



بازده به مقیاس در شبکه‌های دومرحله‌ای برپایه دو رویکرد متفاوت

جواد گرامی*

گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

چکیده

یکی از موضوعات مهم در تحلیل پوششی داده‌ها تعیین کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. یکی از ساختارهای واحدهای تصمیم‌گیرنده ساختار شبکه‌ای دو مرحله‌ای می‌باشد. در این تحقیق کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیرنده را با دو استراتژی بدست می‌آوریم. استراتژی اول زمانی است که هر یک از مراحل به صورت مستقل عمل کند و ورودی و خروجی هر مرحله برای آن مرحله دارای اهمیت می‌باشد و کلاس بازده به مقیاس مربوط به هر یک از مراحل و پروسه کلی با این استراتژی تعیین می‌گردد. در حالت دیگر ساختار شبکه‌ای دو مرحله‌ای را به صورت مدل رهبر پیرو تعیین می‌کنیم و خروجی مرحله اول به عنوان ورودی مرحله دوم لحاظ می‌گردد و در این حالت کلاس بازده به مقیاس بر اساس نسبت خروجی هر مرحله به ورودی آن مرحله تعیین می‌شود. برای تعیین کلاس بازده به مقیاس پروسه نهایی از نسبت خروجی مرحله دوم به ورودی مرحله اول استفاده می‌شود. رابطه بین کلاس بازده به مقیاس مراحل اول و دوم را تعیین می‌کنیم و شرایط لازم و کافی را برای کلاس بازده به مقیاس ارائه می‌دهیم. در انتها مساله را با یک مثال عددی تشریح می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، ساختار شبکه دو مرحله‌ای، بازده به مقیاس.

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۲۰

اصلاح: ۱۳۹۸/۰۸/۲۲

دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۷

۱- مقدمه

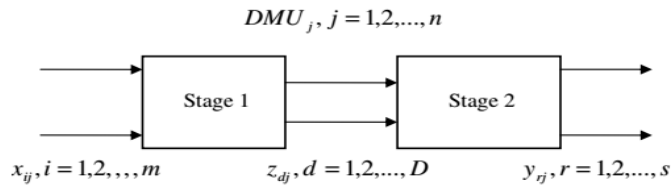
بازده به مقیاس اطلاعات مفید را در اندازه بهینه از واحدهای تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند، که می‌تواند در تعیین این‌که آیا یک واحد تصمیم‌گیرنده کارای تکنیکی می‌تواند بهره‌وری خود را با تغییر عملکردش بهبود بخشد مورد استفاده قرار می‌گیرد (سلیمانی-دامنه ۲۰۱۲). مقالات بسیاری در *DEA* (تحلیل پوششی داده‌ها) که در مورد تئوری و کاربردهای بازده به مقیاس بحث می‌کنند وجود بنکر و ترال (۱۹۹۲) یک روش را برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیرنده روی مرز تولید با استفاده از مدل کسری *DEA* ارائه دادند. بنکر و همکاران (۲۰۰۴) تعیین کلاس بازده به مقیاس را در مدل‌های مختلف بررسی کردند. جهان‌شاهلو و خدابخشی (۲۰۰۳) و اسلامی و همکاران (۲۰۱۲) به تعیین نقطه بیشترین بهره‌وری در مجموعه امکان تولید پرداختند. فار و گروسکوپ (۱۹۹۴ و ۲۰۰۰) ارائه یک روش برای تعیین بازده به مقیاس بر اساس مدل‌های *CCR*, *BCC* خدا بخشی و غلامی (۲۰۱۰) یک تقریب بر پایه مدل جمعی برای تخمین بازده به مقیاس در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. در ادامه اسماعیلی و خدا بخشی (۲۰۱۲) مفهوم آماری و فازی را برای رویارویی با مساله تغییرات در مقالات *DEA* به کار بردند. این مقالات با استفاده از مدل‌های *DEA* در حالت‌های دقیق و نادقیق به طور کمی کلاس بازده به مقیاس را تعیین کردند. در ادامه اسلامی و خوینی (۲۰۱۳) یک تقریب برای اندازه‌گیری و تعیین نوع و مقدار بازده به مقیاس چپ و راست از *DMU* (واحد تصمیم‌



گیرنده)های کارا ارائه دادند. کیرنوژکو (۲۰۱۴) یک تقریب دو مرحله‌ای برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس در نقاط تصویر با استفاده از مدل‌های غیر شعاعی DEA ارائه داد. در مدل‌های سنتی اندازه‌های میانی نادیده گرفته می‌شود اما در حقیقت پروسه‌های تولید ممکن است دارای ساختار پیچیده و داخلی باشد و باید اندازه میانی را در اندازه‌گیری کارایی و تعیین کلاس بازده به مقیاس دخیل کنیم. زانگ (۲۰۱۵) ساختارهای چند مرحله‌ای را در نظر گرفت و مفهوم کارایی را برای این ساختارها ارائه داد. در این مقاله کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده را با ساختار شبکه دو مرحله‌ای تعیین کنیم. این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به معرفی ساختار شبکه دو مرحله‌ای می‌پردازیم. در بخش سوم مفهوم بازده به مقیاس را برای ساختار شبکه دو مرحله‌ای توسعه می‌دهیم. در بخش چهارم مساله را با یک مثال عددی تشریح می‌کنیم و در انتها نتایج حاصل از تحقیق ارائه می‌گردد.

۲- ساختار شبکه دو مرحله‌ای

یک ساختار از شبکه دو مرحله‌ای بصورت شکل ۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۱- ساختار از شبکه دو مرحله‌ای.

