نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶

Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۱۷۹-۱۹۴

مساله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت با متغیرهای فازی نوع-۲

علی محمودی راد[۱] *، مرضیه صالحی دره باریک[۲]، روح‌الله تقاعدی[۳]

[۱] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجدسلیمان، مسجدسلیمان، ایران.

[۲] گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجدسلیمان، مسجدسلیمان، ایران.

[۳] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کاشان، کاشان، ایران.

چکیده

یکی از مواردی که تأثیر بسزایی بر مدل‌سازی و حل مسائل دنیای واقعی دارد، شرایط عدم قطعیت روی پارامترها می‌باشد. با توجه به اینکه بسیاری از پارامترها در دنیای واقعی معمولاً مبهم و نادقیق هستند، در این مقاله، مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی که در آن، هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاها غیرقطعی و از نوع متغیرهای فازی نوع-۲ هستند، موردبررسی قرار می‌گیرد. بر اساس نظریه امکان فازی و تعریف اندازه اعتبار، تابع هدف مسأله را با استفاده از ارزش در معرض ریسک هزینه‌های کل تشکیل داده و نیازمندی‌های مشتریان را با عنوان محدودیت‌های اعتبار مدل‌سازی می‌شود. همچنین متغیرهای فازی نوع-۲ را با روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی به مقادیر قطعی تبدیل کرده تا مدل اصلی به دو زیر مدل برنامه‌ریزی پارامتری عدد صحیح مختلط تبدیل شود که می‌توان آن‌ها را با روش برنامه‌ریزی پارامتری حل کرد. به‌منظور نشان دادن کارایی روش حل پیشنهادی، یک مثال عددی حل‌شده است. نتایج عددی نشان می‌دهند که روش بهینه‌سازی پارامتری می‌تواند روش انعطاف‌پذیر و کارآمدتری برای تصمیم‌گیرندگان برای مدل‌سازی شبکه حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت باشد.

واژه‌های کلیدی: مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت، متغیرهای فازی نوع-۲، روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی، اندازه اعتبار و برنامه‌ریزی پارامتری.

دریافت: ۱۳۹۶/۸/۱۲ *پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۳۰*

۱- مقدمه

اولین بار هیچکاک (۱۹٤۱) مسأله حمل‌ونقل را در مقاله‌ای مطرح کرد که در آن، هدف، کمینه کردن هزینه‌های بین مبدأ و مقصد بود. او تنها دو عامل مبدأ و مقصد را در طراحی سیستم حمل‌ونقل خود در نظر گرفت. با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل حمل‌ونقل برای حمل کالا از مبدأ به مقصد از وسایل حمل‌ونقل مختلفی مانند کامیون، قطار، هواپیما و کشتی استفاده می‌شود، اهمیت استفاده از حالت حمل نیز می‌تواند موردتوجه قرار گیرد. شل (۱۹۵۵) مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی را برای نخستین بار مطرح نمود. از آن سال به بعد، روش‌های حل مختلفی برای حمل‌ونقل سه‌بعدی معرفی شد (هالی، ۱۹٦۲، پاتل و تریپاتی، ۱۹۸۹، بیت و همکاران، ۱۹۹۳). مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت، نوعی از مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی است که علاوه بر هزینه متغیر، هزینه ثابتی نیز برای ارسال کالا در نظر گرفته می‌شود. به دلیل چندجمله‌ای سخت بودن (-NP

* Corresponding author (E-mail: alimahmoodirad@gmail.com)

Hard) مسأله تحت بررسی، در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های فراابتکاری موردتوجه پژوهش‌گران قرارگرفته است (ملا علی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۳).

در مسائل واقعی، گاهی اوقات، تعیین درجه عضویت دقیق و فرمول‌بندی مسائل از منظر مجموعه‌های فازی نوع اول مشکل است. به‌منظور توصیف و استخراج اطلاعات مفید پنهان در داده‌های نامشخص و برای استفاده صحیح از این داده‌ها در مسائل عملی، بسیاری از محققان برخی از نظریه‌های بهبودیافته ازجمله مجموعه‌های فازی نوع-۲[1] را به دلیل فازی بودن در تابع عضویتشان پیشنهاد کرده‌اند. مجموعه فازی نوع-۲ توسعه مجموعه فازی نوع اول است که توسط لطفی عسگرزاده (۱۹۷۵) معرفی‌شده و توسط لیو و لیو (۲۰۰۷) با استفاده از نظریه اعتبار، توسعه داده‌شده است. برخلاف مجموعه فازی نوع-۱ که درجه عضویت در آن، یک عدد قطعی بین [۱و۰] است، در یک مجموعه فازی نوع-۲، درجه عضویت برای هر عنصر به‌صورت یک مجموعه فازی است. به‌عبارت‌دیگر این مجموعه‌ها نسبت به مجموعه‌های فازی نوع-۱ در توابع عضویتشان از یک بازه به‌جای یک عدد برای تعریف درجه عضویت استفاده می‌کنند که درجه آزادی بیشتری را برای کنترل نامعینی‌ها فراهم می‌کنند (لیو و لیو، ۲۰۰۷).

در سال‌های اخیر، سیستم‌های کنترل فازی نوع-۲ به خاطر قابلیت‌هایشان در کنترل نامعینی‌ها، بسیاری از نظرها را به خود جلب کرده‌اند؛ به‌عنوان‌مثال در زمینه پزشکی که می‌توان به پیش‌پردازش عکس‌های رادیوگرافی (جوهن و همکاران، ۲۰۰۲)، تخمین میزان سلامتی نوزاد تازه متولدشده (ازن و گری بلدی، ۲۰۰۳) ؛ در زمینه کنترل می‌توان روبات‌های فوتبالیست (فیگوارا، پسادا، ۲۰۰۵)، مدل‌سازی رفتار افراد دریک اتاق هوشمند (هارگاس، کالاگان، ۲۰۰٤) اشاره کرد. در حال حاضر، مجموعه‌های فازی نوع-۲ به‌عنوان نظریه‌ای مهم در محیط‌های با عدم قطعیت بالا توسعه‌یافته‌اند که در برخورد با عدم قطعیت‌ها، توانایی کاهش اثر و مدل کردن آن‌ها را دارند (هیسدال، ۱۹۸۱، کوپلند، ۲۰۰۸). بدین ترتیب، استفاده از مجموعه‌های فازی نوع- ۲ در اکثر مسائل واقعی ازجمله مسائل حمل‌ونقل موردتوجه قرارگرفته شده است.

کاندا و همکاران (۲۰۱۳) مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی چند محصولی و چندهدفه را در محیط فازی ارائه دادند، که در این پژوهش، مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه‌های فازی (فازی نوع-۲) برای اولین بار مطرح شد. لیو و همکاران (۲۰۱٤) مساله حمل‌ونقل سه‌بعدی را با پارامترهای فازی نوع-۲ به‌منظور به دست آوردن جواب بهینه توسعه داده‌اند. در این مساله، آن‌ها هزینه‌های حمل‌ونقل، مقادیر عرضه، تقاضا و ظرفیت وسایل حمل را اعداد فازی نوع-۲ در نظر گرفتند و با روش‌های مختلف، متغیرهای فازی نوع-۲ را به متغیرهای فازی نوع-۱ تبدیل کردند. کاندو و همکاران (۲۰۱٤) مساله حمل‌ونقل با هزینه ثابت که پارامترهای آن از نوع اعداد فازی نوع-۲ هستند را توسعه دادند. پرامانیک و همکاران (۲۰۱۵) مساله شبکه زنجیره تأمین دومرحله‌ای با متغیرهای فازی نوع-۲ گوسی را به‌منظور حداکثر کردن سود، توسعه دادند. کاندو و همکاران (۲۰۱۵) مساله حمل‌ونقل سه‌بعدی چند کالایی را با پارامترهای فازی نوع-۲ موردمطالعه قراردادند. بای و لیو (۲۰۱٦) مساله طراحی شبکه زنجیره تأمین را با متغیرهای فازی نوع-۲ را در نظر گرفتند و تابع هدف مسأله را با استفاده از ارزش در معرض ریسک هزینه‌های کل، بر اساس نظریه امکان فازی و تعریف اندازه اعتبار تشکیل دادند. داس و همکاران (۲۰۱۷) روشی را برای فازی زدایی متغیر فازی نوع-۲ ذوزنقه‌ای پیشنهاد دادند، سپس آن را برای حل مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی سبز چندهدفه با پارامترهای فازی نوع-۲ به کار گرفتند. کومار جانا و همکاران (۲۰۱۷) از روش‌های کاهش برای تبدیل متغیرهای فازی نوع-۲ به نوع-۱ استفاده کردند و سپس این روش را برای حل مسأله حمل‌ونقل در یک شبکه

[1] Type-2Fuzzy sets

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹٦ ، صفحه: ۱۷۹-۱۹٤

زنجیره تأمین به کار گرفتند. کاندو و همکاران (۲۰۱۸) روشی را برای حل مسأله شبکه‌های خطی که در آن، پارامترها از نوع متغیرهای فازی نوع-۲ بازه‌ای هستند، پیشنهاد کردند.

