



آشنایی با مجموعه‌ی فازی مردد و انواع آن

فاطمه باباگردی*

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران.

چکیده

در مسائلی زندگی روزمره و تصمیم‌گیری در علوم مختلف بایستی با تعیین مدل ریاضی مسئله و بکارگیری ابزارهای ریاضی به حل آن‌ها پردازیم. اما برای بیان داده‌های نسبی و مبهم تاکنون ابزارهای مختلفی نظیر مجموعه‌های بازه مقدار و مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی شهودی و انواع مختلف آن‌ها بیان شده است. تورا در سال ۲۰۰۹ با معرفی مجموعه‌های فازی مردد افق جدیدی برای بحث روی مسائلی که با شک و تردید در تصمیم‌گیری مواجه هستند، گشود. در ادامه‌ی کار تورا به گسترش کمی و کیفی مجموعه‌های فازی مردد و اعمال روی آن‌ها و کاربرد این مجموعه‌ها در مسائل تصمیم‌گیری پرداخته شد. در این مقاله با توجه به کاربردی بودن این مجموعه‌ها جهت آشنایی هرچه بیشتر پژوهشگران به مروری بر انواع مجموعه‌های فازی مردد نظیر مجموعه‌های فازی مردد دوآل، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته و... می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه‌های فازی مردد کمی، مجموعه‌های فازی مردد کیفی.

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۰۷

اصلاح: ۱۳۹۸/۱۱/۰۳

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲۶

۱- مقدمه

پدیده‌های طبیعی همواره دارای ابهام و عدم قطعیت می‌باشند که بایستی در مدل‌بندی ریاضی در نظر گرفته شوند، به همین منظور برای بیان متغیرهای مبهم، زاده (۱۹۶۵) به معرفی مجموعه‌های فازی پرداخت و در ادامه در سال ۱۹۸۰ مجموعه‌های فازی نوع ۲ و در سال ۱۹۸۶ مجموعه‌های فازی شهودی مطرح شد (آتاناسوف، ۱۹۸۶؛ دابیوس و همکاران، ۱۹۸۰). اخیراً پژوهشگران برای بررسی مسائلی که با تردید و شک همراه می‌باشند، مجموعه‌های فازی مردد را مطرح کردند و پژوهش‌های زیادی در این زمینه در حال انجام است.

تورا در سال ۲۰۱۲، به معرفی مجموعه‌های فازی مردد پرداخت. در مفهوم مجموعه‌های فازی مردد دوآل مطرح شد (ژو و همکاران، ۲۰۱۲). در سال ۲۰۱۳ روابط مجموعه‌های فازی مردد بازه مقدار و کاربرد آن در مسائل تصمیم‌گیری بیان گردید (چن و همکاران، ۲۰۱۳). مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته و کاربردهای آن‌ها توسط کیا و همکاران (۲۰۱۳) بحث گردید. مجموعه‌های فازی مردد مثلثی و کاربردهای متنوع آن‌ها معرفی شد (کیا و همکاران، ۲۰۱۳؛ وی و همکاران، ۲۰۱۴). در ژو و همکاران (۲۰۱۵) به بررسی مجموعه‌های فازی مردد گسترش یافته پرداخته شد.

در سال ۲۰۱۴ یک مدل مجموعه‌ی نرم جدید به نام مجموعه‌ی مردد نرم بررسی شد (ونگ و همکاران، ۲۰۱۴). در رودریگز و همکاران (۲۰۱۴) اختلاف و تمایز مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های فازی مردد مرور شد. لیو و همکاران به معرفی مقیاس فاصله و تشابه برای مجموعه‌های فازی زبانی مردد پرداختند و کاربرد این مقیاس‌ها در مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره در سال ۲۰۱۵ مطرح گردید (لیا و همکاران، ۲۰۱۴؛ لی و همکاران، ۲۰۱۵). وی و همکاران (۲۰۱۶) مجموعه‌های زبانی فازی مردد و حساب روی آن را تحقیق کردند. ونگ و همکاران (۲۰۱۴) مفهوم مجموعه‌های زبانی مردد فازی را به مجموعه‌های زبانی فازی مردد بازه‌مقدار گسترش داده و کاربرد آن را در مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره بررسی کردند. مجموعه‌های فازی مردد به مجموعه‌های زبانی فازی مردد دوآل توسعه داده شد و عملگرها روی آن و کاربرد آن در تصمیم‌گیری بحث شد (یانگ، ۲۰۱۴). دهمیری و همکاران (۲۰۰۲) روی گسترش مجموعه‌های مردد روی مشبک‌ها و دو مفهوم پایه‌ای آن مطالعه کردند.

