theta}{\partial\beta}$ را با توجه به (۱۴) به دست آورد:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\beta+j} + \sum_{j=0}^{a-1}\frac{1}{\beta+j} - \sum_{j=0}^{\alpha+y+n-1}\frac{1}{\beta+j}.$$

با حل معادلات $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ و $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$ به روش‌های عددی، برآوردهای MLE پارامترهای α و β یعنی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ محاسبه می‌شوند که با جایگذاری در برآوردگر بیز، ρ نیز $\hat{\rho}_B = [\frac{(\alpha+\beta)(y+\alpha)(n+\beta)}{(\alpha)(\beta)(y+\alpha+n+\beta)}]^{\frac{1}{2}}$ برآورد بیز تجربی می‌شود:

$$\hat{\rho}_{EB} = \left(\frac{(y+\hat{\alpha}+1)(y+\hat{\alpha})}{(y+\hat{\alpha}+\hat{\beta}+n+1)(y+n+\hat{\alpha}+\hat{\beta})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۳-۴ روش گشتاور برآورد بیز تجربی

درروش گشتاوری برای برآورد پارامترهای توزیع پیشین یعنی α و β، ابتدا گشتاورهای X را به صوت زیر محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E_\rho(E(x|\rho)) \\ &= E\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \\ &= \int \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1} \\ &= \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\rho^{\alpha}(1-\rho)^{\beta-2} \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$= \frac{\beta(\alpha+1,\beta-1)}{\beta(\alpha,\beta)}$$
$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}$$
$$= \frac{\alpha}{\beta-1}$$

و

$$E({X_1}^2) \;=\; E(E(x^2|\rho)) \;=\; E(V\,ar(x|\rho) \;+\; E^2(x|\rho))$$
$$= E\left(\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right)\right) + E\left((\frac{\rho}{1-\rho})^2\right)$$

از طرفی

$$E\left(\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right)\right) = \int \frac{1}{(1-\rho)^2}\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1}$$
$$= \int \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-3}$$
$$= \frac{\beta(\alpha,\beta-2)}{\beta(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{(\beta)(\beta-1)(\beta-2)}$$

و

$$E\left((\frac{\rho}{1-\rho})^2\right) = \int (\frac{\rho}{1-\rho})^2\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{\beta-1}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\rho^{\alpha+1}(1-\rho)^{\beta-3}$$
$$= \frac{\beta(\alpha+2,\beta-2)}{\beta(\alpha,\beta)}$$
$$\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\beta(\beta-1)(\beta-2)}$$

لذا

$$\mu_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{(\beta)(\beta-1)(\beta-2)} + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\beta(\beta-1)(\beta-2)} \qquad (۲۰)$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)+(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\beta(\beta-1)(\beta-2)}$$

با در نظر گرفتن یک نمونه n تایی $x_1, x_2 \dots, x_n$ می‌توان برآوردهای گشتاوری α و β را از حل معادلات

$$\begin{cases} E(X) = \overline{X} \\ E(X^2) = \overline{X^2} \end{cases}$$

یا دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta-1} = \overline{X} \\ \dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)+(\alpha+2)(\alpha+1)(\alpha)}{(\beta)(\beta-1)(\beta-2)} = \overline{X^2} \end{cases}$$

پیدا کرد. با حل دستگاه معادلات فوق به روش‌های عددی می‌توان $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را محاسبه نمود که با جایگذاری در برآوردگر بیز $\hat{\rho}_B = [\frac{(\alpha+\beta)(y+\alpha)(n+\beta)}{(\alpha)(\beta)(y+\alpha+n+\beta)}]^{\frac{1}{2}}$ برآوردگر بیز تجربی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\rho}_{EB} = \left(\frac{(y+\hat{\alpha}+1)(y+\hat{\alpha})}{(y+\hat{\alpha}+\hat{\beta}+n+1)(y+n+\hat{\alpha}+\hat{\beta})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۱۹۵-۲۰۴

۵- بررسی رفتار برآوردگر بیز و بیز تجربی تحت زیان نامتقارن

در این بخش، برای بررسی رفتار بیزی و بیز تجربی، یک مطالعه شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار R انجام می‌شود. در این مطالعه، شبیه‌سازی به‌اندازه $n = 50$ از توزیع هندسی با پارامتر 0.8 و0.5 = ρ ، سپس با نمونه‌های تولیدشده، برآوردهای بیزی و بیز تجربی محاسبه می‌شود. جداول (۱) و (۲) میانگین مجذور خطای $\hat{\rho}$ را بر اساس ۲۰۰۰ بار شبیه‌سازی نشان می‌دهند.