فرض کنید $X(X \in R_+^m)$ بردار ورودی اولیه از مرحله یک باشد، $Y(Y \in R_+^s)$ بردار خروجی نهایی از مرحله دو باشد و $Z(Z \in R_+^D)$ بردار اندازه میانی باشد، که می‌تواند برای هر دو بردار خروجی از مرحله یک و ورودی از مرحله دو در نظر گرفته شود. به علاوه، فرض کنید که n واحد تصمیم گیرنده مشاهده وجود دارد و تعریف می‌کنیم:

$x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})^T > 0$ و $z_j = (z_{1j}, \dots, z_{dj})^T > 0$ و $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})^T > 0$ که به ترتیب بردار ورودی، بردار میانی و بردار خروجی از DMU_j هستند.

برای ارزیابی کارایی شبکه دو مرحله‌ای مدل زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \theta_1 + \theta_2, \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j \tilde{\lambda}_j^1 \leq x_0, \quad \sum_{j=1}^n z_j \tilde{\lambda}_j^1 \geq \theta_1 z_0, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n z_j \tilde{\lambda}_j^2 \leq \theta_1 z_0, \quad \sum_{j=1}^n y_j \tilde{\lambda}_j^2 \geq \theta_2 y_0, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^1 = 1, \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^2 = 1, \\
 & \quad \quad \tilde{\lambda}_j^1 \geq 0, \tilde{\lambda}_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{1}$$

تعریف ۱-۲ - فرض کنید جواب بهینه حاصل از مدل (۱) عبارت است از θ_1^*, θ_2^* باشد. در اینصورت مقدار کارایی مرحله ۱ و ۲ بترتیب θ_1^*, θ_2^* را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۲ - مرحله یک را کارا می‌نامیم در صورتیکه $\theta_1^* = 1$. به همین صورت مرحله دوم را کارا می‌نامیم در صورتیکه $\theta_2^* = 2$. در صورتیکه $\theta_1^* = 1$ و $\theta_2^* = 1$ واحد تحت ارزیابی را کارای سراسری می‌نامیم.

در اقتصاد مفهوم بازده به مقیاس رابطه بین تغییرات ورودی و خروجی مربوطه را بر اساس تابع تولید توصیف می‌کند.



تعریف ۲-۳- فرض کنید که x یک بردار ورودی m بعدی باشد و تابع تولید $y = f(x)$ باشد. اگر ورودی از x به $\alpha x (\alpha > 0)$ تغییر کند و خروجی متناظر از y به $\beta y (y > 0)$ تغییر کند یعنی $\beta y = f(\alpha x)$ سپس

الف: اگر $\alpha > 1$ یا $\beta > \alpha > 1$ یا $0 < \beta < \alpha < 1$ ، فرآیند تولید، دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\alpha = \beta > 0$ ، فرآیند تولید، دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $\alpha > \beta > 1$ یا $0 < \alpha < \beta < 1$ ، فرآیند تولید، دارای بازده به مقیاس کاهشی است.

طبق تعریف ۲-۳ واضح است که برای برآورد وضعیت های بازده به مقیاس از فرآیند تولید، نسبت تغییرات بین خروجی و ورودی متناظر یک معیار مهم است. بنابراین، در بسیاری از شرایط تابع تولید نمی تواند بدست آید، از این رو محاسبه نسبت دشوار است. تحت چارچوب تئوری DEA، بر اساس مجموعه امکان تولید، نسبت بین خروجی و ورودی متناظر می تواند به وسیله مدل DEA توصیف شود. در ابتدا فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده با ساختار شبکه دو مرحله ای داریم. ما دو حالت را در نظر می گیریم. حالت اول، هر مرحله به وسیله خودش اداره می شود. یعنی تغییرات ورودی تنها برای به حداکثر رساندن نسبت بین ورودی و خروجی خود را دارد و خروجی برای مرحله یک به ترتیب Z است. حالت دوم ساختار درونی شبکه دو مرحله ای لحاظ می شود و تغییرات ورودی برای به حداکثر رساندن نسبت بین ورودی و خروجی هر مرحله لحاظ می گردد و خروجی برای مرحله یک و دو به ترتیب Z و Y است.

برنامه های خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta_1, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^1 \leq x_0, \\ & \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^1 \geq \beta_1 z_0, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 \leq 1, \lambda_j^1 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \eta_1, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j K_j^1 \leq x_0, \\ & \sum_{j=1}^n z_j k_j^1 \geq \eta_1 z_0, \\ & \sum_{j=1}^n K_j^1 \geq 1, K_j^1 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

جواب بهینه حاصل از مدل های (۲) و (۳) را با β_1^* و λ_j^{1*} و η_1^* و K_j^{1*} ، $j = 1, \dots, n$ نشان می دهیم. اکنون تعریف می کنیم.

برای مرحله ۱، طبق تعریف ۲-۳ جواب بهینه حاصل از مدل (۲) نشان می دهد که اگر ورودی از x_0 به $\frac{1}{\lambda_1^*} x_0$ افزایش یابد، بیشترین نسبت بین خروجی و ورودی خواهد بود و خروجی متناظر از Z_0 به $\frac{\beta_1^*}{\lambda_1^*} Z_0$ تغییر خواهد کرد. از سوی دیگر، جواب بهینه حاصل از مدل (۳) نشان می دهد که اگر ورودی از x_0 به $\frac{1}{k_1^*} x_0$ کاهش یابد، بیشترین نسبت بین خروجی و ورودی خواهد بود. خروجی متناظر از Z_0 به $\frac{\eta_1^*}{k_1^*} Z_0$ تغییر می کند.