اخیرا عناصر و مجموعه‌های زبانی سه‌تایی مثلثی و عملگرها روی آن‌ها مطرح شد (فهیمی، ۲۰۱۸). در سال ۲۰۱۸ ساختاری جدید تحت عنوان مجموعه‌های فازی مردد دوقطبی مقدار به‌عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی بحث شد. در ادامه، الکنود و همکاران (۲۰۱۹) با مروری بر عدد فازی مردد به توسعه‌ی آن‌ها پرداخته و مجموعه‌های فازی مردد توسعه‌یافته‌ی دوآل را مطرح کردند. سپس عملگرهای تجمعی برای مجموعه‌های فازی زبانی مردد بیان گردید (رانگ و همکاران، ۲۰۲۰).

اما از آنجایی که مجموعه‌های مردد به سرعت در حال گسترش می‌باشند، در این مقاله مروری بر انواع مجموعه‌های فازی مردد خواهیم داشت، باشد که شرایط آشنایی و علاقه‌مندی هر چه بیشتر محققان و پژوهشگران را فراهم آورد.

۲- انواع مجموعه‌های مردد فازی

در این قسمت به آشنایی با مجموعه‌های مردد فازی می‌پردازیم.

۲-۱- مجموعه‌های فازی مردد

تعریف ۲-۱- فرض کنید X یک مجموعه‌ی ثابت باشد (زو و همکاران، ۲۰۱۲)، مجموعه‌ی فازی مردد (HFS) روی X تابعی است که اگر روی X به‌کاربرده شود یک زیرمجموعه از $[0,1]$ را نتیجه دهد. خیا و خو (۲۰۱۱)، نماد ریاضی HFS را به‌صورت زیر بیان کردند:

$$A = \{ \langle x, h_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

که $h_A(x)$ مجموعه‌ای از مقادیر متعلق به $[0,1]$ است که درجه عضویت‌های ممکن عنصر $x \in X$ نسبت به مجموعه‌ی A را نمایش می‌دهد. برای راحتی، $h_A(x)$ عنصر فازی مردد نامیده می‌شود (HFE).

مثال ۲-۱- فرض کنید $X = \{1,2\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، $A = \{ \langle 1, \{0.2, 0.4, 0.6\} \rangle, \langle 2, \{0.4, 0.8, 1.0\} \rangle \}$ یک مجموعه‌ی فازی مردد، با دو عنصر فازی مردد است (در مجموعه‌های فازی هر عضو با یک درجه‌ی عضویت متعلق به $[0,1]$ مشخص می‌شود، در مجموعه‌های فازی مردد چون در تعیین درجه‌ی عضویت هر عنصر شک و تردید وجود دارد، درجه عضویت هر عنصر با مجموعه‌ای از مقادیر متعلق به $[0,1]$ بیان می‌گردد).

۲-۲- مجموعه‌های فازی مردد دوگان

تعریف ۲-۲- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (چن و همکاران، ۲۰۱۳)، مجموعه‌ی فازی مردد دوگان (DHFS) روی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{ \langle x, h(x), g(x) \rangle \mid x \in X \},$$

که $h(x)$ و $g(x)$ دو مجموعه از مقادیر در بازه‌ی $[0,1]$ می‌باشند که به ترتیب درجه‌ی عضویت و درجه‌ی عدم عضویت عنصر $x \in X$ به مجموعه‌ی D را با شرایط زیر نشان می‌دهد:

$$0 \leq \gamma, \delta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma^+ + \delta^+ \leq 1,$$

که در آن به ازای هر $x \in X$ ، $\delta \in g(x), \gamma \in h(x)$ و $\delta^+ = \max_{\delta \in g(x)} \{\delta\}$ ، $\gamma^+ = \max_{\gamma \in h(x)} \{\gamma\}$ و زوج $d(x) = (h(x), g(x))$ عنصر فازی مردد دوگان نامیده می‌شود.