با توجه به مطالب ذکرشده، کار تحقیقاتی اندکی با پارامترهای فازی نوع-۲، نسبت به پارامترهای فازی نوع-۱ در حوزه مسائل حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت انجام‌شده است. هدف اصلی در این مقاله توسعه مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت در شرایط عدم قطعیت فازی می‌باشد که در آن، هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاها غیرقطعی هستند. ازآنجاکه تخمین زدن دقیق داده‌های کلیدی (هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاها) برای یک تصمیم‌گیرنده غیرممکن است، متغیرهای فازی نوع-۲ برای نمایش این دو پارامتر غیردقیق انتخاب‌شده است. همچنین، تابع هدف مسأله با استفاده از ارزش در معرض ریسک هزینه‌های کل، تشکیل داده‌شده است و تقاضای مشتریان با عنوان محدودیت‌های اعتبار مدل‌سازی شده است. برای حل این مسأله، ابتدا متغیرهای فازی نوع-۲ را با روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی به مقادیر قطعی تبدیل کرده‌ایم تا مدل اصلی به دو زیر مدل برنامه‌ریزی پارامتری عدد صحیح مختلط تجزیه شود و بتوان آن‌ها را با روش برنامه‌ریزی پارامتری حل کرد.

ساختار مقاله به این شرح است که در ادامه بیان می‌گردد. در بخش دوم به معرفی مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت و در بخش سوم به تعریف ارزش در معرض ریسک و طراحی مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت در شرایط عدم قطعیت می‌پردازیم. بخش چهارم به بررسی روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی برای متغیرهای فازی نوع-۲ اختصاص داده‌شده است. در پخش پنجم به روش برنامه‌ریزی پارامتری، معادل مدل اصلی پرداخته‌شده است. در بخش ششم یک مثال عددی، جهت کارآمدی روش بهینه‌سازی پارامتری ارائه‌شده است و بالاخره بخش هفتم به نتیجه‌گیری و پیشنهادات می‌پردازد..

۲- مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت

حالت توسعه داده‌شده‌ای از مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی، مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت است. برای توصیف مدل ریاضی مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت در شرایط قطعی از نمادها و پارامترهای زیر استفاده می‌کنیم.

مجموعه اندیس‌ها:

M مجموعه مبداها $(i = 1, \dots, N)$

N مجموعه مقصدها $(j = 1, \dots, M)$

P حالت وسایل حمل‌ونقل $(k = 1, \dots, P)$

مجموعه پارامترها:

a_i عرضه مبدأ i

b_j تقاضای مقصد j

e_k ظرفیت حالت حمل‌ونقل k

c_{ijk} هزینه انتقال هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j با حالت حمل k

f_{ijk} هزینه ثابت ارسال هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j با حالت حمل k

مجموعه متغیرها:

x_{ijk} تعداد کالای ارسالی از مبدأ i به مقصد j با حالت حمل k .

y_{ijk} متغیر دودویی، اگر کالایی از مبدأ i به مقصد j با حالت حمل k ارسال شود برابر یک در غیر این صورت برابر صفر است.

در این صورت مدل ریاضی مساله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت به‌صورت زیر است (ملا علی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۳):

$$\text{Min} \quad z=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}x_{ijk}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} f_{ijk}y_{ijk} \qquad (۱)$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}\le a_i \qquad \forall i \qquad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}\ge b_j \qquad \forall j \qquad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} x_{ijk}\le e_k \qquad \forall k \qquad (٤)$$

$$x_{ijk}\le M_{ijk}y_{ijk} \qquad \forall i,j,k \qquad (۵)$$

$$x_{ijk}\ge 0\ ,\ y_{ijk}\in\{0,1\} \qquad \forall i,j,k \qquad (٦)$$

که در آن $M_{ijk}=\min\{a_i,b_j,e_k\}$ است.

تابع هدف (۱)، مجموع هزینه‌های مستقیم و ثابت حمل را کمینه می‌کند. دسته محدودیت‌های (۲)، محدودیت عرضه کالا در مبدأ را تضمین می‌کنند. دسته محدودیت‌های (۳)، محدودیت تقاضا در مقصدها را بیان می‌کنند. دسته محدودیت‌های (٤)، به محدودیت وسایل حمل اشاره دارند. دسته محدودیت (۵) که ارتباط بین x_{ijk} و y_{ijk} را برقرار می‌کنند، اطمینان می‌دهند که مسیر *(i,j)* برای ارسال کالا انتخاب می‌شود (یعنی $y_{ijk}=1$) به شرطی که $x_{ijk}>0$ باشد. بالاخره دسته محدودیت‌های (٦)، محدودیت‌های نامنفی بودن متغیرهای تصمیم و دودویی مسأله هستند.

در مدل (۱ تا ٦) فرض کنید هزینه‌های ارسال کالا و تقاضای مشتریان به‌صورت اعداد فازی نوع-۲ هستند، در این صورت مدل ریاضی مسأله با پارامترهای فازی نوع-۲ به‌صورت زیر توسعه داده می‌شود:

$$\text{Min} \quad z=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} \tilde{c}_{ijk}x_{ijk}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} f_{ijk}y_{ijk} \qquad (۷)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}\le a_i \qquad \forall i \qquad (۸)$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}\ge \tilde{b}_j \qquad \forall j \qquad (۹)$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹٦، صفحه: ۱۷۹-۱۹٤

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \le e_k \qquad \forall k \qquad (۱۰)$$

$$x_{ijk} \le M_{ijk}\, y_{ijk} \qquad \forall i,j,k \qquad (۱۱)$$

$$x_{ijk} \ge 0\ , y_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,k \qquad (۱۲)$$

۳- ارزش در معرض ریسک

ارزش در معرض ریسک[1] یک تکنیک آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا سبد سهام سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص استفاده می‌شود. ارزش در معرض ریسک، توسط مدیران برای اندازه‌گیری و کنترل سطح ریسکی که شرکت متعهد شده است، مورداستفاده قرار می‌گیرد. به‌طورکلی می‌توان گفت ارزش در معرض ریسک، بیشترین مقدار زیان مورد انتظار را در یک افق زمانی مشخص در سطح اطمینان معین اندازه‌گیری می‌نماید. برای مثال، یک شرکت سرمایه‌گذاری ممکن است اعلام کند ارزش در معرض ریسک روزانه خرید و فروش سبد سهام شرکت در سطح اطمینان ۹۵ درصد، ۱۰۰ میلیون تومان است؛ به‌عبارت‌دیگر، تنها در پنج مورد از صد معامله روزانه ممکن است ضرر و زیانی بیش از ۱۰۰ میلیون تومان رخ دهد. بنابراین، معیار چگونگی مواجهه شدن شرکت‌ها و مؤسسات با ریسک بازار را به‌طور خلاصه نشان می‌دهد و آن را با معیار نقدی (ریالی یا تومانی) تعیین می‌کند.

