Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۲۲۸-۲۳۵

ناحیه جواب مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای با رویکرد جدید

مهدی الله دادی *، حسن میش مست نهی

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران .

چکیده

در این مقاله تعیین ناحیه‌ی جواب مدل‌های برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ILP) که در حالت کلی یک مسئله‌ی NP سخت است، در نظر گرفته‌شده است. در تمامی روش‌های حل مدل‌های ILP تنها شرط شدنی بودن (یعنی جلوگیری از نقض قیود) مدنظر قرارگرفته است. روش حالات بهترین –بدترین (BWC) یکی از روش‌های حل مدل ILP هست. گرچه این روش بهترین و بدترین مقادیر تابع هدف را تعیین می‌کند اما برخی از جواب‌های حاصل، نشدنی می‌باشند. برای تضمین شدنی بودن جواب‌ها روش دو گامی بهبودیافته (ITSM)، روش برنامه‌ریزی خطی اصلاح‌شده (MILP) پیشنهادشده است. هرچند در این روش‌ها، تمام جواب‌ها شدنی‌اند اما برخی از آن‌ها بهینه نمی‌باشند. با استفاده از یک رویکرد جدید، ناحیه جوابی برای حل مدل ILP معرفی می‌شود که با استفاده از دو آزمون، شدنی بودن و بهینگی فضای حاصل تضمین می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، روش BWC، روش ITSM، روش MILP، عدم قطعیت.

دریافت: ۱۳۹۶/۶/۶ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۲

۱- مقدمه

برخی از پارامترهای موجود در مسائل عالم واقعیت دارای عدم قطعیت می‌باشند. یک روش برای کنار آمدن با عدم قطعیت، مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ILP) می‌باشد. رویکردهای مختلفی برای حل مدل‌های ILP پیشنهادشده است. برخی از آن‌ها حساب بازه‌ای و بسط روش سیمپلکس را مورداستفاده قرار داده‌اند(بیک، ۱۹۷۸). بعضی دیگر، با تمرکز روی پایداری، مجموعه جواب را به دست آورده‌اند (لادیک، ۲۰۱٤، هوانگ و مور، ۱۹۹۳ و ران، ۱۹۹۳). برخی نیز دو زیر مدل برای تعیین مجموعه جواب ILP معرفی کرده‌اند که با حل این دو زیر مدل ناحیه جواب تعیین می‌شود (کانیکووا، ۲۰۰۱، تانگ، ۱۹۹٤، وانگ و هوانگ، ۲۰۱٤ و ژو و همکاران، ۲۰۰۹). در روش حالات بهترین- بدترین (BWC) که توسط تانگ پیشنهادشده است، مدل ILP به دو زیرمدل تبدیل می‌شود، زیرمدل‌های بهترین و بدترین که به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی را دارند(تانگ، ۱۹۹٤). یک نقطه، جواب شدنی مدل ILP است اگر در قیود مدل بهترین که بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را داراست صدق کند و بهینه است اگر حداقل برای یکی از مدل‌های مشخصه بهینه باشد. روش BWC توسط چاینک و رمدان در سال ۲۰۰۰ بسط داده شد. جواب‌های حاصل از روش‌های BWC منجر به ناحیه نشدنی می‌شود. گرچه روش BWC کران‌های واقعی تابع هدف را به دست می‌آورد، اما جواب‌های حاصل، کاملا شدنی نیستند. برای تضمین شدنی بودن جواب، روش MILP توسط ژو و همکاران (۲۰۰۹) و روش دوگامی بهبودیافته (ITSM) توسط وانگ و همکاران (۲۰۱٤) پیشنهادشده است. الله دادی و میش مست (۲۰۱۳) با استفاده از قیود دو زیر مدل بهترین و بدترین در حالتی که بزرگ‌ترین

* Corresponding author (E-mail: m_allahdadi@math.usb.ac.ir)