مثال ۲-۲- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ یک مجموعه‌ی مرجع باشد، مجموعه‌ی فازی مردد دوگان D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{ \langle x_1, \{0.4, 0.5\}, \{0.3\} \rangle, \langle x_2, \{0.2, 0.4\}, \{0.3, 0.5\} \rangle \},$$

۲-۳- مجموعه‌های فازی مردد بازه مقدار

تعریف ۲-۳- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد و $I([0,1])$ مجموعه‌ای از همه‌ی زیربازه‌های بسته‌ی $[0,1]$ باشد. مجموعه‌ی فازی مردد بازه مقدار (IVHFS) روی X به صورت زیر است (کیا و همکاران، ۲۰۱۳):

$$\tilde{A} = \{ \langle x_i, \tilde{h}_A(x_i) \rangle \mid x_i \in X, i = 1, \dots, n \},$$

که $\tilde{h}_A(x_i): X \rightarrow \varphi(I([0,1]))$ همه‌ی درجه عضویت‌های بازه مقدار عنصر $x_i \in X$ نسبت به مجموعه‌ی \tilde{A} را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۳- فرض کنید مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2\}$ مرجع باشد، یک IVHFS \tilde{A} می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A} = \{ \langle x_1, [0.2, 0.3], [0.4, 0.5] \rangle, \langle x_2, [0.1, 0.4], [0.5, 0.6], [0.8, 0.9] \rangle \},$$

هرگاه کران بالا و پایین همه‌ی بازه‌ها با هم برابر باشند، مجموعه‌ی فازی مردد بازه مقدار به مجموعه‌ی فازی مردد تبدیل می‌شود.

۲-۴- مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته

تعریف ۲-۴- یک مجموعه از n تابع عضویت داده شده است (وی و همکاران، ۲۰۱۴):

$$M = \{ \alpha_i = (\mu_i, \vartheta_i) \mid 0 \leq \mu_i, \vartheta_i \leq 1, 0 \leq \mu_i + \vartheta_i \leq 1, i = \{1, 2, \dots, n\} \},$$

h_M مجموعه‌ی فازی مردد تعمیم یافته (GHFS) مرتبط با M است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$h_M(x) = \cup_{(\mu_i(x), \vartheta_i(x)) \in M} (\mu_i(x), \vartheta_i(x)),$$

مجموعه‌های فازی مردد و مجموعه‌های فازی حالت خاصی از مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته می‌باشند. در واقع هرگاه برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $\mu_i + \vartheta_i = 1$ آن‌گاه $GHFS$ به HFS تبدیل می‌شود و آن‌گاه به مجموعه‌ی فازی تبدیل می‌شود.



مثال ۲-۴- فرض کنید $X = \{x_1\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، آن‌گاه

$$h_M(x_1) = \{(0.5, 0.3), (0.6, 0.3), (0.4, 0.5)\},$$

GHFS می‌باشد (دقت کنید که در این مثال GHFS یک HFS نیست).

۲-۵- مجموعه‌های فازی مثلثی مردد

تعریف ۲-۵- فرض کنید X یک مجموعه‌ی ثابت باشد، مجموعه‌ی فازی مثلثی مردد \tilde{E} (HTFS) روی X به صورت یک تابع $\tilde{f}_{\tilde{E}}(x)$ تعریف می‌شود که می‌تواند چندین مقدار فازی مثلثی را نتیجه دهد (یو، ۲۰۱۳؛ زاو و همکاران، ۲۰۱۴؛ زو و ژو، ۲۰۱۶).

$$\tilde{E} = \{ \langle x, \tilde{f}_{\tilde{E}}(x) \rangle \mid x \in X \},$$

که $\tilde{f}_{\tilde{E}}(x)$ یک مجموعه از چندین عدد فازی مثلثی است که درجه‌های عضویت ممکن عنصر $x \in X$ به مجموعه‌ی \tilde{E} را بیان می‌کند. عنصر فازی مثلثی مردد نامیده می‌شود و به صورت $\tilde{f}_{\tilde{E}}(x_i) = \{(\xi^L, \xi^M, \xi^U), \xi \in \tilde{f}_{\tilde{E}}(x_i)\}$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲-۵- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، HTFS \tilde{E} به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{E} = \{ \langle x_1, \{(0.1, 0.3, 0.5), (0.4, 0.6, 0.8)\} \rangle, \langle x_2, \{(0.1, 0.2, 0.3)\} \rangle \},$$

۲-۶- مجموعه‌های فازی مردد گسترش یافته

تعریف ۲-۶- فرض کنید X یک مجموعه‌ی ثابت و $h_D(x) = \cup_{\gamma_D \in h_D(x)} \{\gamma_D\}$ ($D = \{1, \dots, m\}$) یک HFS روی X باشند. آن‌گاه مجموعه‌ی فازی مردد گسترش یافته (EHFS) یعنی $H_{h_D(x)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود (ونگ و همکاران، ۲۰۱۴):

$$H_{h_D(x)} = h_1(x) \times \dots \times h_m(x) = \cup_{\gamma_1 \in h_1(x), \dots, \gamma_m \in h_m(x)} \{ \langle x, \gamma_1(x), \dots, \gamma_m(x) \rangle \mid x \in X \},$$

مثال ۲-۶- دو نماینده، ارزیابی‌های خود را از عوامل x و y ارائه می‌دهند.