در وضعیت های بازده به مقیاس افزایشی ورودی باید افزایش یابد، برعکس، اگر وضعیت بازده به مقیاس کاهشی باشد، ورودی باید کاهش یابد. مطابق تعریف ۲-۳ میتوانیم بازده به مقیاس مرحله ۱ را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲-۴- فرض کنید که DMU_{j_0} یک واحد مشاهده شده کارا باشد، برای بازده به مقیاس مرحله ۱ خواهیم داشت:

الف: اگر $\beta_1^* > 1$ و $\eta_1^* = 1$ سپس مرحله ۱ متناظر با DMU_{j_0} دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\beta_1^* = 1$ و $\eta_1^* = 1$ سپس مرحله ۱ متناظر با DMU_{j_0} دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $\beta_1^* = 1$ و $\eta_1^* > 1$ سپس مرحله ۱ متناظر با DMU_{j_0} دارای بازده به مقیاس کاهششی است.

برای مرحله ۲ ورودی و خروجی به ترتیب z_0 و y_0 است. برنامه‌های خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \max \beta_1, \\ & s. t. \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^1 \leq z_0, \\ & \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^1 \geq \beta_1 y_0, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 \leq 1, \lambda_j^1 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \max \eta_1, \\ & s. t. \sum_{j=1}^n z_j K_j^1 \leq z_0, \\ & \sum_{j=1}^n y_j K_j^1 \geq \eta_1 y_0, \\ & \sum_{j=1}^n K_j^1 \geq 1, K_j^1 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

تعریف ۲-۵- فرض کنید که DMU_{j_0} یک واحد مشاهده شده کارا باشد، مقادیر بهینه حاصل از مدل‌های (۴) و (۵) را به ترتیب با β_1^* و η_1^* نشان می‌دهیم. برای بازده به مقیاس مرحله دو خواهیم داشت:

الف: اگر $\beta_1^* > 1$ و $\eta_1^* = 1$ ، سپس مرحله دو از DMU_{j_0} دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\beta_1^* = 1$ و $\eta_1^* = 1$ ، سپس مرحله دو از DMU_{j_0} دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $\beta_1^* = 1$ و $\eta_1^* > 1$ ، سپس مرحله دو از DMU_{j_0} دارای بازده به مقیاس کاهششی است.

شبهه تعریف ۲-۴ و ۲-۵ اگر تولید میانی z_0 را در نظر نگیریم، برای تعیین بازده به مقیاس پروسه کلی از DMU_{j_0} می‌توانیم از طریق برنامه‌های خطی زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \eta_1, \\ & s. t. \sum_{j=1}^n x_j K_j^1 \leq x_0, \\ & \sum_{j=1}^n y_j K_j^1 \geq \eta_1 y_0, \\ & \sum_{j=1}^n K_j^1 \geq 1, K_j^1 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$



$$\begin{aligned} & \max \eta_1, \\ & s. t \quad \sum_{j=1}^n x_j K_j^{1''} \leq x_0, \\ & \quad \sum_{j=1}^n y_j K_j^{1''} \geq \eta_1'' y_0, \\ & \quad \sum_{j=1}^n K_j^{1''} \geq 1, K_j^{1''} \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

تمام فرآیندهای تولید مشابه، متفاوت از مورد اول، برای دومین بار، تمام فرآیند تولید توسط یک نشانگر تصمیم اداره می شود، هدف او به حداکثر رساندن مجموع نسبت بین خروجی و ورودی از مرحله ۱ و ۲ است. سپس در این مورد، خروجی از هر مرحله باید گسترش یا کاهش یابد به عبارت دیگر رسیدن به هدف از فرمانبردار. طبق تعریف ۲-۳، در این مورد توصیف بازده به مقیاس مربوط به مرحله ۱ و ۲ را به طور مشابه با فرآیند کلی تولید تعریف کرد، در حال حاضر ما فقط یک تعریف به شرح زیر داریم.

تعریف ۲-۶- فرض کنید که DMU_{j0} یک واحد مشاهده شده کارا باشد، در دومین حالت، برای پروسه کلی،

الف: اگر $\beta_1^* \geq 1$ یا $0 < \eta_1^* < 1$ ، سپس DMU_{j0} در پروسه کلی دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\beta_1^* = 1$ یا $\eta_1^* = 1$ سپس DMU_{j0} در پروسه کلی دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $0 < \beta_1^* < 1$ یا $\eta_1^* > 1$ سپس DMU_{j0} در پروسه کلی دارای بازده به مقیاس کاهش می باشد.

در ادامه بخش سوم، برای فرآیند تولید دو مرحله ای، شرایط کافی و ضروری را در دو مورد برای مشخص کردن RTS از مرحله های ۱ و ۲ وقتی که ورودی اولیه تغییر می کند در نظر می گیریم.

۳- بازده به مقیاس از پروسه دو مرحله ای

فرض کنید که n واحد تصمیم گیرنده با ساختار دو مرحله وجود دارد و واحد تصمیم گیرنده DMU_{j0} روی مرز مجموعه امکان تولید است و کارای تکنیکی است. بازده به مقیاس متناظر با DMU_{j0} را در دو حالت در نظر می گیریم. حالت اول ورودی اولیه تغییر می کند و باید بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه و بیشترین نسبت بین خروجی نهایی و ورودی میانی حاصل گردد، یعنی مرحله یک رهبر است و مرحله دو پیرو. دومین حالت تمام فرآیند تولید به وسیله یک نشانگر تصمیم اداره می شود و ورودی اولیه تغییر می کند و سپس بیشترین مجموع از نسبت بین خروجی و ورودی از دو مرحله بدست می آید.