ناحیه شدنی (بهترین) دارای مولفه‌های مثبت باشند ناحیه جواب را به دست آوردند. الله دادی و میش مست در سال ۱۳۹۶، ناحیه جواب را برای مدل ILP با در نظر گرفتن فقط شرط شدنی بودن معرفی نمودند. در ناحیه‌ی معرفی‌شده تضمینی وجود ندارد که تمامی نقاط حاصل بهینه باشند. یعنی این امکان وجود دارد که برخی از نقاط، جواب بهینه‌ی هیچ مدل مشخصه‌ای نباشند. لذا در این مقاله، ناحیه‌ای معرفی می‌شود که هر دو شرط شدنی بودن و بهینگی را خواهد داشت. ما این مقاله، ابتدا مروری بر تعاریف بازه‌ای و روش‌های حل مدل ILP را می‌نماییم و سپس با یک رویکرد جدید برای تضمین شدنی بودن و بهینگی جواب، روش جدید را ارائه می‌دهیم.

۲- مروری بر روش‌های حل مدل ILP

یک عدد بازه ای $x^{\pm}$ به طور کلی به صورت $[x^-,x^+]$ نمایش داده می‌شود که $x^- \leq x^+$. اگر $x^- = x^+$، آنگاه $x^{\pm}$ تباهیده خواهد بود. اگر A^- و A^+ دو ماتریس در $\mathbb{R}^{m\times n}$ باشند که $A^- \leq A^+$، آنگاه مجموعه ماتریس‌های

$$\mathbf{A}^{\pm} = [A^-,A^+] = \{A|A^- \leq A \leq A^+\}$$

ماتریس بازه‌ای و ماتریس‌های A^- و A^+ کران‌های آن نامیده می‌شوند. ماتریس‌های مرکز و شعاع به صورت:

$$\Delta_{\mathbf{A}^{\pm}} = \frac{1}{2}(A^+ - A^-)$$

و

$$A^c = \frac{1}{2}(A^- + A^+)$$

تعریف می‌شوند. حالت خاصی از ماتریس بازه‌ای، بردار بازه‌ای به صورت $\mathbf{x}^{\pm} = \{x|x^- \leq x \leq x^+\}$ می‌باشد که $x^-,x^+ \in \mathbb{R}^n$ (آلفلد و هرزبرگر، ۱۹۸۳).

مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z^{\pm} = \sum_{j=1}^{n} c_j^{\pm} x_j^{\pm} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\pm} x_j^{\pm} \leq b_i^{\pm}, \quad i = 1,2,\dots,m, \\
&x_j^{\pm} \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{1}$$

مدل مشخصه‌ی مدل ILP (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad (c_j \in c_j^{\pm}) \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (a_{ij} \in a_{ij}^{\pm}, b_i \in b_i^{\pm}) \quad i = 1,2,\dots,m, \\
&x_j^{\pm} \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{2}$$

مطابق با (چاینک و رمدان، ۲۰۰۰)، دو زیر مدل روش BWC به ترتیب بهترین و بدترین برای حل مدل (۱) به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \max \quad & z^{+}=\sum_{j=1}^{n} c_j^{+} x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le b_i^{+}, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & x_j^{\pm} \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & z^{-}=\sum_{j=1}^{n} c_j^{-} x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \le b_i^{-}, \quad i=1,2,\dots,m, \\ & x_j^{\pm} \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{٤}$$

مدل های (۳) و (٤) به ترتیب دارای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی می‌باشند.

مطابق با (وانگ و هوانگ، ۲۰۱٤)، دو زیر مدل روش ITSM به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \max \quad & z^{+}=\sum_{j=1}^{k} c_j^{+} x_j^{+}+\sum_{j=k+1}^{n} c_j^{+} x_j^{-} \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm})|a_{ij}^{\pm}|^{-} x_j^{+}+\sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm})|a_{ij}^{\pm}|^{+} x_j^{-} \le b_i^{+}, i=1,\dots,m, \\ & x_j^{\pm} \ge 0, j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & z^{-}=\sum_{j=1}^{k} c_j^{-} x_j^{-}+\sum_{j=k+1}^{n} c_j^{-} x_j^{+} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm})|a_{ij}^{\pm}|^{+} x_j^{-}+\sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm})|a_{ij}^{\pm}|^{-} x_j^{+} \le b_i^{-}, \quad i=1,2,\dots,m, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j' \le b_i^{+}, \quad x'_j=\begin{cases} x_j^{-} & \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm}) \ne \operatorname{sign}(c_j^{\pm}), \quad j=1,2,\dots,k \\ x_{j\,opt}^{+} & \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm}) = \operatorname{sign}(c_j^{\pm}), \quad j=1,2,\dots,k \\ x_j^{+} & \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm}) \ne \operatorname{sign}(c_j^{\pm}), \quad j=k+1,\dots,n \\ x_{j\,opt}^{-} & \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm}) = \operatorname{sign}(c_j^{\pm}), \quad j=k+1,\dots,n \end{cases}$$