۳-۱ طراحی مسأله در شرایط عدم قطعیت

عدم قطعیت یکی از مهم‌ترین پدیده‌هایی است که در حل مسائل مهندسی وجود دارد و درگذشته از آن چشم‌پوشی شده است. شبکه‌های حمل‌ونقل به دلیل وجود اثر متقابل انسان–سیستم، وضعیت جغرافیایی و غیره دچار عدم قطعیت شده است. ازاین‌رو، این مقاله یک مدل بهینه‌سازی فازی برای مدل‌سازی مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت ارائه می‌دهد که در این مدل، هزینه‌های انتقال هر واحد کالا و ظرفیت تقاضاها غیرقطعی و از نوع پارامترهای فازی نوع-۲ هستند. بر اساس نظریه امکان فازی و تعریف اندازه اعتبار، تابع هدف مسأله را با استفاده از ارزش در معرض ریسک هزینه‌های کل، تشکیل می‌دهیم و نیازمندی‌های مشتریان با عنوان محدودیت‌های اعتبار را مدل‌سازی می‌کنیم. بنابراین، تابع هزینه کل $C(x, \xi)$ برای مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی هزینه ثابت به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{C}\,(x, \xi) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}^{U} x_{ijk} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} f_{ijk}\, y_{ijk} \qquad (۱۳)$$

در تابع هدف (۱۳)، c_{ijk}^{U} هزینه انتقال حمل بالایی هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j با حالت حمل k است که می‌توان آن را به‌عنوان مقدار ازدست‌رفته در نظر گرفت. اگر $\Psi(x, \mathrm{C}) = \mathrm{Cr}\,\{\mathrm{C}\,(x, \xi) \le \overline{\mathrm{C}}\}$ به‌عنوان تابع توزیع اعتبار $\mathrm{C}(x, \xi)$ تعبیر کنیم، آنگاه برای هر مقدار $0 < \beta < 1$ تابع ارزش در معرض خطر $\mathrm{v}(x, \beta)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(x, \beta) = min\{\overline{\mathrm{C}} \mid \Psi(x, \overline{\mathrm{C}}) \ge \ \beta\} \qquad (۱٤)$$

[1] Value-at-Risk

که در آن β نوعاً مقداری بزرگی خواهد داشت، به‌عنوان‌مثال $\beta = 0.95$. در این حالت، تابع $v(x, \beta)$ به‌عنوان کمترین سطح زیان با متغیر تصمیم x با خاصیت، اعتبار پیشامدی که (x,β) تجاوز نمی‌کند حداقل β است، تعبیر می‌شود. .

در مساله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت، مقدار در معرض ریسک از تابع هزینه کل $C(x, \xi)$ را مدنظر قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\min \quad v(x, \beta) \tag{۱۵}$$

$$\text{s.t.} \quad x \in D$$

که در آن، D ناحیه شدنی مساله است. با تعریف $v(x, \beta)$ و معرفی یک متغیر دیگر مانند $\bar{C}$ مدل (۱۵) با مساله زیر معادل می‌شود:

$$\min \quad \Psi(x, \bar{C}) \geq \beta \tag{۱۶}$$

$$\text{S.t.} \quad x \in D$$

که در آن $\Psi(x,\bar{C})$ تابع توزیع اعتبار $Cr\{C(x, \xi)\} \leq \bar{C}$ است.

در مسائل حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت، فرض می‌کنیم که تقاضاها مستقل هستند، بنابراین کافی است محدودیت اعتبار زیر را در مدل بهینه‌سازی در بخش بعد در نظر بگیریم.

$$Cr\left\{b_j^l \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{P} x_{ijk}\right\} \geq \beta_j \quad \forall j \tag{۱۷}$$

که در رابطه (۱۷)، b_j^l ظرفیت تقاضای پایینی مقصد j می‌باشد.

۳-۲ مدل مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت در شرایط عدم قطعیت

با توجه به نکات گفته‌شده در بخش قبل، مدل مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت فازی را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\text{Min} \quad \bar{C} \tag{۱۸}$$

$$s.t. \quad Cr\{C(x, \xi) \leq \bar{C}\} \geq \beta \tag{۱۹}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \tag{۲۰}$$

$$Cr\left\{b_j^l \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}\right\} \geq \beta_j \quad \forall j \tag{۲۱}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \leq e_k \quad \forall k \tag{۲۲}$$

$$x_{ijk} \leq M_{ijk} y_{ijk} \quad \forall i, j, k \tag{۲۳}$$

$$x_{ijk} \geq 0, \; y_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j, k \tag{۲٤}$$

هدف مدل (۱۸ تا ۲٤) کم کردن ارزش در معرض ریسک تابع هزینه کل $C(x, \xi)$ با سطح اطمینان مشخص β است. محدودیت (۲۱) تضمین می‌کند که کل تقاضای مقصد j که از طریق تمامی مبدأها ارسال می‌شود در یک سطح خدمات مجاز برآورده می‌شود. مدل(۱۸ تا ۲٤)، یک مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط است. روش‌های حل عمومی

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲ ، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹٦ ، صفحه: ۱۷۹-۱۹٤

آن نیاز به تبدیل محدودیت‌های (۱۹) و (۲۱) به معادل‌های قطعی آن است. در بخش بعدی، به بررسی روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی برای متغیرهای فازی نوع-۲ می‌پردازیم.

۴- بررسی روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی برای متغیرهای فازی نوع-۲

در این بخش به بررسی روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی پارامتری متغیرهای فازی کاهش‌یافته و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. فرض کنید $(\Gamma, A, \widetilde{pos})$ یک فضای امکان فازی (لیو و لیو، ۲۰۱۰) و $\tilde{\xi}$ یک متغیر فازی نوع-۲ با توزیع امکان ثانویه $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ باشد. برای کاهش عدم قطعیت $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$، از مقادیر بحرانی امکانی پایینی و بالایی به‌عنوان مقادیر متناظر متغیر فازی منظم $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ استفاده می‌کنیم. طبق نظر بای و لیو (۲۰۱۴)، $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ مقدار بحرانی امکانی پایینی که با $VaR_a^L\left(\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)\right)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$VaR_a^L\left(\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)\right) = inf\{t|Pos\{\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x) \le t\} \ge \alpha\}, \tag{۲۵}$$

درحالی‌که مقدار بحرانی امکانی بالایی $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ که با $VaR_a^U\left(\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)\right)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$VaR_a^U\left(\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)\right) = sup\{t|Pos\{\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x) \le t\} \ge \alpha\}, \tag{۲۶}$$

به این روش، روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی گفته می‌شود. به متغیرهای به‌دست‌آمده با روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی بالایی و پایینی، متغیرهای کاهش‌یافته فازی بالایی و پایینی گفته می‌شود که به ترتیب با ξ^U, ξ^L نشان داده می‌شوند.

تعریف ۱- (لیو و لیو، ۲۰۱۰). $\tilde{\xi}$ را یک متغیر فازی مثلثی نوع-۲ می‌نامیم، اگر توزیع امکان ثانویه آن یعنی $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(x)$ برای هر $x \in [r_1, r_2]$ به‌صورت زیر باشد:

$$\left(\frac{x-r_1}{r_2-r_1} - \theta_l\, min\left\{\frac{x-r_1}{r_2-r_1}, \frac{r_2-x}{r_2-r_1}\right\}, \frac{x-r_1}{r_2-r_1}, \frac{x-r_1}{r_2-r_1} + \theta_r\, min\left\{\frac{x-r_1}{r_2-r_1}, \frac{r_2-x}{r_2-r_1}\right\}\right) \tag{۲۷}$$

و برای هر $x \in [r_2, r_3]$، به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\left(\frac{r_3-x}{r_3-r_2} - \theta_l\, min\left\{\frac{r_3-x}{r_3-r_2}, \frac{x-r_2}{r_3-r_2}\right\}, \frac{r_2-x}{r_3-r_2}, \frac{r_3-x}{r_3-r_2} + \theta_r\, min\left\{\frac{r_3-x}{r_3-r_2}, \frac{x-r_2}{r_3-r_2}\right\}\right) \tag{۲۸}$$

در معادلات (۲۷) و (۲۸)، $\theta_l, \theta_r \in [0,1]$ دو پارامتر نشان‌دهنده درجه عدم قطعیت هستند که $\tilde{\xi}$ مقدار x را می‌گیرد. برای راحتی $\tilde{\xi}$ یک متغیر فازی مثلثی نوع-۲ را به‌وسیله توزیع امکان ثانویه به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3; \theta_l, \theta_r)$$

قضیه ۱- (بای و لیو، ۲۰۱۴). فرض کنید $\tilde{\xi} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3; \theta_l, \theta_r)$، اگر θ را به‌صورت $\theta = (\theta_l, \theta_r)$ نشان دهیم پس متغیرهای فازی نوع-۲ کاهش‌یافته ξ^L, ξ^U دارای توزیع امکان پارامتری زیر هستند.