الف) نماینده‌ی ۱ مجموعه عضویت $\{0.3\}$ و نماینده‌ی ۲ مجموعه‌ی عضویت $\{0.3, 0.4\}$ را برای x ثبت می‌کنند که با EHFE درجه‌ی ۲ $H(x) = \{(0.3, 0.3), (0.3, 0.4)\} = \{0.3\} \times \{0.3, 0.4\}$ متناظر می‌شود.

ب) نماینده‌ی ۱ مجموعه‌ی عضویت $\{0.5, 0.6\}$ و نماینده‌ی ۲، مجموعه‌ی عضویت $\{0.8\}$ را برای y ثبت می‌کند که با EHFE درجه‌ی ۲ $H(y) = \{(0.5, 0.8), (0.6, 0.8)\} = \{0.5, 0.6\}, \{0.8\}$ متناظر می‌شود. چنین اطلاعاتی، EHFE درجه‌ی ۲ روی $X = \{x, y\}$ به صورت زیر فراهم می‌کند:

$$H_2^X = \{ \langle x, \{(0.3, 0.3), (0.3, 0.4)\} \rangle, \langle y, \{(0.5, 0.8), (0.6, 0.8)\} \rangle \},$$

۲-۷- مجموعه‌های نرم فازی مردد

تعریف ۲-۷- فرض کنید $\tilde{H}(U)$ مجموعه‌ای از تمام مجموعه‌های فازی مردد در U باشد: زوج (\tilde{F}, A) مجموعه‌ی نرم فازی مردد روی U نامیده می‌شود هرگاه \tilde{F} یک نگاشت به صورت زیر باشد (رودریگز و همکاران، ۲۰۱۴):

$$\tilde{F}: A \rightarrow \tilde{H}(U)$$



یک مجموعه‌ی نرم فازی مردد یک نگاشت از پارامترها به $\tilde{H}(U)$ است. به عبارت دیگر، یک خانواده‌ی پارامتری شده از زیرمجموعه‌های فازی مردد U است. برای $e \in A$ ، $\tilde{F}(e)$ ممکن است به صورت مجموعه عناصر e -تقریب از مجموعه‌ی نرم فازی مردد (\tilde{F}, A) باشد.

مثال ۲-۷- فرض کنید که $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ مجموعه‌ی خانه‌ها و $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ مجموعه‌ی پارامترهایی است که به ترتیب بر "ارزانی"، "زیبایی"، "اندازه"، "موقعیت" و "محیط اطراف" دلالت می‌کنند. شخصی، شش خانه‌ی دلخواه را تحت شرایط مختلف با عناصر فازی مردد ارزیابی می‌کند. بنابراین، مجموعه‌ی نرم فازی مردد (\tilde{F}, A) می‌تواند ویژگی‌های خانه‌ها را تحت شرایط اطلاعات فازی توصیف نماید. روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(e_1) &= \left\{ \frac{h_1}{\{0.2, 0.3\}}, \frac{h_2}{\{0.5, 0.6\}}, \frac{h_3}{\{0.3\}}, \frac{h_4}{\{0.3, 0.5\}}, \frac{h_5}{\{0.4, 0.5\}}, \frac{h_6}{\{0.6, 0.7\}} \right\}, \\ \tilde{F}(e_2) &= \left\{ \frac{h_1}{\{0.4, 0.6, 0.7\}}, \frac{h_2}{\{0.5, 0.7, 0.8\}}, \frac{h_3}{\{0.6, 0.8\}}, \frac{h_4}{\{0.7, 0.9\}}, \frac{h_5}{\{0.3, 0.4, 0.5\}}, \frac{h_6}{\{0.3\}} \right\}, \\ \tilde{F}(e_3) &= \left\{ \frac{h_1}{\{0.2, 0.4\}}, \frac{h_2}{\{0.6, 0.7\}}, \frac{h_3}{\{0.8, 0.9\}}, \frac{h_4}{\{0.3, 0.5\}}, \frac{h_5}{\{0.4, 0.6\}}, \frac{h_6}{\{0.7\}} \right\}, \\ \tilde{F}(e_4) &= \left\{ \frac{h_1}{\{0.3, 0.5, 0.6\}}, \frac{h_2}{\{0.2\}}, \frac{h_3}{\{0.5\}}, \frac{h_4}{\{0.6, 0.7\}}, \frac{h_5}{\{0.5, 0.6\}}, \frac{h_6}{\{0.8\}} \right\}, \\ \tilde{F}(e_5) &= \left\{ \frac{h_1}{\{0.6\}}, \frac{h_2}{\{0.2, 0.3, 0.5\}}, \frac{h_3}{\{0.5, 0.7\}}, \frac{h_4}{\{0.2, 0.4\}}, \frac{h_5}{\{0.5, 0.7\}}, \frac{h_6}{\{0.3, 0.5\}} \right\}.\end{aligned}$$