$$x_j^{-} \le x_{j\,opt}^{+}, \quad j=1,2,\dots,k,$$

$$x_j^{+} \ge x_{j\,opt}^{-}, j=k+1,\dots,n,$$

$$x_j^{\pm} \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n.$$

که برای $j=1,2,\dots,k$، $c_j^{\pm} \ge 0$ و برای $j=k+1,\dots,n$، $c_j^{\pm} \le 0$ و

$$|a_{ij}^{\pm}|^{-}=\begin{cases} a_{ij}^{-} & a_{ij}^{\pm} \ge 0 \\ -a_{ij}^{+} & a_{ij}^{\pm} < 0 \end{cases}, |a_{ij}^{\pm}|^{+}=\begin{cases} a_{ij}^{+} & a_{ij}^{\pm} \ge 0 \\ -a_{ij}^{-} & a_{ij}^{\pm} < 0 \end{cases}, \operatorname{sign}(a_{ij}^{\pm})=\begin{cases} 1 & a_{ij}^{\pm} \ge 0 \\ -1 & a_{ij}^{\pm} < 0 \end{cases}$$

$x_{j\,opt}^{+}$ برای $j=1,2,\dots,k$ و $x_{j\,opt}^{-}$ برای $j=k+1,\dots,n$ جواب‌های بهینه‌ی زیر مدل اول می‌باشند.

۳- پایداری در برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای

در این بخش، مفهوم پایداری در برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای تعریف می‌شود (لادیک، ۲۰۱٤). مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای $max\{c^T x|Ax = b, x \geq 0\}$ **که** $c \in C^{\pm} \subseteq \mathbb{R}^n$, **و** $A \in A^{\pm} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ **و** $b \in b^{\pm} \subseteq \mathbb{R}^m$ **با** پایه‌ی B پایدار است اگر B یک پایه‌ی بهینه برای هر مدل مشخصه باشد. مدل ILP، $\boldsymbol{B}$ -پایدار ناتباهیده [یکتا] است اگر هر مدل مشخصه یک جواب پایه‌ای بهینه ناتباهیده [یکتا] با پایه‌ی بهینه‌ی B داشته باشد.

فرض کنید $B \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار و A_B به‌عنوان ماتریس حاصل از ستون‌های با اندیس‌های B نامنفرد باشد. شرایط پایداری عبارت‌اند از:

الف) (منظم بودن) A_B منظم باشد؛ یعنی هر ماتریس در A_B نامنفرد باشد.

ب) (شدنی بودن) مجموعه جواب دستگاه بازه‌ای $A_B x_B = b$ نامنفی باشد.

ج) (بهینه بودن) A_B بهینه باشد. یعنی $c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T \geq 0^T$.

برخی از قضایای مربوط به شرایط فوق به شرح زیر می‌باشند:

قضیه ۳-۱ (ران، ۱۹۹۳) اگر $\rho(|(A^c)_B^{-1}|\Delta_{A_B}) < 1$، آنگاه A_B منظم است که $\boldsymbol{\rho}(.)$، شعاع طیفی می‌باشد.

قضیه ۳-۲ (ران، ۱۹۹۳) اگر $\max\limits_{1\leq i\leq n}(|(A^c)_B^{-1}|\Delta_{A_B})_{ii} \geq 1$، آنگاه A_B نامنظم است.