۳-۱- مورد رهبر و پیرو

در این زیر بخش، ورودی اولیه از مرحله یک در جهت RTS فعلی خود برای بدست آوردن بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه تغییر می کند. مدل های جدید شبکه DEA را بر پایه مفروضاتمان از شرایط کافی و ضروری برای وضعیت های متمایز از RTS از هر مرحله بعد از تغییر ورودی اولیه به وجود می آوریم. به عبارت دیگر بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه استنباط می شود. فرض می کنیم که ورودی اولیه متناظر با واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j0} از x_0 به $\alpha_0 x_0$ یا $\mu_0 x_0$ به ترتیب افزایش یا کاهش یابد، جایی که $\alpha_0 > 1$ و $0 < \mu_0 < 1$. بنابراین اگر DMU_{j0} واحد تحت ارزیابی، پایین تر از سطح مجموعه امکان تولید قرار بگیرد، اول مقدار کارایی را طبق مدل (۲) محاسبه می کنیم و سپس RTS را از نقاط $(x_0, \theta_1^* z_0, \theta_2^* y_0)$ ، آنالیز می کنیم که وضعیت مشابه با نقاط (x_0, z_0, y_0) دارد (وی و یان، ۲۰۰۴). متعاقباً، بحث می کنیم در حالیکه رهبر در حال تغییرات بهینه از ورودی اولیه است، وضعیت RTS از پیرو مربوطه از مرحله دو چه خواهد بود.

شرایط لازم و کافی برای مشخص کردن RTS از دو مرحله به وسیله قضایای بعدی بیان می شود.

برنامه های خطی زیر را در نظر بگیرید.



$$\begin{aligned}
 & \max \beta_2, \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^2 \leq \beta_1^* z_0, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^2 \geq \beta_2 y_0, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} \leq 1, \lambda_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned}
 & \max \eta_2, \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n z_j K_j^2 \leq \eta_1^* z_0, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n y_j K_j^2 \geq \eta_2 y_0, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n K_j^2 = \sum_{j=1}^n K_j^{1*} \geq 1, K_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۹}$$

توجه کنیم که β_1^* و $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*}$ و η_1^* و $\sum_{j=1}^n K_j^{1*}$ به ترتیب جواب های بهینه حاصل از مدل های (۲) و (۳) هستند. بنابراین جواب های بهینه حاصل از مدل های (۸) و (۹) به صورت β_2^* و $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{2*}$ و η_2^* و $\sum_{j=1}^n K_j^{2*}$ تعریف می‌شوند.

قضیه ۳-۱-۱- فرض کنید که واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j_0} ، کارای سراسری باشد. اگر مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد و ورودی اولیه x_0 برای بدست آوردن بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه تغییر بهینه پیدا کند، مرحله دوم دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد اگر و تنها اگر $\beta_2^* > \beta_1^* > 1$ و $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1$ و $\eta_1^* = \eta_2^* = 1$ و $\sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$.

اثبات: چون مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی است، وقتی ورودی از x_0 به $\alpha_0 x_0$ تغییر می‌کند، تولید میانی متناظر و خروجی نهایی به ترتیب از z_0 به $\gamma_0 z_0$ و از y_0 به $\varepsilon_0 y_0$ تغییر می‌کند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n x_j \hat{\lambda}_j^1 & \leq \alpha_0 x_0, \quad \sum_{j=1}^n z_j \hat{\lambda}_j^1 \geq \gamma_0 z_0, \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^1 = 1. \\
 \sum_{j=1}^n z_j \hat{\lambda}_j^2 & \leq \gamma_0 z_0, \quad \sum_{j=1}^n y_0 \hat{\lambda}_j^2 \geq \varepsilon_0 y_0, \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^2 = 1. \\
 \hat{\lambda}_j^1 & \geq 0, \hat{\lambda}_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

اگرما تعریف کنیم $\lambda_j^1 = \frac{\hat{\lambda}_j^1}{\alpha_0}, \lambda_j^2 = \frac{\hat{\lambda}_j^2}{\alpha_0}, j = 1, \dots, n$ ، $\beta_1 = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}, \beta_2 = \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0}$ ، یک جواب شدنی بصورت زیر حاصل می‌شود. بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^1 & \leq x_0, \quad \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^1 \geq \beta_1 z_0, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 = \frac{1}{\alpha_0} < 1. \\
 \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^2 & \leq \beta_1 z_0, \quad \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^2 \geq \beta_2 y_0, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = \frac{1}{\alpha_0} < 1.
 \end{aligned}$$

چون (x_0, z_0) و $(\gamma_0 z_0, \varepsilon_0 y_0)$ هردو دارای بازده به مقیاس افزایشی هستند، بنابراین مطابق تعاریف ۲-۴ و ۲-۵ برای مدل های (۲) و (۸) داریم: $\beta_2^* > \beta_1^* > 1$ و $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1$ است.