۲-۸- مجموعه‌های زبانی فازی مردد

تعریف ۲-۸- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (ونگ و همکاران، ۲۰۱۴)، مجموعه‌ی زبانی فازی مردد ($HFLS$) روی X تابعی است که یک زی مجموعه از مقادیر $[0, 1]$ را نتیجه می‌دهد. این مجموعه با نماد ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A = \{ \langle x, s_\theta, h_A(x) \rangle \mid x \in X \},$$

که $h_A(x)$ مجموعه‌ای از مقادیر در $[0, 1]$ می‌باشد که درجه عضویت‌های ممکن عنصر $x \in X$ برای عبارت زبانی $s_\theta(x)$ را نمایش می‌دهد.

مثال ۲-۸- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و

$S = \{s_0 : \text{هیچی}; s_1 : \text{کم}; s_2 : \text{خیلی کم}; s_3 : \text{متوسط}; s_4 : \text{زیاد}; s_5 : \text{خیلی زیاد}; s_6 : \text{کامل}\}$ یک مجموعه عبارت زبانی باشد، یک $DHFLS$ می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$A = \{ \langle x_1, s_1, \{0.3, 0.4, 0.5\} \rangle, \langle x_2, s_3, \{0.3, 0.5\} \rangle \}.$$

۲-۹- مجموعه‌های زبانی فازی مردد بازه‌مقدار

تعریف ۲-۹- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (یانگ و ژو، ۲۰۱۴)، مجموعه‌ی زبانی فازی بازه‌مقدار ($IVHFLS$) روی X به صورت زیر است:

$$B = \{ \langle x, s_\theta(x), \Gamma_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

که $\Gamma_B(x)$ مجموعه‌ای با تعداد متناهی از بازه‌های بسته‌ی متعلق به $[0, 1]$ است که درجه‌های عضویت بازه مقدار ممکن را نشان می‌دهد و x متعلق به $s_\theta(x)$ می‌باشد.



مثال ۲-۹- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع و

$S = \{s_0 : \text{هیچی}; s_1 : \text{خیلی کم}; s_2 : \text{کم}; s_3 : \text{متوسط}; s_4 : \text{زیاد}; s_5 : \text{زیاد خیلی}; s_6 : \text{کامل}\}$ عبارات

$$B = \{ \langle x_1, s_5, \{[0.4,0.5], [0.6,0.7], [0.8,0.9]\} \rangle, \langle x_2, s_6, \{[0.1,0.3], [0.5,0.6]\} \rangle \}.$$

زبانی باشد، یک *IVHFLS* ممکن است به صورت زیر باشد:

۲-۱۰- مجموعه‌های زبانی فازی مردد دوگان

تعریف ۲-۱۰- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (نویسن و همکاران، ۲۰۰۲)، مجموعه‌ی زبانی فازی مردد دوگان (*DHFLS*) روی X به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$C = \{ \langle x_1, s_\theta, h(x), g(x) \mid x \in X \rangle \}.$$

که $s_\theta(x) \in S$ می‌باشد، $h(x)$ و $g(x)$ دو مجموعه از تعدادی مقادیر در $[0,1]$ است که درجه‌های ممکن عدم عضویت و عضویت عنصر $x \in X$ به عبارت زبانی $s_\theta(x)$ را تحت شرایط زیر نشان می‌دهد:

$$0 \leq \gamma, \delta \leq 1, 0 \leq \gamma^+, \delta^+ \leq 1,$$

که بازای هر $x \in X$ ، $\gamma \in h(x)$ و $\delta^+ = \max_{\delta \in g(x)} \delta$ و $\gamma^+ = \max_{\gamma \in h(x)} \{\gamma\}$.