برخی شرایط دیگر برای منظم بودن ماتریس‌های بازه‌ای در (ران، ۱۹۹۳) آمده است.

قضیه ۳-۳ (ران، ۱۹۹۳) اگر بردار بازه‌ای r، مجموعه جواب دستگاه $A_B x_B = b$ باشد، آنگاه

$$r_i^- = \min\left\{-x_i^* + (x_i^c + |x_i^c|)M_{ii}, \frac{1}{2M_{ii}-1}(-x_i^* + (x_i^c + |x_i^c|)M_{ii})\right\},$$
$$r_i^+ = \max\{x_i^* + (x_i^c - |x_i^c|)M_{ii}, \frac{1}{2M_{ii}-1}(x_i^* + (x_i^c - |x_i^c|)M_{ii})\},$$

که

$$M = (I - |(A_B^c)^{-1}|\Delta_{A_B})^{-1},$$
$$x^c = (A_B^c)^{-1} b^c,$$
$$x^* = M(|x^c| + |(A_B^c)^{-1}|\Delta_b),$$

و A_B^c نامنفرد است که $\rho(|(A_B^c)^{-1}|\Delta_{A_B}) < 1$.

قضیه ۳-٤ (لادیک، ۲۰۱٤): فرض کنید y مجموعه جواب دستگاه $A_B^T y = c_B$ باشد. اگر $((A_N^T)y)^- \geq c_N^+$، آنگاه شرط بهینگی برقرار است.

قضیه ۳-٥ (لادیک، ۲۰۱٤): فرض کنید $diag(q)$ ماتریس قطری با درایه‌های روی قطر $q_1, q_2, \dots, q_m$ باشد. اگر برای هر $q \in \{\pm 1\}^m$، مجموعه جواب دستگاه

$$\begin{cases} ((A_B^c)^T - (\Delta_{A_B})^T diag(q))y \leq c_B^+ \\ -((A_B^c)^T + (\Delta_{A_B})^T diag(q))y \leq -c_B^- \\ diag(q)y \geq 0, \end{cases}$$

در مجموعه جواب دستگاه

$$\begin{cases} ((A_N^c)^T - (\Delta_{A_N})^T diag(q))y \geq c_N^+ \\ diag(q)y \geq 0, \end{cases}$$

قرار گیرد، آنگاه شرط بهینگی برقرار است.

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹٦، صفحه: ۲۲۸-۲۳٥

۴- روش جدید

تعیین ناحیه جواب بهینه‌ی مدل‌های ILP، یک مسئله‌ی NP-hard است. در برخی از روش‌ها مانند BWC، TSM و ILP ناحیه‌ی جواب به‌دست‌آمده کاملاً شدنی نیست. درواقع بعضی از نقاط ناحیه‌ی حاصل نشدنی می‌باشند. در برخی دیگر از روش‌ها نیز مانند MILP، ITSM برخی از نقاط ناحیه‌ی جواب حاصل، بهینه نمی‌باشند. در روش‌های دیگر مانند IILP و IMILP ارائه‌شده توسط الله دادی و همکاران (۲۰۱۶)، ناحیه جواب حاصل، هر دو شرط شدنی و بهینگی را دارا می‌باشند. همچنین الله دادی و میش مست نهی (۱۳۹۶) ، ناحیه جواب جدید را برای مدل ILP با در نظر گرفتن فقط شرط شدنی بودن معرفی نمودند. در این مقاله، چون شرط بهینگی در تعیین ناحیه‌ی جواب نادیده گرفته‌شده است، لذا این امکان وجود دارد که برخی از نقاط ناحیه‌ی حاصل، جواب بهینه‌ی هیچ مدل مشخصه‌ای نباشند. در این بخش با در نظر گرفتن هر دو شرط شدنی و بهینگی، ناحیه جواب برای مدل ILP معرفی می‌شود. ناحیه‌ی جواب جدید به‌صورت یک گوی بسته به‌صورت $\sum_{j=1}^{n}(x_j-\alpha_j)\le r^2$ در نظر گرفته می‌شود که $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ به‌عنوان مرکز گوی، مرکز ناحیه جواب به‌دست‌آمده از BWC و r شعاع گوی می‌باشد که به‌صورت زیر به دست می‌آید:

گام اول: ناحیه جواب مدل ILP را به روش BWC به دست آورید.