جدول ۱- برآوردگر و خطای برآوردگر با ۰,۵ = ρ و۵۰ = n.

c	$\hat{\rho}_1$	$MSE(\hat{\rho}_1)$	α	β	$\hat{\rho}_2$	$MSE(\hat{\rho}_2)$
۰,۰	۰,٤۹۸۲	۰,۰۰۲۳	۱	۱	۰,۵۰۱	۰,۰۰۲۳
۱,۰	۰,٤۹۱۸	۰,۰۰۲۵	۱	۱,۵	۰,٤۹۵۲	۰,۰۰۲۵
۱,۵	۰,٤۸۸۵	۰,۰۰۲۷	۱	۲	۰,٤۹۱۲	۰,۰۰۲۳
۲	۰,٤۸۷۰	۰,۰۰۲۹	۱,۵	۱	۰,٤۸۷۰	۰,۰۰۲۳
۲,۵	۰,٤۸٤۰	۰,۰۰۲۹	۲	۱,۵	۰,۵۰۱	۰,۰۰۲۳
۳	۰,٤۸۱۳	۰,۰۰۳۱	۲,۵	۳	۰,٤۹۲۱	۰,۰۰۲۱

جدول ۲- برآوردگر و خطای برآوردگر با۰,۸ = ρ ۵۰ = n.

c	$\hat{\rho}_1$	$MSE(\hat{\rho}_1)$	α	β	$\hat{\rho}_2$	$MSE(\hat{\rho}_2)$
۰,۰	۰,۷۹۵٦	۲,٤e−۰۵	۱	۱	۰,۷۹٤٤	۳,۹e−۰۵
۱,۰	۰,۷۹٤۸	۳,٤e−۰۵	۱	۱,۵	۰,۷۹۲۹	٦,۳e−۰۵
۱,۵	۰,۷۹٤۲	٤,۲e−۰۵	۱	۲	۰,۷۹۱۹	۸,۲e−۰۵
۲	۰,۷۹۳۹	٤,٦e−۰۵	۱,۵	۱	۰,۷۹٦۰	۲,۰۱e−۰۵
۲,۵	۰,۷۹۳۵	۵,۳e−۰۵	۲	۱,۵	۰,۷۹۳۵	۵,۳e−۰۵
۳	۰,۷۹۳۱	٦,۰۰e−۰۵	۲,۵	۳	۰,۷۸۸۸	۰,۰۰۰۱۵۹۰

جدول ۳- مقادیر برآورد بیزی و بیز تجربی.

α	β	ρ	$\hat{\rho}$	$MSE(\hat{\rho})$	$\widehat{\rho_{ml}}^{EB}$	$MSE(\widehat{\rho_{ml}}^{EB})$	$\hat{\rho}_{mm}^{EB}$	$MSE(\widehat{\rho_{mm}}^{EB})$
۲	۲	۰,۸۳۳۳۳	۰,۸۳۳۱۱	٤e−۰۸	۰,۸۲۵٤	٦,۲٤۱e−۰۵	۰,۸۳۲۵	٦,٤e−۰۷
۳	۳	۰,۹٦٦٦٦	۰,۹٦٦۵۱	۱e−۰۸	۰,۹٦٤۰	٦,۷٦e−۰٦	۰,۹٦٦۵	۱e−۰۸
٤	٤	۰،۹۹۲۸۵	۰,۹۹۲۸۲	۹e−۱۰	۰,۹۹۲۱	٤,۹e−۰۷	۰,۹۹۲۸	۲,۵e−۰۹
۲	۳	۰,۹۱٦٦٦٦	۰,۹۱٦۱۷	2.5e-	۰,۹۱۰۷	۳,٤۸e−۰۵	۰,۹۱٦۳	۹e−۰۸
۳	۲	۰,۹۱٦٦٦٦	۰,۹۱٦٤۷	٤e−۰۸	۰,۹۱۲٦	۱,٦e−۰۵	۰,۹۱٦٤	٤e−۰۸
٤	۱۰	۰,۹۹۹٦۵	۰,۹۹۹٦۵	۱e−۱٤	۰,۹۹۹۵	۱e−۰۸	۰,۹۹۹٦	٤e−۱٤
۱۰	٤	۰,۹۹۹٦۵	۰,۹۹۹٦۵	۱e−۱۲	۰,۹۹۹٦	٤,۹e−۱۳	۰,۹۹۹٦	٤e−۱٤