$$\mu_{\xi^L}(X;\theta,\alpha) = \begin{cases} (1-\theta_l+\alpha\theta_l)\dfrac{x-r_1}{r_2-r_1}, & if\ x \in \left[r_1, \dfrac{r_1+r_2}{2}\right], \\ \dfrac{(1+\theta_l-\alpha\theta_l)x-(1-\alpha)\theta_l r_2 - r_1}{r2-r1}, & if\ x \in \left[\dfrac{r_1+r_2}{2}, r_2\right], \\ \dfrac{-(1+\theta_l-\alpha\theta_l)x+(1-\alpha)\theta_l, r_2+r_3}{r_3-r_2}, & if\ x \in \left[r_2, \dfrac{r_2+r_3}{2}\right], \\ (1-\theta_l+\alpha\theta_l)\dfrac{r_3-x}{r_3-r_2}, & if\ x \in \left[\dfrac{r_1+r_2}{2}, r_3\right], \end{cases} \tag{۲۹}$$

$$\mu_{\xi^U}(\mathrm{X};\theta,\alpha) = \begin{cases} (1+\theta_r+\alpha\theta_r)\dfrac{x-r_1}{r_2-r_1}, & if\ x\in\left[r_1,\dfrac{r_1+r_2}{2}\right], \\ \dfrac{(1-\theta_r-\alpha\theta_r)x+(1-\alpha)\theta_r, r_2-r_1}{r2-r1}, & if\ x\in\left[\dfrac{r_1+r_2}{2},r_2\right], \\ \dfrac{-(1-\theta_r+\alpha\theta_r)x-(1-\alpha)\theta_r, r_2+r_3}{r_3-r_2}, & if\ x\in\left[r_2,\dfrac{r_2+r_3}{2}\right], \\ (1+\theta_r-\alpha\theta_r)\dfrac{r_3-x}{r_3-r_2}, & if\ x\in\left[\dfrac{r_2+r_3}{2},r_3\right], \end{cases} \quad (۳۰)$$

قضیه ۲- (بای و لیو ۲۰۱٤). فرض کنید $\tilde{\xi}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{r}_3;\theta_l,\theta_r)$ یک متغیر فازی مثلثی نوع-۲ وجود داشته باشد که ξ^L متغیر فازی کاهش‌یافته مقدار بحرانی امکانی پایینی آن باشد.

الف. اگر $\beta\in(0,(1-(1-\alpha)\theta_l)/4]$،آنگاه $Cr\{\xi^L\le r\}\ge\beta$ معادل است با:

$$\frac{(1-2\beta-(1-\alpha)\theta_l)r_1+2\beta r_2}{1-\theta_l+\alpha\theta_l}\le r \quad (۳۱)$$

ب. اگر $\beta\in((1-(1-\alpha)\theta_l)/4,0.5]$، آنگاه $Cr\{\xi^L\le r\}\ge\beta$ معادل است با:

$$\frac{(1-2\beta)r_1+(2\beta+(1-\alpha)\theta_l)r_2}{1+\theta_l-\alpha\theta_l}\le r \quad (۳۲)$$

ج. اگر $\beta\in(0.5,(3+(1-\alpha)\theta_l)/4]$،آنگاه $Cr\{\xi^L\le r\}\ge\beta$ معادل است با:

$$\frac{(2-2\beta+(1-\alpha)\theta_l)r_2+(2\beta-1)r_3}{1+\theta_l-\alpha\theta_l}\le r \quad (۳۳)$$

د. اگر $\beta\in((3+(1-\alpha)\theta_l)/4]$، آنگاه $Cr\{\xi^L\le r\}\ge\beta$ معادل است با:

$$\frac{(2-2\beta)r_2+(2\beta-1-(1-\alpha)\theta_l)r_3}{1-\theta_l+\alpha\theta_l}\le r \quad (۳٤)$$

قضیه۳- (بای و لیو ۲۰۱٤). فرض کنید $\tilde{\xi}_i=(\tilde{r}_1^i,\tilde{r}_2^i,\tilde{r}_3^i;\theta_{l,i}\theta_{r,i})$ ، یک متغیر فازی مثلثی نوع-۲ و ξ_i^u متغیر فازی کاهش‌یافته مقدار بحرانی امکانی بالایی آن برای $i=1, 2, \ldots, n$ باشد. فرض کنید $\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\ldots\ldots,\tilde{\xi}_n$ دوبه‌دو مستقل هستند، $(1-\alpha_1)\theta_{r,1}\le(1-\alpha_2)\theta_{r,2}\le\ldots\le(1-\alpha_n)\theta_{r,n}$ و $k_i\ge 0$ برای $i=1, 2, \ldots, n$.

الف. اگر $\beta\in(0,(1+(1-\alpha_1)\theta_{r,1})/4]$، آنگاه $Cr\{\sum_{i=1}^n k_i\xi_i^u\le r\}\ge\beta$ معادل است با:

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{\left(1-2\beta+(1-\alpha_i)\theta_{r,i}\right)+2\beta r_2^i}{1+\theta_{r,i}-\alpha_i\theta_{r,i}}\le r \quad (۳۵)$$

ب. اگر یک مقدار $1\le i_0<n$، وجود داشته باشد، بطوریکه $\beta\in\left((1+(1-\alpha_{i_0})\theta_{i_0}\right)/4$
$\beta\in\left(1+(1-\alpha_{i_0})\theta_{r,i_0+1}\right)/4$، آنگاه $Cr\{\sum_{i=1}^n k_i\xi_i^U\le r\}\ge\beta$ معادل است با:

$$\sum_{i=1}^{i_0}k_i\frac{(1-2\beta)r_1^i+\left(2\beta-(1-\alpha_i)\theta_{r,i}\right)r_2^i}{1-\theta_{r,i}+\alpha_i\theta_{r,i}} + \sum_{i=i_0+1}^{n}k_i\frac{(1-2\beta+(1-\alpha_i)\theta_{r,i}+2\beta r_2^i}{1+\theta_{r,i}-\alpha_i\theta_{r,i}}\le r \quad (۳٦)$$

ج. اگر $\beta \in ((1+(1-\alpha_n)\theta_{r,n})/4,0.5]$ آنگاه $Cr\{\sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^U \le r\} \ge \beta$ معادل است با:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{(1-2\beta)r_1^i + (2\beta-(1-\alpha_i)\theta_{r,i})r_i^2}{1-\theta_{r,i}+\alpha_i\theta_{r,i}} \le r \quad (۳۷)$$

د. اگر $\beta \in ((3-(1-\alpha_l)\theta_{r,l})/4,1]$، آنگاه $Cr\{\sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^U \le r\} \ge \beta$ معادل‌است با:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{2(1-\beta)r_2^i\left(2\beta-1+(1-\alpha_i)\theta_{r,i}\right)r_2^i + (2\beta-1)r_3^i}{1+\theta_{r,i}-\alpha_i\theta_{r,i}} \le r \quad (۳۸)$$

ه. اگر یک مقدار i_0، n > $1 \le i_0$ وجود داشته باشد بطوریکه $\beta\epsilon(3-(1-\alpha_{i0+1})\theta_{r,i0+1})/4$ ،$(3-(1-\alpha_{io})\theta_{r,io})/$
[4 دراین صورت $\mathrm{Cr}\{\sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^U \le r\} \ge \beta$ معادل‌است با:

$$\sum_{i=1}^{i_0} k_i \frac{(2-2\beta-\left(2\beta-(1-\alpha_i)\theta_{r,i}\right)r_2^i + (2\beta-1)r_3^i}{1-\theta_{r,i}+\alpha_i\theta_{r,i}} + \sum_{i=i_0+1}^{n} k_i \frac{2(1-\beta)r_2^i\left(2\beta-1+(1-\alpha_i)\theta_{r,i}\right)r_2^i + (2\beta-1)r_3^i}{1+\theta_{r,i}-\alpha_i\theta_{r,i}} \le r \quad (۳۹)$$

و. اگر $\beta \in ((3-(1-\alpha_l)\theta_{r,l})/4,1]$ ، آنگاه $Cr\{\sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^U \le r\} \ge \beta$ معادل‌است با:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{2(1-\beta)r_2^i\left(2\beta-1+(1-\alpha_i)\theta_{r,i}\right)r_2^i + (2\beta-1)r_3^i}{1+\theta_{r,i}-\alpha_i\theta_{r,i}} \le r \quad (۴۰)$$

باتوجه به قضایای بیان شده در بخش‌های قبلی، در بخش بعد مدل‌های برنامه‌ریزی معادل مدل (۱۸-۲۳) را بررسی می‌کنیم.