برعکس: فرض کنید DMU_{j_0} کارای شبکه DEA باشد، اگر $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \beta_2^* > \beta_1^* > 1$ مطابق قیود مدل های (۲) و (۸)

روابط زیربرقرار است.

$$\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j^1 \leq x_0, \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^1 \geq \beta_1^* z_0,$$

$$\sum_{j=1}^n z_j \lambda_j^2 \leq \beta_1^* z_0, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^2 \geq \beta_2^* y_0,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{2*} < 1,$$

$$\lambda_j^{1*} \geq 0, \lambda_j^{2*} \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

بنابراین مطابق تعاریف ۲-۴ و ۲-۵ ما می‌دانیم که (x_0, z_0) و $(y_0, z_0, \varepsilon_0 y_0)$ هر دو دارای بازده به مقیاس افزایشی هستند. بنابراین چون (x_0, y_0) دارای بازده به مقیاس افزایشی است، بنابراین در شبکه دو مرحله ای رهبر است. در مرحله یک ورودی نباید کاهش یابد. بنابراین برای واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j_0} که کارای سراسری است، رابطه $\eta_1^* = \eta_2^* = 1$ و $\sum_{j=1}^n K_j^{1*} = \sum_{j=1}^n K_j^{2*} = 1$ برقرار است و اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۳-۱-۲- فرض کنید که واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j_0} کارای سراسری باشد. ورودی اولیه به مقدار بهینه خود تغییر یابد.

۱. اگر مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

۲. اگر مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو دارای بازده به مقیاس کاهش‌ی است و پروسه کلی

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* > \beta_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

ب. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* > \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

ج. $DRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* > 1 > \beta_2^*, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

۳. اگر مرحله یک $CRTS$ باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_2^* > 1 = \beta_1^*, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = 1 > \eta_2^*, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

ب. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = 1, \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

ج. $DRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = 1 > \beta_2^*, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} < 1, \eta_2^* > 1 = \eta_1^*, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} = 1$

۴. اگر مرحله یک $DRTS$ باشد، سپس بعد از تغییرات مرحله دو $IRTS$ است و پروسه کلی

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* > 1 > \eta_2^*, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} > 1$

ب. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* > 1 = \eta_2^*, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} > 1$

ج. $DRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* > \eta_2^* > 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} > 1$

۵. اگر مرحله یک $DRTS$ باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو

الف. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* = \eta_2^* > 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} > 1$

ب. $DRTS$ اگر و تنها اگر $1 < \sum_{j=1}^n K_j^1 < \eta_1^* < \eta_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 = 1, \beta_1^* = \beta_2^* = 1$.

اثبات قضیه ۳-۱-۲ شبیه قضیه ۳-۱-۱ هست و در اینجا اثبات نشده است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که پروسه کلی توسط یک مدیر اداره می‌شود.

در این زیر بخش، بحث می‌کنیم در مورد مساله تغییرات ورودی اولیه و در ادامه در مورد بیشترین نسبت جمع بین خروجی و ورودی از مرحله یک و دو بحث می‌کنیم. در این مورد، پروسه کلی تولید توسط یک نشانگر تصمیم یا مدیر اداره می‌شود، و دو مرحله همان نقش را ایفا می‌کنند. ما شرایط لازم و کافی را برای تشخیص وضعیت های RTS از دو مرحله تولید بعد از اینکه ورودی اولیه تغییر کرد، پیشنهاد می‌دهیم. دو مدل (۱۰) و (۱۱) در زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} & \max \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2, \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n x_j \hat{\lambda}_j^1 \leq x_0, \sum_{j=1}^n z_j \hat{\lambda}_j^1 \geq \hat{\beta}_1 z_0, \\ & \sum_{j=1}^n z_j \hat{\lambda}_j^2 \leq \hat{\beta}_1 z_0, \sum_{j=1}^n y_j \hat{\lambda}_j^2 \geq \hat{\beta}_2 y_0, \\ & \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^1 = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^2 \leq 1, \\ & \hat{\lambda}_j^1 \geq 0, \hat{\lambda}_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \max \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2, \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n x_j \hat{K}_j^1 \leq x_0, \sum_{j=1}^n z_j \hat{K}_j^1 \geq \hat{\eta}_1 z_0, \\ & \sum_{j=1}^n z_j \hat{K}_j^2 \geq \hat{\eta}_1 z_0, \sum_{j=1}^n y_j \hat{K}_j^2 \geq \hat{\eta}_2 y_0, \\ & \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^1 = \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^2 \geq 1, \\ & \hat{K}_j^1 \geq 0, \hat{K}_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

جواب های بهینه حاصل از مدل های (۱۰) و (۱۱) بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \lambda_j^1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{2*}, \hat{\eta}_1^*, \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} \text{ و } \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{2*}$$

در زیر قضایای زیر شرایط لازم و کافی برای تعیین کلاس RTS از مرحله های یک و دو در دومین حالت را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳-۱-۳ - فرض کنید که واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j_0} ، کارای سراسری باشد. بعد از اینکه ورودی اولیه برای بدست آوردن بیشترین مجموع نسبت بین خروجی و ورودی از دو مرحله تغییر می‌کند، مرحله های یک و دو هر دو در وضعیت $IRTS$ هستند اگر و تنها اگر $1 < \hat{\eta}_1^* < \hat{\eta}_2^* < \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$ یا $\hat{\beta}_2^* > \hat{\beta}_1^* > 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 < 1$.

روابط متفاوت از RTS در میان مرحله های یک و دو می‌باشد و همچنین بازده به مقیاس پروسه کلی به وسیله قضیه ۳-۱-۴ بر اساس برنامه های (۱۰) و (۱۱) بیان می‌شود.