گام دوم: مرکز ناحیه جواب را به دست آورید.(این نقطه را $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ بنامید)

گام سوم: (آزمون شدنی بودن) با توجه به این‌که قیود مدل بهترین بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را داراست، اگر برای هر $i=1,2,\dots,m$، $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}\alpha_j\le b_i^{+}$، آنگاه $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ یک نقطه‌ی شدنی است و این بدان معناست که $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ آزمون شدنی را گذرانده است. در غیر این صورت مدل، جواب شدنی ندارد.

گام چهارم: پایداری مدل ILP را بررسی کنید. اگر مدل پایدار باشد به گام پنجم بروید. در غیر این صورت نمی‌توان برای مدل ILP ناحیه جواب کاملاً بهینه به دست آورد.

گام پنجم: (آزمون بهینگی) بنا به، اگر برای هر $i=1,2,\dots,m$، $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}\alpha_j\ge b_i^{-}$، آنگاه $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ یک نقطه‌ی بهینه است. یعنی نقطه‌ی $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ آزمون بهینگی را گذرانده است.

گام ششم: شعاع r را به این صورت پیدا کنید. فرض کنید برای هر $i=1,2,\dots,m$، d_i و e_i فاصله‌ی نقطه‌ی $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ تا به ترتیب ابرصفحه‌های $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}x_j=b_i^{+}$ و $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}x_j=b_i^{-}$ باشند. بنابراین:

$$d_i=\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}\alpha_j-b_i^{+}\right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}{a_{ij}^{-}}^{2}}}\,,\ e_i=\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}\alpha_j-b_i^{-}\right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}{a_{ij}^{+}}^{2}}}$$

قرار دهید $r=\min_i\{d_i,e_i\}$.

لذا ناحیه جواب جدید عبارت است از $\sum_{j=1}^{n}(x_j-\alpha_j)\le r^2$ که کاملا شدنی و بهینه است.

برای مدل ILP در ابعاد بالا، کران‌های بالا و پایین ناحیه جواب حاصل از روش جدید قابل تعین نیست. به‌عبارت‌دیگر ناحیه‌ی جواب در یک بُعد، بازه، در دو بُعد یک دایره است که با نمایش آن‌ها در صفحه قابل‌نمایش است ولی برای بیش از دو بُعد قابل‌نمایش نیست. برای حل این مشکل، بازه‌ی مربوطه را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد.

فرض کنید $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ و $l=2\beta$ به ترتیب مرکز ناحیه جواب روش جدید و طول هر ضلع باشد. یعنی برای هر $i=1,2,\dots,m$، $x_i^{\pm}=[\alpha_i-\beta,\alpha_i+\beta]$ و بنابراین:

$$\mathbf{x}^{\pm}=([\alpha_1-\beta,\alpha_1+\beta],\dots,[\alpha_n-\beta,\alpha_n+\beta])^{t}$$

برای تضمین شدنی بودن و بهینگی $\mathbf{x}^{\pm}$، کافی است برای هر $i=1,2,\dots,m$،

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}(\alpha_j\pm\beta)\le b_i^{+},\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}(\alpha_j\pm\beta)\ge b_i^{-}$$

یا

$$\beta = \min_{i}\left\{\left|\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\alpha_j - b_i^{+}}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}}\right|, \left|\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}\alpha_j - b_i^{-}}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}}\right|\right\}$$

۵- مثال‌های عددی

مثال۵-۱ مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای زیر را از (ژو و همکاران، ۲۰۰۹) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & z^{\pm} = [26,30]x_1^{\pm} - [5.5,6]x_2^{\pm} \\ \text{s.t.} \quad & [8,10]x_1^{\pm} - [12,14]x_2^{\pm} \le [3/8,4/2] \\ & [1,1/1]x_1^{\pm} + [0/19,0/2]x_2^{\pm} \le [6/5,7] \\ & x_1^{\pm}, x_2^{\pm} \ge 0. \end{aligned} \tag{٦}$$