مثال ۲-۱۰- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع و

$S = \{s_0 : \text{کامل}; s_1 : \text{خیلی زیاد}; s_2 : \text{زیاد}; s_3 : \text{متوسط}; s_4 : \text{کم}; s_5 : \text{خیلی کم}; s_6 : \text{هیچی}\}$ عبارات زبانی باشد،

یک *DHFLS* می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$C = \{ \langle x_1, s_3, \{0.4,0.5\}, \{0.3,0.4\} \rangle, \langle x_2, s_4, \{0.3,0.5\}, \{0.2,0.3\} \rangle \}.$$

۲-۱۱- مجموعه‌های \mathcal{L} -فازی مردد

تعریف ۲-۱۱- فرض کنید X مجموعه‌ای مرجع باشد (دهمیری و همکاران، ۲۰۱۷). یک شبکه، مجموعه‌ای تا حدی مرتب L, \leq_L است که در آن هر جفت عنصر L ، یک سوپریم (sup) و یک اینفیم (inf) در L داشته باشد. اگر هر زیرمجموعه از L هم \sup و \inf در L داشته باشد، یک شبکه‌ی کامل نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۱۲- فرض کنید X مجموعه‌ای مرجع باشد (امین و همکاران، ۲۰۱۸) و (L, \leq_L) یک شبکه‌ی دلخواه باشد آن‌گاه مجموعه‌ی \mathcal{L} -فازی مردد از X یک نگاشت به صورت زیر است:

$$H: X \rightarrow 2^L$$

$$x \rightarrow H(x)$$

مقدار $H(x)$ درجه عضویت x به H را نشان می‌دهد و عنصر \mathcal{L} -فازی مردد (*HFEL*) نامیده می‌شود. برای یک مجموعه‌ی جهانی ثابت، کلاس همی مجموعه‌های \mathcal{L} -فازی مردد با $HFS L(X)$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲-۱۱- فرض کنید $X = \{1,2,3,4\}$ مجموعه‌ی جهانی و $(L, \leq_L) = (2^Y, \subseteq)$ باشد. H یک *HFS L* می‌باشد:

$$H = \left\{ \frac{\{\emptyset\}}{1} + \frac{\{\{a\}, \{a, b\}\}}{2} + \frac{\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}}{3} + \frac{\{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}\}}{4} \right\}.$$



۱۲-۲- مجموعه‌های فازی مردد زبانی مکعبی مثلثی

تعریف ۱۳-۲- فرض کنید \tilde{b} عدد فازی مردد زبانی مکعبی مثلثی روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد (آلاه و همکاران، ۲۰۱۸)، مجموعه‌ی فازی مردد زبانی مثلثی بازه مقدار بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{\tilde{b}} = \begin{cases} s_{\theta(b)}, \left\{ \frac{(h-p^-)}{(q^- - p^-)}, \frac{(h-p^+)}{(q^+ - p^+)} p^- \leq h \leq q^-, p^+ \leq h < q^+ \right\} \\ s_{\theta(b)}, \left\{ \frac{(r^- - h)}{(r^- - q^-)}, \frac{(r^+ - h)}{(r^+ - q^+)} q^- \leq h \leq r^-, q^+ \leq h < r^+ \right\} \\ 0 \end{cases}$$

در غیر این صورت

و مجموعه‌ی فازی مردد زبانی مثلثی آن به صورت زیر است:

$$\Gamma_{\tilde{b}}(h) = \begin{cases} s_{\theta(b)}, \left\{ \frac{(q-h)}{(q-p)}, q \leq h < p \right\} \\ s_{\theta(b)}, \left\{ \frac{(r-h)}{(r-q)}, q < h \leq r \right\} \\ 0 \end{cases}$$

در غیر این صورت

که $0 \leq \Gamma_{\tilde{b}}(h) \leq 1$ ، آن گاه $\tilde{b} = \{ \langle s_{\theta(b)}, \langle [p^-, q^-, r^-], [(p^+, q^+, r^+)], p, q, r \rangle \rangle$ عدد فازی مردد زبانی مکعبی مثلثی است.