قضیه ۳-۱-۴ - فرض کنید که مشاهدات DMU_{j_0} کارایی شبکه DEA است. پس از اینکه ورودی اولیه برای بدست آوردن بیشترین مجموع نسبت بین خروجی و ورودی از مرحله های یک و دو تغییر پیدا کرد، سپس





۱. مرحله یک *IRTS* است و مرحله دو *CRTS* است اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$.

$$\text{یا } \hat{\eta}_1^* = \hat{\eta}_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$$

۲. مرحله یک *IRTS* است و مرحله دو *DRTS* است، بنابراین کل فرآیند تولید هست

الف. *IRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* < \hat{\eta}_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. *CRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* < \hat{\eta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ج. *DRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* > 1 > \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* < 1 < \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

۳. مرحله یک *CRTS* است و مرحله دو هست

الف. *IRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_2^* > \hat{\beta}_1^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = 1 > \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. *CRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = \hat{\eta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ج. *DRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = 1 > \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = 1 < \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

۴. مرحله یک *DRTS* است و مرحله دو *IRTS* است، بنابراین کل فرآیند تولید هست

الف. *IRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* < 1 < \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* > 1 > \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. *CRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* < 1 = \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* > 1 = \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ج. *DRTS* اگر و تنها اگر $1 > \hat{\beta}_2^* > \hat{\beta}_1^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $1 > \hat{\eta}_2^* > \hat{\eta}_1^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

۵. مرحله یک *DRTS* است و مرحله دو هست.

الف. *CRTS* اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = \hat{\eta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. *DRTS* اگر و تنها اگر $1 > \hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $1 > \hat{\eta}_2^* > \hat{\eta}_1^*, \sum_{j=1}^n \hat{K}_j^{1*} > 1$.

اثبات قضیه ۳-۱-۴ شبیه قضیه ۳-۱-۳ است و در اینجا ذکر نشده است.

۳-۲- رابطه *RTS* بین مراحل و پروسه کلی

بر پایه آنالیز بالا و تعریف ۲-۵، در این دو مورد رابطه *RTS* میان مراحل و پروسه کلی به صورت زیر نتیجه گیری می شود: اگر ورودی اولیه به صورت بهینه تغییر کند.

۱. مرحله یک *IRTS* است و

الف. مرحله دو *IRTS* یا *CRTS* است، سپس کل فرآیند باید *IRTS* باشد.

ب. مرحله دو *DRTS* است، سپس کل فرآیند ممکن است *IRTS, CRTS, DRTS* یا *DRTS* باشد.

۲. مرحله یک CRTS است و

الف. مرحله دو IRTS است، سپس کل فرآیند باید IRTS باشد.

ب. مرحله دو همچنین CRTS است، سپس کل فرآیند باید CRTS باشد.

ج. مرحله دو DRTS است، سپس کل فرآیند باید DRTS باشد.

۳. مرحله یک DRTS است،

الف. مرحله دو IRTS است، سپس کل فرآیند تولید ممکن است CRTS, IRTS یا DRTS باشد.

ب. مرحله دو CRTS یا DRTS است، سپس کل فرآیند باید DRTS باشد.

۴- مثال عددی

سیستم تولیدی دو مرحله ای را در نظر بگیرید. شش DMUs در نظر گرفته شده است، بردارهای ورودی، تولید میانی و خروجی تک بعدی هستند. داده ها در جدول یک آمده است.

جدول ۱- داده های مربوط به شش واحد تصمیم گیرنده.

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
X	1.8	2	3	4	6	7
Z	1	2	6	9	13.5	14
Y	1	4	7	8	9	9

با حل مدل (۱) ما شش واحد تصمیم گیرنده که همگی کارای شبکه DEA هستند، داریم. بر اساس مدل های (۲) و (۳) و همچنین (۴) و (۵) جوابهای بهینه حاصل از مدلها برای هر DMU در جدول (۲) آمده است. در جدول (۲) مقادیر λ^1 و K^1 و η_1^* و K^{1*} بردارهای شش بعدی هستند و $\lambda_5^1 = 0.3$. به این معنی که عنصر پنجم از بردار λ^1 0.3 است و بقیه عناصر صفر هستند.

توجه کنید که مقادیر بهینه منحصر به فرد هستند. جوابهای بهینه حاصل از مدل های (۸) و (۹) در جدول (۳) آمده است و جوابهای بهینه حاصل از مدل های (۱۰) و (۱۱) در جدول (۴) آمده است.



جدول ۲ - مقادیر حاصل از مدل‌های (۲) و (۳) و (۴) و (۵).

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6	
Stage 1	β_1^*	4.05	2.25	1.125	1	1	1
	η_1^*	1	1	1	1	1	1
	λ^{1*}	$\lambda_5^{1*} = 0.3$	$\lambda_5^{1*} = 0.33$	$\lambda_5^{1*} = 0.5$	$\lambda_5^{1*} = 0.67$	$\lambda_5^{1*} = 1$	$\lambda_6^{1*} = 1$
	K^{1*}	$k_1^{1*} = 1$	$k_2^{1*} = 1$	$k_3^{1*} = 1$	$k_4^{1*} = 1$	$k_5^{1*} = 1$	$k_6^{1*} = 1$
Stage 2	β_1^*	2	1	1	1	1	1
	η_1^*	1	1	1.17	2.25	3	3.11
	λ^{1*}	$\lambda_2^{1*} = 0.5$	$\lambda_2^{1*} = 1$	$\lambda_3^{1*} = 1$	$\lambda_4^{1*} = 1$	$\lambda_5^{1*} = 1$	$\lambda_3^{1*} = 1$
	k^{1*}	$k_1^{1*} = 1$	$k_2^{1*} = 1$	$k_2^{1*} = 3$	$k_2^{1*} = 4.5$	$k_2^{1*} = 6.75$	$k_2^{1*} = 7$

جدول ۳ - مقادیر حاصل از مدل‌های (۸) و (۹).