مشاهدات این دو جدول نشان می‌دهد که برآوردهای بیزی، تغییرات بسیار کمی نسبت به پارامتر شدت ترافیک دارند. با توجه به جدول ۲ داریم مقدار پارامتر شدت ترافیک ۰,۸ بوده که مقادیر برآورد شده تحت پیشین ناآگاهی بخش، بسیار نزدیک به پارامتر شدت ترافیک می‌باشد و در پیشین بتا به مقادیر اولیه αوβ بستگی دارد که در جدول ۳ مقایسه بین برآوردگرها تحت پیشین بتا با مقادیر اولیه مختلف αوβ آورده شده است. همچنین مقادیر برآورد شده پارامتر شدت ترافیک در حالتی که تحت زیان نامتقارن باشد بسیار نزدیک‌تر از مقادیر برآورد شده در حالتی که تحت زیان درجه‌دو هست،

می‌باشد؛ درواقع بیان می‌کند تابع زیان نامتقارن در مقایسه با تابع زیان درجه‌دو بسیار مفیدتر است که باعث جلوگیری از بیش برآوردی و همچنین کم برآوردی حاصل از تابع زیان درجه می‌باشد. هدف از برآورد بیز تجربی، رسیدن به مقدار واقعی بیز شدت ترافیک درصورتی‌که توزیع پیشین ما دارای پارامترهای مجهول α و β باشند هست. ملاحظه می‌کنیم محاسبه برآورد بیز تجربی از طریق گشتاور به مقدار واقعی برآورد بیز شدت ترافیک نزدیک‌تر از مقدار برآورد بیز تجربی از روش درستنمایی در مقادیر مختلف اولیه α و β می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش‌های مختلفی برای برآورد پارامتر شدت ترافیک در مدل صف $M / M / 1$ مرور شدند. پس از انتخاب روش‌های مختلف در برآورد ازجمله برآورد بیز تجربی، به مقایسه این برآوردگرها باهم پرداختیم که برای محاسبات برآورد بیز تجربی از شبیه‌سازی عددی استفاده کردیم و توانستیم پارامتر شدت ترافیک را برآورد کنیم.

منابع انگلیسی

Armero, C., & Bayarri, M. J. (1994). Bayesian prediction inM/M/1 queues. *Queueing systems*, *15*(1-4), 401-417.

Bhat, U. N. (2015). *An introduction to queueing theory: modeling and analysis in applications*. Birkhäuser.

Hankin, R. K. (2015). Numerical evaluation of the Gauss hypergeometric function with the hypergeo package. *The R journal*, *7*, 81-88.

Mises, R. V. (1942). On the correct use of Bayes' formula. *The annals of mathematical statistics*, *13*(2), 156-165.

Mukherjee, S. P., & Chowdhury, S. (2005). Bayesian estimation of traffic intensity. *IAPQR transactions*, *30*(2), 89.

Ren, H., & Wang, G. (2012). Bayes estimation of traffic intensity in M/M/1 queue under a precautionary loss function. *Procedia engineering*, *29*, 3646-3650.

Sharma, K. K., & Kumar, V. (1999). Inferences on M/M1:(∞; FIFO) Queue System. *Opsearch*, *36*(1), 26-34.

Varian, H. R. (1975). A Bayesian approach to real estate assessment. *Studies in bayesian econometric and statistics in honor of Leonard J. Savage*, 195-208.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۱۹۵-۲۰۴