۵- مدل‌های برنامه‌ریزی پارامتری معادل

برای حل معادله (۱۸-۲٤) لازم است که قیود (۱۹) و (۲۱) را ساده کنیم. برای این منظور، مسأله برنامه‌ریزی معادل این مدل را در برخی حالت‌های خاص بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید $\tilde{b}_j$، $\tilde{c}_{ijk}$ متغیرهای فازی مثلثی نوع-۲ مستقل باشند، به‌طوری‌که عناصر آن‌ها به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$\tilde{c}_{ijk} = \left(\tilde{c}_{ijk}^{r_1}, \tilde{c}_{ijk}^{r_2}, \tilde{c}_{ijk}^{r_3}; \theta_{l,ijk}^{c}, \theta_{r,ijk}^{c}\right)$$
$$\tilde{b}_j = \left(\tilde{b}_j^{r_1}, \tilde{b}_j^{r_2}, \tilde{b}_j^{r_3}; \theta_{l,j}^{b}, \theta_{r,j}^{b}\right)$$

فرض کنید که c_{ijk}^U و b_j^l به ترتیب متغیرهای کاهش‌یافته بالایی $\tilde{c}_{ijk}$ و b_j^l متغیر فازی پایینی $\tilde{b}_j$ باشند، در این صورت c_{ijk}^U و b_j^l متغیرهای فازی دوبه‌دو مستقل هستند (لیو و گائو، ۲۰۰۷). اگر $\beta > 0.5$ باشد در این‌صورت محدودیت (۱۹) به‌صورت رابطه زیرخواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}\, c_{ijk,sup,pos}^{U}(2-2\beta) \le \bar{C} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} f_{ijk}\, y_{ijk} \quad (٤١)$$

اگر داشته باشیم:

$$A = \left\{(i,j,k)\middle|0.5 \le \beta\left(3-\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)/4\right\}$$

درنتیجه با استفاده از قضیه ۳، نامساوی (۴۱) با رابطه زیر معادل می‌شود:

$$\sum_{(i,j,k)\epsilon \text{A}} x_{ijk} \frac{\left(2-2\beta-\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)\tilde{c}_{ijk}^{r_2}+(2\beta-1)\tilde{c}_{ijk}^{r_3}}{1-\theta_{r,ijk}^{c}+\alpha_{ijk}^{c},\theta_{r,ijk}^{c}} + \sum_{(i,j,k)\notin \text{A}} x_{ijk} \frac{2(1-\beta)\tilde{c}_{ijk}^{r_2}+\left(2\beta-1+\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)\tilde{c}_{ijk}^{r_3}}{1+\theta_{r,ijk}^{c}-\alpha_{ijk}^{c}\theta_{r,ijk}^{c}} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{P} f_{ijk}y_{ijk} \leq \bar{C} \quad (۴۲)$$

از طرف دیگر اگر $\beta_j > 0.5$، در این صورت محدودیت (۲۱) به‌صورت زیر خواهد شد:

$$b_{j,sup,pos}^{l}\left(2-2\beta_j\right) \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{P} x_{ijk} \quad (۴۳)$$

فرض کنید:

$$D=\left\{(j)\middle|0.5 \leq \beta_j \leq \left(3+\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)/4\right\}$$

پس با توجه به قضیه ۲، روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی معادله (۴۳) با رابطه زیر معادل می‌شود:

$$\frac{\left(2-2\beta_j+\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)b_j^{r2}+\left(2\beta_j-1\right)b_j^{r3}}{1+\theta_{l,j}^{b}-\alpha_j^{b}\theta_{l,j}^{b}} \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \qquad \forall\,(j) \in D \quad (۴۴)$$

یا

$$\frac{\left(2-2\beta_j\right)b_j^{r2}+\left(2\beta_j-1-\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)b_j^{r3}}{1+\theta_{l,j}^{b}-\alpha_j^{b}\theta_{l,j}^{b}} \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \quad \forall\,(j) \notin D \quad (۴۵)$$

با استفاده از نمایش‌های معادل محدودیت اعتبار (۱۲)، مدل (۱۸–۲۴) را می‌توان به دو بخش زیرمدل که به‌وسیله ناحیه پارامتر β_j تعیین می‌شوند تقسیم کرد، بنابراین می‌توان مدل مذکور را به‌صورت غیرمستقیم با حل زیر مدل‌های آن حل کرد. اگر پارامتر β_j در نامعادله زیر صدق کند:

$$0.5 < \beta_j \leq \left(3+\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)/4$$

آنگاه می‌توان مدل (۱۸–۲۴) را به‌صورت زیر مدل برنامه‌ریزی پارامتری زیر نوشت:

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j,k)\epsilon \text{A}} x_{ijk} \frac{\left(2-2\beta-\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)\tilde{c}_{ijk}^{r_2}+(2\beta-1)\tilde{c}_{ijk}^{r_3}}{1-\theta_{r,ijk}^{c}+\alpha_{ijk}^{c},\theta_{r,ijk}^{c}} + \sum_{(i,j,k)\notin \text{A}} x_{ijk} \frac{2(1-\beta)\tilde{c}_{ijk}^{r_2}+\left(2\beta-1+\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)\tilde{c}_{ijk}^{r_3}}{1+\theta_{r,ijk}^{c}-\alpha_{ijk}^{c}\theta_{r,ijk}^{c}} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{P} f_{ijk}y_{ijk} \quad (۴۶)$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶ ، صفحه: ۱۷۹–۱۹۴

S.t.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{P} x_{ijk} \le a_i \qquad \forall i \tag{۴۷}$$

$$\frac{\left(2-2\beta_j+\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)b_j^{r2}+\left(2\beta_j-1\right)b_j^{r3}}{1+\theta_{l,j}^{b}-\alpha_j^{b}\theta_{l,j}^{b}} \le \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{k} x_{ijk} \qquad \forall j \in D \tag{۴۸}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \le e_k \qquad \forall k \tag{۴۹}$$

$$x_{ijk} \le M_{ijk}\, y_{ijk} \qquad \forall i,j,k \tag{۵۰}$$

$$x_{ijk} \ge 0\,,\, y_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,k$$

اگر پارامتر β_j قید زیر را برآورده کند:

$$\left(4+\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)/4 < \beta_j \le 1$$

در این صورت، زیر مدل برنامه‌ریزی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{(i,j,k)\in \mathrm{A}} x_{ijk} \frac{\left(2-2\beta-\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)\tilde{c}_{ijk}^{r_2}+(2\beta-1)\tilde{c}_{ijk}^{r_3}}{1-\theta_{r,ijk}^{c}+\alpha_{ijk}^{c},\theta_{r,ijk}^{c}} \\
& + \sum_{(i,j,k)\notin \mathrm{A}} x_{ijk} \frac{2(1-\beta)\tilde{c}_{ijk}^{r_2}+\left(2\beta-1+\left(1-\alpha_{ijk}^{c}\right)\theta_{r,ijk}^{c}\right)\tilde{c}_{ijk}^{r_3}}{1+\theta_{r,ijk}^{c}-\alpha_{ijk}^{c}\theta_{r,ijk}^{c}} \\
& + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{P} f_{ijk}\, y_{ijk}
\end{aligned} \tag{۵۱}$$

S.t.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{P} x_{ijk} \le a_i \qquad \forall i$$

$$\frac{\left(2-2\beta_j\right)b_j^{r2}+\left(2\beta_j-1-\left(1-\alpha_j\right)\theta_{l,j}^{b}\right)b_j^{r3}}{1+\theta_{l,j}^{b}-\alpha_j^{b}\theta_{l,j}^{b}} \le \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} \qquad \forall j \notin D$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \le e_k \qquad \forall k$$

$$x_{ijk} \ge 0\,,\, y_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,k$$

همان‌گونه که قبلاً تشریح شد، یک تصمیم‌گیرنده ممکن است ترجیح دهد که سطوح اطمینان از قبل تعیین‌شده β و β_j را تنظیم کرده و انتظار کاهش هزینه‌های کل را داشته باشد.