مثال ۱۲-۲- حالت‌های دیگری را با استفاده از مجموعه‌ی عبارات زبانی {معمولی: s_3 ؛ بد: s_2 ؛ خیلی زیاد: s_1 ؛ زیاد: s_0 } در نظر بگیرید. $b1 = \{ \langle s_2, \langle [0.2, 0.4, 0.6], [(0.4, 0.6, 0.8)], 0.3, 0.5, 0.7 \rangle \rangle$

$b2 = \{ \langle s_3, \langle [(0.12, 0.14, 0.16)], [(0.14, 0.16, 0.18)], 0.13, 0.15, 0.17 \rangle \rangle$ مثلثی هستند.

۱۳-۲- مجموعه‌های فازی مردد دوقطبی مقدار

تعریف ۱۴-۲- برای هر مجموعه‌ی X ، مجموعه‌ی فازی مردد دوقطبی مقدار (BPVHFS) روی بعضی از مقادیر دامنه‌ی X به صورت زیر نمایش داده می‌شود (آلکانند و همکاران، ۲۰۱۹):

$$B = \{ (m, (F^+(m), F^-(m))) : x \in X \}$$

که $F^+ : X \rightarrow [0, 1]$ و $F^- : X \rightarrow [-1, 0]$ هایی هستند که درجه عضویت و عدم عضویت عنصر "m" به BPVHFS را نشان می‌دهد.

مثال ۱۳-۲- فرض کنید $X = \{m_1, m_2\}$ مجموعه‌ی جهانی باشد، آن گاه $A = \{ \langle m_1, \{0.1, 0.2\}, \{-0.3, -0.2\} \rangle, \langle m_2, \{0.4, 0.5\}, \{-0.6, -0.5\} \rangle \}$ یک BPVHFS می‌باشد.

۱۴-۲- مجموعه‌های فازی مردد گسترش یافته‌ی دوگان

تعریف ۱۵-۲- عنصر فازی مردد گسترش یافته‌ی دوگان (DEHFE) از درجه m ، عنصر $D = (d_1, \dots, d_m)$ می‌باشد به طوری که برای d_i ، $i = 1, \dots, m$ ، DHFE می‌باشد (رنگ و همکاران، ۲۰۲۰). یک مجموعه‌ی فازی مردد گسترش یافته‌ی دوگان (DEHFS) از درجه‌ی m روی x به صورت زیر است:





$$D_m^X = \{ \langle x, d_1(x), \dots, d_m(x) \rangle : x \in X \},$$

بطوری که برای هر $x \in X$ یک $DEHFE$ از درجه m می‌باشد.

مثال ۲-۱ دو نماینده، انتخاب‌های x و y را به ترتیب با $DHFEs$ زیر ارزیابی می‌کنند:

الف) نماینده ۱، ارزیابی به صورت $d_1(x) = (\{0.1, 0.3, 0.4\}, \{0.3, 0.5\})$ و $d_1(y) = (\{0.2, 0.3\}, \{0.4, 0.5, 0.6\})$ فراهم می‌کند.

ب) نماینده ۲، ارزیابی به صورت $d_2(x) = (\{0.2, 0.5\}, \{0.1, 0.2, 0.4\})$ و $d_2(y) = (\{0.3, 0.4, 0.5\}, \{0.1, 0.2\})$ فراهم می‌کند.

این اطلاعات به طور یکجا به صورت $DEHFS$ از درجه ۲ روی $X = \{x, y\}$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$D_2^X = \{ \langle x, (\{0.1, 0.3, 0.4\}, \{0.3, 0.5\}, \{0.2, 0.5\}, \{0.1, 0.2, 0.4\}) \rangle, \langle y, (\{0.2, 0.3\}, \{0.4, 0.5, 0.6\}, \{0.3, 0.4, 0.5\}, \{0.1, 0.2\}) \rangle \}.$$

۳- نتیجه‌گیری

از آنجایی که نظریه‌ی مجموعه‌های مردد پدیده‌ای جوان و نوظهور می‌باشد، در این مقاله جهت آشنایی هرچه بیشتر پژوهشگران با مجموعه‌های مردد به مروری بر مجموعه‌های فازی مردد نظیر مجموعه‌های فازی مردد دوآل، مجموعه‌های فازی مردد بازه‌مقدار، مجموعه‌های فازی مردد بازه‌مقدار، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم‌یافته، مجموعه‌های فازی مثلثی مردد، مجموعه‌های فازی مردد گسترش‌یافته، مجموعه‌های نرم فازی مردد، مجموعه‌های زبانی فازی مردد، مجموعه‌های زبانی فازی مردد بازه‌مقدار، مجموعه‌های زبانی فازی مردد دوآل، مجموعه‌های L - فازی مردد، مجموعه‌های فازی مثلثی، مجموعه‌های فازی مردد دوقطبی مقدار، مجموعه‌های فازی مردد گسترش‌یافته‌ی دوآل پرداختیم. در پژوهش بعدی به حل دستگاه فازی مردد برای این مجموعه‌های مردد خواهیم پرداخت.