جواب‌های حاصل از روش BWC عبارت است از:

$$x_{1\ opt}^{\pm} = [5/182,6/366], x_{2\ opt}^{\pm} = [3/338,4/001].$$

جواب‌های حاصل از روش BWC در ناحیه نشدنی نتیجه می‌شود، چون برای مثال نقطه‌ی $(6/366,4/001)$ که در ناحیه جواب BWC واقع است در نامساوی $x_1 + 0/19x_2 \le 7$ صدق نمی‌کند$(6/366 + 0/19 \times 4/001 =$ $7/126 \nleq 7)$.

جواب‌های ITSM عبارت‌اند از $x_{1\ opt}^{\pm} = [4/574,6/336]$ و $x_{2\ opt}^{\pm} = [3/320,3/495]$ که برخی از نقاط آن همان‌طور که در شکل ۱ مشخص است، نابهین می‌باشند. اکنون ناحیه جواب مدل (۵) را به روش جدید می‌یابیم:

گام ۱- ناحیه جواب روش BWC عبارت است از $\begin{pmatrix}[5/182,6/366]\\ [3/338,4/001]\end{pmatrix}$.

گام ۲- نقطه مرکز ناحیه جواب BWC عبارت است از $(\alpha_1,\alpha_2) = (5/7740,3/6695)$.

گام۳- چون $8\alpha_1 - 14\alpha_2 = -5/181 < 4/2$ و $\alpha_1 + 0/19\alpha_2 = 6/4712 < 7$، بنابراین برای $i = 1,2$، $\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{-}\alpha_j \le b_i^{+}$. لذا $(\alpha_1,\alpha_2) = (5/7740,3/6695)$ نقطه‌ی شدنی است.

گام ٤- شرایط پایداری با توجه به [١٤] برقرار است. لذا مدل پایدار است.

گام ۵- چون $10\alpha_1 - 12\alpha_2 = 13/706 > 3/8$ و $1/1\alpha_1 + 0/2\alpha_2 = 7/0853 > 6/5$، بنابراین برای $i = 1,2$، $\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{+}\alpha_j \ge b_i^{-}$. لذا $(\alpha_1,\alpha_2) = (5/7740,3/6695)$ نقطه‌ی بهینه است.

گام ٦- شعاع r را می‌یابیم.

$$d_1 = 0/5818, d_2 = 0/5195, e_1 = 0/6342, e_2 = 0/5235.$$

بنابراین $r = 0/5195$. درنتیجه ناحیه جواب روش جدید عبارت است از:

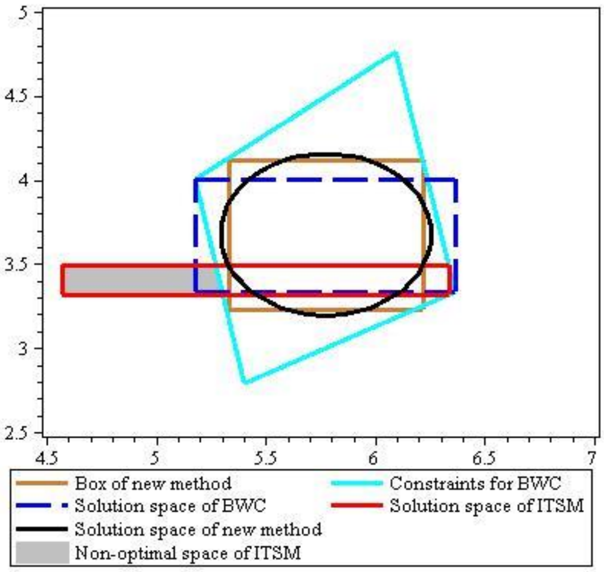
$$(x_1 - 5/7740)^2 + (x_2 - 3/6695)^2 \le (0/5195)^2$$

همچنین $\beta = 0/4444$ و لذا حدود ناحیه جواب عبارت است از:

$$\begin{pmatrix}[5/3396,6/2184]\\ [3/2252,4/1140]\end{pmatrix}$$

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶، صفحه: ۲۲۸-۲۳۵

نتایج حاصل از روش‌های BWC، ITSM و روش جدید در شکل ۱ نمایش داده‌شده است. برخی از جواب‌های روش BWC نشدنی می‌باشند. جواب‌های ITSM کاملا شدنی است اما برخی از آن‌ها نابهین می‌باشند که در شکل ۱ با رنگ خاکستری نشان داده‌شده است. ناحیه‌ی جواب حاصل از روش جدید کاملاً شدنی و بهین می‌باشد.