۶- مثال عددی

برای مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت با پارامترهای فازی نوع-۲، مساله‌ای با ۳ مبدأ، ۳ مقصد و ۳ حالت حمل را در نظر می‌گیریم که در آن تقاضاها و هزینه‌های حمل‌ونقل با متغیرهای فازی نوع-۲ نمایش داده‌شده‌اند. مقادیر عرضه، ظرفیت وسیله حمل و تقاضاها به‌صورت زیر در نظر داده‌شده‌اند:

$$b_{۱} = (۲۸۰,\ ۳۳۰,\ ۳٦۰;\ \bar{\theta}_l, \bar{\theta}_r),$$
$$b_{۲} = \left(۲۸۰,\ ۳۱۵,\ ۳٦۰;\ \bar{\theta}_l, \bar{\theta}_r\right),$$
$$b_{۳} = \left(۱۲۰,\ ۱٦۰,\ ۱۸۰;\ \bar{\theta}_l, \bar{\theta}_r\right),$$
$$a_{۱} = ۵۳۰,\ \ a_{۲} = ۵۹۰,\ \ a_{۳} = ۳۷۰,\ \ \ e_{۱} = ۳۷۰,\ \ e_{۲} = ۳٦۵,\ \ e_{۳} = ۳٦۸$$

در ادامه، هزینه‌های ثابت حمل در جدول ۱، و هزینه‌های متغیر حمل فازی نوع-۲ در جدول ۲، نشان داده‌شده‌اند.

جدول ۱- هزینه‌های ثابت حمل‌ونقل.

$f_{۱۱۱} = ٦$	$f_{۱۱۲} = ٦$	$f_{۱۱۳} = ٥$	$f_{۱۲۱} = ٤$	$f_{۱۲۲} = ٤$	$f_{۱۲۳} = ٥$	$f_{۱۳۱} = ٤$
$f_{۱۳۲} = ٥$	$f_{۱۳۳} = ٨$	$f_{۲۱۱} = ٨$	$f_{۲۱۲} = ٣$	$f_{۲۱۳} = ٦$	$f_{۲۲۱} = ٧$	$f_{۲۲۲} = ٦$
$f_{۲۲۳} = ٥$	$f_{۲۳۱} = ٦$	$f_{۲۳۲} = ٦$	$f_{۲۳۳} = ٥$	$f_{۳۱۱} = ٣$	$f_{۳۱۲} = ٤$	$f_{۳۱۳} = ٥$
$f_{۳۲۱} = ٥$	$f_{۳۲۲} = ٤$	$f_{۳۲۳} = ٦$	$f_{۳۳۱} = ٤$	$f_{۳۳۲} = ٦$	$f_{۳۳۳} = ٦$	

جدول ۲- هزینه‌های حمل‌ونقل فازی نوع-۲.

$c_{۱۱۱} = (\widetilde{٤/٥}, \widetilde{٤/٨}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۱۱۲} = (\tilde{٤}, \widetilde{٥/٢}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۱۱۳} = (\widetilde{٢/٧}, \tilde{٣}, \tilde{٦};\theta_l, \theta_r)$
$c_{۱۲۱} = (\widetilde{٥/٥}, \tilde{٧}, \tilde{٩};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۱۲۲} = (\widetilde{٢/٤}, \widetilde{٢/٦}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۱۲۳} = (\tilde{٤}, \widetilde{٦/٥}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$
$c_{۱۳۱} = (\widetilde{٦/٥}, \widetilde{٦/٨}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۱۳۲} = (\widetilde{٥/٥}, \widetilde{٦/٨}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۱۳۳} = (\widetilde{٤/٨}, \tilde{٥}, \tilde{٩};\ \theta_l, \theta_r)$
$c_{۲۱۱} = (\widetilde{٤/٥}, \widetilde{٤/٨}, \tilde{٥};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۱۲} = (\widetilde{٤/٥}, \tilde{٥}, \widetilde{٥/٥}, ;\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۱۳} = (\tilde{٨}, \widetilde{٨/٥}, \tilde{٩};\ \theta_l, \theta_r)$
$c_{۲۲۱} = (\widetilde{٥/٥}, \tilde{٧}, \tilde{٩};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۲۲} = (\widetilde{٢/٤}, \tilde{٣}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۲۳} = (\tilde{٤}, \widetilde{٦/٢}, \tilde{٧}\theta_l, \theta_r)$
$c_{۲۳۱} = (\tilde{٤}, \widetilde{٤/٨}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۳۲} = (\tilde{٥}, \widetilde{٥/٢}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۳۳} = (\tilde{٢}, \widetilde{٢/٧}, \tilde{٣};\ \theta_l, \theta_r)$
$c_{۳۱۱} = (\tilde{٥}, \widetilde{٥/٥}, \tilde{٩};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۳۱۲} = (\widetilde{٢/٤}, \widetilde{٢/٦}, \tilde{٦};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۳۱۳} = (\tilde{٤}, \widetilde{٦/٥}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$
$c_{۳۲۱} = (\tilde{٦}, \widetilde{٦/٨}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۳۲۲} = (\tilde{٥}, \widetilde{٦/٨}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۲۳۲۳} = (\widetilde{٤/٥}, \widetilde{٤/٨}, \tilde{٩};\ \theta_l, \theta_r)$
$c_{۳۳۱} = (\tilde{٤}, \widetilde{٦/١}, \tilde{٧};\ \theta_l, \theta_r)$	$c_{۳۳۲} = (\tilde{٥}, \tilde{٦}, \tilde{٧};\theta_l, \theta_r)$	$c_{۳۳۳} = (\tilde{٧}, \tilde{٨}, \widetilde{١٢};\theta_l, \theta_r)$

۶-۱ نتایج محاسباتی با داده‌های ورودی قطعی

ابتدا مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت را با داده‌های قطعی حل می‌کنیم. جهت مقایسه داده‌های ورودی قطعی، مقادیر میانگین هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاهای جدول۲ در جدول۳ آورده شده است.

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲ ، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶ ، صفحه: ۱۷۹-۱۹۴

جدول۳- هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاهای فازی.

c_{111} = (٤/٥,٤/٨,٦)	c_{112} = (٤,٥/٢,٦)	c_{113} = (٢/٧,٣,٦)
c_{121} = (٥/٥,٧,٩)	c_{122} = (٢/٤,٢/٦,٦)	c_{123} = (٤,٦/٥,٧)
c_{131} = (٦/٥,٦/٨,٧)	c_{132} = (٥/٥,٦/٨,٧)	c_{133} = (٤/٨,٥,٩)
c_{211} = (٤/٥,٤/٨,٥)	c_{212} = (٤/٥,٥,٥/٥)	c_{213} = (٨,٨/٥,٩)
c_{221} = (٥/٥,٧,٩)	c_{222} = (٢/٤,٣,٦)	c_{223} = (٤,٦/٢,٧)
c_{231} = (٤,٤/٨,٦)	c_{232} = (٥,٥/٢,٦)	c_{233} = (٢,٢/٧,٣)
c_{311} = (٥,٥/٥,٩)	c_{312} = (٥/٥,٦/٨,٧)	c_{313} = (٤,٦/٥,٧)
c_{321} = (٦,٦/٨,٧)	c_{322} = (٤/٥,٥,٥/٥)	c_{323} = (٤/٥,٤/٨,٩)
c_{331} = (٤/٥,٤/٨,٥)	c_{332} = (٥,٦,٧)	c_{333} = (٧,٨,١٢)
b_1 = (٢٨٠, ٣٣٠, ٣٦٠)	b_2 = (٢٨٠, ٣١٥, ٣٦٠)	b_3 = (١٢٠, ١٦٠, ١٨٠)

جدول ۴- میانگین هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاهای فازی نوع-۲.