منابع

- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- Atanassov, K. T. (1999). *Intuitionistic fuzzy sets*. In *Intuitionistic fuzzy sets* (pp. 1-137). Physica, Heidelberg.
- Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and applications* (Vol. 144). Academic press.
- Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, 25(6), 529-539.
- Zhu, B., Xu, Z., & Xia, M. (2012). Dual hesitant fuzzy sets. *Journal of applied mathematics*. DOI:10.1155/2012/879629.
- Chen, N., Xu, Z., & Xia, M. (2013). Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. *Knowledge-based systems*, 37, 528-540.
- Qian, G., Wang, H., & Feng, X. (2013). Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system. *Knowledge-based systems*, 37, 357-365.
- Wei, G., Wang, H., Zhao, X., & Lin, R. (2014). Hesitant triangular fuzzy information aggregation in multiple attribute decision making. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 26(3), 1201-1209.
- Yu, D. (2013). Triangular hesitant fuzzy set and its application to teaching quality evaluation. *Journal of information & computational science*, 10(7), 1925-1934.
- Zhao, X., Lin, R., & Wei, G. (2014). Hesitant triangular fuzzy information aggregation based on einstein operations and their application to multiple attribute decision making. *Expert systems with applications*, 41(4), 1086-1094.
- Zhu, B., & Xu, Z. (2016). Extended hesitant fuzzy sets. *Technological and economic development of economy*, 22(1), 100-121.
- Wang, F., Li, X., & Chen, X. (2014). Hesitant fuzzy soft set and its applications in multicriteria decision making. *Journal of applied mathematics*. DOI:10.1155/2014/643785.
- Rodríguez, R. M., Martínez, L., Torra, V., Xu, Z. S., & Herrera, F. (2014). Hesitant fuzzy sets: state of the art and future directions. *International journal of intelligent systems*, 29(6), 495-524.
- Liao, H., Xu, Z., & Zeng, X. J. (2014). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making. *Information sciences*, 271, 125-142.
- Li, D., Zeng, W., & Li, J. (2015). New distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets and their applications in multiple criteria decision making. *Engineering applications of artificial intelligence*, 40, 11-16.



- Wei, G., Alsaadi, F. E., Hayat, T., & Alsaedi, A. (2016). Hesitant fuzzy linguistic arithmetic aggregation operators in multiple attribute decision making. *Iranian journal of fuzzy systems*, 13(4), 1-16.
- Wang, J. Q., Wu, J. T., Wang, J., Zhang, H. Y., & Chen, X. H. (2014). Interval-valued hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multi-criteria decision-making problems. *Information sciences*, 288, 55-72.
- Yang, S., & Ju, Y. (2014). Dual hesitant fuzzy linguistic aggregation operators and their applications to multi-attribute decision making. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 27(4), 1935-1947.
- Nguyen, H. T., Prasad, N. R., Walker, E. A., & Walker, C. L. (2002). *A first course in fuzzy and neural control*. Chapman and hall/CRC.
- Dehmiry, A. H., Mashinchi, M., Mesiar, R. (2017). Hesitant \mathcal{L} -Fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, 35(5), 1-16.
- Amin, F., Fahmi, A., Abdullah, S., Ali, A., Ahmad, R., & Ghani, F. (2018). Triangular cubic linguistic hesitant fuzzy aggregation operators and their application in group decision making. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 34(4), 2401-2416.
- Ullah, K., Mahmood, T., Jan, N., Broumi, S., & Khan, Q. (2018). On bipolar-valued hesitant fuzzy sets and their applications in multi-attribute decision making. *Nucleus*, 55(2), 85-93.
- Alcantud, J.C.R., Santos-García, G., Peng X and Zhan J. (2019). dual extended hesitant fuzzy sets. *Symmetry*, 11(5). DOI:10.3390/sym11050714.
- Rong, Y., Pei, Z., & Liu, Y. (2020). Hesitant fuzzy linguistic hamy mean aggregation operators and their application to linguistic multiple attribute decision-making. *Mathematical problems in engineering*. DOI:10.1155/2020/3262618.
- Xia, M., & Xu, Z. (2011). Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International journal of approximate reasoning*, 52(3), 395-407.