شکل ۱- ناحیه جواب مدل (۵) به روش‌های BWC، ITSM و جدید.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش جدید به‌عنوان یک ناحیه جواب برای مدل ILP معرفی‌شده است. در تمام روش‌های حل مدل ILP، حدود جواب‌ها، بازه‌ای می‌باشد درحالی‌که در روش جدید، ناحیه جواب، یک گوی است که می‌تواند بزرگ‌ترین ناحیه‌ی جوابی باشد که کاملا شدنی و بهینه است. ناحیه جواب در روش BWC و ITSM از حل دو زیر مدل حاصل می‌شود. برخی از جواب‌ها در BWC نشدنی و برخی جواب‌ها در ITSM نیز نابهین می‌باشند. درحالی‌که روش جدید، ابتدا شدنی بودن و سپس بهینگی نقطه‌ی مرکز ناحیه‌ی جواب BWC را بررسی می‌کند. سپس مقدار شعاع آن‌قدر افزایش می‌یابد که ناحیه‌ی حاصل هر دو شرط شدنی و بهینگی را داشته باشد.

منابع فارسی

الله دادی، مهدی و میش مست نهی، حسن. (۱۳۹۶). ناحیه جواب جدید برای حل مدل برنامه ریزی خطی بازه ای. *مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن*، ۵۳(۲)، ۱۱۱-۱۲۱.

منابع انگلیسی

Alefeld, G., & Herzberger, J. (2012). *Introduction to interval computation*. Academic press.

Allahdadi, M., Nehi, H. M., Ashayerinasab, H. A., & Javanmard, M. (2016). Improving the modified interval linear programming method by new techniques. *Information sciences*, *339*, 224-236.

Allahdadi, M., & Nehi, H. M. (2013). The optimal solution set of the interval linear programming problems. *Optimization letters*, *7*(8), 1893-1911.

Fiedler, M., Nedoma, J., Ramik, J., Rohn, J., & Zimmermann, K. (2006). *Linear optimization problems with inexact data*. Springer Science & Business Media.

Chinneck, J. W., & Ramadan, K. (2000). Linear programming with interval coefficients. *Journal of the operational research society*, 209-220.

Hladík, M. (2014). How to determine basis stability in interval linear programming. *Optimization letters*, *8*(1), 375-389.

Huang, G., & Dan Moore, R. (1993). Grey linear programming, its solving approach, and its application. *International journal of systems science*, *24*(1), 159-172.

Koníckocá, J. (2001). Sufficient condition of basis stability of an interval linear programming problem. *ZAMM-Journal of applied mathematics and mechanics/zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik*, *81*(S3), 677-678.

Rohn, J. (1993). Cheap and tight bounds: The recent result by E. Hansen can be made more efficient. *Interval computations, 4*(13-21), 2.

Rohn, J. (2009). Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey. *Electronic journal of linear algebra, 18*(500-512), 86.

Rohn, J. (1993). Stability of the optimal basis of a linear program under uncertainty. *Operations research letters*, *13*(1), 9-12. Shaocheng, T. (1994). Interval number and fuzzy number linear programmings. *Fuzzy sets and systems*, *66*(3), 301-306.

Wang, X., & Huang, G. (2014). Violation analysis on two-step method for interval linear programming. *Information sciences*, *281*, 85-96.

Zhou, F., Huang, G. H., Chen, G. X., & Guo, H. C. (2009). Enhanced-interval linear programming. *European journal of operational research*, *199*(2), 323-333.

نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۲، شماره (۳)، اسفند ۱۳۹۶ ، صفحه: ۲۲۸-۲۳۵