۳/۹	۵/۲۳	۵/۰۱
۵/۸۳	۳/۶۶	۷/۱۶
۶/۲۶	۶/۴۳	۶/۷۶
۸//۵	۵	۴/۷۶
۵/۷۳	۳/۸	۷/۱۶
۲/۵۶	۵/۴	۴/۹۳
۵	۳/۶۶	۵/۸۴
۶/۸	۶/۲۶	۶/۱
۵/۷	۶	۹
b_1=۳۲۳/۳۳	b_2=۳۱۸/۳۳	b_3=۱۵۳/۳۳

حل زیر با مقدار هدف بهینه ۳۳۰۳/۰۹۹ با استفاده از نرم‌افزار گمز به‌دست‌آمده است:.

x_{113} = ۱۰۰	x_{122} = ۱۰۰	x_{123} = ۱۹	x_{211} = ۱۰۰	x_{212} = ۲۴
x_{222} = ۱۰۰	x_{223} = ۱۰۰	x_{231} = ۵۴	x_{233} = ۱۰۰	x_{312} = ۱۰۰

۲-۶ نتایج محاسباتی با توزیع‌های احتمال ثابت

در این قسمت از نرم‌افزار گمز برای حل مدل مسأله حمل‌ونقل هزینه ثابت استفاده می‌شود، هنگامی‌که داده‌های ورودی، توزیع‌های احتمال ثابتی دارند که در جدول۲ ذکرشده‌اند. برای ساده‌سازی، پارامترهای $\beta_j = \bar{\beta}$ را در مدل (۱۰) تا (۱۳) تنظیم می‌کنیم. با داشتن $\beta = \bar{\beta} = 0.95$ حل بهینه زیر را با مقدار هدف ٤٩١٠/٠٠٠ خواهیم داشت:

x_{111} = ۷	x_{113} = ۱۰۰	x_{122} = ۱۰۰	x_{123} = ۵۶
x_{211} = ۱۰۰	x_{212} = ۱۰۰	x_{222} = ۱۰۰	x_{223} = ۱۰۰
x_{231} = ۷۸	x_{233} = ۱۰۰	x_{312} = ۵۰	

در مقایسه با نتایج محاسباتی تحت داده‌های ورودی قطعی، درمی‌یابیم که ساختار شبکه تغییر می‌کند. به‌منظور شناسایی تأثیر پارامترها روی کیفیت، حل مقادیر بهینه را با تنظیم مقادیر پارامترهای β و $\bar{\beta}$ محاسبه کرده و نتایج محاسباتی را در جدول۵، نشان می‌دهیم.

جدول ۵- نتایج محاسباتی با مقادیر مختلف پارامترهای β و $\bar{\beta}$.

مقدار بهینه	β	$\bar{\beta}$	مقدار بهینه	$\bar{\beta}$	β
۴۰۵۷/۹۳۰	۰/۸۵	۰/۶۵	۳۸۶۶/۳۲۸	۰/۹۸	۰/۶۳
۴۱۶۵/۸۴۰	۰/۸۵	۰/۷۳	۴۲۰۰۴/۱۲۰	۰/۹۸	۰/۷۱
۴۲۸۹/۲۲۰	۰/۸۵	۰/۸۵	۴۳۳۶	۰/۹۸	۰/۷۵
۴۴۶۱/۷۰۰	۰/۸۵	۰/۹۹	۵۰۳۹/۹۴۸	۰/۹۸	۰/۹۸

پارامتر β نشان‌دهنده دیدگاه تصمیم‌گیرنده در مورد ریسک است. از جدول ۵، درمی‌یابیم که هزینه‌های کل با افزایش سطح خدمات، ($\bar{\beta}$) افزایش می‌یابند.

۶-۳ نتایج محاسباتی با توزیع‌های احتمال متغیر

حال، توزیع‌های احتمال متغیر را برای تعیین تقاضاهای غیرقطعی و هزینه‌های حمل‌ونقل در مدل انتخاب می‌کنیم. پارامترهای $\theta^{c}_{r,ijk} = \theta_r, \theta^{b}_{l,j} = \bar{\theta}_l, \theta^{b}_{r,j} = \bar{\theta}_r$ و $\alpha^{c}_{ijk} = \alpha; \alpha_j = \alpha$ را برای هر j،i در مدل‌های (۱۸-۲۴) تنظیم می‌کنیم. برای مشخص کردن تأثیر پارامترهای مدل روی جواب‌ها، آزمایش‌های عددی را بر طبق سه حالت زیر اجرا می‌کنیم.

حالت۱- تأثیر پارامتر θ

با مقادیر مختلف پارامتر θ_l, θ_r، در قید هدف و پارامتر $(\overline{\theta_l}, \overline{\theta_r})$ در قید سطح خدمات می‌توانیم نتایج محاسباتی را در جداول ۶ و ۷ گزارش کنیم. از جدول ۶ درمی‌یابیم که مقدار بهینه با افزایش $\theta_r \in (۰،۱]$ افزایش می‌یابد و از جدول ۷ درمی‌یابیم که مقدار بهینه با افزایش $\overline{\theta_l} \in (۰ ,۱]$ کاهش می‌یابد.

جدول ۶- نتایج محاسباتی با مقادیر مختلف پارامترهای (θ_l, θ_r).

مقدار بهینه	$\bar{\alpha}$	$(\overline{\theta_l}, \overline{\theta_r})$	$\bar{\beta}$	α	(θ_l, θ_r)	β
۷۷۸۷/۰۱۶	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۰۵)	۰/۷۲
۸۵۵۶/۵۴۶	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۳۲)	۰/۷۲
۸۶۴۳/۸۴۸	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۵۸)	۰/۷۲
۸۷۴۴/۰۸۸	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۸۰	(۰/۸۲,۱)	۰/۷۲

جدول۷- نتایج محاسباتی با مقادیر مختلف پارامترهای $(\bar{\theta}_l, \bar{\theta}_r)$.

مقدار بهینه	α	(θ_l, θ_r)	β	$\bar{\alpha}$	$(\overline{\theta_l}, \overline{\theta_r})$	$\bar{\beta}$
۹۰۶۱/۰۸۲	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰./۶۵	(۰/۱۸,۰/۵۸)	۰/۸۱
۹۰۲۵/۱۰۷	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰./۶۵	(۰/۴۵,۰/۵۸)	۰/۸۱
۸۹۷۳/۰۳۹	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰./۶۵	(۰/۶۵,۰.۵۸)	۰/۸۱
۸۹۱۲/۵۳۰	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰./۶۵	(۰/۹۷,۰/۵۸)	۰/۸۱

حالت۲- تأثیر پارامتر α

با مقادیر مختلف پارامتر α در تابع هدف و پارامتر $\bar{\alpha}$ درقید اعتبار، نتایج محاسباتی را در جداول ۸ و ۹ نشان می‌دهیم. جدول ۸ نشان می‌دهد که مقدار بهینه نسبت به $\alpha \in (۰,۱]$ کاهش می‌یابد، و جدول ۹ نشان می‌دهد که مقدار بهینه نسبت به $\bar{\alpha}$ افزایش می‌یابد.

جدول ۸- نتایج محاسباتی با مقادیر مختلف پارامتر α.

مقدار بهینه	$\overline{\alpha}$	$\overline{(\theta_l,\theta_r)}$	$\overline{\beta}$	α	(θ_l,θ_r)	β
۹۲۹۷/۳۹۶	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۰۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۷۲
۸۹۹۷/۰۹۶	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۲۹	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۷۲
۸۷۰۲/۷۴۸	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۶۶	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۷۲
۸۵۴۵/۷۹۰	۰/۲۵	(۰/۳,۰/۸)	۰/۹۸	۰/۹۷	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۷۲

جدول۹- نتایج محاسباتی با مقادیر مختلف پارامتر $\overline{\alpha}$.

مقدار بهینه	α	(θ_l,θ_r)	β	$\overline{\alpha}$	$\overline{(\theta_l,\theta_r)}$	$\overline{\beta}$
۸۸۲۶/۸۱۳	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰/۰۰	(۰/۵۸,۰/۷۲)	۰/۸۱
۸۸۸۷/۳۲۲	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰/۲۹	(۰/۵۸,۰/۷۲)	۰/۸۱
۸۹۸۶/۸۰۶	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰/۶۶	(۰/۵۸,۰/۷۲)	۰/۸۱
۹۵۵۵/۱۹۰	۰/۸۰	(۰/۸۲,۰/۴۵)	۰/۸۶	۰/۹۷	(۰/۵۸,۰/۷۲)	۰/۸۱

حالت۳- تأثیر تمام پارامترهای مدل

با مقادیر مختلف تمام پارامترهای مدل در تابع هدف و قیود اعتبار، نتایج محاسباتی را در جدول ۱۰ گزارش می‌کنیم که برای سهولت داریم: $(\bar{\theta}_l,\bar{\theta}_r) = (\theta_l,\theta_r)\overline{\alpha} = \alpha$.

جدول۱۰- نتایج محاسباتی با مقادیر مختلف پارامترهای مدل.