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
β_1^*	۴٫۰۴	۲٫۲۵	۱٫۱۲۵	۱	۱	۱
β_2^*	۲٫۷	۰٫۷۴۲۵	۰٫۶۴۳	۰٫۷۵	۱	۱
λ^{1*}	$\lambda_5^{1*} = 0.3$	$\lambda_5^{1*} = 0.33$	$\lambda_5^{1*} = 0.5$	$\lambda_5^{1*} = 0.67$	$\lambda_5^{1*} = 1$	$\lambda_6^{1*} = 1$
λ^{2*}	$\lambda_5^{2*} = 0.3$	$\lambda_5^{2*} = 0.24,$ $\lambda_5^{2*} = 0.09$	$\lambda_5^{2*} = 0.5$	$\lambda_4^{2*} = 0.01,$ $\lambda_5^{2*} = 0.66$	$\lambda_5^{2*} = 1$	$\lambda_6^{2*} = 1$
η_1^*	1	1	1	1	1	1.125
η_2^*	1	1	1	1	1	1.169
K^{1*}	$k_1^{1*} = 1$	$k_2^{1*} = 1$	$k_3^{1*} = 1$	$k_4^{1*} = 1$	$k_5^{1*} = 1$	$k_6^{1*} = 1$
K^{2*}	$k_1^{2*} = 1$	$k_2^{2*} = 1$	$k_3^{2*} = 1$	$k_4^{2*} = 1$	$k_5^{2*} = 1$	$k_4^{2*} = 0.01,$ $k_5^{2*} = 1.16$

جدول ۴ - مقادیر حاصل از مدل‌های (۱۰) و (۱۱).

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
β_1^*	3.6	1	1	1	1	1
β_2^*	4.2	1	1	1	1	1
λ^{1*}	$\lambda_3^{1*} = 0.6$	$\lambda_4^{1*} = 0.5$	$\lambda_3^{1*} = 1$	$\lambda_4^{1*} = 1$	$\lambda_5^{1*} = 1$	$\lambda_6^{1*} = 1$
λ^{2*}	$\lambda_3^{2*} = 0.6$	$\lambda_4^{2*} = 0.5$	$\lambda_3^{2*} = 1$	$\lambda_4^{2*} = 1$	$\lambda_5^{2*} = 1$	$\lambda_6^{2*} = 1$
η_1^*	1	1	1	0.89	0.89	1
η_2^*	1	1	1	1.167	1.56	1.815
\hat{k}^{1*}	$\hat{k}_1^{1*} = 1$	$\hat{k}_2^{1*} = 1$	$\hat{k}_3^{1*} = 1$	$\hat{k}_3^{1*} = 1.33$	$\hat{k}_3^{1*} = 2$	$\hat{k}_3^{1*} = 2.33$
\hat{k}^{2*}	$\hat{k}_1^{2*} = 1$	$\hat{k}_2^{2*} = 1$	$\hat{k}_3^{2*} = 1$	$\hat{k}_3^{2*} = 1.33$	$\hat{k}_3^{2*} = 2$	$\hat{k}_3^{2*} = 2.33$

طبق تعریف های ۲-۴ تا ۲-۶ و قضایای ۳-۱ تا ۳-۴ همچنین نتایج حاصل در جداول (۳) و (۴) بازده به مقیاس مربوط به واحدهای تصمیم گیرنده در جدول (۱)، در جداول (۵) و (۶) آمده است.





جدول ۵- کلاس بازده به گیرنده.

مقیاس واحدهای تصمیم	حالت اصلی	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	افزایشی
		مرحله ۲	افزایشی	ثابت	کاهشی
	استراتژی	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	افزایشی
	اول	مرحله ۲	کاهشی	کاهشی	کاهشی
		اول		(افزایشی)	(افزایشی)
	استراتژی	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	-
	مرحله ۲	افزایشی	کاهشی	-	
	دوم		افزایشی	(ثابت)	

جدول ۶ - کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده.

		DMU4	DMU5	DMU6
حالت اصلی	مرحله ۱	ثابت	ثابت	کاهشی
	مرحله ۲	کاهشی	کاهشی	کاهشی
استراتژی	مرحله ۱	ثابت	-	کاهشی
اول	مرحله ۲	کاهشی	-	کاهشی
استراتژی	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	ثابت
	مرحله ۲	کاهشی	کاهشی	کاهشی
	دوم	(کاهشی)	(کاهشی)	

توجه کنید که در جدول علامت "-" یعنی در دومین حالت DMU3 بدون تغییر است، و (افزایشی) به معنی کل فرآیند سراسری تولید در وضعیت های افزایشی RTS است، بقیه اصطلاحات معنی مشابه دارند.

برای مثال در مورد واحدهای DMU2 و DMU4، پارامترها در جداول (۲) و (۳) به روش زیر توضیح داده می‌شود.

برای DMU2، در جدول (۳) می‌توانیم ببینیم که RTS روی این موارد متفاوت از بقیه است. در حالت اصلی، حالت‌های ۱ و ۲ افزایشی و ثابت بودن RTS هستند به ترتیب در این مورد، چون RTS افزایشی از مرحله یک است، ورودی اولیه باید از ۲ تا ۶ افزایش یابد. $(\alpha_0 x_0 = \frac{1}{\rho_{1*}} x_0 = \frac{1}{0.33} 2 = 6)$ و بیشترین نسبت $\beta_1^* = 2.25$ بین تولید میانی و ورودی اولیه بدست می‌آید، که تولید میانی از ۲ تا ۱۳/۵ تغییر می‌کند.