مقدار بهینه	$\overline{\beta}$	β	α	(θ_l,θ_r)	مقدار بهینه	$\overline{\beta}$	β	α	(θ_l,θ_r)
۶۹۰۸/۶۲۰	۰/۸۵	۰/۷	۰/۲	(۰/۸,۰/۲)	۹۳۵۹/۳۸۰	۰/۸۵	۰/۷	۰/۲	(۰/۲,۰/۸)
۷۱۱۸/۰۳۵	۰/۹۸	۰/۷	۰/۲	(۰/۸,۰/۲)	۹۷۴۰/۶۹۲	۰/۹۸	۰/۷	۰/۲	(۰/۲,۰/۸)
۷۹۷۶/۱۹۰	۰/۸۵	۰/۷	۱	(۱,۱)	۹۹۲۳/۴۹۸	۰/۸۵	۰/۹۸	۰/۲	(۰/۵,۰/۵)
۸۲۷۷/۲۷۰	۰/۹۸	۰/۷	۱	(۱,۱)	۱۰۳۷۵/۵۶۵	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۲	(۰/۵,۰/۵)
۱۰۲۲۲/۱۵۶	۰/۸۵	۰/۹۸	۰/۵	(۱,۱)	۸۳۱۸/۱۰۶	۰/۸۵	۰/۷	۰/۹۵	(۰/۵,۰/۵)
۱۰۸۱۷/۳۲۸	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۵	(۱,۱)	۸۶۲۲/۷۰۴	۰/۹۸	۰/۷	۰/۹۵	(۰/۵,۰/۵)
۱۰۱۳۸/۶۸۷	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۹۵	(۰/۲,۰/۸)	۹۸۰۳/۵۸۵	۰/۸۵	۰/۹۸	۰/۹۵	(۰/۲,۰/۸)

۷- نتیجه‌گیری

مسأله حمل‌ونقل در جهان امروز موضوعی مهم و بحث‌برانگیز است و در نظر گرفتن پدیده عدم قطعیت تأثیر به سزایی بر مدل‌سازی و عملکرد شبکه‌های حمل‌ونقل دارد. در این مقاله حل مسأله حمل‌ونقل سه‌بعدی با هزینه ثابت در محیط فازی که در آن هزینه‌های حمل‌ونقل و تقاضاها غیرقطعی و از پارامترهای فازی نوع-۲ هستند، موردمطالعه قرار گرفت. بر اساس نظریه امکان فازی و تعریف اندازه اعتبار، تابع هدف مسأله و نیازمندی‌های تقاضای مشتریان با عنوان محدودیت‌های اعتبار مدل‌سازی شد. همچنین پارامترهای فازی نوع-۲ با روش کاهش مقادیر بحرانی امکانی به پارامترهای قطعی تبدیل گردیدو مدل اصلی به دو زیر مدل برنامه‌ریزی پارامتری عدد صحیح مختلط تجزیه شد که با روش برنامه‌ریزی پارامتری حل گردید. تصمیم‌گیرندگان می‌توانند مقادیر پارامترهای مدل را طبق دیدگاه خود درباره ریسک تنظیم کنند. نتایج محاسباتی مزیت‌های توزیع‌های امکان پارامتری بر توزیع‌های احتمال ثابت را نشان می‌دهند.

منابع انگلیسی

Bai, X., & Liu, Y. (2014). Semideviations of reduced fuzzy variables: a possibility approach. *Fuzzy optimization and decision making*, *13*(2), 173-196.

Bai, X., & Liu, Y. (2016). Robust optimization of supply chain network design in fuzzy decision system. *Journal of intelligent manufacturing*, *27*(6), 1131-1149.

Bit, A. K., Biswal, M. P., & Alam, S. S. (1993). Fuzzy programming approach to multiobjective solid transportation problem. *Fuzzy sets and systems*, *57*(2), 183-194.

Chung, F., & Rhee, H. (2007). Uncertain fuzzy clustering: Insights and recommendations. *IEEE computational intelligence magazine*, *2*(1), 44-56.

Coupland, S., & John, R. (2008). Type-2 fuzzy logic and the modelling of uncertainty. In *Fuzzy sets and their extensions: Representation, aggregation and models* (pp. 3-22). Springer, Berlin, Heidelberg.

Das, A., Bera, U. K., & Maiti, M. (2017). Defuzzification and application of trapezoidal type-2 fuzzy variables to green solid transportation problem. *Soft computing*, 1-23.

Dubois, D., & Prade, H. (1978). Operations on fuzzy numbers. *International journal of systems science*, *9*(6), 613-626.

Figueroa, J., Posada, J., Soriano, J., Melgarejo, M., & Rojas, S. (2005, May). A type-2 fuzzy controller for tracking mobile objects in the context of robotic soccer games. *Proceedings of 14th IEEE international conference on fuzzy systems,* 359-364. doi: 10.1109/FUZZY.2005.1452420

Gottlieb, J., & Paulmann, L. (1998, May). Genetic algorithms for the fixed charge transportation problem. *Evolutionary computation proceedings of international conference on ieee world congress on computational intelligence,* 330-335. doi: 10.1109/ICEC.1998.699754

Hitchcock, F. L. (1941). The distribution of a product from several sources to numerous localities. *Studies in applied mathematics*, *20*(1-4), 224-230.

Hisdal, E. (1981). The IF THEN ELSE statement and interval-valued fuzzy sets of higher type. *International journal of man-machine studies*, *15*(4), 385-455.

Hwang, C., & Rhee, F. C. H. (2007). Uncertain fuzzy clustering: Interval type-2 fuzzy approach to $ c $-means. *IEEE transactions on fuzzy systems*, *15*(1), 107-120.

Jana, D. K., Pramanik, S., & Maiti, M. (2017). Mean and CV reduction methods on Gaussian type-2 fuzzy set and its application to a multilevel profit transportation problem in a two-stage supply chain network. *Neural computing and applications*, *28*(9), 2703-2726.

Kundu, P., Kar, S., & Maiti, M. (2013). Multi-objective multi-item solid transportation problem in fuzzy environment. *Applied mathematical modelling*, *37*(4), 2028-2038.

Kundu, P., Kar, S., & Maiti, M. (2015). Multi-item solid transportation problem with type-2 fuzzy parameters. *Applied soft computing*, *31*, 61-80.

Kundu, P., Kar, S., & Maiti, M. (2014). Fixed charge transportation problem with type-2 fuzzy variables. *Information sciences*, *255*, 170-186.

Kundu, P., Majumder, S., Kar, S., & Maiti, M. (2018). A method to solve linear programming problem with interval type-2 fuzzy parameters. *Fuzzy optimization and decision making*, 1-28.

Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. *IEEE transactions on fuzzy systems*, *10*(4), 445-450.

Liu, Y. K., & Gao, J. (2007). The independence of fuzzy variables with applications to fuzzy random optimization. *International journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems*, *15*(supp02), 1-20.

Liu, Z. Q., & Liu, Y. K. (2010). Type-2 fuzzy variables and their arithmetic. *Soft computing*, *14*(7), 729-747..

Liu, Z. Q., & Liu, Y. K. (2007, April). Fuzzy possibility space and type-2 fuzzy variable. *Proceedings of IEEE symposium on foundations of computational intelligence,* 616-621. doi: 10.1109/FOCI.2007.371536

Liu, P., Yang, L., Wang, L., & Li, S. (2014). A solid transportation problem with type-2 fuzzy variables. *Applied soft computing*, *24*, 543-558.

Mitchell, H. B. (2005). Pattern recognition using type-II fuzzy sets. *Information sciences*, *170*(2-4), 409-418.

Mizumoto, M., & Tanaka, K. (1976). Some properties of fuzzy sets of type 2. *Information and control*, *31*(4), 312-340.

Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., Nezhad, S. S., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Yazdani, M. (2013). Solving a fuzzy fixed charge solid transportation problem by metaheuristics. *Mathematical and computer modelling*, *57*(5-6), 1543-1558.

Nieminen, J. (1977). On the algebraic structure of fuzzy sets of type 2. *Kybernetika*, *13*(4), 261-273.

Ozen, T., & Garibaldi, J. M. (2003, July). Investigating adaptation in type-2 fuzzy logic systems applied to umbilical acid-base assessment. *Proceedings of european symposium on intelligent technologies (EUNITE 2003),* 289-294.

Pramanik, S., Jana, D. K., Mondal, S. K., & Maiti, M. (2015). A fixed-charge transportation problem in two-stage supply chain network in Gaussian type-2 fuzzy environments. *Information sciences*, *325*, 190-214.

Schell, E. D. (1955, January). Distribution of a product by several properties. *Proceedings of 2nd symposium in linear programming, DCS/comptroller, HQ US air force, washington DC,* 615-642.

Sun, M., Aronson, J. E., McKeown, P. G., & Drinka, D. (1998). A tabu search heuristic procedure for the fixed charge transportation problem. *European journal of operational research*, *106*(2-3), 441-456.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information sciences*, *8*(3), 199-249.