$(\gamma_0 z_0 = \beta_1^* \alpha_0 z_0 = \frac{\beta_1^*}{\rho_{1*}} z_0 = \frac{2.25}{0.33} 2 \cong 13.5)$ بنابراین، برای مرحله دو، بیشترین نسبت $\beta_2^* = 0.7425$ خواهد بود، خروجی نهایی متناظر به ۹ می‌رسد. $\epsilon_0 \gamma_0 \beta_2^* \alpha_0 \gamma_0 = \frac{\beta_2^*}{\rho_{1*}} \gamma_0 = \frac{0.7425}{0.33} 4 \cong 9$ در نتیجه، طبق قضیه ۳-۱-۲ (ii) (c) مرحله یک RTS افزایشی است ($\beta_1 > 1$) و مرحله دو RTS کاهشی است. علاوه بر این، کل فرآیند تولید روی وضعیت RTS کاهشی است. برای دومین مورد، از جدول (۴) می‌توانیم ببینیم که ورودی اولیه از ۲ تا ۴ تغییر می‌کند. $(\alpha_0 x_0 = \frac{1}{\rho_{1*}} x_0 = 4)$ بیشترین نسبت از مرحله یک $\beta_1^* = 2.25$ است و تولید میانی ۹ بدست می‌آید، سپس بیشترین نسبت متناظر از مرحله دو $\beta_2^* = 1$ است و خروجی نهایی ۸ است. طبق قضیه ۳-۱-۴ (ii)(c)، مرحله یک RTS افزایشی $\beta_1^* > 1$ است و مرحله دو RTS کاهشی است، $(\beta_1^* > \beta_2^*)$ بنابراین کل فرآیند تولید ثابت بودن RTS است ($\beta_2^* = 1$).

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله بازده به مقیاس را برای فرآیند تولید با ساختار شبکه دو مرحله‌ای وقتی ورودی اولیه از دو جنبه تغییر می‌کند، در نظر گرفتیم، یکی اینکه ورودی اولیه تغییر کند برای بدست آوردن بیشترین نسبت بین تولید میانی و ورودی اولیه از مرحله یک، یعنی اولین مرحله



رهبر است و دومین مرحله فرمانبردار است. دیگری اینکه ورودی اولیه تغییر کند برای بدست آوردن بیشترین مجموع نسبت از مرحله یک و دو یعنی، دو مورد نقش یکسان انجام می دهند و کل فرآیند تولید به وسیله یک نشانگر تصمیم انجام می شود. طبق تکنیک تنوری شبکه *DEA*، ما مدل‌های جدید شبکه *DEA* را فراهم می کنیم برای بدست آوردن شرایط کافی و ضروری برای تشخیص دادن افزایش، ثابت بودن و کاهش *RTS* از هر مرحله (مرحله های یک و دو) در دو مورد، به ترتیب در اولین مورد متوجه شدیم، از آنجایی که مرحله یک رهبر است، وقتی مرحله یک از ورودی اولیه برای رسیدن به بیشترین نسبت بین تولید میانی و ورودی اولیه تغییر می کند، حالت اصلی از *RTS* از مرحله دو تغییر خواهد کرد. می توانیم روش ارائه شده در مقاله را برای دیگر ساختارهای شبکه توسعه دهیم.

منابع

- Banker, R. D. (1984). Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 17, 35–44.
- Banker, R. D. & Thrall R. M. (1992). Estimation of return to scale using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 62, 78–84.
- Banker, R. D., Cooper, W. W., Seiford, L. M., Thrall, R. M. & Zhu J. (2004). Returns to scale in different DEA models. *European journal of operational research*, 154, 345–362.
- Eslami R., Khodabakhshi, M., Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F. & Khoveyni, M. (2012). Estimating most productive scale size with imprecise chance constrained input–output orientation model in data envelopment analysis. *Computers & industrial engineering*, 63, 254–261.
- Eslami, R. & Khoveyni, M. (2013). Right and left returns to scales in data envelopment analysis: Determining type and measuring value. *Computers & industrial engineering*, 65, 500–508.
- Färe, R. & Grosskopf, S. (1994). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis: A comment. *Journal of operational research*, 79, 379–382.
- Färe, R. & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-Economic planning science*, 34, 35–49.
- Jahanshahloo, G. R. & Khodabakhshi, M. (2003). Using input–output orientation model for determining most productive scale size in DEA. *Applied mathematics and computation*, 146, 849–855.
- Jahanshahloo, G. R. & Soleimani-damaneh, M. (2004). Estimating returns-to-scale in data envelopment analysis: A new procedure. *Applied mathematics and computation*, 150, 89–98.
- Krivonozhko, V. E., Føsum, F. R. & Lychev, A. V. (2014). Returns-to-scale properties in DEA models: The fundamental role of interior points. *European journal of operational research*, 232, 644–670.
- Khodabakhshi, M., Gholami, Y. & Kheirollahi, H. (2010). An additive model approach for estimating returns to scale in imprecise data envelopment analysis, *Applied Mathematical Modelling*, 34, 1247–1257.
- Zhang, Q. W. (2015). Ranking performance of DMUs with two-stage structure-An empirical analysis of five state-owned banks. *Mathematics in Practice and Theory*, 7, 101–106. (in Chinese)